

Chương 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI.

TAM THỨC BẬC HAI

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I. Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

1. Cách giải và biện luận trong trường hợp tổng quát:

+ Nếu $a = 0$ ta được phương trình bậc nhất: $bx + c = 0$.

Biện luận như sau:

a. Nếu $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất: $x = -\frac{c}{b}$.

b. Nếu $b = 0$ và $c = 0$ thì phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

c. Nếu $b = 0$ và $c \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $a \neq 0$. Tính Δ (hoặc Δ')

$$(\text{Với } \Delta = b^2 - 4ac; \Delta' = b'^2 - ac; b' = \frac{b}{2})$$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Chú ý

+ Nếu $a.c < 0$ thì phương trình bậc hai luôn có hai nghiệm phân biệt.

+ Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình thì:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

+ Nếu $a + b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm là: $x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{c}{a}$

+ Nếu $a - b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm là: $x_1 = -1 \vee x_2 = -\frac{c}{a}$

3. Định lý Viét

a. Phần thuận: Nếu phương trình bậc hai có 2 nghiệm x_1, x_2 thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

b. Phần đảo: Nếu hai số x_1, x_2 thỏa

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases} \quad (\text{với } S^2 - 4P \geq 0)$$

thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$

4. Dấu của nghiệm số

Nếu phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì:

$$\bullet x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$$

$$\bullet x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \quad \bullet 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

II. Tam thức bậc hai : $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

1. Dấu của tam thức

$$\bullet f(x) < 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\bullet f(x) > 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Nếu } \Delta = 0 \text{ thì } a \cdot f(x) > 0 \quad \forall x \neq -\frac{b}{2a}$$

$$\bullet \text{ Nếu } \Delta > 0 \text{ thì } f(x) = 0 \text{ có hai nghiệm } x_1, x_2, x_1 < x_2$$

$$+ \text{ Nếu } x_1 < x < x_2 \text{ thì } a \cdot f(x) < 0$$

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \text{ thì } a \cdot f(x) > 0$$

2. Công thức so sánh các số α, β với hai nghiệm của phương trình bậc hai: $(\alpha < \beta)$

$$\bullet x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$$

Định lý:

$$\bullet \text{ Nếu tồn tại số thực } \alpha \text{ sao cho } a \cdot f(\alpha) < 0 \text{ thì phương trình bậc hai}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$

$$\bullet x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases} \quad \bullet \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\beta) < 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases} \quad \bullet x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases} \bullet x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) < 0 \end{cases}$$

B. CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CHUYÊN ĐỀ 1:

GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. Phương pháp

- Bước 1: Biến đổi phương trình đã cho về dạng: $ax + b = 0$ (1)
- Bước 2: Xét các trường hợp sau:
TH1: Nếu $a = 0$; thế vào (1) và kiểm tra.
TH2: Nếu $a \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$
- Bước 3: Kết luận.

2. Bài tập

Bài 1: Giải và biện luận phương trình: $2x + 3m = mx + 2$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (2 - m)x = 2 - 3m \quad (2)$$

- Nếu $m = 2$ thì (2) $\Leftrightarrow 0x = -4$ vô lý $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm
- Nếu $m \neq 2$ thì (2) $\Leftrightarrow x = \frac{2 - 3m}{2 - m}$

Bài 2: Giải và biện luận: $\frac{2x + 3m}{x^2 - 1} = \frac{m}{x + 1} + \frac{2m - 1}{x - 1}$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \neq \pm 1$

$$(1) \Leftrightarrow (3m - 3)x = 2m + 1 \quad (2)$$

- Nếu $3m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì (2) vô nghiệm
- Nếu $m \neq 1$ thì (2) $\Leftrightarrow x = \frac{2m + 1}{3m - 3}$

$$\text{Điều kiện: } x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+1}{3m-3} \neq 1 \\ \frac{2m+1}{3m-3} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m \neq \frac{2}{5} \end{cases}$$

Kết luận:

+ Khi $m = 1$; $m = 4$; $m = \frac{2}{5}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Khi $m \neq 1 \wedge m \neq 4 \wedge m \neq \frac{2}{5}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2m+1}{3m-3}$

$$\text{Bài 3: Giải và biện luận phương trình: } \frac{2mx-3}{\sqrt{x}} = \frac{x-m}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

Giải

Điều kiện: $x > 0$

$$(1) \Leftrightarrow 2mx - 3 = x - m \Leftrightarrow (2m - 1)x = 3 - m \quad (2)$$

• Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì (2) vô nghiệm

• Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ thì (2) $x = \frac{2m-1}{3-m}$

$$\text{Điều kiện: } x > 0 \Leftrightarrow \frac{2m-1}{3-m} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 3$$

CHUYÊN ĐỀ 2 :

NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THỎA MÃN MỘT ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

1. Phương pháp

- Bước 1: Đưa phương trình đã cho về dạng: $ax + b = 0$ (1)
- Bước 2: Tìm điều kiện của a để (1) có nghiệm x_0 . Cho nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện.

2. Bài tập

$$\text{Bài 1: Cho phương trình: } (2m+1)x - 3m + 2 = 3x + m \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in (0; 3)$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (2m-2)x = 4m-2 \Leftrightarrow (m-1)x = 2m-1 \quad (2)$$

• Nếu $m = 1$ thì (2) vô nghiệm

• Nếu $m \neq 1$ thì (2) $\Leftrightarrow x = \frac{2m-1}{m-1}$

$$\text{Nghiem } x \in (0; 3) \Leftrightarrow 0 < \frac{2m-1}{m-1} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-1}{m-1} > 0 \\ \frac{2m-1}{m-1} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m > 2 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m < \frac{1}{2} \vee m > 2$

Bài 2: Cho phương trình: $(3m-2)x - m = 4mx + 2m - 5$

Tìm m để phương trình có nghiệm nguyên.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (m+2)x = 5 - 3m \quad (2)$$

$$\bullet \quad (2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow m \neq -2 \text{ và nghiệm là } x = \frac{5-3m}{m+2} = -3 + \frac{11}{m+2}$$

• Để $x \in \mathbb{Z}^+$ thì $m+2$ là ước số của 11

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = -1 \\ m+2 = -11 \\ m+2 = 1 \\ m+2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -13 \\ m = -1 \\ m = 9 \end{cases}$$

Bài 3: Cho phương trình: $\sqrt{x-1}[(2m-3)x + m + (1-m)x - 3] = 0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > 1 \\ (2m-3)x + m + (1-m)x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > 1 \\ (m-2)x = 3 - m \quad (2) \end{cases}$$

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) có đúng 1 nghiệm lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ x = \frac{3-m}{m-2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \frac{5-2m}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 2 < m < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < \frac{5}{2}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $2 < m < \frac{5}{2}$.

Bài 4: Cho phương trình:

$$(2m-1) + (3-n)(x-2) - 2m + n + 2 = 0$$

Tìm m và n để phương trình có nghiệm đúng $\forall x$.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (2m - n + 2)x = 2m - 3n + 4$$

$$\text{Để (1) có nghiệm đúng với mọi } x \text{ thì: } \begin{cases} 2m - n + 2 = 0 \\ 2m - 3n + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 1 \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 3 : GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Phương pháp

1. Xét $a = 0$. Biện luận phương trình bậc nhất.

2. Xét $a \neq 0$. Tính Δ (hoặc Δ')

a. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$

c. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. Kết luận.

2. Bài tập

Bài 1: Giải và biện luận phương trình:

$$(m - 1)x^2 + (2m - 3)x + m + 1 = 0 \quad (\text{tham số } m) \quad (1)$$

Giải

a. Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì (1) trở thành: $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

b. Nếu $m \neq 1$. Ta có: $\Delta = (2m - 3)^2 - 4(m - 1)(m + 1) = 13 - 12m$

• Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 13 - 12m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{13}{12}$ thì phương trình (1) vô nghiệm

• Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{12}$ thì (1) có nghiệm kép: $x_0 = -\frac{2m - 3}{2(m - 1)} = 5$

• Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{12}$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{3 - 2m \pm \sqrt{\Delta}}{2(m - 1)} \quad (\text{với } \sqrt{\Delta} = \sqrt{13 - 12m})$$

c. Kết luận:

+ Nếu $m = 1$ thì phương trình có nghiệm $x = 2$

+ Nếu $m = \frac{13}{12}$ thì phương trình có nghiệm $x = 5$

+ Nếu $m > \frac{13}{12}$ thì phương trình vô nghiệm

+ Nếu $m < \frac{13}{12}$ thì phương trình có 2 nghiệm.

$$x_{1,2} = \frac{3 - 2m \pm \sqrt{\Delta}}{2(m - 1)} \quad \text{với } \sqrt{\Delta} = \sqrt{13 - 12m}$$

Bài 2: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{x^2 - 2(a + 1)x + 2a + 5}{x^2 - 3x + 2} = 0 \quad (1) \quad (\text{tham số } a)$$

Giải

- Điều kiện: $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Khi đó (1) trở thành: $f(x) = x^2 - 2(a + 1)x + 2a + 5 = 0 \quad (2)$

Ta có: $\Delta' = (a + 1)^2 - (2a + 5) = a^2 - 4$

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2$ thì (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) cũng vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$ khi đó (2) có 1 nghiệm kép $x_0 = a + 1$

Với $a = 2 \Rightarrow x_0 = 3$ (nhận)

Với $a = -2 \Rightarrow x_0 = -1$ (nhận)

+ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow |a| > 2$

- Điều kiện (2) phải có 2 nghiệm khác 1 và khác 2 nên:

$$\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \neq 0 \\ -2a + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \frac{5}{2}$$

Khi đó hai nghiệm: $x_1 = a + 1 \pm \sqrt{\Delta}$ với $\Delta = a^2 - 4$

Kết luận:

+ Nếu $|a| < 2$ hoặc $a = \frac{5}{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $a = 2 \vee a = -2$ thì phương trình có nghiệm kép: $x = -1 \vee x = 3$

+ Nếu $|a| > 2 \wedge a \neq \frac{5}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = a + 1 \pm \sqrt{\Delta} \quad \text{với } \Delta = a^2 - 4$$

Bài 3: Giải và biện luận phương trình sau theo a và b: $x + \frac{1}{x} = \frac{a - b}{a + b} + \frac{a + b}{a - b} \quad (1)$

Giải

- Khi $a = \pm b$ thì (1) vô nghiệm.

- Khi $a \neq \pm b$. Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0 \quad (2)$

Phương trình (2) có: $\Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)(a^2 - b^2) = 4a^2b^2 \geq 0$

Do đó (2) có 2 nghiệm: $x_1 = \frac{(a-b)}{(a+b)} \vee x_2 = \frac{(a+b)}{(a-b)}$

Khi $a \neq \pm b$ thì hai nghiệm này khác 0. Nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Kết luận: + Khi $a = \pm b$ thì (1) vô nghiệm.

+ Khi $a \neq \pm b$ thì (1) có 2 nghiệm: $x_1 = \frac{a-b}{a+b} \vee x_2 = \frac{a+b}{a-b}$

Bài 4: Giải và biện luận phương trình:

$$f(x) = mx^2 + 2(2m-1)x + m = 0 \text{ với } -1 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

Giải

+ Nếu $m = 0$ thì (1) trở thành: $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận)

+ Nếu $m \neq 0$. Tính Δ ; $mf(-1)$; $\frac{S}{2} + 1$; $mf(1)$; $\frac{S}{2} - 1$

• $\Delta = 3m^2 - 4m + 1$

• $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = \frac{1}{3}$

• $mf(-1) = m(2-2m)$; $mf(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 0$

• $\frac{S}{2} + 1 = \frac{1-m}{m}$; $\frac{S}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

• $mf(1) = m(6m-2)$; $mf(1) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \vee m = 0$

• $\frac{S}{2} - 1 = \frac{1-3m}{m}$; $\frac{S}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

+ Ta lập bảng xét dấu sau:

m	Δ	$m(f(-1))$	$\frac{S}{2} + 1$	$mf(1)$	$\frac{S}{2} - 1$	Vị trí của nghiệm ($x_1 \leq x_2$)
$-\infty$						
	+	-	-	+	-	$x_1 < -1 < x_2 < 1$
0		0		0		
	+	+	+	-	+	$-1 < x_1 < 1 < x_2$
$\frac{1}{3}$		0	0	0		Nghiệm kép $x_0 = 1$
	-	+	+	+	-	Vô nghiệm
1		0	0			Nghiệm kép $x_0 = -1$
	+	-	-	+	-	$x_1 < -1 < x_2 < 1$
$+\infty$						

Biện luận: Dựa vào bảng xét dấu ta có kết quả:

+ Nếu $m = 1 \vee m = \frac{1}{3}$ thì phương trình có nghiệm kép.

+ Nếu $\frac{1}{3} < m < 1$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m < 0 \vee m > \frac{1}{3}$ thì phương trình có nghiệm: $x_2 = \frac{1 - 2m + \sqrt{\Delta'}}{m}$

+ Nếu $0 < m < \frac{1}{3}$ thì phương trình có nghiệm: $x_1 = \frac{1 - 2m - \sqrt{\Delta'}}{m}$

Kết luận:

+ Nếu $m = 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$

+ Nếu $m = 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$

+ Nếu $m = \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$

+ Nếu $\frac{1}{3} < m < 1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $m < 0 \vee m > \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm: $x_2 = \frac{1 - 2m + \sqrt{\Delta'}}{m}$

+ Nếu $0 < m < \frac{1}{3}$ thì phương trình có nghiệm: $x_1 = \frac{1 - 2m - \sqrt{\Delta'}}{m}$

CHUYÊN ĐỀ 4:

CHỨNG MINH MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM

1. Phương pháp

Cách 1: Tìm số α sao cho $af(\alpha) < 0$

Cách 2: Tìm hai số $\alpha; \beta$ sao cho $f(\alpha).f(\beta) < 0$

Cách 3: Chứng minh $\Delta \geq 0$

Cách 4: Sử dụng định lý liên tục:

“Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền D . Nếu tồn tại $a; b \in D$ sao cho $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a; b)$ ”

Cách 5: Dùng định lý Lagrange:

“Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm tồn tại trên $(a; b)$. khi đó, tồn tại số $\alpha \in (a; b)$ sao cho: $f(a) - f(b) = f'(\alpha)(a - b)$ ”

2. Bài tập

Bài 1: Chứng minh rằng: với ba số a, b, c phân biệt thì phương trình:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ca = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] > 0 \quad \forall a \neq b \neq c$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 2: Chứng minh rằng: nếu $(a+c)^2 < ab + bc - 2ac$ thì phương trình sau luôn có nghiệm: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$).

Giải

$$\text{Phương trình (1) có: } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{Từ giả thiết: } (a+c)^2 < ab + bc - 2ac$$

$$\Leftrightarrow 2(a+c)^2 - 2ab - 2bc + 4ac < 0$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2 - 2b(a+c) + b^2 + (a+c)^2 + 4ac - b^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac > (a+c-b)^2 + (a+c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm (đpcm).

Bài 3: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 + 2(a+b+c)x + 3(ab+bc+ca) = 0$$

Giải

$$\text{Ta có: } \Delta' = a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$$

Chứng minh: $\Delta' \geq 0$. Thật vậy: Theo bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab| \geq 2ab$$

$$\text{Tương tự: } b^2 + c^2 \geq 2bc; \quad c^2 + a^2 \geq 2ca$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$$

$\Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho luôn có nghiệm $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 4: Cho hai phương trình: $x^2 + a_1x + b_1 = 0$

(1)

$$\text{và } x^2 + a_2x + b_2 = 0 \quad (2)$$

Chứng minh rằng: Nếu $a_1 \cdot a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất có một trong hai phương trình có nghiệm.

Giải

Phương trình (1) có: $\Delta_1 = a_1^2 - 4b_1$

Phương trình (2) có: $\Delta_2 = a_2^2 - 4b_2 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2)$

Theo bất đẳng thức Côsi:

$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2\sqrt{a_1^2 \cdot a_2^2} = 2|a_1 a_2| \geq 2a_1 a_2 \geq 2.2(b_1 + b_2) \text{ (theo đề cho)}$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ ít nhất có một trong hai số Δ_1 hoặc Δ_2 không âm, nghĩa là một trong hai phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Bài 5: Chứng minh rằng: nếu m, n là hai số thỏa mãn:

$19|m| + 5|n| \geq 2000$ thì phương trình sau có nghiệm.

$$20mx^2 + 5nx + 100 - m = 0 \quad (1)$$

Giải

+ Với $m = 0$, từ (1) $\Rightarrow 5n \cdot x + 100 = 0$ (*)

Theo giả thiết thì $n \neq 0$ nên phương trình (*) luôn có nghiệm duy nhất, nghĩa là (1) luôn có nghiệm.

+ Với $m \neq 0$: ta có:

$$\Delta = 25n^2 - 20m(100 - m) \cdot 4 = 80m^2 - 8000m + 25n^2$$

$$\geq 80m^2 - 4(19|m| + 5|n|)m + 25n^2 \text{ (do giả thiết)}$$

$$\geq 4m^2 - 20|mn| + 25n^2 = (5|n| - 2|m|)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có nghiệm.

Bài 6: Cho a, b, c là ba số khác không, còn $p, q \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} = c \text{ luôn có nghiệm } x \neq p \text{ và } x \neq q.$$

Giải

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow cx^2 - [c(p+q) + a^2 + b^2]x + cpq + a^2q + b^2p = 0$$

Ta có: $\Delta = [c(p+q) + a^2 + b^2]^2 - 4c(cpq + a^2q + b^2p)$

$$= (p+q)^2 c^2 + 2c(q+p)(b^2 - a^2) + (a^2 + b^2)^2$$

$$= (p+q)^2 (-4a^2 b^2) \leq 0 \forall a, b \neq 0 \text{ và } p, q \in \mathbb{R}$$

Xem Δ là tam thức bậc hai theo ẩn số c thì:

$$\begin{cases} (p+q)^2 \geq 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \geq 0 \text{ với } \forall c$$

Suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm với $\forall a, b, c$ và $p, q \in \mathbb{R}$

Bài 7: Cho ba số a, b, c dương thỏa mãn: $a + 2b + 3c = 1$

Chứng minh rằng: ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm thực:

$$4x^2 - 4(2a + 1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0 \quad (1)$$

$$4x^2 - 4(2b + 1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0 \quad (2)$$

Giải

Phương trình (1) có: $\Delta_1 = 16a(1 - 48bc)$

Phương trình (2) có: $\Delta_2 = 16b(1 - 24ac)$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } (1 - 48bc) + (1 - 24ac) &= 2[1 - 12c(2b + a)] \\ &= 2[1 - 12c(1 - 3c)] = 2(6c - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra ít nhất có một trong hai số là: $(1 - 48bc)$ hoặc $(1 - 24ac)$ phải không âm, suy ra có ít nhất một số Δ_1 hoặc Δ_2 không âm, nên luôn có ít nhất một phương trình có nghiệm $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 8: Cho $a \neq b \neq c \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm: $f(x) = ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a) = 0$

Giải

Ta có: $f(a) = bc(a - b)(a - c)$; $f(b) = ac(b - a)(b - c)$

$$f(c) = ab(c - a)(c - b)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(a).f(b).f(c) &= a^2b^2c^2(a - b)(a - c)(b - a)(b - c)(c - a)(c - b) \\ &= -3a^2b^2c^2(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 < 0 \end{aligned}$$

$\forall a, b, c$, đôi một khác nhau và khác 0.

$\Rightarrow$ ít nhất có một trong ba số: $f(a); f(b); f(c)$ phải âm.

Giả sử, số đó là: $f(a) < 0$

$$\text{Lại có: } f(0) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > 0 \Rightarrow f(a).f(0) < 0$$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm (đpcm)

Bài 9: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Chứng minh rằng nếu các số a, b, c thỏa mãn đẳng thức sau: $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình trên luôn có nghiệm $\in (0, 1)$

Giải

Cách 1: Sử dụng tính liên tục:

Đặt: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ta thấy $f(x)$ luôn liên tục $\forall x \in (0, 1)$

$$\text{Lại có: } f(0) = c; f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2(2a + 3b) + 9c}{9} = \frac{2(-6c) + 9c}{9} = -\frac{1}{3}c$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}c^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 0 \text{ luôn có nghiệm } x \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \subset (0, 1)$$

Cách 2: Sử dụng định lý Lagrange:

$$\text{Xét hàm số } F(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$$

Ta thấy $F(x)$ luôn liên tục trên $[0, 1]$ và $F'(x) = ax^2 + bx + c$ luôn tồn tại trên $(0, 1)$. Theo định lý Lagrange thì tồn tại số $\alpha \in (0, 1)$ sao cho:

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= F'(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = a\alpha^2 + b\alpha + c \\ &\Leftrightarrow \frac{2a + 3b + 6c}{6} = a\alpha^2 + b\alpha + c \end{aligned}$$

$$\text{Theo giả thiết: } 2a + 3b + 6c = 0 \Rightarrow a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$$\alpha \text{ là nghiệm của phương trình } ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 10: Cho m dương và ba số $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa: $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$. Chứng minh rằng phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm $\in (0, 1)$

Giải

Cách 1: Sử dụng định lý Lagrange.

$$\text{Xét hàm số: } F(x) = \frac{a}{m+2}x^{m+2} + \frac{b}{m+1}x^{m+1} + \frac{c}{m}x^m$$

Ta thấy $F(x)$ luôn liên tục $(0, 1)$

$$F'(x) = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} = x^{m-1}(ax^2 + bx + c) \text{ luôn tồn tại trên } (0, 1).$$

Theo định lý Lagrange thì $\exists \alpha \in (0, 1)$ sao cho:

$$\frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F'(\alpha) \Leftrightarrow \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = \alpha^{m-1}(a\alpha^2 + b\alpha + c)$$

$$\text{Theo giả thiết: } \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \text{ nên } \alpha^{m-1}(a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$$

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0 \Rightarrow \alpha \text{ là nghiệm của phương trình: } ax^2 + bx + c = 0$$

Cách 2:

Xét $f(x) = ax^2 + bx + c$

+ Nếu $a = 0 \Rightarrow f(x) = bx + c$

+ Nếu $b \neq 0$ thì $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b}$

Từ giả thiết $\Rightarrow -\frac{c}{b} = \frac{m}{m+1} \Rightarrow x = \frac{m}{m+1} \in (0, 1)$

+ Nếu $b = 0$, từ giả thiết $c = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ luôn đúng $\forall x \in (0, 1)$

Từ hai điều kiện trên ta có kết luận: $f(x) = 0$ luôn có nghiệm $x \in (0, 1)$

+ Nếu $a \neq 0$: Ta có: $f(0) = 0$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) &= \frac{(m+1)^2}{m+2} \left(\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + c \cdot \frac{m+2}{(m+1)^2} \right) \\ &= \frac{(m+1)^2}{m+2} \left(-\frac{c}{m} + c \cdot \frac{m+2}{(m+1)^2} \right) = -\frac{c}{m(m+2)} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = -\frac{c^2}{m(m+2)} < 0 \quad \forall a, b, c, m > 0$$

phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm $x \in \left(0, \frac{m+1}{m+2}\right) \subset (0, 1)$

Bài 11: Giả sử $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng tồn tại một trong ba phương trình

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{sau có nghiệm: } x^2 + bx + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + cx + 1 = 0 \quad (3)$$

Giải

(1) có: $\Delta_1 = a^2 - 4$; (2) có: $\Delta_2 = b^2 - 4$; (3) có: $\Delta_3 = c^2 - 4$

$$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 12 = a^2 + (b+c)^2 - 2bc - 12$$

$$\Rightarrow T = a^2 + (6-a)^2 - 2bc - 12$$

$$1. \text{ Nếu } bc > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

$$a. \text{ Nếu } \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \text{ thì: theo bất đẳng thức Côsi: } bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{6-a}{2}\right)^2$$

$$\text{Suy ra: } T = a^2 + (6-a)^2 - 2bc - 12 \geq a^2 + (6-a)^2 - 2\left(\frac{6-a}{2}\right)^2 - 12$$

$$= a^2 + \frac{1}{2}(6-a)^2 - 12 = \frac{3}{2}(a-2)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0 \Rightarrow$ ít nhất một trong ba số là số âm nên có một trong ba phương trình có nghiệm $\Rightarrow$ (đpcm)

b. Nếu $\begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$ thì từ $a + b + c = 6 \Rightarrow a > 6$

Khi $a > 6$ thì hiển nhiên phương trình (1) luôn có nghiệm (đpcm)

2. Nếu $bc < 0$

Xét biểu thức: $T = a^2 + (6 - a)^2 - 2bc - 12$

Xem T là tam thức bậc hai đối với ẩn a , ta có:

$\Delta_T = 36 - 2(24 - 2bc) = 4bc - 8 < 0$ và $bc < 0$

$\Rightarrow T$ luôn cùng dấu với hệ số a^2 tức là $T > 0 \forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > 0$

Suy ra: Có một trong ba số luôn dương $\Rightarrow$ có một trong ba phương trình đã cho có nghiệm.

Tóm lại: với $a + b + c = 6$ thì có một trong ba phương trình đã cho luôn có nghiệm $\Rightarrow$ đpcm.

CHUYÊN ĐỀ 5: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ HAI NGHIỆM THỎA MÃN MỘT ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

1. Các điều kiện cho trước thường gặp

- Hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn một phương trình; một bất phương trình
- Một biểu thức chứa hai nghiệm $x_1; x_2$ đạt giá trị lớn nhất; bé nhất.
- Nghiệm âm; nghiệm dương; t
- Nghiệm thuộc (a, b) cho trước.
- Nghiệm nguyên.
- Nghiệm này bằng k lần nghiệm kia.

2. Phương pháp giải

Bài toán 1

Hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn một phương trình; một bất phương trình:

- Bước 1:** Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$
- Bước 2:** Biến đổi phương trình, bất phương trình chứa $(x_1 + x_2); x_1 \cdot x_2$. Sau đó áp dụng định lý Viet; giải tìm m .
- Bước 3:** Giao các điều kiện ràng buộc của m . Kết luận.

Bài toán 2

Biểu thức chứa hai nghiệm $x_1; x_2$ đạt giá trị lớn nhất; bé nhất.

- **Bước 1:** Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$
- **Bước 2:** Biến đổi biểu thức chứa $(x_1 + x_2); x_1 \cdot x_2$. Dùng định lý Viet đưa biểu thức về hàm $f(m)$
- **Bước 3:** Để tìm min, max của $f(m)$ có thể dùng một trong các cách sau:
Cách 1: Phân tích $f(m) = \pm(\alpha m + \beta)^2 + A^2$
Cách 2: Dùng khảo sát hàm số.
Cách 3: Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2.
Cách 4: Dùng bất đẳng thức Côsi, Bunhiakopxki
Cách 5: Dùng tính bị chặn; tính nhất của bất đẳng thức.

Bài toán 3: Nghiệm thuộc $(a; b)$; âm dương.

Cách 1: Dùng công thức so sánh nghiệm.

Cách 2: Dùng khảo sát hàm số và miền giá trị.

Bài toán 4: Nghiệm nguyên

Dùng tính chia hết ; số chính phương.

Bài toán 5: Nghiệm này bằng k lần nghiệm kia:

- **Bước 1:** Giả sử phương trình bậc hai có 2 nghiệm $x_1; x_2$.
- **Bước 2:** Nghiệm này bằng k lần nghiệm kia nên:

$$\begin{cases} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0$$

- **Bước 3:** Biến đổi đẳng thức trên về tổng; tích. Sau đó dùng định lý Viet.

2. Bài tập

Bài 1: Cho phương trình bậc hai:

$$x^2 + 2(m+1)x + 2m^2 - m - 3 = 0 \quad (1)$$

1. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa: $2x_1 - x_2 = m + 5$

2. Định m để phương trình có hai nghiệm sao cho biểu thức:

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

đạt giá trị nhỏ nhất; lớn nhất.

3. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa: $x_1^3 + x_2^3 = 54(x_1 + x_2)$

4. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq \frac{2m-3}{10}$

Giải

(1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 - (2m^2 - m - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 3m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4 \quad (*)$$

1. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa: $2x_1 - x_2 = m + 5$

Theo định lý Viet ta được:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - m - 3 \end{cases} \quad (2)$$

Ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ 2x_1 - x_2 = m+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{m}{3} \\ x_2 = -3 - \frac{5m}{3} \end{cases}$$

Thế vào (2) ta được:
$$\left(1 - \frac{m}{3}\right)\left(-3 - \frac{5m}{3}\right) = 2m^2 - m - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{13m^2}{9} - \frac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{13} \end{cases} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m = 0 \vee m = \frac{3}{13}$

2. Định m để phương trình có hai nghiệm sao cho biểu thức:

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất; lớn nhất.}$$

Ta có:
$$A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= 4(m+1)^2 - 4(2m^2 - m - 3) = -4m^2 + 12m + 16$$

Đặt $f(m) = -4m^2 + 12m + 16$

$$f'(m) = -8m + 12; f'(m) = 0 \Leftrightarrow -8m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Bảng biến thiên

M	-1	$\frac{3}{2}$	4
$f'(m)$	+	0	-
$f(m)$	0	25	0

Từ bảng biến thiên ta được:

$$\max A = \max f(m) = 25 \text{ khi } m = \frac{3}{2}$$

$$\min A = \min f(m) = 0 \text{ khi } m = -1 \vee m = 4$$

3. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa:

$$x_1^3 + x_2^3 = 54(x_1 + x_2)$$

Ta có:
$$x_1^3 + x_2^3 = 54(x_1 + x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) - 54(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) [4(m+1)^2 - 3(2m^2 - m - 3) - 54] = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(m+1)(-2m^2 + 11m - 41) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ -2m^2 + 11m - 41 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \text{ (nhận)}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = -1$

4. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq \frac{2m-3}{10}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 \cdot x_2} \quad (x_1, x_2 \neq 0) \\ &= \frac{4(m+1)^2 - 2(2m^2 - m - 3)}{2m^2 - m - 3} = \frac{10}{2m-3} \quad (m \neq -1) \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{10}{2m-3} \geq \frac{2m-3}{10} \Leftrightarrow \frac{(7+2m)(13-2m)}{2m-3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} < m \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $\frac{3}{2} < m \leq 4$

Bài 2: Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 + 2mx + 4 = 0$ (1)

1. Hãy tính theo m các biểu thức sau:

a. $A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;

b. $B = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$

2. Định m sao cho $x_1^4 + x_2^4 \leq 32$

3. Định m để: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \geq 3$

4. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{2(x_1^2 + x_2^2) + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2}{3(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) + 4x_1 x_2}$$

Giải

1. Theo đề bài yêu cầu thì phương trình (1) phải có nghiệm dương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \geq 0 \\ -m > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{a. } A &= \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \Rightarrow A^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} \\ &\Rightarrow A^2 = -2m + 2\sqrt{4} = 4 - 2m \Rightarrow A = \sqrt{4 - 2m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } B &= \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} \\ &\Rightarrow B^4 = x_1 + x_2 + 4\sqrt[4]{x_1 x_2} (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + 6\sqrt{x_1 x_2} \\ &= -2m + 4\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{4 - 2m} + 6\sqrt{4} \\ &\Rightarrow B^4 = 12 - 2m + 4\sqrt{2}\sqrt{4 - 2m} \Rightarrow B = \sqrt[4]{12 - 2m + 4\sqrt{2}\sqrt{4 - 2m}} \end{aligned}$$

2. Định m để: $x_1^4 + x_2^4 \leq 32$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2x_1^2 x_2^2 \\ &= (4m^2 - 8)^2 - 2 \cdot 16 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1^4 + x_2^4 \leq 32 \Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 - 32 \leq 32 \Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 \leq 64 \Leftrightarrow |m| \leq 2$$

- Mặt khác để (1) có nghiệm thì $m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 2$

Do đó ta chỉ nhận $m = \pm 2$

Vậy giá trị của m cần tìm là $m = \pm 2$

3. Định m để: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \geq 3$

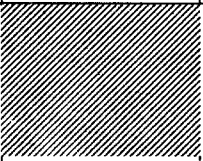
$$\text{Ta có: } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(4m^2 - 8)^2 - 32}{16} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 \geq 80 \Leftrightarrow 4m^2 \geq 8 + 4\sqrt{5} \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{2 + \sqrt{5}} \text{ (nhận)}$$

Vậy giá trị m cần phải tìm là: $|m| \geq \sqrt{2 + \sqrt{5}}$

$$\begin{aligned} \text{4. Ta có: } T &= \frac{2(x_1^2 + x_2^2) + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2}{3(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) + 4x_1 x_2} \\ &= \frac{2(x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2}{3(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) + 4x_1 x_2} = \frac{4m^2 - 3m - 6}{6m^2 - 2m - 4} \\ T &= \frac{10m^2 + 40m}{(60m^2 - 2m - 4)^2} ; T = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Bảng biến thiên

m	$-\infty$	-4	-2	0	2	$+\infty$
T'	+ 0 -			0		+
T	$\frac{2}{3}$	$\nearrow \frac{7}{10}$	$\searrow \frac{2}{3}$			$\frac{1}{4}$
						$\nearrow \frac{2}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

$$\text{Max}T = \frac{7}{10} \text{ khi } m = -4 ; \text{Min}T = \frac{1}{4} \text{ khi } m = 2$$

Bài 3: Cho phương trình bậc hai: $x^2 + mx + 1 = 0$ (1)

1. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 14$
2. Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 \leq 2$
3. Định $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa biểu thức:

$$A = \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 + x_2 + 1} \text{ đạt giá trị nguyên.}$$

Giải

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 2$ (*)

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 &= \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 \cdot x_2^2} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} \end{aligned}$$

Theo định lý Viet ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{(m^2 - 2)^2 - 2}{1} = (m^2 - 2)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 14 \Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 - 2 > 14 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{6}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được: $|m| > \sqrt{6}$

Vậy giá trị m cần tìm là: $|m| > \sqrt{6}$

2. Ta có: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \leq 2$

$$\Leftrightarrow -m^3 + 3m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được: $\begin{cases} m = -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $\begin{cases} m = -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$

3. Ta có: $A = \frac{(x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2}{x_1 + x_2 + 1} = \frac{m^2 - 4}{-m + 1} = -m - 1 - \frac{3}{-m + 1}$

Do đó để A thì (m - 1) là ước số của 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = -1 \\ m - 1 = 1 \\ m - 1 = -3 \\ m - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại theo điều kiện (*))} \\ m = 2 \text{ (thỏa (*))} \\ m = -2 \\ m = 4 \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m \in \{-2, 2, 4\}$

Bài 4: Cho phương trình bậc hai: $2x^2 + 2(m + 2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ (1)

1. Định m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho biểu thức:

$$A = x_1^3 + x_2^3 - \frac{1}{6}m^3 - \frac{23}{2}m \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

2. Định m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 3)$$

3. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của (1). Chứng minh rằng:

$$|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Giải

(1) có nghiệm $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = -m^2 - 4m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} - 2 \leq m \leq -2 + \sqrt{2}$$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m + 2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}$

$$1. A = x_1^3 + x_2^3 - \frac{1}{6}m^3 - \frac{23}{2}m = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) - \frac{1}{6}m^3 - \frac{23}{2}m$$

Theo định lý Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}$$

$$A = -(m+2)^3 + \frac{3}{2}(m+2)(m^2 + 4m + 3) - \frac{1}{6}m^3 - \frac{23}{2}$$

$$A' = m^2 + 6m - 7 ; A' = m^2 + 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -7 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

m	-7	$-\sqrt{2}-2$	$\sqrt{2}-2$	1
A'	0			
A			$A_{\min}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

$$\min A = A(\sqrt{2}-2) = \frac{79-43\sqrt{3}}{3} \text{ đạt được khi } m = \sqrt{2}-2$$

2. Ta có:
$$x_1^4 + x_2^4 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3)^2$$

Do đó:
$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{1}{2}(m+1)(m+3)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3)^2 = \frac{1}{2}(m+1)(m+3) = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3)$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 3 = 1 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 - \sqrt{2} \\ m = -2 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy giá trị của m cần tìm là:
$$\begin{cases} m = -2 - \sqrt{2} \\ m = -2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

3. Ta có:
$$x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = \frac{1}{2}(3m^2 + 10m + 5)$$

Đặt:
$$f(m) = \frac{1}{2}(3m^2 + 10m + 5) ; f'(m) = 3m + 5$$

$$f'(m) = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

Bảng biến thiên

M	$-2-\sqrt{2}$	$-\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}-2$
$f'(m)$	-	0	+
$f(m)$	$\frac{3}{2} + \sqrt{2}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2} - \sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra:

$$-\frac{5}{3} \leq f(m) \leq \frac{3}{2} + \sqrt{2} \quad \text{suy ra} \quad |f(m)| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Bài 5: Cho phương trình: $ax^2 + x + a - 1 = 0$ (1)

Định a để (1) có 2 nghiệm thực $x_1 \neq x_2$ thỏa mãn $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1$

Giải

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4a(a - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow -4a^2 + 4a + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} < a < \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Khi đó: } \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_1 x_2)^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{a^2} - 4 \frac{a-1}{a}}{\left(\frac{a-1}{a}\right)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{1 - 4a(a-1)}{(a-1)^2} - 1 > 0 \quad \text{Với} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a-1}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -5a^2 + 6a > 0 \quad (a \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow 0 < a < 1 \vee 1 < a < \frac{6}{5} \quad \text{thỏa mãn điều kiện (2)}$$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $0 < a < 1 \vee 1 < a < \frac{6}{5}$

Bài 6: Với những giá trị nào của a thì phương trình: $x^2 + 1 = \frac{x}{a}$ có hai nghiệm

thực $x_1; x_2$ khác nhau thỏa mãn: $|x_1^2 + x_2^2| > \frac{1}{a}$

Giải

Phương trình $x^2 + 1 = \frac{x}{a} \Leftrightarrow ax^2 - x + a = 0$, phương trình này có hai nghiệm phân

biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4a^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ và $a \neq 0$

Ta có: $|x_1^2 - x_2^2| > \frac{1}{a} \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)^2 > \frac{1}{a^2}$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 (x_1 - x_2)^2 > \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] > \frac{1}{a^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 4 > 1 \Leftrightarrow 1 - 5a^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}} < a < \frac{1}{\sqrt{5}} (a \neq 0)$

Kết hợp với điều kiện ta được giá trị a cần tìm là:

$$-\frac{1}{2} < 1 < 0 \vee 0 < a < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Bài 7: Cho phương trình: $x^2 - (2 \sin \alpha - 1)x + 6 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1 = 0$

Tìm α để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A = x_1^2 + x_2^2$

Giải

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow (2 \sin \alpha - 1)^2 - 4(6 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -20 \sin^2 \alpha + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq \alpha \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$

Khi đó ta có: $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = -8 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 3$

Đặt $t = \sin \alpha$ thì $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

Xét hàm số: $f(t) = -8t^2 - 2t + 3$

$f'(t) = -16t - 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{8}$

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	2	$\frac{25}{8}$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

$$\max A = \max f(t) = f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{25}{8} \text{ khi } t = -\frac{1}{8} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{8} = -\sin \beta$$

$$\min A = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ khi } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + m\pi (m \in \mathbb{Z})$$

Bài 8: Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình:

$$12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0 \quad (1)$$

Định m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất; nhỏ nhất.

Giải

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 48 - \frac{144}{m^2} \geq 0 \Leftrightarrow -3m^4 + 48m^2 - 144 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} \vee -2\sqrt{3} \leq m \leq -2$$

Theo định lý Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{m^2} \end{cases}$$

Ta có: $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2) = \frac{m^2}{2} - 2\left(\frac{m^2}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{m^2}\right) = \frac{m^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{m^2}$

$$A' = \frac{1}{2} + \frac{3}{m^2} > 0 \forall m \neq 0$$

Bảng biến thiên

m	$-2\sqrt{3}$	-2	2	$2\sqrt{3}$
A'	+		+	
A	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

$$\max A = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ đạt tại } m = 2\sqrt{3}; \min A = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ đạt tại } m = -2\sqrt{3}$$

Bài 9: Cho phương trình bậc hai:

$$(a^2 - 2a + 2)x^2 + 2(a - 1)xa - 3a^2 = 0$$

1. Chứng minh rằng với $\forall a > 0$ thì (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{2}{3}$$

2. Định a để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho:

$$x_1 \cdot x_2 < |ax_1| - |ax_2|$$

Giải

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta' &= a^2(a - 1)^2 + 3a^2(a^2 - 2a + 2) \\ &= a^2(a - 1)^2 + 3a^2[(a - 1)^2 + 1] \geq 0 \forall a \end{aligned}$$

Do đó (1) luôn có nghiệm $\forall a$.

1. Theo đề bài $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{a} < 0 \text{ với } \forall a > 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

2. Theo định lý Viet: $x_1 \cdot x_2 = \frac{-3a^2}{a^2 - 2a + 2} \leq 0$

+ Nếu $a = 0$ thì $x_1 = x_2 = 0$ nên bất đẳng thức không thỏa mãn.

+ Nếu $a \neq 0$ thì $x_1; x_2 < 0$

Do đó: bất đẳng thức $x_1 \cdot x_2 < |ax_1| - |ax_2|$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < |a|(|x_1| - |x_2|)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 < |a|(x_1 + x_2) \text{ (nếu } x_1 > 0, x_2 < 0) \\ x_1 \cdot x_2 < -|a|(x_1 + x_2) \text{ (nếu } x_1 < 0, x_2 > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3a^2}{a^2 - 2a + 2} < |a| \cdot \frac{2a(1 - a)}{a^2 - 2a + 2} \\ -\frac{3a^2}{a^2 - 2a + 2} < -|a| \cdot \frac{2a(1 - a)}{a^2 - 2a + 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a^2 < 2|a|.a(1-a) \\ 3a^2 > 2|a|.a(1-a) \end{cases} \quad (*)$$

$$+ \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(a-1) < -3a \\ 2a(1-a) < -3a \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a < 0$$

$$+ \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(a-1) < 3a \\ 2a(1-a) < 3a \end{cases} \Rightarrow 0 < a < \frac{5}{2}$$

Tóm lại: giá trị của a cần tìm là: $-\frac{1}{2} < a < 0 \vee 0 < a < \frac{5}{2}$

Bài 10 Cho $\operatorname{tg}\alpha; \operatorname{tg}\beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (1)

1. Hãy tính giá trị của biểu thức:

$T = \sin^2(\alpha + \beta) + a \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + b \cos^2(\alpha + \beta)$ theo a và b .

2. Cho $a = 7; b = 3$. Hãy tính giá trị của biểu thức:

$Q = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của (1) tương ứng với $a = 7; b = 3$

3. Cho $a = 3m - 3; b = -5m + 12$ (m là tham số). Định m để phương trình có hai nghiệm mà nghiệm này bằng bình phương nghiệm kia.

Giải

1. Tính T :

Phương trình (1) có hai nghiệm $\operatorname{tg}\alpha; \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4b \geq 0$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -a \\ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = b \end{cases}$

Cách 1:

$$\begin{aligned} T &= \sin^2(\alpha + \beta) + a \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + b \cos^2(\alpha + \beta) \\ &= \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\alpha + \beta) + a \sin 2(\alpha + \beta) + (1 + \cos 2(\alpha + \beta))] \\ &= \frac{1}{2} [1 + b + \cos 2(\alpha + \beta)(b - 1) + a \sin 2(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

$$\text{Đặt: } t = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{b - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } T &= \frac{1}{2} \left[1 + b + (b - 1) \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + a \cdot \frac{2t}{1 + t^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + b + \frac{b - 1}{(b - 1)^2 + a^2} [(b - 1)^2 - a^2 + 2a^2] \right] = b \end{aligned}$$

Cách 2:

Ta có: $T = \sin^2(\alpha + \beta) + a \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + b \cos^2(\alpha + \beta)$

$$\Rightarrow T = [1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)] = \frac{\sin^2(\alpha + \beta) + a \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + b \cos^2(\alpha + \beta)}{\cos^2(\alpha + \beta)}$$

$$= \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + a \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + b$$

$$\Rightarrow T = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + a \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + b}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}$$

$$\text{Với } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{a}{b - 1}.$$

$$\text{Thế vào } T \text{ ta được: } T = \frac{\frac{a^2}{(b-1)^2} + a \cdot \frac{a}{b-1} + b}{1 + \frac{a^2}{(b-1)^2}} = b$$

2. Khi $a = 7$; $b = 3$ ta được: $x^2 + 7x + 3 = 0$

Vì $A = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1| \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} A^2 &= (2x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - x_1)^2 + 2|(2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1)| \\ &= 5(x_2 + x_1)^2 - 18x_1 \cdot x_2 + 2|9x_1 \cdot x_2 - 2(x_2 + x_1)^2| \end{aligned}$$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của (2) nên theo định lý Viét ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow A^2 = 5 \cdot 49 - 54 + 2|27 - 98| = 333 \Rightarrow A = \sqrt{333}$$

3. Khi $a = 3m - 3$; $b = -5m + 12$ thì (1) trở thành:

$$x^2 + (3m - 3)x - 5m + 12 = 0 \quad (3)$$

Phương trình (3) có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 2m - 39 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{-1 - \sqrt{352}}{9} \vee m \geq \frac{-1 + \sqrt{352}}{9}$$

$$\text{Theo định lý Viét ta được: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - 3m \\ x_1 \cdot x_2 = 12 - 5m \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể coi: $x_2 = x_1^2$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x_1^3 = 12 - 5m \\ x_1 + x_1^2 = 3 - 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^3 = 36 - 15m \\ 5x_1 + 5x_1^2 = 15 - 15m \end{cases} \Rightarrow 3x_1^3 - 5x_1 - 5x_1^2 = 21$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 3 \Rightarrow 12 - 5m = 27 \Rightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Thử lại:

Khi $m = -3$ thì (3) trở thành: $x^2 - 12x + 27 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{cases} \text{ ta thấy } x_2 = x_1^2$$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = 3$

Bài 11: Cho phương trình: $ax^2 - bx + b = 0$ với $a, b > 0$, có các nghiệm là $x_1; x_2$. Chứng minh rằng tồn tại các số $\alpha_i = \pm 1; (i = 1, 2)$ sao cho:

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \alpha_1 \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + \alpha_2 \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$$

Giải

Từ yêu cầu đề bài suy ra: $x_1; x_2 > 0$

Theo định lý Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

Do đó:
$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1 \cdot x_2}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Nên để thỏa mãn đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \alpha_1 \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + \alpha_2 \sqrt{\frac{b}{a}} = 0 \text{ thì chọn } \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Bài 12: Xét các số thực: a, b, c sao cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0, 1]$. Hãy tính giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$

Giải

Với các số thực a, b, c làm cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $\in [0, 1]$. Gọi hai nghiệm đó là $x_1; x_2$, theo định lý Viet ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ta có:
$$T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\frac{(a-b)(2a-b)}{a^2}}{\frac{a-b+c}{a}} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}}$$

$$= \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1 \cdot x_2}$$

$$= \frac{2(1+x_1+x_2+x_1 \cdot x_2) + x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1 \cdot x_2} = 2 + \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1 \cdot x_2}$$

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$

$$\Rightarrow x_1^2 \leq x_1 \cdot x_2 \Rightarrow 1+x_1+x_2+x_1 \cdot x_2 \geq 1+x_1^2+x_1 \cdot x_2$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_2^2+x_1 \cdot x_2} = 1$$

$$\Rightarrow T \leq 2+1=3 \Rightarrow T_{\max} = 3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1$

Bài 13: Cho phương trình: $x^2 + ax + b - 2 = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$

Giả sử phương trình có nghiệm kép $\alpha \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a^2 + b^2$

Giải

Phương trình có nghiệm kép $\alpha \geq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} \geq 2 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -4 \\ a^2 - 4(b-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -4 \\ b = \frac{1}{4}a^2 + 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó: } A = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{1}{4}a^2 + 2\right)^2 = \frac{1}{16}a^4 + 2a^2 + 4$$

$$A' = \frac{1}{4}a^3 + 4a = a\left(\frac{1}{4}a^2 + 4\right); A' = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Bảng biến thiên

a	$-\infty$	-4	
A'		-	
A	$+\infty$		52

Dựa vào bảng biến thiên ta được: $\min A = 52$ đạt tại $\begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \end{cases}$

Bài 14: Cho phương trình: $x^2 - (3\sin a - \cos a)x - 4 - 4\cos 2a = 0$ (1)

Định a để phương trình có nghiệm sao cho tổng bình phương hai nghiệm của phương trình đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Giải

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = (3 \sin a - \cos a)^2 + 4(4 - 4 \cos 2a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}(1 - \cos 2a) + \frac{1 - \cos 2a}{2} - 3 \sin 2a + 16 + 4 \cos 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 21 - 3 \sin 2a \geq 0 \text{ luôn luôn đúng } \forall a \in \mathbb{R}$$

Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình, ta có:

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (3 \sin a - \cos a)^2 + 2(4 + \cos 2a)$$

$$= \frac{9}{2}(1 - \cos 2a) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) - 3 \sin 2a + 8 + 2 \cos 2a$$

$$= -2 \cos 2a - 3 \sin 2a + 13$$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopski:

$$|-2 \cos 2a - 3 \sin 2a| \leq \sqrt{[(-2)^2 + (-3)^2]}(\sin^2 2a + \cos^2 2a) = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{13} \leq -2 \cos 2a - 3 \sin 2a \leq \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow 13 - \sqrt{13} \leq 13 - 2 \cos 2a - 3 \sin 2a \leq 13 + \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow A_{\max} = 13 + \sqrt{13}; A_{\min} = 13 - \sqrt{13}$$

Bài 15: Cho phương trình: $x^2 + 2(a - 3)x + a - 13 = 0$ (1)

Tìm $a \geq 1$ để nghiệm lớn nhất của phương trình nhận giá trị nhỏ nhất.

Giải

$$\text{Tacó: } \Delta = \left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt: $x_1; x_2$

Gọi nghiệm lớn nhất của phương trình là:

$$x_2 = 3 - a + \sqrt{a^2 - 7a + 22}$$

$$x_2 = -1 + \frac{2a - 7}{2\sqrt{a^2 - 7a + 22}} = \frac{2a - 7 - 2\sqrt{a^2 - 7a + 22}}{2\sqrt{a^2 - 7a + 22}}$$

$$x_0 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 - 7a + 22} = 2a - 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 7 \geq 0 \\ 4(a^2 - 7a + 22) = 4a^2 - 28a + 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{7}{2} \\ 88 = 49 \end{cases} \text{ vô nghiệm } \Rightarrow x_2 < 0 \quad \forall a \geq 1$$

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
x'_2		-
x_2	6	

Dựa vào bảng biến thiên $(x_2)_{\min}$ không tồn tại a.

Vậy không có giá trị $a \geq 1$ thỏa đề.

- ♦ **Chú ý:** Với bài toán trên thì nghiệm lớn nhất nhận giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a = 1$ khi đó $a_{\max} = 6$

Với câu hỏi như vậy ta có thể làm cách khác như sau:

Gọi x_0 là nghiệm lớn nhất của phương trình thì:

$$x_0^2 + 2(a-3)x_0 + a - 13 = 0 \Leftrightarrow (2x_0 + 1)a = 13 + 6x_0 - x_0^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{13 + 6x_0 - x_0^2}{(2x_0 + 1)} \quad (\text{vì } x_0 = -\frac{1}{2} \text{ không là nghiệm của (1)})$$

$$\text{Vì } a \geq 1 \Rightarrow \frac{13 + 6x_0 - x_0^2}{(2x_0 + 1)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{12 + 4x_0 - x_0^2}{2x_0 + 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \leq -2 \\ -\frac{1}{2} < x_0 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow (x_0)_{\max} = 6$$

Khi $(x_0)_{\max} = 6$ thế vào phương trình ta được: $a = 1$

Bài 16: Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình:

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 2 = 0$$

có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa: $0 < x_1 < 2$ hay $2 < x_2 < 5$

Giải

Ta có: $\Delta = 9 > 0 \quad \forall m \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$\begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 2 \end{cases} \quad \text{Rõ ràng } x_1 < x_2 \quad \forall m$$

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m - 1 < 2 \\ 2 < m + 2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 3 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $1 < m < 3$.

Bài 17: Cho phương trình: $x^2 - 2|9 - \log_3 m|x + 3|9 - \log_3 m| = 0$

Định các giá trị để một trong các nghiệm của phương trình lớn hơn 3 còn nghiệm kia nhỏ hơn 3.

Giải

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow x_1 < 3 < x_2 \Leftrightarrow f(3) < 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 6|9 - \log_3 m| + 3|9 - \log_3 m| < 0$$

$$\Leftrightarrow |9 - \log_3 m| > 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - \log_3 m < -3 \\ 9 - \log_3 m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 m > 12 \\ \log_3 m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3^{12} \\ m > 3^6 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < m < 3^6 \\ m > 3^{12} \end{cases}$ là các giá trị m cần tìm.

Bài 18: Cho hai phương trình: $x^2 + 3x + 2a = 0$ và $x^2 + 6x + 5a = 0$
Định a để hai phương trình có nghiệm xen kẽ nhau.

Giải

Đặt $f(x) = x^2 + 3x + 2a$; $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$

$g(x) = x^2 + 6x + 5a$; $g(x) = 0$ có hai nghiệm $x_3; x_4$

Hai phương trình có nghiệm xen kẽ nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_3 < x_2 < x_4 \\ x_3 < x_1 < x_4 < x_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(x_3).f(x_4) < 0 \Leftrightarrow (x_3^2 + 3x_3 + 2a)(x_4^2 + 3x_4 + 2a) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x_3.x_4)^2 + 3x_3.x_4(x_3 + x_4) + 2a(x_3^2 + x_4^2) + 9x_3.x_4 + 6a(x_3 + x_4) + 4a^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 - 9a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $0 < a < 1$.

Bài 19: Tìm $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho phương trình: $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn: $-2 < x_1 < -1$ và $1 < x_2 < 2$

Giải

Theo điều kiện đề bài:

$$\begin{cases} -2 < x_1 < -1 \\ 1 < x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x_1 + x_2 < 1 \\ -4 < x_1.x_2 < -1 \end{cases}$$

$$\text{Theo định lý Viet: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1.x_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < -a < 1 \\ -4 < b < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -4 < b < -1 \end{cases}$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 0$ và $b = \{-3, -2\}$

+ Nếu $\begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ có nghiệm } x = \pm\sqrt{3} \text{ thỏa mãn đề bài.}$

+ Nếu $\begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ có nghiệm } x = \pm\sqrt{2} \text{ thỏa mãn đề bài.}$

Vậy các giá trị của a, b cần tìm là: $\begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$

Bài 20: Định m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

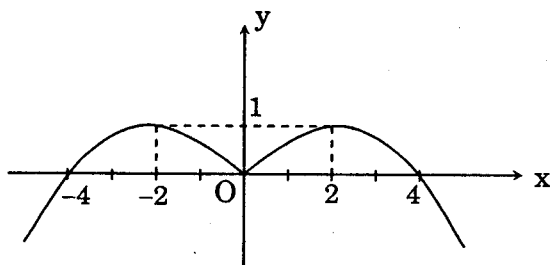
$$\frac{1}{4}x^2 - |x| + m = 0 \quad (1)$$

Giải

Cách 1:

Phương trình (1) $\Leftrightarrow m = |x| - \frac{1}{4}x^2$

Vẽ Parabol (P): $y = |x| - \frac{1}{4}x^2 = \begin{cases} -x - \frac{1}{4}x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$



Dựa vào đồ thị suy ra: phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt (P): $y = |x| - \frac{1}{4}x^2$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $0 < m < 1$.

Cách 2: Dùng công thức so sánh nghiệm:

Đặt $t = |x| \geq 0$

(1) trở thành $f(t) = \frac{1}{4}t^2 - t + m = 0 \quad (2)$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m > 0 \\ 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Bài 21: Cho phương trình: $(m+1)(\sqrt{x}+1)^2 - 2m(\sqrt{x}+1) + 2m = 0$ (1)

Định m để phương trình có một nghiệm thuộc $[0, 4]$

Giải

Đặt $t = \sqrt{x} + 1$; với $0 \leq x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq t \leq 3$

Phương trình (1) trở thành: $(m+1)t^2 - 2mt + 2m = 0$ (2)

- Ứng với một nghiệm $t \in [1, 3]$ thì phương trình $t = \sqrt{x} + 1$ có đúng một nghiệm $x \in [0, 4]$ nên:
- + Phương trình (1) có một nghiệm $x \in [0, 4]$ thì (2) có một nghiệm $t \in [1, 3]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ t_0 = \frac{m}{m+1} \in [1, 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \\ 1 \leq \frac{m}{m+1} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy $m = -2$ thỏa mãn đề bài.

- + Phương trình (2) có nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} t_1 < 1 \leq t_2 < 3 \\ 1 < t_1 \leq 3 < t_2 \end{cases}$$

- Nếu (2) có nghiệm $t_1 = 1$ thì từ (2) $m+1-2m+2m=0 \Rightarrow m=-1$, giá trị này không thỏa mãn (vì $m \neq 1$)
- Nếu (2) có nghiệm $t_2 = 3$ thì từ (2) $\Rightarrow 5m+9=0 \Rightarrow m=-\frac{9}{5}$

Với $m = -\frac{9}{5}$ thì (2) trở thành $-\frac{4}{5}t^2 + \frac{18}{5}t - \frac{18}{5} = 0$

$$\Leftrightarrow -2t^2 + 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 3 \\ t_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (loại vì } t_1 \notin [1, 3])$$

- Còn lại phương trình (2) có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} t_1 < 1 \leq t_2 < 3 \\ 1 < t_1 \leq 3 < t_2 \end{cases} \Leftrightarrow f(1).f(3) < 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(5m+9) < 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{5} < m < -1$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $-\frac{9}{5} < m < -1 \vee m = -2$

Bài 22: Cho phương trình: $\sin 3x - m \cos 2x - (m + 1) \sin x + m = 0$ (1)

Định m để phương trình có đúng tám nghiệm $\in (0, 3\pi)$

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \sin x (4 \sin^2 x - 2m \sin x + m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 4 \sin^2 x - 2m \sin x + m - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Khi } 0 < x < 3\pi \Rightarrow 0 < k\pi < 3\pi \Leftrightarrow 0 < k < 3 \Rightarrow k = [1, 2]$$

$$\Rightarrow \text{nghiệm } x = \{\pi, 2\pi\}$$

$$\text{Đặt: } t = \sin x; -1 \leq t \leq 1$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành: } 4t^2 - 2mt + m - 2 = 0 \quad (3)$$

- + Ứng với một nghiệm $t_1 \in (0, 1)$ thì phương trình $t = \sin x$ có đúng bốn nghiệm $x \in (0, 3\pi)$

- + Ứng với một nghiệm $t_2 \in (-1, 0)$ thì phương trình $t = \sin x$ có đúng hai nghiệm $x \in (0, 3\pi)$ nên để (1) có đúng tám nghiệm $x \in (0, 3\pi)$ thì (2) có đúng sáu nghiệm $x \in (0, 3\pi)$ và khác các nghiệm số π và 2π . Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn: $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$; hoặc nghiệm $t_1 \in (0, 1)$ còn $t_2 = 1$.

- a. Nếu phương trình có nghiệm $t_2 = 1$ thì từ (3) $\Rightarrow 4 - 2m + m - 2 = 0$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ khi } m = 2 \text{ thì (3) trở thành: } 4t^2 - 4t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \notin (0, 1) \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

- b. Phương trình (3) có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa: $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \\ f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ 2 - m > 0 \\ 3m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < 2$$

$$\text{Vậy giá trị của } m \text{ cần tìm là: } -\frac{2}{3} < m < 2$$

Bài 23: Định a để phương trình sau có nghiệm nguyên:

$$x^2 - (3 + 2a)x + 40 - a = 0 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Phương trình (1) có: } \Delta = (3 + 2a)^2 - 4(40 - a) = 4a^2 + 16a - 151$$

Để (1) có nghiệm nguyên thì điều kiện cần là: Δ phải là chính phương.

$$\Rightarrow \Delta = n^2 \Rightarrow 4a^2 + 16a - 151 = n^2 \text{ (với } n \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow (2a + 4)^2 - n^2 = 167 \Leftrightarrow (2a + 4 - n)(2a + 4 + n) = 167 \quad (*)$$

Vì 167 là số nguyên tố nên đẳng thức (*) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4 - n = 1 \\ 2a + 4 + n = 167 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2a + 4 - n = -167 \\ 2a + 4 + n = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4 - n = -1 \\ 2a + 4 + n = -167 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -44 \\ n = 83 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 40 \\ a = -43,5 \text{ (loại vì } n \notin \mathbb{Z}) \end{cases} \Rightarrow \text{giá trị của } a \text{ là: } a = 40 \vee a = -44$$

Kiểm tra:

$$+ \text{ Khi } a = 40 \text{ thì (1)} \Leftrightarrow x^2 - 83x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 83 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$+ \text{ Khi } a = -44 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -84 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Kết luận: Giá trị của a cần tìm là: $a = 40$; $a = -44$

Bài 24: Cho phương trình: $mx^2 - mqx + q = 0$ ($m \neq 0$)

1. Định hệ thức liên hệ giữa m và q để hai nghiệm của phương trình trên là: sin và tang của cùng một góc α .
2. Tính m theo α .
3. Cho $mq = -\frac{1}{2}$. Tính α .

Giải

1. Gọi hai nghiệm của phương trình là $x_1; x_2$.

Theo định lý Viét ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = q \\ x_1 \cdot x_2 = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = q \\ m = \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = q \quad (*) \\ m = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Thế vào (*) ta được:

$$\frac{\frac{2}{m}}{1 + \frac{1}{m^2}} + 2 \frac{\frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{m^2}} = q \Leftrightarrow 4m^3 = q(m^4 - 1)$$

(Đây là hệ thức liên hệ giữa q và m)

2. Theo trên ta được: $m = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \cot g \frac{\alpha}{2}$

3. Khi $mq = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = -\frac{1}{2m} = -\frac{1}{2 \cot g \frac{\alpha}{2}}$

Theo đẳng thức ở câu (1)

$$4m^3 = q(m^4 - 1) \Leftrightarrow 4 \cot g^3 \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2 \cot g \frac{\alpha}{2}} \left(\cot g^4 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow 9 \cot g^4 \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \cot g \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Vậy góc α cần tìm là: $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Bài 25: Gọi x_0 là nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

a. Chứng minh rằng: $|x_0| \leq 1 + \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|; \left| \frac{c}{a} \right| \right\}$

b. Chứng minh rằng: $|x_0| \leq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|} (a, b \neq 0)$

Giải

a. Chứng minh rằng: $|x_0| \leq 1 + \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|; \left| \frac{c}{a} \right| \right\}$

Ta có: $1 + \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|; \left| \frac{c}{a} \right| \right\} \geq 1$ nên:

+ Nếu $|x_0| \leq 1$ thì bất đẳng thức (1) luôn đúng.

+ Xét $|x_0| > 1$:

• x_0 là nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

$$\Rightarrow -ax_0^2 = bx_0 + c \Leftrightarrow -x_0^2 = \frac{b}{a}x_0 + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow |x_0|^2 = \left| \frac{b}{a}x_0 + \frac{c}{a} \right| \leq \left| \frac{b}{a}x_0 \right| + \left| \frac{c}{a} \right| = \left| \frac{b}{a} \right| |x_0| + \left| \frac{c}{a} \right|$$

Đặt: $M = \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|; \left| \frac{c}{a} \right| \right\}$ thì: $|x_0|^2 \leq \left| \frac{b}{a} \right| |x_0| + \left| \frac{c}{a} \right| \leq M(|x_0| + 1)$

Mặt khác: $M(|x_0| + 1) = M \cdot \frac{x_0^2 - 1}{|x_0| - 1} < M \frac{x_0^2}{|x_0| - 1}$

Suy ra: $|x_0|^2 \leq M \frac{x_0^2}{|x_0| - 1} \Rightarrow 1 \leq \frac{M}{|x_0| - 1} \Rightarrow |x_0| \leq M + 1$

Hay $|x_0| \leq 1 + \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|; \left| \frac{c}{a} \right| \right\} \Rightarrow$ (đpcm)

b. Chứng minh rằng: $|x_0| \leq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|} = 2 \left| \frac{c}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right|$

Giả sử một trong hai nghiệm của phương trình là: $x_0 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\Rightarrow |x_0| = \left| \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{b}{a} \right| + \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right|$$

$$\Rightarrow |x_0| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{b}{a} \right| + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Cần chứng minh: $\frac{1}{2} \left| \frac{b}{a} \right| + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \leq 2 \left| \frac{c}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \quad (*)$

Thật vậy, bất đẳng thức (*)

$$\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \leq \frac{1}{2} \left| \frac{b}{a} \right| + 2 \left| \frac{c}{b} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \leq \frac{b^2}{4a^2} + 2 \left| \frac{c}{a} \right| + 4 \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow -\frac{c}{a} \leq 2 \left| \frac{c}{a} \right| + 4 \frac{c^2}{b^2}$$

Rõ ràng bất đẳng thức này luôn đúng. Vậy: $|x_0| \leq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|}$ (đpcm)

Bài 26: Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng điều kiện: $(k+1)^2 ac - kb^2 = 0$ ($k \neq 0$) là điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm, trong đó nghiệm này bằng k lần nghiệm kia.

Giải

Giả sử phương trình trên có nghiệm; nghiệm này bằng k lần nghiệm kia:

$$\begin{cases} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (1 + k^2) - k(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (1 + k^2) - k(x_1 + x_2)^2 + 2kx_1 \cdot x_2 = 0$$

Theo định lý Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$x_1 \cdot x_2 (1 + k^2) - k(x_1 + x_2)^2 + 2kx_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a}(1 + k^2) - k\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2k \cdot \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow ac(1 + k^2) - kb^2 + 2kac = 0 \Leftrightarrow ac(k + 1)^2 - kb^2 = 0$$

Đảo lại: Khi $ac(k + 1)^2 - kb^2 = 0 \Rightarrow ac = \frac{kb^2}{(k + 1)^2}$

Ta có:
$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \frac{kb^2}{(k + 1)^2}$$

$$= b^2 \frac{[(k + 1)^2 - 4k]}{(k + 1)^2} = \frac{b^2}{(k + 1)^2} (k + 1)^2 \geq 0 \quad \forall k \neq -1$$

Suy ra phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$

CHUYÊN ĐỀ 6: QUAN HỆ NGHIỆM CỦA HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Các bài toán

a. **Bài toán 1:** Cho hai phương trình bậc hai:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \quad (2)$$

Tìm các giá trị của tham số m để (1) và (2) có nghiệm chung.

Phương pháp:

- Bước 1:** Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì:

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

- Bước 2:** Giải hệ trên tìm x_0 . Suy ra m.
- Bước 3:** Thế giá trị của m vào (1); (2) để kiểm tra.

b. Bài toán 2:

Tìm các giá trị của tham số m để (1) và (2) có nghiệm sao cho một nghiệm của phương trình (1) bằng k lần một nghiệm của phương trình (2)

Phương pháp

- Bước 1: Gọi x_0 là một nghiệm của (2) thì kx_0 ($k \neq 0$) là một nghiệm của (1). Khi đó, x_0 là nghiệm của hệ.

$$\begin{cases} a_2 x_0^2 + b_2 x_0 + c_2 = 0 \\ a_1 (kx_0)^2 + b_1 (kx_0) + c_1 = 0 \end{cases}$$

- Bước 2: Giải hệ trên tìm x_0 . Suy ra m .
- Bước 3: Lấy giá trị của m thế vào (1) và (2) để kiểm tra.

c. Bài toán 3

Tìm các giá trị của tham số m để (1) và (2) tương đương

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa vì hai phương trình tương đương.

2. Bài tập

Bài 1: Cho hai phương trình: $x^2 + x - m = 0$ (1)

$$x^2 - mx + 1 = 0 \quad (2)$$

Định m để phương trình (1) và (2) có nghiệm chung.

Giải

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì x_0 thỏa hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 - m = 0 \quad (*) \\ x_0^2 - mx_0 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1+m)x_0 - (m+1) = 0 \quad (3)$$

- + Nếu $m = -1$ thì (3) nghiệm đúng với $\forall x_0$

nhưng khi $m = -1$ thì phương trình (1): $x^2 + x + 1 = 0$

và phương trình (2): $x^2 + x + 1 = 0$

Hai phương trình này vô nghiệm nên $m = -1$ không thỏa mãn.

- + Nếu $m \neq -1$ thì (3) có nghiệm duy nhất $x_0 = 1$

Khi $x_0 = 1$ thế vào (*) ta được: $m = 2$

- Với $m = 2$ thì từ (1): $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

và (2): $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 1$

Ta thấy $x_1 = x_3 = 1$ nên $m = 2$ thỏa đề.

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m = 2$

Bài 2: Cho hai phương trình:

$$x^2 - (2m + 1)x + 2m + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{và } x^2 - 2mx + m + 1 = 0 \quad (2)$$

Định m để hai phương trình có nghiệm chung.

Giải

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì x_0 thỏa hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 - (2m + 1)x_0 + 2m + 2 = 0 \\ x_0^2 - 2mx_0 + m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = m + 1$$

Khi $x_0 = m + 1$ thế vào (3) ta được:

$$(m + 1)^2 - 2m(m + 1) + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 2$$

+ Với $m = -1$ ta được: (1) $\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$$

$\Rightarrow$ nghiệm chung $x = 0 \Rightarrow m = -1$ thỏa đề.

+ Với $m = 2$ ta được: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$\Rightarrow$ nghiệm chung $x = 3 \Rightarrow m = 2$ thỏa đề.

Vậy phương trình (1) và (2) có nghiệm chung $\Leftrightarrow m = -1 \vee m = 2$

Bài 3: Cho hai phương trình:

$$x^2 + (3m + 1)x + 2m + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{và } x^2 + 2(m + 1)x + 3m + 1 = 0 \quad (2)$$

Định m để hai phương trình trên có nghiệm chung.

Giải

Gọi α là nghiệm chung của hai phương trình thì α phải thỏa hệ:

$$\begin{cases} \alpha^2 + (3m + 1)\alpha + 2m + 2 = 0 \\ \alpha^2 + 2(m + 1)\alpha + 3m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)\alpha = m - 1 & (3) \\ \alpha^2 + 2(m - 1)\alpha + 3m + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

+ Nếu $m = 1$ thì (3) vô số nghiệm: từ (4) $\Rightarrow \alpha = -2$

+ Nếu $m \neq 1$ thì (3) có nghiệm duy nhất: $\alpha = 1$ thế vào (4) ta được:

$$5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{5}$$

Tóm lại: Các giá trị của m cần tìm là: $m = 1 \vee m = -\frac{4}{5}$

Bài 4: Cho hai phương trình: $x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 + bx + 2 = 0$

1. Tìm điều kiện của a, b để hai phương trình có nghiệm chung.
2. Với điều kiện trên, tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |a| + |b|$

Giải

1. Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì x_0 thỏa hệ:

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 & (1) \\ x_0^2 + bx_0 + 2 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow (a - b)x_0 = 1 \quad (*)$$

+ Nếu $a = b$ thì phương trình (*) vô nghiệm nên (1) và (2) không có nghiệm chung.

+ Nếu $a \neq b$ thì (*) $\Rightarrow x_0 = \frac{1}{b - a}$ thế vào (1) ta được:

$$\frac{1}{(a - b)^2} + \frac{a}{a - b} + 1 = 0 \Rightarrow 2a^2 + b^2 - 3ab + 1 = 0 \quad (**)$$

Với điều kiện (**) ta kiểm tra lại hai phương trình (1) và (2) luôn có nghiệm chung x_0 .

2. Tìm min $A = |a| + |b|$

Từ đẳng thức (**) $\Rightarrow 3ab = 2a^2 + b^2 + 1 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow |a| \cdot |b| = ab$

Lại có: $A = |a| + |b| \Rightarrow |b| = A - |a|$

Từ (**) $\Rightarrow 2|a|^2 - 3|a| \cdot |b| + b^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2|a|^2 - 3|a|(A - |a|) + (A - |a|)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6|a|^2 - 5A|a| + A^2 + 1 = 0$$

Đặt $y = |a|; y > 0$

Thì: $6y^2 - 5A.y + A^2 + 1 = 0$

Định A để phương trình này có nghiệm tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 \geq 24 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow A \geq 2\sqrt{6}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 6y^2 - 10\sqrt{6}y + 25 = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5\sqrt{6}}{6} \\ a = -\frac{5\sqrt{6}}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{7\sqrt{6}}{6} \\ b = -\frac{7\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min A = 2\sqrt{6} \text{ đạt được } \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5\sqrt{6}}{6} \\ b = \frac{7\sqrt{6}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{5\sqrt{6}}{6} \\ b = -\frac{7\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Bài 5: Cho hai phương trình: $x(x-1) = m+1$ (1)

$$\text{và } x^4 + (x+1)^2 = m^2 \quad (2)$$

Định m để hai phương trình có nghiệm chung.

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2 - (x+1) = m$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = x^2 \geq 0 \\ b = x+1 \end{cases} \Rightarrow a = (b-1)^2 \quad (*)$$

$$\text{Khi đó (1) và (2) trở thành: } a - b = m \quad (3)$$

$$\text{và } a^2 + b^2 = m^2 \quad (4)$$

Xét hệ gồm:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a - b = m \\ a^2 + b^2 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = m \\ 2(a^2 + b^2) = 2m^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = m \\ (a-b)^2 + (a+b)^2 = 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = m \\ (a+b)^2 = m^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = m \\ a + b = \pm m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = m \\ a + b = m \end{cases} \vee \begin{cases} a - b = m \\ a + b = -m \end{cases} \end{aligned}$$

$$1. \text{ Với } \begin{cases} a - b = m \\ a + b = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m \\ b = 0 \end{cases} \text{ thế vào (*) ta được: } m = 1$$

$$\text{Khi } m = 1 \text{ thì: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ (nghiệm chung)}$$

$\Rightarrow m = 1$ thỏa đề.

$$2. \text{ Với } \begin{cases} a - b = m \\ a + b = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -m \end{cases}$$

$$(m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$\Rightarrow m = -1$ thỏa đề.

$$\text{Vậy phương trình (1) và (2) có nghiệm chung } \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Bài 6: Chứng minh rằng: nếu hai phương trình:

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ và } x^2 + cx + d = 0$$

Có nghiệm chung thì: $(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0$ (với $a \neq c$)

Giải

Gọi α là nghiệm chung của hai phương trình thì α thỏa hệ:

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 & (1) \\ \alpha^2 + c\alpha + d = 0 \end{cases} \Rightarrow (a - c)\alpha + b - d = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{d - b}{a - c} \quad (a \neq c)$$

Thế $\alpha = \frac{d - b}{a - c}$ vào (1) ta được: $\left(\frac{d - b}{a - c}\right)^2 + \alpha \cdot \frac{d - b}{a - c} + b = 0$

$$\Leftrightarrow (b - d)^2 + a(d - b)(a - c) + b(a - c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - d)^2 + (a - c)(ad - ba + ab - bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 7: Cho hai phương trình: $x^2 - 2mx + 4m = 0$ (1)

và $x^2 - mx + 10m = 0$ (2)

Định m để phương trình (1) và (2) có nghiệm; trong đó một nghiệm của phương trình (2) bằng hai lần một nghiệm của phương trình (1).

Giải

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_1 = m^2 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_2 = m^2 - 40m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 40 \end{cases}$

$\Rightarrow$ giá trị chung: $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 40 \end{cases} \quad (*)$

Gọi α là một nghiệm của phương trình (1) thì (2α) là một nghiệm của phương trình (2). Do đó, ta có hệ:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 2m\alpha + 4m = 0 \\ (2\alpha)^2 - m(2\alpha) + 10m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2m\alpha + 4m = 0 \\ 4\alpha^2 - 2m\alpha + 10m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\alpha = m & (1) \\ \alpha^2 - 2m\alpha + 4m = 0 & (2) \end{cases}$$

- + Nếu $m = 0$ thì (3) nghiệm đúng còn (4) có nghiệm $\alpha = 0$; thỏa điều kiện (*)
 $\Rightarrow m = 0$ nhận
- + Nếu $m \neq 0$ thì (3) nghiệm duy nhất $\alpha = 1$ thế vào (4) ta được:

$$2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ thỏa (*)}$$

Vậy: Các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $m = 0 \vee m = -\frac{1}{2}$

Bài 8: Giả sử hai phương trình:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \text{ và } a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

có nghiệm chung (ít nhất một nghiệm).

Chứng minh rằng: $(a_1c_2 - a_2c_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(c_2b_1 - c_1b_2)$

Giải

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình đã cho thì x_0 thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = 0 & (1) \\ a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2a_1x_0^2 + a_2b_1x_0 + a_2c_1 = 0 & (3) \\ a_1a_2x_0^2 + a_1b_2x_0 + a_1c_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0(a_2b_1 - a_1b_2) + a_2c_1 - a_1c_2 = 0 \text{ (*) (lấy (3) - (4))}$$

Nhân (1) với b_2 và nhân (2) với b_1 ta được:

$$\begin{cases} a_1b_2x_0^2 + b_1b_2x_0 + c_1b_2 = 0 \\ a_2b_1x_0^2 + b_2b_1x_0 + c_2b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)x_0^2 + c_1b_2 - c_2b_1 = 0 \text{ (**)}$$

Từ (*) $\Rightarrow x_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$ thế vào (**) ta được: $(a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0)$

$$(a_1b_2 - a_2b_1) \left[\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2} \right]^2 = c_2b_1 - c_1b_2$$

$$\Leftrightarrow (a_1c_2 - a_2c_1)^2 = (c_2b_1 - c_1b_2)(a_1b_2 - a_2b_1) \text{ (đpcm)}$$

Bài 9: Cho hai phương trình:

$$ax^2 + (a - b)x + b = 0 \quad (1)$$

và $bx^2 + (b - a)x + a = 0 \quad (2)$

Định các cặp số (a, b) sao cho hai phương trình trên là tương đương nhau.

Giải

1. Nếu $a = 0$ thì: $(1) \Leftrightarrow -bx + b = 0 \quad (3)$

$$(2) \Leftrightarrow bx^2 + bx = 0 \quad (4)$$

a. Nếu $b = 0$ thì (3) và (4) đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên: $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ thỏa đề.

b. Nếu $b \neq 0$ thì (4) có nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ nhưng $x = 0$ không thỏa mãn đề bài.

Vậy cặp $(0, b)$ với $b \neq 0$ không thỏa mãn đề bài.

2. Nếu $b = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow ax^2 + ax = 0$; $(2) \Leftrightarrow -ax + a = 0$

Lý luận như trên ta cũng được cặp: $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ thỏa mãn đề.

3. Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ Ta có: $\Delta_1 = \Delta_2 = (a - b)^2 - 4ab$

a. Nếu $(a - b)^2 - 4ab < 0 \Leftrightarrow a^2 - 6ab + b^2 < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 2\sqrt{2}b < a < 3b + 2\sqrt{2}b \text{ nếu } b > 0 \\ 3b + 2\sqrt{2}b < a < 3b - 2\sqrt{2}b \text{ nếu } b < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} < \frac{a}{b} < 3 + 2\sqrt{2} \text{ thì cả hai phương trình đều vô nghiệm nên}$$

chúng tương đương nhau.

Suy ra cặp (a, b) với $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ và $3 - 2\sqrt{2} < \frac{a}{b} < 3 + 2\sqrt{2}$ thỏa mãn đề toán.

$$\text{b. Nếu } \begin{cases} \frac{a}{b} \geq 3 + 2\sqrt{2} \\ \frac{a}{b} \leq 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (*)$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình (2)

Đề (1) và (2) tương đương nhau thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a-b}{a} = -\frac{b-a}{b} \\ \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow b = \pm a$$

Kết hợp với điều kiện $(*) \Rightarrow b = -a$

$\Rightarrow$ cặp (a, b) thỏa mãn là: $(\alpha; -\alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$

Kết hợp: Hai phương trình (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (a, b) = (\alpha, -\alpha) \text{ với } \alpha \in \mathbb{R} \\ (a, b) = (\alpha, \beta) \text{ với } \begin{cases} \alpha \neq 0 \text{ và } \beta \neq 0 \\ 3 - 2\sqrt{2} < \frac{\alpha}{\beta} < 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Bài 10: Xác định a, b, c sao cho phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1) \text{ tương đương với hệ: } \begin{cases} bx^2 + cx + a = 0 \\ cx^2 + ax + b = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Giải

1. Nếu phương trình (1) có nghiệm, để (1) và (2) tương đương thì điều kiện cần

$$\text{là: hệ } \begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ bx^2 + cx + a = 0 \\ cx^2 + ax + b = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Cộng vế theo vế ba phương trình trên ta được:

$$(a + b + c)x^2 + (a + b + c)x + a + b + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0 \text{ (vì } x^2 + x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow b = -a - c. \text{ Từ (1) ta được: } ax^2 - x(a + c) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(ax - c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ax - c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cũng từ: } a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ a = -b - c \end{cases} \text{ nên từ (2) ta được:}$$

$$\begin{cases} bx^2 - (a + b)x + a = 0 \\ cx^2 - (b + c)x + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(bx - a) = 0 \\ (x - 1)(cx - b) = 0 \end{cases}$$

a. Nếu $a = b = c$ thì (1) đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ nên (1) và (2) tương đương nhau.

b. Nếu $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ (3 số a, b, c không đồng thời bằng 0)

Do $a + b + c = 0$ thì phải có ít nhất 2 số khác 0.

$$\text{Giả sử hai số là } \begin{cases} b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \text{ thì từ (2) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{a}{b} \\ x = \frac{b}{c} \end{cases}$$

+ Nếu $a = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = 1$ và (1) $\Leftrightarrow x = 1$ nên (1) và (2) tương đương nhau.

Suy ra: $\begin{cases} a = 0; b \neq 0; c \neq 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$ thỏa mãn đề bài.

$$+ \text{ Nếu } a \neq 0 \text{ thì (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Do đó (1) và (2) tương đương nhau $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{a} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow a = b = c$ mà $a + b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ vô lý.

$$2. \text{ Nếu (1) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0; c \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ thì } b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

$$a. \text{ Trường hợp } a = b = 0; c \neq 0 \text{ thì từ (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} cx = 0 \\ cx^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Do đó (1) và (2) không tương đương nhau.

$$b. \text{ Trường hợp } a \neq 0 \text{ và } b^2 - 4ac < 0$$

$$+ \text{ Nếu } b = 0 \text{ thì (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} cx + a = 0 \\ cx^2 + ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cx + a = 0 \\ x = 0 \\ cx + a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ cx + a = 0 \text{ vô lý vì } a \neq 0 \Leftrightarrow cx + a = 0. \\ cx + a = 0 \end{cases}$$

Phương trình này luôn có nghiệm vì nếu $c = 0$ thì $b^2 < 0$ là điều vô lý.

Do đó (2) có nghiệm nên trường hợp này (1) và (2) không tương đương nhau.

$$+ \text{ Nếu } b \neq 0 \text{ thì từ điều kiện } b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow c \neq 0. \text{ Khi đó (2) vô nghiệm.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - 4ab < 0 \\ a^2 - 2bc < 0 \\ \begin{cases} c^2 - 4ab \geq 0 \\ a^2 - 4ab \geq 0 \end{cases} \quad (3) \\ bx^2 + cx + a = 0 \text{ và } cx^2 + ax + b \text{ không có nghiệm chung} \end{cases}$$

$$\text{Hệ (3)} \begin{cases} c^2 - 4ab \geq 0 \\ a^2 - 4bc \geq 0 \\ b(b^2 - ac)^2 + c(b^2 - ac)(c - ab) + a(c^2 - ab)^2 \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Tóm lại: (1) và (2) tương đương nhau khi và chỉ khi:

1. $a = b = c = 0$
2. $a + b + c = 0$ trong đó có hai số hạng khác 0 và một số hạng bằng 0
3. $c^2 - 4ab < 0 \vee a^2 - 4ab < 0; a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$
4. $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$ và thỏa (4)

Bài 11: Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có đúng một nghiệm dương là x_1 . Chứng minh rằng phương trình: $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương là x_2 . Chứng minh rằng: $x_1 + x_2 \geq 2$

Giải

Phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có đúng một nghiệm dương nên $P = ac < 0$

Từ đó phương trình: $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương.

Do x_1 là nghiệm của phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ nên: } ax_1^2 + bx_1 + c = 0$$

Hơn nữa $x_1 > 0$ nên: $a + b \frac{1}{x_1} + c \frac{1}{x_1^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} \text{ là nghiệm của phương trình: } cx^2 + bx + a = 0 \quad (1)$$

Mặt khác: $x_1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > 0$ mà phương trình (1) chỉ có một nghiệm dương

nên nghiệm dương đó là: $x_2 = \frac{1}{x_1}$

Vì vậy: $x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$ (theo bất đẳng thức Côsi)

$$\Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 12: Cho hai phương trình:

$$x^2 - 12x + m = 0 \quad (1)$$

và $x^2 - 48x + q = 0 \quad (2)$

Giả sử (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$; (2) có 2 nghiệm $x_3; x_4$.

- a. Các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng. Tìm m, q.
- b. Các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng. Tìm m, q.

Giải

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 36 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 36$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 576 - q \geq 0 \Leftrightarrow q \leq 576$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$ và $\begin{cases} x_3 + x_4 = 48 \\ x_3 \cdot x_4 = q \end{cases}$

- a. Gọi công bội của cấp số nhân đó là: d , theo tính chất của cấp số nhân ta có:

$$x_2 = dx_1; x_3 = d^2x_1 \text{ và } x_4 = d^3x_1$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_3 + x_4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + dx_1 = 12 \\ d^2x_1 + d^3x_1 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(1+d) = 12 \\ x_1(d^2 + d^3) = 48 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2(1+d)}{1+d} = 4 \Rightarrow d = \pm 2$$

Do đề cho là cấp số nhân tăng nên ta chọn $d = 2$.

$$\text{Với } d = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_3 = 4x_1 \\ x_4 = 8x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4; x_2 = 8; x_3 = 16; x_4 = 32$$

Suy ra: $m = 32; q = 512$

- b. Gọi P là công sai của cấp số cộng thì:

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = P \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + P \\ x_3 = x_1 + 2P \\ x_4 = x_1 + 3P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_3 + x_4 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + P = 12 \\ 2x_1 + 5P = 48 \end{cases} \Rightarrow P = 9$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = \frac{21}{2}; x_3 = \frac{39}{2}; x_4 = \frac{57}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{63}{4} \\ q = \frac{2223}{4} \end{cases}$$

Bài 13: Cho các phương trình:

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + bx + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + cx + 1 = 0 \quad (3)$$

Biết rằng một nghiệm của (1) với một nghiệm nào đó của phương trình (2) là nghiệm của phương trình (3).

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$

Giải

Gọi x_1 là một nghiệm của phương trình (1)

x_2 là một nghiệm của phương trình (2)

Thì $x_1 \cdot x_2$ là một nghiệm của phương trình (3)

Áp dụng định lý Viét cho phương trình (1) ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 = -a \\ x_1 \cdot x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} = -a \quad (4)$$

Tương tự đối với phương trình (2) và (3) ta cũng được:

$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{x_2} = -b \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} = -c \end{cases} \quad (6)$$

Lấy (4) nhân (5) vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) &= ab \Leftrightarrow x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = ab \\ &\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = ab + c \text{ (Theo (6))} \end{aligned}$$

$$\text{Từ (4) và (5) ta được: } \begin{cases} \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 = a^2 \\ \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} = a^2 - 2 \\ x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} = b^2 - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2)(b^2 - 2) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}\right) = x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{x_1^2 x_2^2} + \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

$$= \left(x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 - 4 = c^2 + (ab + c)^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2)(b^2 - 2) = c^2 + (ab + c)^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 b^2 - 2(a^2 + b^2) + 4 = c^2 + a^2 b^2 + 2abc + c^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 \text{ (đpcm)}$$

CHUYÊN ĐỀ 7: CÁC ỨNG DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp: Từ một đẳng thức $T = f(x, y)$, ta biến đổi về phương trình bậc hai. Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

2. Tìm max; min của hàm số

Phương pháp

- Từ hàm số $y = f(x)$, đưa về một phương trình bậc hai.
- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để tìm max, min.

3. Bài tập

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$a) y = \frac{6x-1}{x^2+8}$$

$$b) y = \frac{x^2-2x+3}{3x^2+2x+1}$$

Giải

a. $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y = \frac{6x-1}{x^2+8} \Leftrightarrow yx^2 - 6x + 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y \neq 0 \\ 9 - y(8y+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y \neq 0 \\ -\frac{9}{8} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta được: } \max y = 1 \text{ và } \min y = -\frac{9}{8}$$

b. $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2-2x+3}{3x^2+2x+1} \Leftrightarrow (3y-1)x^2 + 2(y+1)x + y-3 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1=0 \\ 3y-1=0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1=0 \\ y \neq \frac{1}{3} \\ 3-2\sqrt{2} \leq y \leq 3+2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta được: } \max y = 3+2\sqrt{2} \text{ và } \min y = 3-2\sqrt{2}$$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \text{ với } x \in \mathbb{R}$$

Giải

$$\text{Vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên: } y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow y(x^2 + x + 1) = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow (y-1)x^2 + (y+1)x + y-1 = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $y = 1$ thì (1) trở thành: $x = 0$

+ Nếu $y \neq 1$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 3$$

$$\text{Vậy: } \max y = 3; \min y = \frac{1}{3}$$

Bài 3: Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x^2+a}$. Định a để miền giá trị của hàm số chứa $[0,1]$

Giải

Điều kiện: $x^2 \neq -a$

Gọi T là miền giá trị của hàm số, thế thì tồn tại ít nhất một số $y_0 \in T$ sao cho

phương trình: $y_0 = \frac{x+1}{x^2+a}$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow y_0 x^2 + a y_0 = x + 1 \Leftrightarrow y_0 x^2 - x + a y_0 - 1 = 0 \quad (1)$$

1. Nếu $y_0 = 0$, từ (1) $\Rightarrow x = -1$. Điều kiện $x^2 \neq -a \Rightarrow a \neq -1$

2. Nếu $y_0 \neq 0$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4y_0(ay_0 - 1) \geq 0$
 $= 4ay_0^2 - 4y_0 - 1 \leq 0$

a. Nếu $a = 0$ thì (2) $\Rightarrow y_0 \geq -\frac{1}{4}$ chứa $[0,1] \Rightarrow a = 0$ thỏa mãn đề.

b. Nếu $a > 0$ thì (2) $\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1+a}}{2a} \leq y \leq \frac{1 + \sqrt{1+a}}{2a}$ (với $\Delta = 4(1+a)$)

Để miền giá trị này chứa $[0,1]$ thì:

$$\begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1+a}}{2a} \leq 0 \\ \frac{1 + \sqrt{1+a}}{2a} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+a} \geq 1 \text{ hiển nhiên vì } a > 0 \\ \sqrt{1+a} \geq 2a - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+a} \geq 2a - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 \leq 0 \\ \begin{cases} a + 1 \geq (2a - 1)^2 \\ 2a - 1 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ 4a^2 - 5a \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ a \geq \frac{1}{2} \\ 0 < a \leq \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a \leq \frac{5}{4}$$

c. Nếu $a < 0$

Nếu $a \leq -1$ thì $\Delta' = 2(1+a) \leq 0 \Rightarrow$ bất phương trình (2) luôn đúng.

Với $\forall y_0 \Rightarrow a \leq -1$ thỏa mãn đề:

Nếu $-1 < a < 0$

Để miền giá trị này chứa $(0, 1)$ thì:

$$\frac{1 - \sqrt{1+a}}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+a} \leq 1 \Leftrightarrow a < 0 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được giá trị của a cần tìm là: $\begin{cases} a \leq \frac{5}{4} \\ a \neq -1 \end{cases}$

Chú ý: Bài này ta dùng phương pháp đạo hàm cũng rất tiện lợi.

Bài 4: Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - 2x + 4 - a}{x^2 + a}$

Định a để miền giá trị của hàm số chứa $[0, 1]$

Giải

Điều kiện cần để bài toán được thỏa mãn là phương trình:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 4 - a}{x^2 + a} \quad (1) \quad \text{phải có nghiệm khi } y = 0$$

$$\text{Khi } y = 0 \text{ thì (1) trở thành: } \begin{cases} x^2 - 2x + 4 - a = 0 \\ x^2 + a \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (4 - a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 3$

Khi $a \geq 3 \Rightarrow x^2 + a > 0 \forall x$

Lúc đó: (1) $\Leftrightarrow yx^2 + ay = x^2 - 2x + 4 - a$

$$\Leftrightarrow (y - 1)x^2 + 2x + ay - 4 + a = 0 \quad (3)$$

+ Nếu $y = 1$ thì: $2x - 4 + 2a = 0 \Leftrightarrow x = 2 - a$

Vậy $y = 1 \in [0, 1]$

+ Nếu $y \neq 1$ thì (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (y - 1)(ay - 4 + a) \geq 0$

$$\Leftrightarrow ay^2 - 4y - a + 3 \leq 0$$

Tam thức $f(y) = ay^2 - 4y - a + 3$ có:

$$\begin{cases} f(0) = 3 - a \leq 0 \text{ với } \forall a \geq 3 \\ f(1) = -1 < 0 \end{cases}$$

Do đó $f(y)$ luôn có hai nghiệm y_1, y_2 thỏa: $y_1 \leq 0 \leq y_2$

Mặt khác: $f(y) \leq 0 \Leftrightarrow y_1 \leq y \leq y_2$.

Do đó $[0, 1]$ chứa trong miền giá trị của hàm số đã cho $\Leftrightarrow a \geq 3$

Kết luận: giá trị của a cần tìm là $a \geq 3$

Cách khác

Điều kiện: $x^2 + a \neq 0$

Gọi T là miền giá trị của hàm số, thế thì tồn tại ít nhất một số $y_0 \in T$ để

phương trình: $y_0 = \frac{x^2 - 2x + 4 - a}{x^2 + a}$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow (y_0 - 1)x^2 + 2x + ay_0 - 4 + a = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $y_0 = 1$ thì $x = 2 - a \Rightarrow y_0 \in [0, 1]$

+ Nếu $y_0 \neq 1$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (y_0 - 1)(ay_0 - 4 + a) \geq 0$

$$\Leftrightarrow ay_0^2 - 4y_0 - a + 3 \leq 0$$

a. • Nếu $a = 0$ thì: $-4y_0 + 3 \leq 0 \Rightarrow y_0 \geq \frac{3}{4}$ không chứa hết $[0, 1]$

$\Rightarrow$ Nếu $a = 0$ không thỏa mãn đề.

• Nếu $a < 0$, tam thức $f(y_0) = ay_0^2 - 4y_0 - a + 3$ có

$$\Delta' = 4 - a(3 - a) = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \quad \forall a \Rightarrow \Delta' > 0 \quad \forall a$$

$$\text{Do đó: } f(y) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \leq \frac{2 + \sqrt{a^2 - 3a + 4}}{a} < 0 \quad \forall a < 0 \\ y_0 \geq \frac{2 - \sqrt{a^2 - 3a + 4}}{a} \end{cases}$$

• Để miền giá trị của hàm số chứa $[0, 1]$ thì:

$$\frac{2 - \sqrt{a^2 - 3a + 4}}{a} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 3a + 4} \leq 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 < a \leq 3$$

Kết hợp với điều kiện $a \leq 0$ suy ra trong trường hợp này không tìm được a thỏa mãn đề bài.

b. Nếu $a > 0$, tam thức $f(y_0) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{a^2 - 3a + 4}}{a} \leq y_0 \leq \frac{2 + \sqrt{a^2 - 3a + 4}}{a}$$

Để miền giá trị này chứa $[0, 1]$ thì:

$$\begin{cases} \frac{2 - \sqrt{a^2 - 3a + 4}}{a} \leq 0 \\ \frac{2 + \sqrt{a^2 - 3a + 4}}{a} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 - 3a + 4} \geq 2 \\ \sqrt{a^2 - 3a + 4} \geq a - 2 \end{cases} \quad (\text{do } a > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a + 4 \geq 4 \\ a - 2 \leq 0 \\ a - 2 \geq 0 \\ a^2 - 3a + 4 \geq (a - 2)^2 = a^2 - 4a + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ a \geq 3 \\ 0 < a \leq 2 \\ a \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 3$$

Tóm lại: giá trị của a cần tìm là $a \geq 3$.

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$$

Giải

Điều kiện: $-3 \leq x \leq 1$

Do đó: $(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 4$ nên ta có thể đặt:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \frac{2t}{1+t^2} \\ \sqrt{1-x} = 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \text{ với } 0 \leq t \leq 1$$

Khi đó: hàm số đã cho trở thành:

$$y = \frac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$$

$$\Leftrightarrow y(-5t^2 + 16t + 7) = -7t^2 + 12t + 9$$

$$\Leftrightarrow (5y - 7)t^2 + (12 - 16y)t + 9 - 7y = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $5y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{5}$ thì (1) trở thành: $t = -\frac{1}{13} \notin [0, 1]$

+ Nếu $y \neq \frac{7}{5}$:

Đặt: $f(t) = (5y - 7)t^2 + (12 - 16y)t + 9 - 7y$

Định y để $f(t) = 0$ có nghiệm $t \in [0, 1]$

Xét các trường hợp:

a. $f(t) = 0$ có 2 nghiệm $t_1; t_2$ thỏa: $\begin{cases} 0 \leq t_1 < 1 \leq t_2 \\ t_1 < 0 \leq t_2 < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(0).f(1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7}{9} \leq y \leq \frac{9}{7}$$

b. $f(t) = 0$ có 2 nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn: $0 < t_1 \leq t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ (5y-7).f(0) > 0 \\ (5y-7).f(1) > 0 \\ 0 < \frac{16y-12}{2(5y-7)} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{9} < y < \frac{9}{7} \\ \frac{14}{8} < y < \frac{7}{5} \\ 0 < \frac{16y-12}{2(5y-7)} < 1 \text{ và } \Delta' \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{9} < y < \frac{9}{7} \\ (8y-6)(5y-7) > 0 \\ \frac{8y-6}{5y-7} < 1 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{9} < y < \frac{9}{7} \\ y < \frac{3}{4} \\ y > \frac{7}{5} \\ \frac{8y-6}{5y-7} < 1 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Tóm lại: $\frac{7}{9} \leq y \leq \frac{9}{7}$ nên: $\begin{cases} \max y = \frac{9}{7} \\ \min y = \frac{7}{9} \end{cases}$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm: $y = \frac{2 + \sin 2x}{2 + \cos^2 x}$

Giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{2 + \sin 2x}{2 + \cos^2 x} = \frac{2 + 2 \sin x \cdot \cos x}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2 + \sin 2x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 2}{2 \operatorname{tg}^2 x + 3}$$

$$\text{Đặt: } t = \operatorname{tg} x, \text{ ta được: } y = \frac{2t^2 + 2t + 2}{2t^2 + 3} \Leftrightarrow 2(y-1)t^2 - 2t + 3y - 2 = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $y = 1$ thì (1) trở thành: $-2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

+ Nếu $y \neq 1$ thì (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{7}}{6} \leq y \leq \frac{5+\sqrt{7}}{6}$$

Từ đó suy ra:
$$\begin{cases} \min y = \frac{5-\sqrt{7}}{6} \\ \max y = \frac{5+\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

Bài 7: Cho các số x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + xy = 1$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: $A = 2x^2 - xy + 3y^2$

Giải

Ta có: $A = 2x^2 - xy + 3y^2 = \frac{2x^2 - xy + 3y^2}{x^2 + y^2 + xy}$

+ Nếu $y = 0$ thì: $A = 2$

+ Nếu $y \neq 0 \Rightarrow A \neq 2$ khi đó $A = \frac{2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 3}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì $A = \frac{2t^2 - t + 3}{t^2 + t + 1}$ (1)

Cần xác định A để (1) có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11-\sqrt{52}}{3} \leq A \leq \frac{11+\sqrt{52}}{3}$$

Từ đó suy ra:
$$\begin{cases} \max A = \frac{11+\sqrt{52}}{3} \\ \min A = \frac{11-\sqrt{52}}{3} \end{cases}$$

Bài 8: Cho $2x^2 + y^2 + xy \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = x^2 + y^2$

Giải

Đặt: $2x^2 + y^2 + xy = a$ với $a \geq 1$. Khi đó $\frac{M}{a} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2 + y^2 + xy}$

+ Nếu $y = 0$ thì: $\frac{M}{a} = \frac{1}{2}$

+ Nếu $y \neq 0$ thì: $\frac{M}{a} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}{2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}$

Đặt: $t = \frac{x}{y}$ và $A = \frac{M}{a}$ thì:

$$A = \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 1} \Leftrightarrow (2A - 1)t + At + A - 1 = 0$$

Phương trình này có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} \leq A \leq \frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{a} \geq \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} \Rightarrow M \geq \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} \cdot a \geq \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \text{Min}(M) = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là: $\frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}$

Bài 9: Chứng minh rằng với $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae \quad (1)$$

Giải

Bất đẳng thức: (1) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \geq 0$

Xét tam thức bậc hai:

$$f(x) = a^2 - (b + c + d + e)a + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

Ta có: $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopski:

$$(b + c + d + e)^2 \leq 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

$$\Rightarrow (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 10: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$1. \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$2. \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$3. \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

Giải

$$1. \quad \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq 1$$

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} T &= 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ \Rightarrow T &= 4 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{C}{2} - 4 \cos \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + T &= 0 \end{aligned}$$

Xem phương trình này là phương trình bậc hai theo ẩn là $\sin \frac{C}{2}$

Phương trình này có nghiệm nên: $\Delta \geq 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{A-B}{2} - 4T &\geq 0 \Rightarrow T \leq \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1 \\ \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} &\leq \frac{1}{8} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{Đặt } T = \cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{C}{2} - 2 \cos \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + T - 1 = 0$$

Xem phương trình này là phương trình bậc hai theo ẩn là $\sin \frac{C}{2}$

Phương trình này phải có nghiệm nên: $\Delta \geq 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} - 2(T-1) &\geq 0 \Rightarrow T \leq 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C &\leq \frac{3}{2} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

$$3. \quad \text{Đặt: } T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$\begin{aligned} &= 2 - \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C \\ &= 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C \\ &= 2 + \cos C \cdot \cos(A+B) - \cos^2 C \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 C - \cos(A-B) \cos C + T - 2 = 0$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn số là $\cos C$.

Phương trình này phải có nghiệm nên:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2(A - B) - 4(T - 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow T \leq 2 + \frac{1}{4} \cos^2(A - B)$$

$$\Rightarrow T \leq 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

CHƯƠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA, BẬC BỐN VÀ ĐA THỨC

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ:

I. Nghiệm của đa thức:

1. Số c là nghiệm bội lẻ của một đa thức $P_n(x)$ nếu $P_n(x)$ chia hết cho $(x - c)^k$ với k lẻ. Nếu $k = 1$ thì c gọi là nghiệm đơn.
2. Số c là nghiệm bội chẵn của đa thức $P_n(x)$ nếu $P_n(x)$ chia hết cho $(x - c)^k$ và k là số chẵn. Nếu $k = 2$ thì c là nghiệm kép.
3. Một đa thức bậc n chỉ có thể có tối đa n nghiệm.
4. Một đa thức bậc lẻ luôn có ít nhất một nghiệm.
5. Một đa thức bậc n , mà có $(n + 1)$ nghiệm thì đa thức đó đồng nhất không.

II. Định lý Viét áp dụng cho phương trình bậc ba:

Cho phương trình bậc ba: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$). Giả sử phương trình này có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 . Khi đó ta có hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

III. Cách nhẩm nghiệm nguyên hoặc nghiệm hữu tỉ của phương trình bậc ba

- Nếu phương trình bậc ba có thể có nghiệm hữu tỉ hoặc nghiệm nguyên, để tìm nghiệm này ta làm như sau:
+ Tìm tập hợp các ước số của a gọi là p .

+ Tìm tập hợp các ước số của d gọi là q .

+ Tìm các phân số $\frac{q}{p}$; rồi thế từng phân số vào phương trình; phân số nào

thỏa mãn thì đó là nghiệm của phương trình.

B. CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CHUYÊN ĐỀ 8:

NHẮM MỘT NGHIỆM – ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1. $2x^3 - 5x^2 + 3x + 10 = 0$ (1)

2. $x^3 - 3x + 2 = 0$ (2)

Giải

1. Ta thấy phương trình (1) có một nghiệm $x = -1$

Dùng sơ đồ Horner đưa về tích:

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2x^2 - 7x + 10 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

2. Phương trình (2) $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bài 2: Cho phương trình: $x^3 - (2m + 1)x^2 + mx + m = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2mx - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = x^2 - 2mx - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m > 0 \\ 1 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ 0 < m \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 3: Cho phương trình: $x^3 - 2(m + 1)x^2 + (7m - 2)x + 4 - 6m = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có ba nghiệm dương.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2mx + 3m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có ba nghiệm phân biệt dương thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương và khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $\frac{2}{3} < m < 1 \vee m > 2$

Bài 4: Cho phương trình: $mx^3 - (m-4)x^2 + (4+m)x - m = 0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(mx^2 - 4x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = mx^2 - 4x + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- Với $\forall m \in \mathbb{R}$ thì (1) luôn có một nghiệm $x = 1$
- Để (1) có đúng hai nghiệm thì (2) có đúng một nghiệm $\neq 1$.

Xét các trường hợp sau:

TH1: Nếu $m = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = 0 \neq 1$

$\Rightarrow$ giá trị $m = 0$ thỏa đề bài.

TH2: Nếu $m \neq 0$ (2) có nghiệm kép $\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4 \neq 0 \\ 4 - m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

TH3: Nếu $m \neq 0$ (2) có một nghiệm $x_1 = 1$ còn nghiệm $x_2 \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ 2m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m = 0 \vee m = -2$

Bài 5: Cho phương trình: $x^3 + (1-m)x^2 - 3mx + 2m^2 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x-m)(x^2 + x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ f(x) = x^2 + x - 2m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- Với $\forall m \in \mathbb{R}$ thì (1) luôn có một nghiệm $x = m$
- Để (1) có đúng một nghiệm thì ta xét các trường hợp sau:

TH1: (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 8m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{8}$

TH2: (2) có nghiệm kép $x = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 8m = 0 \\ m^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là $m < -\frac{1}{8}$

Bài 6: Cho phương trình: $x^3 - 6x^2 + (5m+1)x - 3m = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Giải

Cách 1: Dùng định lý Viét:

Giả sử (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ lập thành cấp số cộng:

$$x_1 + x_3 = 2x_2.$$

Theo định lý Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & (2) \\ x_1 + x_3 = 2x_2 & (3) \end{cases}$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow x_2 = 2$ thế vào (1) được: $m = 2$

- Khi $m = 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Ta thấy ba nghiệm này lập thành cấp số cộng.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: Dùng tính chất điểm uốn của hàm bậc ba:

“Cho hàm số bậc ba: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$).

Đồ thị hàm bậc ba cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ \text{điểm uốn thuộc } 0x \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^3 - 6x^2 + (5m+1)x - 3m$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5m + 1$$

$$f''(x) = 6x - 12; f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 7m - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3(5m+1) > 0 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Cách 3: Thiết lập bộ nghiệm lập thành cấp số cộng.

Giả sử tìm tại số $a > 0$ sao cho ba số $a < 2a < 3a$ lập thành cấp số cộng của phương trình ban đầu.

$$\text{Khi đó: } x^3 - 6x^2 + (5m+1)x - 3m = (x-a)(x-2a)(x-3a)$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + (5m+1)x - 3m = x^3 - 6ax^2 + 11a^2x - 6a^3 \quad (1)$$

Đồng nhất hệ số hai vế của (1) ta được:

$$\begin{cases} -6a = -6 \\ 11a^2 = 5m+1 \\ -6a^3 = -3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 2$$

Thử lại: Khi $m = 2$ thì phương trình đã cho:

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = 3$$

Rõ ràng ba nghiệm này lập thành cấp số cộng.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

CHUYÊN ĐỀ 9: DÙNG PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Định lý:

Phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $g(m)$ nằm trong miền giá trị của $f(x)$.

2. Các bước giải:

- Bước 1:** Đưa phương trình về dạng; $f(x) = g(m) \quad (1)$

- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên của hàm $f(x)$ để tìm miền giá trị của hàm $f(x)$.
- **Bước 3:** Dựa vào định lý trên để tìm m .

3. Chú ý:

- Phương trình (1) có n nghiệm thì đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm $f(x)$ tại n điểm.
- Phương pháp này áp dụng khi không nhầm được nghiệm.

4. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ với $1 < x < 2$

Giải

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	2
$f'(x)$			
$f(x)$			

Theo bảng biến thiên: $\Rightarrow f(x) < -1 \forall x \in (1; 2)$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 2: Giải phương trình: $x^3 - 3x + 1 = 0$ (1)

Giải

- Ta chứng minh (1) luôn có 3 nghiệm $x \in [-2, 2]$

Cách 1: dùng định lý liên tục:

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ là hàm số liên tục trên $[-2, 2]$

Ta có: $f(-2) = -1$; $f(-1) = 3$; $f(1) = -1$; $f(2) = 3$

$\Rightarrow f(-1).f(1) < 0 \Rightarrow$ (1) luôn có một nghiệm $x \in [-2, 2]$

$\Rightarrow f(-2).f(-1) < 0 \Rightarrow$ (1) luôn có một nghiệm $x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow f(1).f(2) < 0 \Rightarrow$ (1) luôn có một nghiệm $x \in [1, 2]$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $x \in [-2, 2]$

Cách 2: Dùng khảo sát hàm số:

Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ với $-2 \leq x \leq 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Bảng biến thiên:

x	-2	-1	1	2		
f'(x)		-	0	+	0	-
f(x)	-1	3	-1	3		

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ đồ thị hàm $f(x)$ luôn cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x \in [-2, 2]$

- Giải phương trình (1)

Đặt $x = 2\cos t$; ($0 \leq t \leq \pi$)

(1) trở thành: $8\cos^3 t - 6\cos t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(4\cos^3 t - 3\cos t) = -1 \Leftrightarrow \cos 3t = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3t = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ t = -\frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } 0 \leq t \leq \pi \text{ nên } \begin{cases} 0 \leq \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \\ 0 \leq -\frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{7}{6} \Rightarrow k = 0 \vee k = 1 \\ \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{11}{6} \Rightarrow k = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ba nghiệm là } \begin{cases} t = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow x = 2\cos \frac{2\pi}{9} \\ t = \frac{8\pi}{9} \Rightarrow x = 2\cos \frac{8\pi}{9} \\ t = \frac{4\pi}{9} \Rightarrow x = 2\cos \frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

Vậy ba nghiệm của (1) là: $x = 2\cos \frac{2\pi}{9}$; $x = 2\cos \frac{8\pi}{9}$; $x = 2\cos \frac{4\pi}{9}$

Bài 3: Cho phương trình: $x^3 - 4mx^2 + 8 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 8 = 4mx^2 \Leftrightarrow x + \frac{8}{x^2} = 4m \quad (x \neq 0)$$

Xét hàm $f(x) = x + \frac{8}{x^2}$ với $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{15}{x^3} = \frac{x^3 - 15}{x^3} \quad ; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{15}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{15}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{24}{\sqrt[3]{256}}$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thoả mãn.

$$\Leftrightarrow 4m > \frac{24}{\sqrt[3]{256}} \Leftrightarrow m > \frac{6}{\sqrt[3]{256}}$$

Bài 4: Cho phương trình: $\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 3m + 4 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4 = -3m$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$ với $x > 1$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

Bảng biến thiên:

x	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thoả mãn.

$$\Leftrightarrow -5 < -3m < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{9} < m < \frac{5}{3}$$

Bài 5: Cho phương trình: $x^3 + 3x^2 + (3 - 2m)x + m + 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm $x > 1$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = m(2x - 1) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^3}{2x-1} = m \quad (\text{vì } x > 1 \text{ nên } 2x-1 \neq 0)$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{(x+1)^3}{2x-1}$ với $x > 1$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(4x-5)}{(2x-1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$$

Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	8	$\frac{243}{32}$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thoả mãn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{243}{32} \\ m \geq 8 \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 10: DÙNG TÍNH CHẤT CỰC TRỊ CỦA HÀM BẬC BA

Cho phương trình bậc ba: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ (1)

1. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$$

2. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt lớn hơn số α cho trước:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn } \alpha < x_1 < x_2 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \\ af(\alpha) < 0 \end{cases}$$

3. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt lớn hơn số α cho trước:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn } x_1 < x_2 < \alpha \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \\ af(\alpha) > 0 \end{cases}$$

4. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ vô nghiệm} \\ f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \\ f(x_1).f(x_2) > 0 \end{cases}$$

5. Phương trình (1) có ba nghiệm lập thành cấp số cộng.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \\ \text{điểm uốn thuộc } 0x \end{cases}$$

6. Bài tập

Bài 1: Cho phương trình: $x^3 - 3mx + m^2 = 0$

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $f(x) = x^3 - 3mx + m^2$

$$f'(x) = 3x^2 - 3m; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{m} \\ x_2 = -\sqrt{m} \end{cases} (m > 0)$$

$$f(x_1) = f(\sqrt{m}) = m^2 - 2m\sqrt{m}$$

$$f(x_2) = f(-\sqrt{m}) = m^2 + 2m\sqrt{m}$$

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $0 < m < 4$

Bài 2: Cho phương trình: $x^3 - mx + 1 = 0$ (1)

- Định m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt.
- Định m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Giải

- Định m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^3 + 1 = mx \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x} = m \quad (x \neq 0)$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow m > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

2. Định m để phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Cách 1:

Gọi x_1, x_2, x_3 (theo thứ tự đó) là ba nghiệm phân biệt của (1), lập thành cấp số cộng. Theo tính chất cấp số cộng và định lý Viét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -m \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -m \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại giá trị m để thỏa đề.

Cách 2: $f(x) = x^3 - mx + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - m; f''(x) = 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Để phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng thì:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ f(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Vậy không tồn tại giá trị m thỏa đề.

Bài 3: Cho phương trình: $x^3 - x^2 + 18ax - 2a = 0$

Định a để phương trình có ba nghiệm phân biệt dương.

Giải

Cách 1:

$$\text{Đặt: } f(x) = x^3 - x^2 + 18ax - 2a; f'(x) = 3x^2 - 2x + 18a$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt dương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt: } 0 < x_1 < x_2 \quad (1) \\ f(x_1)f(x_2) < 0 \quad (2) \\ f(0) < 0 \quad (3) \end{cases}$$

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 18a = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{54}$$

- Điều kiện (3) $\Leftrightarrow -2a < 0 \Leftrightarrow a > 0$

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$ ta được:

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)f'(x) + 2\left(6a - \frac{1}{9}\right)x$$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

$$\Rightarrow \text{hai giá trị cực trị: } \begin{cases} f(x_1) = 2\left(6a - \frac{1}{9}\right)x_1 \\ f(x_2) = 2\left(6a - \frac{1}{9}\right)x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1)f(x_2) < 0 \Leftrightarrow 4\left(6a - \frac{1}{9}\right)^2 x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \left(6a - \frac{1}{9}\right)^2 \cdot 6a < 0 \Leftrightarrow a < 0$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) ta được: } \begin{cases} 0 < a < \frac{5}{4} \text{ vô nghiệm} \\ a < 0 \end{cases}$$

Vậy không tồn tại giá trị a thỏa mãn đề.

Cách 2:

(ta sử dụng phương trình đã cho có ba nghiệm dương phân biệt là: x_1, x_2, x_3)

$$\text{Theo định lý Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 18a \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2a \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Côsi:

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \Rightarrow 1 \geq \sqrt[3]{2a} \Rightarrow a \leq \frac{1}{54} \quad (1)$$

$$18a = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \geq \sqrt[3]{(x_1 x_2 x_3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (18a)^3 \geq 27 \cdot 4a^2 \Rightarrow a \geq \frac{1}{54}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow a = \frac{1}{54}$$

Mặt khác vì ba nghiệm x_1, x_2, x_3 phân biệt nên $a \neq \frac{1}{54}$

Do đó không tồn tại giá trị a thỏa đề.

CHUYÊN ĐỀ 11: NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA THỎA MÃN MỘT ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

1. Phương pháp giải

- Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

- Bước 2: Dùng định lý Viét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

2. Bài tập:

Bài 1: Cho phương trình: $x^3 + x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$

- Định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn:
 $x_1 < x_2 < 2 < x_3$
- Định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Giải

- Điều kiện cần:

Đặt $f(x) = x^3 + x^2 - (m+2)x + m + 1$

Giả sử $f(x) = 0$ có ba nghiệm: x_1, x_2, x_3 thỏa: $x_1 < x_2 < 2 < x_3$

Khi đó: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

và $f(2) = (2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) < 0$ (do $x_1 < x_2 < 2 < x_3$)

$$\Leftrightarrow 2^3 + 2^2 - (m+2)2 + m + 1 < 0 \Leftrightarrow 9 - m < 0 \Leftrightarrow m > 9$$

Điều kiện đủ:

Giả sử $m > 9$, khi đó: $f(2) = 9 - m < 0$

Lại có: $f(0) = m + 1 > 0 \forall m > 0$

$\Rightarrow f(0).f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có một nghiệm $\in (0, 2)$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại số $a > 2$ mà $f(a) > 0$

$\Rightarrow f(a).f(2) < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_3 thỏa mãn:

$2 < x_3 < a$

vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại số $b < 0$ sao cho $f(b) < 0$

$\Rightarrow f(b).f(0) < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_1 thỏa mãn: $b < x_1 < 0$

Như vậy phương trình đã cho có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thuộc ba khoảng khác nhau và thỏa mãn: $x_1 < x_2 < 2 < x_3$

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m > 9$

2. Gọi ba nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2, x_3 theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng.

Đặt: $f(x) = x^3 + x^2 - (m+2)x + m + 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - m - 2$$

$$f''(x) = 6x + 2; f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{47}{36}$$

Vậy $m = -\frac{47}{36}$ là giá trị cần tìm.

Bài 2: Cho phương trình: $x^3 + ax + b = 0$. Giả sử phương trình có ba nghiệm là: x_1, x_2, x_3 . Chứng minh rằng: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$

Giải

Ta có: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2)^3 + x_3^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) \left[(x_1 + x_2)^2 + x_3^2 - (x_1 + x_2)x_3 \right] - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

Theo định lý Viét: $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -x_3$

Do đó: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3x_1x_2(-x_3) = 3x_1x_2x_3$ (đpcm)

Bài 3: Giả sử phương trình: $x^3 - x^2 + ax + b = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng: $a^2 + 3b > 0$

Giải

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

$$\text{Theo định lý Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = -b \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 \\
 &= (x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \\
 &= (x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 - 2b
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta được:

$$(x_1x_2)^2 + (x_3x_1)^2 \geq 2|x_1x_2||x_3x_2| \geq 2x_1x_2^2x_3$$

Tương tự: $(x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 \geq 2x_1x_2x_3^2$

$$(x_3x_1)^2 + (x_1x_2)^2 \geq 2x_1^2x_2x_3$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 \geq x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -b$$

Do đó: $a^2 \geq -b - 2b \Leftrightarrow a^2 + 3b \geq 0$

Vì phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt nên $a^2 + 3b > 0$ (đpcm)

Bài 4: Cho phương trình: $x^3 + 3mx^2 - 3x - 3m + 2 = 0$ (1)

Định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt và biểu thức: $A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x - 1)[x^2 + (3m + 1)x + 3m - 2] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + (3m + 1)x + 3m - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$$

Khi đó: $A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$

Theo định lý Viét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \end{cases}$$

Do đó: $A = 9m^2 + 6 \geq 6 \Rightarrow \min A = 6$ đạt được khi $m = 0$ (loại)

Vậy biểu thức A không đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Tìm a để phương trình: $x^3 + x^2 + 2ax + a = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Giải

Theo tính chất cấp số nhân và định lý Viét ta có:

$$\begin{cases} x_1 x_3 = x_2^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 2a \\ x_1 x_2 x_3 = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_3 = x_2^2 \\ x_1 + x_3 = -1 - x_2 \\ x_1 x_3 + (x_3 + x_1) x_2 = 2a \\ x_1 x_2 x_3 = -a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2^3 = -a & (1) \\ x_2^2 - (1 + x_2) = 2a & (2) \\ x_1 x_2 x_3 = -a \end{cases}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} x_2^3 = -a \\ x_2 = -2a \end{cases} \Leftrightarrow -8a^3 = -a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

+ Với $a = 0$ thay vào phương trình ta được: $x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Phương trình chỉ có hai nghiệm nên $a = 0$ không thỏa mãn.

+ Với $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ thay vào phương trình ta được:

$$x^3 + x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left[x^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \text{phương trình này vô nghiệm} \end{cases}$$

+ Với $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ thay vào phương trình ta được:

$$x^3 + x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left[x^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x + \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_1 = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}\right) \end{cases}$$

Kiểm tra lại ta thấy: $x_1 x_3 = x_2^2$

Vậy giá trị cần tìm của a là: $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Bài 6: Biết phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 (a \neq 0)$ có ba nghiệm dương là x_1, x_2, x_3 .

Chứng minh rằng: $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3 c^2}{81a^5}$.

Giải

Theo định lý Viét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ta có: $-\frac{b^3 c^2}{81a^5} = \frac{1}{81} \left(-\frac{b}{a}\right)^3 \cdot \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{81} (x_1 + x_2 + x_3)^3 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^2$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \leq \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)^2 \quad (*)$$

Thật vậy: bất đẳng thức (*)

$$\Leftrightarrow 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) \leq (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) \leq 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \geq 0 \text{ luôn luôn đúng.}$$

Do đó: $(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^2 \leq \frac{1}{9} (x_1 + x_2 + x_3)^4$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{81} (x_1 + x_2 + x_3)^3 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^2 \leq \frac{1}{3^6} (x_1 + x_2 + x_3)^7$$

(do $x_1, x_2, x_3 > 0$)

Ta chứng minh: $\frac{1}{3^6} (x_1 + x_2 + x_3)^7 \leq x_1^7 + x_2^7 + x_3^7$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^6} (x_1 + x_2 + x_3)^8 \leq (x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) (x_1 + x_2 + x_3) \quad (1)$$

Ta có: $(x_1 + x_2 + x_3)^2 \leq 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

(theo bất đẳng thức Bunhiakopski)

$$\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^4 \leq 3^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 3^3 (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có: } [x_1^4 + x_2^4 + x_3^4]^2 &= [\sqrt{x_1^7} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2^7} \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3^7} \sqrt{x_3}]^2 \\ &\leq (x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) (x_1 + x_2 + x_3) \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1) (2) và (3) suy ra:

$$\frac{1}{3^6} (x_1 + x_2 + x_3)^8 \leq (x_1^7 + x_2^7 + x_3^7)(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^6} (x_1 + x_2 + x_3)^7 \leq (x_1^7 + x_2^7 + x_3^7).$$

Do đó: $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3 c^2}{81a^5}$ (đpcm)

Bài 7: Cho phương trình bậc ba: $x^3 - 6x^2 + a + a = 0$ (1)

Tìm a để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn:

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0 \quad (2)$$

Giải

Giả sử (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - 3 \\ y_2 = x_2 - 3 \\ y_3 = x_3 - 3 \end{cases}$

Thì $y_1 - 3; y_2 - 3; y_3 - 3$ là nghiệm phương trình:

$$(y + 3)^3 - 6(y + 3)^2 + a(y + 3) + a = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + 4a - 27 = 0$$

Theo định lý Viét ta có: $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = -3 \\ y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = a - 9 \\ y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = -4a + 27 \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1 + y_2 + y_3)(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) + 3y_1 y_2 y_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -27 + 9(a - 9) + 3(27 - 4a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -9$$

Thử lại: Khi $a = -9$ thì (1) $\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 - 9x - 9 = 0$

Đặt $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x - 9$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{7} \\ x = 2 + \sqrt{7} \end{cases}$$

Ta có: $f(x) = (3x^2 - 12x - 9)\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) - 14x - 15 = -14x - 15$

$$\Rightarrow f(2 - \sqrt{7}) > 0; f(2 + \sqrt{7}) < 0$$

$$\Rightarrow f(2 - \sqrt{7}) \cdot f(2 + \sqrt{7}) < 0$$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt.

CHUYÊN ĐỀ 12: CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN CHUẨN

I. Các dạng phương trình:

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG

1. Có dạng: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$)
2. Các giải:
 - + Đặt $t = x^2 \geq 0$
 - + Đưa về phương trình bậc hai.

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN CÓ DẠNG

$$(\alpha x + a)^4 + (\alpha x + b)^4 = c$$

1. Cách giải

- Đặt $t = \alpha x + \frac{1}{2}(a + b)$
- Đưa về phương trình trùng phương.

2. Chú ý:

- a. Nếu bài toán có tham số m thì ta có hai cách giải:

Cách 1: Dùng đạo hàm bằng cách xét trực tiếp hàm:

$$f(x) = (\alpha x + a)^4 + (\alpha x + b)^4$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ rồi dùng công thức so sánh nghiệm.

Tuy nhiên, nếu học sinh biết đạo hàm thì cách 1 sẽ nhanh hơn.

- b. Nếu bài toán không có tham số thì ta đặt $t = \alpha x + \frac{1}{2}(a + b)$

- c. Nếu đặt $t = \alpha x + \frac{1}{2}(a + b)$ thì ta dùng hai cách đẳng thức:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

DẠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN CÓ DẠNG

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k \text{ với } a + b = c + d$$

1. Cách giải

Bước 1: Nhân từng cặp $(x + a)(x + b)$; $(x + c)(x + d)$

Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = x^2 + (a + b)x + D$

Đưa về phương trình bậc 2.

2. Dạng mở rộng

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)(A_2x^2 + B_2x + C_2) = k$$

Cách giải: Tìm các nghiệm của $A_1x^2 + B_1x + C_1$; $A_2x^2 + B_2x + C_2$

Sau đó đưa về tích.

DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN CÓ DẠNG

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k.x^2 \text{ với } a.b = c.d$$

1. Cách giải

Bước 1: Nhân từng cặp $(x + a)(x + b)$; $(x + c)(x + d)$

Bước 2: Chia hai vế vế cho x^2 và đặt $t = x + \frac{ab}{x}$

Bước 3: Đưa về phương trình bậc hai.

2. Chú ý: Dạng đặt biệt của phương trình trên là:

a. $(A_1x^2 + B_1x + C_1)(A_2x^2 + B_2x + C_2) = k.x^2$

b. $\frac{Ax^2 + C}{Ax^2 + B_1x + C} + \frac{A_1x^2 + C_1}{A_2x^2 + B_2x + C_2} = k$

(chia tử số và mẫu số cho x)

DẠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN CÓ DẠNG

1. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$

2. $ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \mp kbx + k^2a = 0$

1. Cách giải

• Chia hai vế của phương trình cho x^2 ($x \neq 0$)

• Đặt $t = x \pm \frac{k}{x}$

DẠNG 6: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN CHỨA MỘT BIỂU THỨC GIỐNG NHAU

1. Cách giải

• Biến đổi để phương trình chứa một biểu thức giống nhau.

• Đặt $t =$ biểu thức đó.

• Tìm miền giá trị của t .

• Đưa về phương trình bậc hai theo t .

• Đến đây có hai cách giải

Cách 1: Dùng công thức so sánh nghiệm.

Cách 2: Dùng khảo sát hàm số và định lý min, max.

II. Bài tập các dạng phương trình

1. Bài tập dạng 1:

Bài 1: Cho phương trình: $x^4 - (m+2)x^2 + 4m + 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $t = x^2 \geq 0$

(1) trở thành: $t^2 - (m+2)t + 4m + 1 = 0$ (2)

Để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 0 \\ m > 12 \end{cases}$$

Bài 2: Cho phương trình: $x^4 - (m+2)x^2 + 4m + 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Cách 1: Dùng tính chất cấp số cộng và định lý Viét

Đặt $t = x^2 \geq 0$.

(1) trở thành: $t^2 - (3m+1)t + 3m = 0$ (2)

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{3} \\ m > 0 \end{cases} \quad (a)$$

Khi đó bốn nghiệm của (1) là: $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$

Bốn nghiệm này lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow t_2 = 9t_1.$$

Theo định lý Viét ta được:

$$\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ t_1 + t_2 = 3m + 1 \\ t_1 \cdot t_2 = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{10}(3m + 1) \\ t_2 = \frac{9}{10}(3m + 1) \\ t_1 \cdot t_2 = 3m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{10}(3m + 1)^2 = 3m \Leftrightarrow 27m^2 - 82m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \vee m = \frac{1}{27} \text{ thoả mãn (a)}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m = 3 \vee m = \frac{1}{27}$

Cách 2: Thiết lập bộ nghiệm

Giả sử tồn tại số $a > 0$ sao cho biến số $-3a < -a < a < 3a$ là bốn nghiệm lập thành cấp số cộng của phương trình (1)

Khi đó: $x^4 - (3m+1)x^2 + 3m = (x+3a)(x+a)(x-a)(x-3a)$

$$\Leftrightarrow x^4 - (3m+1)x^2 + 3m = x^4 - 10a^2x^2 + 9a^4$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được:

$$\begin{cases} -(3m+1) = -10a^2 \\ 3m = 9a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{1}{27} \end{cases}$$

Vậy $m = 3 \vee m = \frac{1}{27}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3: Cho phương trình: $x^4 - 2(m-2)x^2 + 4 - 3m = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Cách 1: Đặt $t = x^2 \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 2(m-2)t + 4 - 3m = 0 \quad (2)$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì (2) có nghiệm thoả mãn:

$$\begin{cases} (2) \text{ có nghiệm kép dương} \\ (2) \text{ có hai nghiệm phân biệt trái dấu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t_0 = m-2 > 0 \\ t_1 < 0 < t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m = 0 \\ m > 2 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m > \frac{4}{3}$

Cách 2: Đặt $f(x) = x^4 - 2(m-2)x^2 + 4 - 3m$

$$f'(x) = 4x^3 - 4(m-2)x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = x^2 - m + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3) \text{ vô nghiệm và } f(0) < 0 \\ (3) \text{ có nghiệm kép } x = 0 \text{ và } f(0) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ 4 - 3m < 0 \\ m = 2 \\ -4m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}$$

Bài 4: Cho phương trình: $x^4 - 2(2m + 1)x^2 + m - 2 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $t = x^2 \geq 0$

(1) trở thành: $t^2 - (2m + 1)t + m - 2 = 0$ (2)

Để (1) có ba nghiệm phân biệt thì (2) có một nghiệm $t = 0$ và nghiệm kia dương.

- Khi $t = 0$ thì (2) $\Rightarrow m = 2$
- Khi $m = 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 - 5t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 > 0 \end{cases}$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

2. Bài tập dạng 2

Bài 5: Giải các phương trình:

1. $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 32$ (1)

2. $(2x - 1)^4 + 16(x - 2)^4 = 17$ (2)

Giải

1. **Cách 1:** Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$

(1) trở thành: $(t + 2)^4 + (t - 2)^4 = 32$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 2.6t^2.2^2 + 2.2^4 = 32 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Cách 2: Dùng đạo hàm:

Xét hàm $f(x) = (x + 1)^4 + (x - 3)^4$

$$f'(x) = 4(x + 1)^3 + 4(x - 3)^4; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	32	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow f(x) \geq 32 \forall x \Rightarrow f(x) = 32 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

2. Phương trình (2) $\Leftrightarrow (2x-1)^4 + (2x-4)^4 = 17$ (3)

Đặt $t = 2x - \frac{5}{2} \Rightarrow 2x = t + \frac{5}{2}$

(3) trở thành: $\left(t + \frac{3}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{3}{2}\right)^4 = 17$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 27t^2 - \frac{55}{8} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = \frac{1}{4} \\ t^2 = -\frac{55}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 1 \vee x = \frac{3}{2}$

Bài 6: Cho phương trình: $(x+2)^4 + (x-4)^4 = m$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Xét hàm $f(x) = (x+2)^4 + (x-4)^4$ với $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4(x+2)^3 + 4(x-4)^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x+2)^3 = -4(x-4)^3 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	162	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow m > 162$$

Bài 7: Cho phương trình: $(3x-1)^4 + 81(x+1)^4 = 2m$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x < 0$ phân biệt.

Giải

Xét hàm $f(x) = (3x-1)^4 + 81(x+1)^4 = (3x-1)^4 + (3x+3)^4$

$$f'(x) = 12(3x-1)^3 + 12(3x+3)^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x-1)^3 = -(3x+3)^3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	32	82

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt âm
 $\Leftrightarrow 32 < 2m < 82 \Leftrightarrow 16 < m < 41$

Bài 7: Cho phương trình: $(x-1)^4 + 2(4x+3)^4 = 3m^4$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Xét hàm số: $f(x) = (x-1)^4 + 2(4x+3)^4$

$$f'(x) = 4(x-1)^3 + 32(4x+3)^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -(4x+3)^3 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$3\left(\frac{7}{5}\right)^4$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 3m^4 \geq 3\left(\frac{7}{5}\right)^4 \Leftrightarrow |m| \geq \frac{7}{5}$

3. Bài tập dạng 3

Bài 9: Giải các phương trình:

$$1. (x-2)(x-1)(x+3)(x+4) = 24 \quad (1)$$

$$2. (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 120 \quad (2)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)(x+4)(x-1)(x+3) = 24$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 3) = 24 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$$

$$(3) \text{ trở thành: } (t-9)(t-4) = 24 \Leftrightarrow t^2 - 13t + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 12 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 12 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2\sqrt{3} \\ x = 2\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = 0$; $x = -2$; $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 2. \quad & (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 120 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 120 \\ & \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 5x + 4 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$$

$$(4) \text{ trở thành: } t(t+2) = 120 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -12 \text{ (loại)} \\ t = 10 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 10 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = 1 \vee x = -6$

$$\text{Bài 10: Cho phương trình: } (x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m \quad (1)$$

1. Giải phương trình khi $m = 9$.

2. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 thoả mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -1 \quad (*)$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} \quad & \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3)(x+5) = m \\ & \Leftrightarrow (x-1)(x+5)(x+1)(x+3) = m \\ & \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = m \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$$

$$(2) \text{ trở thành: } (t-9)(t-1) = m$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 - m = 0 \quad (3)$$

$$1. \text{ Khi } m = 9 \text{ thì } (3) \Leftrightarrow t^2 - 10t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Với } t = 10 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 10 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{10} \vee x = \sqrt{10} - 2$$

$$\text{Vậy phương trình có các nghiệm là: } \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 - \sqrt{10} \\ x = \sqrt{10} - 2 \end{cases}$$

2. Để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (3) có hai nghiệm phân biệt dương: $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9 \quad (a)$$

• Ứng với nghiệm $t_1 > 0$ thì $x^2 + 4x + 4 = t_1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - t_1 = 0$ có nghiệm $x_1; x_2$

$$\text{và } \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 - t_1 \end{cases}$$

• Ứng với nghiệm $t_2 > 0$ thì $x^2 + 4x + 4 = t_2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - t_2 = 0 \text{ có hai nghiệm } x_3; x_4 \text{ và } \begin{cases} x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 \cdot x_4 = 4 - t_2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } (*) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{4 - t_1} + \frac{-4}{4 - t_2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 16 - 4(t_1 + t_2) = -4(t_1 + t_2) + t_1 \cdot t_2$$

$$\Leftrightarrow t_1 \cdot t_2 = 16 \Leftrightarrow m = -7 \text{ thỏa mãn (a)}$$

Vậy $m = -7$ là giá trị cần tìm.

Bài 11:: Cho phương trình:

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = m \quad (1)$$

1. Giải phương trình khi $m = 4$.

2. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$ sao cho

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2x_1 x_2 x_3 x_4 - 30$$

3. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-4)(x-5) = m$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) = m \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0$$

$$(2) \text{ trở thành: } (t-4)(t-1) = m$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 - m = 0 \quad (3)$$

$$1. \text{ Khi } m = 4 \text{ thì } (3) \Leftrightarrow t^2 - 5t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Với } t = 5 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Vậy phương trình có các nghiệm là: } x = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$2. \text{ Để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (3) có hai nghiệm } 0 < t_1 < t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < m < 4 \quad (a)$$

$$\text{Ứng với nghiệm } t_1 > 0 \text{ thì phương trình: } x^2 - 6x + 9 = t_1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - t_1 = 0 \text{ có hai nghiệm } x_1; x_2 \text{ và } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 9 - t_1 \end{cases}$$

$$\text{Ứng với nghiệm } t_2 > 0 \text{ thì phương trình } x^2 - 6x + 9 - t_2 = 0 \text{ có hai nghiệm } x_3; x_4$$

$$\text{và } \begin{cases} x_3 + x_4 = 6 \\ x_3 \cdot x_4 = 9 - t_2 \end{cases}$$

$$\text{Theo đề: } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2x_1x_2x_3x_4 - 30$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4 = 2x_1x_2x_3x_4 - 30$$

$$\Leftrightarrow 36 - 2(9 - t_1) + 36 - 2(9 - t_2) = 2(9 - t_1)(9 - t_2) - 30$$

$$\Leftrightarrow 36 + 2(t_1 + t_2) = 2[81 - 9(t_1 + t_2) + t_1t_2] - 30$$

$$\Leftrightarrow 36 + 2.5 = 2(81 - 9.5 + 4 - m) - 30$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{25}{23} \text{ thỏa (a)}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{25}{23} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

$$3. \text{ Để (1) có đúng hai nghiệm thì (3) có nghiệm thỏa mãn:}$$

$$\begin{cases} (3) \text{ có nghiệm kép dương} \\ (3) \text{ có hai nghiệm trái dấu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t_0 = \frac{5}{2} > 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{9}{4} \\ m > 4 \end{cases}$$

4. Bài tập dạng 4

Bài 12: Giải các phương trình:

$$1. (x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = \frac{10}{9}x^2 \quad (1)$$

$$2. (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) = 168x^2 \quad (2)$$

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Phương trình (1)} \quad &\Leftrightarrow (x-1)(x-8)(x-2)(x-4) = \frac{10}{9}x^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 9x + 8)(x^2 - 6x + 8) = \frac{10}{9}x^2 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{8}{x} - 9\right)\left(x + \frac{8}{x} - 6\right) = \frac{10}{9} \quad (x \neq 0) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{8}{x} \geq 4\sqrt{2}$$

$$(*) \text{ trở thành: } (t-9)(t-6) = \frac{10}{9} \Leftrightarrow t^2 - 15t + \frac{476}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{28}{3} \\ t = \frac{17}{3} \end{cases} \quad (\text{nhận})$$

$$\text{Với } t = \frac{17}{3} \Leftrightarrow x + \frac{8}{x} = \frac{17}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{3}x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{28}{3} \Leftrightarrow x + \frac{8}{x} = \frac{28}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{28}{3}x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14 - \sqrt{124}}{3} \\ x = \frac{14 + \sqrt{124}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad &(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) = 168x^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)(x+6) = 168x^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 5) = 168x^2 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} + 7\right)\left(x + \frac{6}{x} + 5\right) = 168 \quad (x \neq 0) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{6}{x} \geq 2\sqrt{6}$$

Phương trình (*) trở thành:

$$(t+7)(t+5) = 168 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 133 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = -19 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Với } t = 7 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -19 \Leftrightarrow x + \frac{6}{x} = -19 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-19 - \sqrt{337}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{337} - 19}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = 1; x = 6 \vee x = \frac{-19 \pm \sqrt{337}}{2}$

Bài 13: Cho phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - 5x + 1) = mx^2$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \left(x + \frac{1}{x} - 5\right) = m \quad (x \neq 0) \quad (2)$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$; điều kiện: $|t| \geq 2$

$$(2) \text{ trở thành: } (t-1)(t-5) = m \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = m$$

Để (1) có nghiệm thì (3) có nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 2$

Xét hàm $f(t) = t^2 - 6t + 5$

$$f'(t) = 2t - 6; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$
$f'(t)$	-			0	+
$f(t)$	$+\infty$	21		-3	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow m \geq -4.$$

Bài 14: Cho phương trình: $\frac{3x}{x^2 - x + 4} + \frac{x}{2x^2 - 6x + 8} = m$ (1)

1. Giải phương trình khi $m = 1$.

2. Tìm m để phương trình có nghiệm $x > 0$.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{x + \frac{4}{x} - 1} + \frac{1}{2\left(x + \frac{4}{x}\right) - 6} = m \quad (x \neq 0) \quad (2)$$

Đặt $t = x + \frac{4}{x}$; điều kiện $|t| \geq 4$

(2) trở thành: $\frac{3}{t-1} + \frac{1}{2t-6} = m$ (3)

1. Khi $m = 1$ thì (3) $\Leftrightarrow \frac{3}{t-1} + \frac{1}{2t-6} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = \frac{5}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$

Với $t = 5 \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1 \vee x = 4$.

2. Đặt $t = x + \frac{4}{x}$ vì $x > 0$ nên $t \geq 4$

Để (1) có nghiệm x dương thì (3) có nghiệm $t \geq 4$

Xét hàm $f(t) = \frac{3}{t-1} + \frac{1}{2t-6}$ với $t \geq 0$

$$f'(t) = -\frac{3}{(t-1)^2} - \frac{2}{(2t-6)^2} < 0 \quad \forall t \geq 4$$

Bảng biến thiên:

t	4	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	0

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{3}{2}$$

5. Bài tập dạng 5

Bài 15: Giải các phương trình:

1. $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$ (1)

2. $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$ (2)

Giải

1. Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ được:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$; điều kiện $|t| \geq 2$

Ta được: $t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$ (nhận)

Với $t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Với $t = -4 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = -2 \pm \sqrt{3}$

2. Chia hai vế cho x ta được ($x \neq 0$)

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 16: Giải các phương trình:

1. $9x^4 - 30x^3 + 15x^2 - 10x + 1 = 0$ (1)

2. $8x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 5x + 2 = 0$ (2)

Giải

1. Cho hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$9x^2 + \frac{1}{x} - 10\left(3x + \frac{1}{x}\right) + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x + \frac{1}{x}\right)^2 - 10\left(3x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{1}{x} = 1 \\ 3x + \frac{1}{x} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{69}}{6} \\ x = \frac{9 + \sqrt{69}}{6} \end{cases}$$

2. Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được

$$2\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(2x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(2x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{x} = 2 \\ 2x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \vee x = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \end{cases}$$

Bài 17: Cho phương trình: $x^4 - 3mx^3 + 11x^2 - 3mx + 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Giải

Chia hai vế của (1) cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} - 3m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 3mt + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 9 = 3mt \Leftrightarrow t + \frac{9}{t} = 3m \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{9}{t}$

$$f'(t) = \frac{t^2 - 9}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 3$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-3	-2	2	3	$+\infty$	
f'(t)	+	0	-		-	0	+
f(x)	$-\infty$	-6	$-\frac{13}{2}$	$\frac{13}{2}$	6	$+\infty$	

Ứng với một giá trị $t = -2$ hay $t > 2$ thì phương trình $t = x + \frac{1}{x}$ có hai nghiệm x phân biệt.

Do đó để (1) có 4 nghiệm phân biệt, theo bảng biến thiên ta được các giá trị của m cần tìm là:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6 < 3m < \frac{13}{2} \\ -\frac{13}{2} < 3m < -6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < \frac{13}{6} \\ -\frac{13}{6} < m < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 18: Cho phương trình: $x^4 + ax^3 + x^2 + ax + 1 = 0$ (1)

- Giải phương trình khi $a = 4$.
- Tìm a để phương trình không có ít hơn hai nghiệm âm.

Giải

Vì $x = 0$ không là nghiệm của (1) nên chia hai vế của (1) cho x^2 ta được:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$; điều kiện $|t| \geq 2$

Phương trình trên trở thành: $t^2 - 2 + at + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + at - 1 = 0$ (2)

- Khi $a = 4$ thì (2) trở thành: $t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 - \sqrt{5} \\ t = -2 + \sqrt{5} \text{ (loại)} \end{cases}$

Với $t = -2 - \sqrt{5} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -2 - \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2 + \sqrt{5})x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{5 + 4\sqrt{5}} - 2 - \sqrt{5}) \\ x = -\frac{1}{2}(\sqrt{5 + 4\sqrt{5}} + 2 + \sqrt{5}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 4\sqrt{5}})$$

- Nếu $t < -2$ thì phương trình: $x + \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$ luôn có hai nghiệm

$$\text{âm vì } \begin{cases} S = t < -2 < 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$$

- + Nếu $t > 2$ thì phương trình: $x^2 - tx + 1 = 0$ có hai nghiệm dương. Nên để phương trình (1) có không ít hơn hai nghiệm âm thì phương trình (2) có ít nhất một nghiệm $t < -2$.

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow t^2 - 1 = -at \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t} = -a$$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$ với $t < -2$; $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0 \forall t < -2$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được giá trị của a cần tìm là:

$$-a < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$$

Vậy các giá trị của a thoả mãn đề bài là: $a > \frac{3}{2}$.

Bài 19: Cho phương trình: $x^4 - ax^3 - (2a+1)x^2 + ax + 1 = 0$ (1)

Định a để phương trình có hai nghiệm lớn hơn 1.

Giải

Vì $x = 0$ không là nghiệm của (1) nên chia hai vế của (1) cho x^2 ta được:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - a\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2a - 1 = 0$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, $t \in \mathbb{R}$

Phương trình trên trở thành: $t^2 + 2 - at - 2a - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - at - 2a + 1 = 0$$

+ Với $a > 1$

Xét hàm số: $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow t' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x > 1$

Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
t'		+
t	0	$\nearrow +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $t > 0$

Mặt khác: phương trình $t = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx - 1 = 0$ luôn có hai nghiệm

phân biệt: $x_1 < 0 < x_2$.

Do đó để (1) có hai nghiệm lớn hơn 1 thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} - 4 < a < \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị của a cần tìm là: $2\sqrt{5} - 4 < a < \frac{1}{2}$.

Bài 20: Chứng minh rằng nếu phương trình:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0 \quad (1)$$

có nghiệm thì: $b^2 + (c-2)^2 > 3$

Giải

Giả sử $x_0 \neq 0$ là một nghiệm của phương trình thì (1) tương đương với:

$$x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + b\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + c = 0 \quad (2)$$

Đặt: $t = x_0 + \frac{1}{x_0}$; điều kiện $|t| \geq 2$

Khi đó (2) trở thành: $t^2 + bt + c - 2 = 0 \Rightarrow -t^2 = bt + c - 2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakopski ta được:

$$(-t^2)^2 = (bt + c - 2)^2 \leq [b^2 + (c - a)^2](t^2 + 1) \Rightarrow \frac{t^4}{t^2 + 1} \leq b^2 + (c - a)^2$$

Ta sẽ chứng minh $\forall |t| \geq 2$ thì $\frac{t^4}{t^2 + 1} > 3$ (3)

Thật vậy: (3) $\Leftrightarrow t^4 > 3(t^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow t^4 - 3t^2 + \frac{9}{4} > \frac{21}{4} \Leftrightarrow \left(t^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} > 0 \text{ với mọi } |t| \geq 2$$

$$\text{Vậy } b^2 + (c - 2)^2 > 3$$

Bài 21: Cho phương trình: $x^4 + 2x^2 + 2ax + a^2 + 2a + 1 = 0$ (1)

với mỗi a, gọi x_a là nghiệm bé nhất của phương trình. Xác định a để x_a nhỏ nhất.

Giải

Gọi x_a là nghiệm của phương trình (1) thì:

$$x_a^4 + 2x_a^2 + 2ax_a + a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2(x_a + 1)a + x_a^4 + 2x_a^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

Phương trình này là phương trình bậc hai theo ẩn a và phải có nghiệm nên:

$$\Delta = (x_a + 1)^2 - (x_a^4 + 2x_a^2 + 1) = -x_a^4 - x_a^2 + 2x_a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_a - x_a^2)(x_a^2 + x_a + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_a \leq 1$$

$$\Rightarrow (x_a)_{\min} = 0 \text{ thế vào (2) ta được: } a^2 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Vậy giá trị a cần tìm là: $a = -1$.

Chú ý: Nếu đề bài cần nghiệm lớn nhất thì trả lời $x_a = 1 \Leftrightarrow a = -2$

6. Bài tập dạng 6

Bài 22: Giải phương trình: $3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x^3 + 1)$

Giải

$$3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x + 1)(x^2 - x + 1) \quad (1)$$

+ Nếu $x = -1$ thì (1) trở thành: $3 \cdot 9 = 0$ vô lý.

+ Nếu $x \neq -1$, chia hai vế của (1) cho $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ ta được:

$$3 \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - 2 \cdot \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} = 5$$

$$\text{Đặt: } t = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \text{ thì } \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{t}$$

Phương trình trên trở thành:

$$3t - \frac{2}{t} = 5 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t = 2 \end{cases}$$

+ Với $t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0$ phương trình vô nghiệm.

$$+ \text{ Với } t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13}) \\ x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm phương trình là: } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13}) \\ x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) \end{cases}$$

Bài 23: Giải phương trình: $\frac{3x}{x^2 - 4x + 1} - \frac{2x}{x^2 + x + 1} = \frac{8}{3}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 4x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Phương trình } \frac{3}{x + \frac{1}{x} - 4} - \frac{2}{x + \frac{1}{x} + 1} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Đặt: } t = x + \frac{1}{x}; |t| \geq 2$$

$$\text{Phương trình trở thành: } \frac{3}{t - 4} - \frac{2}{t + 1} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 5 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}) \\ x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = -\frac{13}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-13 - \sqrt{105}}{8} \\ x = \frac{-13 + \sqrt{105}}{8} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21}); x = \frac{-13 \pm \sqrt{105}}{8}$$

Bài 24: Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3x - 16\sqrt[3]{x} - 9 = 0$

Giải

Đặt $y = \sqrt[3]{x}$

Phương trình đã cho trở thành: $y^9 - 3y^6 + 3y^3 - 16y - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2 - y - 1)(y^6 + 2y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 2y + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2 - y - 1)\left[(y^3 - 1)^2 + 2y^4 + 3y^2 + (y - 1)^2 + 7\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2 - y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ y^2 - y - 1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \end{cases}$$

Với $y = -1 \Rightarrow x = -1$

$$y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \Rightarrow x = y^3 = 2 + \sqrt{5}$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \Rightarrow x = y^3 = 2 - \sqrt{5}$$

* Vậy nghiệm đã cho của phương trình là: $x = -1; x = 2 + \sqrt{5}; x = 2 - \sqrt{5}$

Bài 25: Giải phương trình: $\frac{11}{x^2} - \frac{25}{(x+5)^2} = 1$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$

Đặt: $y = x + 5; y \neq 0 \Rightarrow x^2 = (y - 5)^2 = y^2 - 10y + 25$

Thay vào phương trình ta được: $\frac{11}{y^2 - 10y + 25} - \frac{25}{y^2} = 1$

$$\Leftrightarrow 11y^2 - 25(y^2 - 10y + 25) = y^2(y^2 - 10y + 25)$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 10y^3 + 39y^2 - 250y + 625 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{625}{y^2} - 10\left(y + \frac{25}{y}\right) + 39 = 0 \quad (1)$$

Đặt: $t = y + \frac{25}{y}$; điều kiện $|t| \geq 10$

$$\Rightarrow t^2 = y^2 + \frac{625}{y^2} + 50 \Rightarrow y^2 + \frac{625}{y^2} = t^2 - 50$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } t^2 - 10t - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (\text{loại}) \\ t = 11 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 11 \Leftrightarrow y + \frac{25}{y} = 11 \Leftrightarrow y^2 - 11y + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(11 - \sqrt{21}) \\ y = \frac{1}{2}(11 + \sqrt{21}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{21}) \\ x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21}) \end{cases}$$

Là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 26: Giải phương trình: $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 4x + 1} = \frac{5}{6} \quad (1)$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \neq 0 \\ x^2 + 4x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình (1)

$$\frac{x + \frac{1}{x} + 1}{x + \frac{1}{x} + 2} + \frac{x + \frac{1}{x} + 3}{x + \frac{1}{x} + 4} = \frac{5}{6}$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$; điều kiện $|t| \geq 2$

$$\text{Phương trình trên trở thành: } \frac{t+1}{t+2} + \frac{t+3}{t+4} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7} \\ t = \frac{-15 + \sqrt{85}}{7} (\text{loại}) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 = 0 \left(\text{với } \alpha = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}) \\ x = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4})$ với $\alpha = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7}$

Bài 27: Cho phương trình: $x^2 + (x+1)^2 = \frac{m}{x^2 + x + 1}$ (1)

1. Giải phương trình khi $m = 15$.
2. Định m để phương trình có đúng bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) - 1 = \frac{m}{x^2 + x + 1}$

Đặt: $t = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow t \geq \frac{3}{4}$

Phương trình trên trở thành: $2t - 1 = \frac{m}{t} \Leftrightarrow 2t^2 - t = m$ (2)

1. Khi $m = 15$ thì (2) trở thành:

$$2t^2 - t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{2} (\text{loại}) \\ t = 3 \end{cases}$$

Với $t = 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1; x = -2$.

2. Xét hàm $f(t) = 2t^2 - t$ với $t \geq \frac{3}{4}$

$$f'(t) = 4t - 1; \quad f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$		$\frac{3}{8}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình (2) luôn có nghiệm duy nhất $t \geq \frac{3}{4}$.

Mà khi $t \geq \frac{3}{4}$ thì ứng với một giá trị của t phương trình $t = x^2 + x + 1$ cho đúng

hai nghiệm x nên phương trình (1) không thể có bốn nghiệm x .

Vậy không tồn tại giá trị của m .

Bài 28: Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^3 + x^2 + x = m(1 + x^2)^2 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{(1 + x^2)^2} = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} = m \Leftrightarrow \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2} + 2 \cdot \frac{2x}{1 + x^2} = 4m$$

$$\text{Đặt } t = \frac{2x}{1 + x^2} \Rightarrow |t| = 2 \cdot \frac{|x|}{1 + x^2}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi: } 1 + x^2 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{2|x|}{1 + x^2} \leq 1 \Rightarrow |t| \leq 1$$

$$\text{Phương trình trên trở thành: } t^2 + 2t = 4m$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t^2 + 2t \text{ với } |t| \leq 1$$

$$f'(t) = 2t + 2 \geq 0, |t| \leq 1$$

Bảng biến thiên:

t	-1	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	-1	3

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình (1) có nghiệm.

$$\Leftrightarrow -1 \leq 4m \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy giá trị của } m \text{ cần tìm là: } -\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$$

Bài 29: Tìm m để phương trình:

$$\frac{4x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} + 2 \frac{mx}{1 + x^2} + 1 - m^2 = 0 \text{ có nghiệm.}$$

Giải

$$\text{Đặt } t = \frac{2x}{1 + x^2}; |t| \leq 1 \Rightarrow t^2 = \frac{4x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Phương trình (1) trở thành: $t^2 + mt + 1 - m^2 = 0$ (2)

Đặt $t = t^2 + mt + 1 - m^2$

1. Phương trình (2) có nghiệm t_1, t_2 thoả $\begin{cases} -1 \leq t_1 \leq 1 \leq t_2 \\ t_1 < -1 \leq t_2 < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(-1).f(1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq -1 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases} \quad (a)$$

2. Phương trình (2) có nghiệm kép $\in [-1, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4(1 - m^2) = 0 \\ t_0 = -\frac{m}{2} \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{5} \quad (b)$$

3. Phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thoả mãn: $-1 < t_1 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}} < m < 1 \\ -1 < m < -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad (c)$$

Kết hợp các điều kiện a, b, c ta được giá trị của m cần tìm là:

$$\begin{cases} -2 \leq m \leq -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \leq m \leq 2 \end{cases}$$

Bài 30: Định a để phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 + (x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + 1)^2 + a(x^2 - x + 1)^2 \quad (1)$$

Giải

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1) = [(x^2 + 1)^2 - x^2] + a(x^2 - x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) + a(x^2 - x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right]^2 = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + a \quad (\text{do } x^2 - x + 1 \neq 0 \forall x) \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } t = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow (t - 1)x^2 - (t + 1)x + t - 1 = 0 \quad (*)$$

+ Nếu $t = 1$ thì $x = 0$

+ Nếu $t \neq 1$ thì phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2 - 4(t-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 3$$

$$\Rightarrow \text{điều kiện: } \frac{1}{3} \leq t \leq 3$$

Khi đó phương trình (2) trở thành: $t^2 - t = a$

Xét hàm: $f(t) = t^2 - t$ với $\frac{1}{3} \leq t \leq 3$

$$f'(t) = 2t - 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	3
f'(t)	+	0	+
f(t)	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{4}$	6

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq a \leq 6$

Bài 31: Cho phương trình: $\sin^4 x + (1 - \sin x)^4 = m$ (1)

- Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$
- Định m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Giải

Đặt $t = \sin x - \frac{1}{2}$; với $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

Phương trình (1) trở thành: $\left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = m$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8} = m \quad (2)$$

- Khi $m = \frac{1}{8}$ thì (2) trở thành:

$$2t^4 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

2. Đặt $t = \sin x - \frac{1}{2}$

Khi $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < \sin x < 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} < t < \frac{1}{2}$

+ Với một nghiệm $t \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ thì phương trình $t = \sin x - \frac{1}{2}$ có đúng một nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Xét hàm số $f(t) = 2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8}$ với $-\frac{3}{2} < t < \frac{1}{2}$

$f'(t) = 4t^3 + 6t; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Bảng biến thiên:

t	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	17	$\frac{1}{8}$	1

Theo lý luận nghiệm ở trên ta suy ra: để (1) có đúng hai nghiệm $\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

thì (2) có đúng hai nghiệm $t \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{8} < m < 1$

Vậy giá trị của m cần tìm là: $\frac{1}{8} < m < 1$

CHUYÊN ĐỀ 13: CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC

DẠNG 1: PHƯƠNG PHÁP THÊM BỚT

Bài 1: Giải phương trình: $4x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow 4x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 5x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$\Leftrightarrow 5x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{5}x = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$

Bài 2: Giải phương trình: $x^4 - 4x - 1 = 0$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{2}(x + 1) \\ x^2 + 1 = -\sqrt{2}(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}) \\ x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}) \end{cases}$$

$$\text{Bài 3: Giải phương trình: } x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3 \quad (1)$$

Giải

Điều kiện: $x \neq -1$

$$(1) \Leftrightarrow \left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 + x - x}{x+1}\right) + 2 \frac{x^2}{x+1} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2 \frac{x^2}{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+1} = 1 \\ \frac{x^2}{x+1} = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

DẠNG 2: ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$1. x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2) \quad (1)$$

$$2. \frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6 \quad (2)$$

Giải

$$1. x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 5\left(x - \frac{2}{x}\right) = 0 \quad (1)$$

(vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình)

$$\text{Đặt } t = x - \frac{2}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 4$$

Khi đó (1) trở thành: $t^2 + 4 - 5t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$

+ Với $t = 1 \Leftrightarrow x - \frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

+ Với $t = 4 \Leftrightarrow x - \frac{2}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{6} \\ x = 2 + \sqrt{6} \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = -1 \vee x = 2 - \sqrt{6} \vee x = 2 \vee x = 2 + \sqrt{6}$$

2. $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$

Điều kiện: $2x^2 - 5x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{2}{2x + \frac{3}{x} - 5} + \frac{13}{2x + \frac{3}{x} + 1} = 6$ (1)

(vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình)

Đặt: $t = 2x + \frac{3}{x} \Rightarrow$ điều kiện $|t| \geq 2\sqrt{6}$

Khi đó (1) trở thành: $\frac{2}{t-5} + \frac{13}{t+1} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{11}{2} \end{cases}$

Với $t = \frac{11}{2} \Leftrightarrow 2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2 \vee x = \frac{3}{4}$

Bài 5: Giải phương trình: $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

Giải

$$(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0$$

Đặt: $t = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Phương trình trên trở thành: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 ; t = 2$

+ Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

+ Với $t = 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$

Vậy nghiệm của phương trình là:
$$\begin{cases} x = 0 ; x = -1 \\ x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) \end{cases}$$

Bài 6: Giải phương trình sau:

$$3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x^3 + 1)$$

Giải

$$3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x + 1)(x^2 - x + 1) \quad (1)$$

+ Nếu $x = -1$ thì (1) trở thành: $3 \cdot 9 = 0$ vô lý.

+ Nếu $x \neq -1$, chia hai vế của (1) cho $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ ta được:

$$3 \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - 2 \cdot \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} = 5$$

+ Nếu $x = -1$ thì (1) trở thành: $3 \cdot 9 = 0$ vô lý.

+ Nếu $x \neq -1$, chia hai vế của (1) cho $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ ta được:

$$3 \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - 2 \cdot \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} = 5$$

Đặt: $t = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$ thì $\frac{x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{t}$

Phương trình trên trở thành:

$$3t - \frac{2}{t} = 5 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t = 2 \end{cases}$$

+ Với $t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $t = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})$

Vậy nghiệm phương trình là: $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})$

Bài 7: Giải phương trình sau: $x^3 - 3x^2 + 3x - 16\sqrt[3]{x} - 9 = 0$

Giải

Đặt $y = \sqrt[3]{x}$

Phương trình đã cho trở thành: $y^9 - 3y^6 + 3y^3 - 16y - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-y-1)(y^6+2y^4-2y^3+4y^2-2y+9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-y-1)\left[(y^3-1)^2+2y^4+3y^2+(y-1)^2+7\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5}) \end{cases}$$

+ Với $y = -1 \Rightarrow x = -1$

$$+ y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \Rightarrow x = y^3 = 2+\sqrt{5}$$

$$+ y = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \Rightarrow x = y^3 = 2-\sqrt{5}$$

Vậy nghiệm đã cho của phương trình là: $x = -1; x = 2 + \sqrt{5}; x = 2 - \sqrt{5}$

Bài 8: Giải phương trình: $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \neq 1$

Tacó: $\left(x + \frac{x}{x-1}\right)^3 = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 = x^3 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 + 3 \cdot \frac{x^3}{x-1} \left(x + \frac{x}{x-1}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 = x^3 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 + 3 \cdot \frac{x^3}{x-1} \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3 \cdot \frac{x^3}{x-1} \cdot \frac{x}{x-1}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3 \cdot \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x^2}{x-1} + 3 \cdot \frac{x^2}{x-1} - 2 = 0$

Đặt $t = \frac{x^2}{x-1}$, ta được: $t^3 - 3t^2 + 3t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2-t+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t^2-t+1=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0. \text{ Phương trình này vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 9: Giải phương trình: $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$ (1)

Giải

Đặt: $t = x - 3 \Rightarrow x = t + 3$

Phương trình (1) trở thành:

$$(t+1)^6 + (t-1)^6 = 64 \Leftrightarrow t^6 + 15t^4 + 15t^2 - 31 = 0$$

(khai triển theo tam giác Pascal rồi đơn giản).

Đặt $y = t^2 \geq 0$, ta được:

$$y^3 + 15y^2 + 15y - 31 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + 16y + 31) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y^2 + 16y + 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$$

(vì với $y \geq 0$ thì phương trình $y^2 + 16y + 31 = 0$ vô nghiệm)

$$\text{Khi } y = 1 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow 1 = (x-3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 10: Giải phương trình sau: $x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0$ (1)

Giải

Nhắm một nghiệm của phương trình $x_0 = -3$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow (x+3)(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 18x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 18x - 9 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2(x-1) - 9(x-1)^2 = 0$$

Xem đây là phương trình trùng phương theo ẩn x ; giải phương trình này ta được: $2x^2 = 3y \pm 3y\sqrt{5}$

$$+ \text{ Nếu } 2x^2 = 3y + 3y\sqrt{5} \Rightarrow 2x^2 - 3(\sqrt{5}+1)x + 3(\sqrt{5}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \left(3\sqrt{5} + 3 \pm \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} \right)$$

$$+ \text{ Nếu } 2x^2 = 3y - 3y\sqrt{5} \Rightarrow 2x^2 + 3(\sqrt{5}-1)y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3(\sqrt{5}-1)x - 3(\sqrt{5}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \left(3 - 3\sqrt{5} \pm \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} \right)$$

Tóm lại nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} x = -3 \vee x = \frac{1}{4}(3 + 3\sqrt{5} \pm \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}) \\ x = \frac{1}{4}(3 - 3\sqrt{5} \pm \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}) \end{cases}$$

Bài 11:: Giải phương trình: $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 4x + 1} = \frac{5}{6}$ (1)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \neq 0 \\ x^2 + 4x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình (1)

$$\frac{x + \frac{1}{x} + 1}{x + \frac{1}{x} + 2} + \frac{x + \frac{1}{x} + 3}{x + \frac{1}{x} + 4} = \frac{5}{6}$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$; điều kiện $|t| \geq 2$

Phương trình trên trở thành: $\frac{t+1}{t+2} + \frac{t+3}{t+4} = \frac{5}{6}$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7}; t = \frac{-15 + \sqrt{85}}{7} \text{ (loại)}$$

+ Với $t = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7} = \alpha$

$$\Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 = 0 \left(\text{với } \alpha = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7} \right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}) \text{ với } \alpha = \frac{-15 - \sqrt{85}}{7}$$

Bài 12: Giải phương trình: $\sqrt[5]{27}x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0$ (1)

Giải

Cách 1: Đặt $t = x^2; t \geq 0$

(1) trở thành: $\sqrt[5]{27}t^5 - 5t^3 + \sqrt[5]{864} = 0 \Leftrightarrow t^5 - \frac{5}{\sqrt[5]{27}}t^3 + 2 = 0$

Xét hàm số:

$$f(t) = t^5 - \frac{5}{\sqrt[5]{27}}t^3 + 2 \text{ với } t \geq 0; \quad f'(t) = 5t^4 - \frac{5}{\sqrt[5]{27}}t^2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = \sqrt[10]{9}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\sqrt[10]{9}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	2	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $f(t) \geq 0 \forall t \geq 0$

Do đó: $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[10]{9} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[10]{9}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm \sqrt[10]{9}$

Bài 13: Giải phương trình: $\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2} + (x^2-3)^4 + \frac{1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 2x - 5 \quad (1)$

Giải

Điều kiện: $x \neq 1; x \neq \pm \sqrt{3}$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = (x-1)^2 \\ b = x^3 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = (x-1)^2 \\ 2b = 2(x^3 - 3) \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 3x^2 - 2x - 5$$

Phương trình trở thành: $\frac{a^2}{b^2} + b^4 + \frac{1}{a} = a + 2b$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + b^2 + \frac{1}{a} + a + b^4 = a + 2b + a + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + b^2 + a + \frac{1}{a} + b^4 = 2a + 2b + b^2 \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức Côsi: $\begin{cases} \frac{a^2}{b^2} + b^2 \geq 2a \\ a + \frac{1}{a} \geq 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + b^2 + a + \frac{1}{a} + b^4 - (2a + 2b + b^2) &\geq 2a + 2 + b^4 - (2a + 2b + b^2) \\ &\geq b^4 - b^2 - 2b + 2 \geq (b-1)(b^3 + b^2 - 2) \geq (b-1)^2 [(b-1)^2 + 1] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \geq (b-1)^2 [(b-1)^2 + 1] \quad (\text{theo } (*))$$

$$\Leftrightarrow b-1=0 \Leftrightarrow b=1=a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 1 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 14: Giải phương trình: $3\operatorname{arctg}x = \operatorname{arctg}3x + \frac{\pi}{2}$ (1)

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \operatorname{arctg}3x = 3\operatorname{arctg}x - \frac{\pi}{2}$

Đặt $t = \operatorname{arctg}x$ thì $-\frac{\pi}{2} < 3t - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{3}$

Khi đó ta được: $\operatorname{arctg}3x = 3t - \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = \operatorname{tg}\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$ (2)

Mà: $\operatorname{tg}\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cotg 3t = -\frac{\cos 3t}{\sin 3t} = \frac{\cos t(3 - 4\cos^2 t)}{\sin t(3 - 4\sin^2 t)}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tgt}} \cdot \frac{3(1 + \operatorname{tg}^2 t) - 4}{3(1 + \operatorname{tg}^2 t) - 4\operatorname{tg}^2 t} = \frac{3\operatorname{tg}^2 t - 1}{\operatorname{tgt}(3 - \operatorname{tg}^2 t)}$

Với $t = \operatorname{arctg}x \Rightarrow x = \operatorname{tgt}$; mà $0 < t < \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 < x < \sqrt{3}$

Nên: $\operatorname{tg}\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3x^2 - 1}{x(3 - x^2)}$

Do đó (2) trở thành:

$3x = \frac{3x^2 - 1}{x(3 - x^2)} \Leftrightarrow 9x^2 - 3x^4 = 3x^2 - 1$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 6x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}$ (vì $0 < x < \sqrt{3}$)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

Bài 15: Giải phương trình:

$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 18x - 9 = 0$

Giải

$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 18x - 9 = 9 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2(x - 1) - 9(x - 1)^2 = 0$

Đặt: $y = x - 1$ ta được: $x^4 - 3x^2y - 9y^2 = 0$

$\Leftrightarrow 9y^2 - 3x^2y - x^4 = 0$

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn y .

Ta có: $\Delta = 9x^4 + 36x^4 = 45x^4$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-3x^2 - 3\sqrt{5}x^2}{18} = -x^2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{6} \\ y = -x^2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

+ Với $y = -x^2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{6} \Rightarrow x-1 = -x^2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{6}$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{5})x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{15+6\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$

+ Với $y = -x^2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{6} \Rightarrow x-1 = -x^2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{6}$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{5})x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{15-6\sqrt{5}}}{1-\sqrt{5}} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{15-6\sqrt{5}}}{1-\sqrt{5}} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{15+6\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{15-6\sqrt{5}}}{1-\sqrt{5}}$$

Bài 16: Cho phương trình: $(x^2 + 2x)(x^2 + 2) = m(x^3 - 1)$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Ta có: $x^2 + x + 1 - (x-1) = x^2 + 2$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - (x-1)^2 = m(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2 + x + 1} = m \quad (2) \quad (x \neq 1)$$

Đặt $t = \frac{x^2 + x + 1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 + (1-t)x + 1+t = 0$

Phương trình này có nghiệm khác 1:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (1-t)^2 - 4(1+t) \geq 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3-2\sqrt{3} \\ t \geq 3+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Khi đó: (2) trở thành: $t - \frac{1}{t} = m$ (3)

Để (1) có nghiệm thì (3) có nghiệm t thỏa mãn $\begin{cases} t \leq 3-2\sqrt{3} \\ t \geq 3+2\sqrt{3} \end{cases}$

Xét hàm $f(t) = t - \frac{1}{t}$; $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0 \forall t \neq 0$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$3 - 2\sqrt{3}$	0	$3 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{22}{3 - 2\sqrt{3}}$		$\frac{22}{3 + 2\sqrt{3}}$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn: $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{22}{3 - 2\sqrt{3}} \\ m \geq \frac{22}{3 + 2\sqrt{3}} \end{cases}$

Bài 17: Cho phương trình: $(x^4 - 4)(x^4 + 6x^2 + 5) = m$ (1)

Tìm m để phương trình có đúng tám nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 5) = m$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + 3x^2 - 10)(x^4 + 3x^2 + 2) = m \quad (2)$$

Đặt $t = x^4 + 3x^2 \geq 0$

(2) trở thành: $(t - 10)(t + 2) = m$

$$\Leftrightarrow t^2 - 8t - 20 - m = 0 \quad (3)$$

- Ứng với một giá trị $t > 0$ thì phương trình $x^4 + 3x^2 = t$ luôn có bốn nghiệm x phân biệt.
- Do đó: (1) có tám nghiệm x phân biệt thì (3) có $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \Leftrightarrow -36 < m < -20 \\ S > 0 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $-36 < m < -20$

Bài 18: Cho phương trình:

$$x^6 + 3x^5 + (6 - a)x^4 + (7 - 2a)x^3 + (6 - a)x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (1)$$

Định a để phương trình trên có đúng hai nghiệm âm.

Giải

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1) nên

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (6-a)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 - 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + (6-a)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 - 2a = 0 \quad (2)$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$; điều kiện $|y| \geq 2$

Phương trình (2) trở thành: $y^3 + 3y^2 + (3-a)y + 1 - 2a = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 1}{y + 2} = a \quad (*) \quad (y \neq -2)$$

Xét hàm số: $f(y) = \frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 1}{y + 2}$ với $\begin{cases} y < -2 \\ y \geq 2 \end{cases}$

$$f'(y) = \frac{(y+1)^2(2y+5)}{(y+2)^2}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	2	$+\infty$
$f'(y)$		-	0	+		
$f(y)$	$+\infty$	$\nearrow \frac{27}{4}$	$\nearrow +\infty$		$\frac{27}{4}$	$\nearrow +\infty$

- Khi $x < 0$ thì miền xác định $f(y)$ là $y < -2$.

Mặt khác: phương trình: $x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$ luôn có $\begin{cases} S = y < 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$

nên có hai nghiệm $x_1 < x_2 < 0$.

Dựa vào bảng biến thiên để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì: $a = \frac{27}{4}$

(có thể lý luận: với $y < -2$ thì phương trình $y = x + \frac{1}{x}$ luôn có hai nghiệm âm.

Dựa vào bảng biến thiên thì đường thẳng $g(y) = a$ luôn cắt đồ thị hàm $f(y)$ tại hai điểm phân biệt $\left(a > \frac{27}{4}\right)$ nên phương trình (*) luôn có bốn nghiệm âm

phân biệt. Chỉ khi $a = \frac{27}{4}$ thì (*) có nghiệm duy nhất $y = -\frac{5}{2}$.

Khi đó phương trình: $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$

Bài 19: Cho $a \geq 0; b \in \mathbb{R}$ cố định (cả 2 số), giải phương trình:

$$5x^5 + 5ax^3 + a^2x + 5b = 0 \quad (1)$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x &= u + v \Rightarrow x^5 = (u + v)^5 \\ \Rightarrow x^5 &= u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u + v) \\ \Rightarrow x^5 &= u^5 + v^5 + 5uv[(u + v)^3 - 3uv(u + v)] + 10u^2v^2(u + v) \\ \Rightarrow x^5 &= u^5 + v^5 + 5uv(u + v)^3 - 5u^2v^2(u + v) \\ \Rightarrow x^5 - 5uvx^3 + 5u^2v^2x - (u^5 + v^5) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Cân bằng hệ số hai vế của (1) và (2) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} -5uv = a \\ -(u^5 + v^5) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = -\frac{a}{5} \\ u^5 + v^5 = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^5 \cdot v^5 = -\frac{a^5}{5^5} \\ u^5 + v^5 = -b \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^5; v^5 \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2 + bX - \left(\frac{a}{5}\right)^5 = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = b^2 + 4\left(\frac{a}{5}\right)^5 \geq 0 \text{ vì } a \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{hai nghiệm: } X_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-b \pm \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{5}\right)^5} \right)$$

$$\Rightarrow \text{nghiệm } x = x_0 = u + v$$

$$= \sqrt[5]{\frac{1}{2} \left(-b + \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{5}\right)^5} \right)} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} \left(-b - \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{5}\right)^5} \right)}$$

Là nghiệm của phương trình đã cho.

Ta chứng minh nghiệm x_0 này là duy nhất.

Thật vậy: nếu $x > x_0 \Rightarrow x^5 > x_0^5; x^3 > x_0^3; x > x_0$

$$\Rightarrow 5x^5 + 5ax^3 + a^2x + 5b > 5x_0^5 + 5ax_0^3 + a^2x_0 + 5b = 0$$

$\Rightarrow$ với $x > x_0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Lý luận tương tự nếu $x < x_0$ thì (1) cũng vô nghiệm.

Tóm lại nghiệm của phương trình (1) là:

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{2} \left(-b + \sqrt{b^2 + 4 \left(\frac{a}{5} \right)^5} \right)} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} \left(-b - \sqrt{b^2 + 4 \left(\frac{a}{5} \right)^5} \right)}$$

DẠNG 3: ĐỔI BIẾN LƯỢNG GIÁC

Bài 20: Giải phương trình: $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$ (1)

với $0 < x < 1$

Giải

Với $0 < x < 1$, đặt $x = \cos t$; $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Phương trình (1) trở thành:

$$8 \cos t (2 \cos^2 t - 1) (8 \cos^4 t - 8 \cos^2 t + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos t \cdot \cos 2t \left[8 \cdot \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 - 8 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} + 1 \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos t \cdot \cos 2t (2 \cos^2 2t + 4 \cos 2t + 2 - 4 - 4 \cos 2t + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos t \cdot \cos 2t (2 \cos^2 2t - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t = 1$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin t \cdot \cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t = \sin t$$

(do $t = 0$ không là nghiệm của phương trình)

$$\Leftrightarrow \sin 8t = \sin t \Leftrightarrow \begin{cases} 8t = t + m2\pi \\ 8t = \pi - t + m2\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{m2\pi}{7} \vee t = \frac{\pi}{9} + \frac{m2\pi}{9}$$

$$+ \text{ Với } 0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{m2\pi}{7} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < m < \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow m = 1 \Rightarrow \text{nghiệm } t = \frac{2\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \text{nghiệm của (1) là: } x = \cos \frac{2\pi}{7}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{\pi}{9} + \frac{m2\pi}{9} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{9} + \frac{m2\pi}{9} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow m \in \{0; 1\} \Rightarrow \text{nghiệm } t \in \left\{ \frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{nghiệm của (1) là: } x \in \left\{ \cos \frac{\pi}{9}; \frac{1}{2} \right\}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1}{2}$; $x = \cos \frac{2\pi}{7}$; $x = \cos \frac{\pi}{9}$

Bài 21: Giải phương trình: $32x(x^2 - 1)(2x^2 - 1)^2 = 1 - \frac{1}{x}$

với $0 < x < 1$

Giải

Với $0 < x < 1$; đặt $x = \cos t$; $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Phương trình đã cho trở thành: $32 \cos t (\cos^2 t - 1)(2 \cos^2 t - 1)^2 = 1 - \frac{1}{\cos t}$

$$\Leftrightarrow 32 \cos^2 t (\cos^2 t - 1)(2 \cos^2 t - 1)^2 = \cos t - 1$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot \sin^2 2t \cdot \cos^2 2t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \Leftrightarrow \sin^2 4t = \sin^2 \frac{t}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 8t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8t = \cos t \Leftrightarrow \begin{cases} 8t = t + m2\pi \\ 8t = -t + m2\pi \end{cases} (m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{m2\pi}{7} \\ t = \frac{m2\pi}{9} \end{cases}$$

$$\forall 0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{m2\pi}{7} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{m2\pi}{9} < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \frac{7}{4} \\ 0 < m < \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow t = \frac{2\pi}{7}; t = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{7}; x = \cos \frac{\pi}{9} \\ m = 2 \Rightarrow t = \frac{4\pi}{9} \Rightarrow x = \cos \frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x \in \left\{ \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9} \right\}$

DẠNG 4: ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

Bài 22: Giải phương trình: $(x^2 + 3x - 4)^2 + 3(x^2 + 3x - 4) = x + 4$ (1)

Giải

- Đặt $t = x^2 + 3x - 4$ thì (1) trở thành:

$$\begin{cases} t = x^2 + 3x - 4 \\ t^2 + 3t = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x = t + 4 \\ t^2 + 3t = x + 4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} t^2 + 3t = x + 4 \\ t^2 + 3t = x + 4 \end{cases} \quad (2)$$

- Lấy (1) thế (2) ta được:

$$x^2 - t^2 + 3(x - t) = t - x \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = -x - 4 \end{cases}$$

- Với $t = x$ thế vào (2) ta được: $x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}$
- Với $t = -x - 4$ thế vào (2) được:

$$x^2 + 3x = -x - 4 + 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là:

$$x = 0; x = -4; x = -1 \pm \sqrt{5}$$

Bài 23: Giải và biện luận phương trình sau theo a và b:

$$a - b(a - bx^2) = x$$

Giải

Đặt $t = a - bx^2$ thì $x = a - bt^2$

Phương trình đã cho trở thành:
$$\begin{cases} t = a - bx^2 & (1) \\ x = a - bt^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) - (1) ta được: $x - t = b(x^2 - t^2)$

$$\Leftrightarrow (x - t)[1 - b(x + t)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ b(x + t) = 1 \end{cases}$$

1. Nếu $b = 0$ thì $x = a$ là nghiệm.

2. Nếu $b \neq 0$ thì
$$\begin{cases} x = t \\ x + t = \frac{1}{b} \end{cases}$$

a. Với $x = t \Rightarrow bx^2 + x - a = 0$ (3)

Ta có: $\Delta = 1 + 4ab$

+ Nếu: $\Delta < 0 \Rightarrow 1 + 4ab < 0 \Rightarrow ab < -\frac{1}{4}$, thì (3) vô nghiệm.

+ Nếu: $\Delta \geq 0 \Rightarrow ab \geq -\frac{1}{4}$ thì (3) có nghiệm.

$$x_1 = \frac{1}{2b}(-1 - 4\sqrt{1 - 4ab}) \vee x_2 = \frac{1}{2b}(-1 + 4\sqrt{1 - 4ab})$$

b. Với $x + t = \frac{1}{b} \Rightarrow x + a - bx^2 - \frac{1}{b} = 0$

$$\Leftrightarrow bx^2 - x - a + \frac{1}{b} = 0 \quad (4)$$

$$\Delta = 1 - 4b\left(\frac{1}{b} - a\right) = 4ab - 3$$

+ Nếu: $\Delta < 0 \Rightarrow 4ab - 3 < 0 \Rightarrow ab < \frac{3}{4}$, thì (4) vô nghiệm.

+ Nếu: $\Delta \geq 0$ thì (4) có nghiệm.

$$x_3 = \frac{1}{2b}(-1 - 4\sqrt{4ab - 3}) \vee x_4 = \frac{1}{2b}(-1 + 4\sqrt{4ab - 3})$$

Tóm lại ta có:

+ Nếu $b = 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = a$.

+ Nếu $b \neq 0$ và $ab < -\frac{1}{4}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $-\frac{1}{4} \leq ab \leq \frac{3}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm là x_1, x_2 .

+ Nếu $ab \geq \frac{3}{4}$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm là x_1, x_2, x_3, x_4 .

DẠNG 5: TRAO ĐỔI VAI TRÒ GIỮA ẨN VÀ THAM SỐ.

Bài 24: Giải phương trình: $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$

Giải

$$x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2}x^2 + x^3 - x^2 = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai theo ẩn là $\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có: } \Delta = x^4 - 4(x^3 - x^2) = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x - 2)^2$$

$$\Rightarrow \text{hai nghiệm} \begin{cases} \sqrt{2} = \frac{1}{2}[x^2 + x(x - 2)] \\ \sqrt{2} = \frac{1}{2}[x^2 - x(x - 2)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - \sqrt{2} = 0 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}); x = \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 \pm 4\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 25: Giải phương trình: $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$

Giải

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3 - (2x^2 + 1)\sqrt{3} + x + x^4 = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai theo ẩn là $\sqrt{3}$.

Ta có: $\Delta = (2x^2 + 1)^2 - 4(x + x^4) = (2x - 1)^2$

$$\Rightarrow \text{hai nghiệm} \begin{cases} \sqrt{3} = \frac{1}{2}(2x^2 + 1 + 2x - 1) \\ \sqrt{3} = \frac{1}{2}(2x^2 + 1 - 2x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 2\sqrt{3} = 0 \\ 2x^2 - 2x + 2 - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}) \\ x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}) \vee x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3})$$

Bài 26: Giải phương trình: $\sqrt{5 - x} = x^2 - 5$

Giải

$$\sqrt{5 - x} = x^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 5 \\ 5 - x = (x^2 - 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \\ x \geq \sqrt{5} \\ 5^2 - (2x^2 + 1) \cdot 5 + x + x^4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai theo ẩn là 5.

Ta có: $\Delta = (2x^2 + 1)^2 - 4(x + x^4) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

$$\Rightarrow \text{hai nghiệm của (1) là:} \begin{cases} 5 = \frac{1}{2}(2x^2 + 1 + 2x - 1) \\ 5 = \frac{1}{2}(2x^2 + 1 - 2x + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 8 = 0 \\ 2x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 4 = 0 \quad (2) \\ x^2 + x - 5 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$

$$(3) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{21})$$

Kiểm ra điều kiện ta được nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17}) \vee x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{21})$$

Bài 27: Giải phương trình: $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 18x - 9 = 0$

Giải

$$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 18x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2(x-1) - 9(x-1)^2 = 0$$

$$\text{Đặt: } y = x - 1 \text{ ta được: } x^4 - 3x^2y - 9y^2 = 0 \Leftrightarrow 9y^2 - 3x^2y - x^4 = 0$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn y .

$$\text{Ta có: } \Delta = 9x^4 + 36x^4 = 45x^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-3x^2 - 3\sqrt{5}x^2}{18} = -x^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{6} \\ y = -x^2 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } y = -x^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{6} \Rightarrow x - 1 = -x^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{6}$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{5})x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}$$

$$+ \text{ Với } y = -x^2 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{6} \Rightarrow x - 1 = -x^2 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{6}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{5})x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}}{1 - \sqrt{5}}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}}{1 - \sqrt{5}}$$

Bài 28: Định m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + 8x^2 + 16mx + 16m^2 + 32m + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Bất phương trình (1)

$$\Leftrightarrow x^2(x+2)^2 + 4x^2 - 5(x+2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^3 + 3x^2 - 20) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (a)$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 16m^2 + 2(8x + 16)m + x^4 + 8x^2 + 16 = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai theo ẩn m :

Phương trình trên phải có nghiệm nên: $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (8x + 16)^2 - 16(x^4 + 8x^2 + 16) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \quad (b)$$

Từ (a) và (b) $\Rightarrow$ nghiệm của hệ là: $x = 2$

Khi $x = 2$ thế vào (2) ta được: $16m^2 + 64m + 64 = 0 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m = -2$

Bài 29: Cho phương trình: $x^4 + 2x^2 + 2ax + a^2 + 2a + 1 = 0 \quad (1)$

với mỗi a , gọi x_a là nghiệm bé nhất của phương trình. Xác định a để x_a nhỏ nhất.

Giải

Gọi x_a là nghiệm của phương trình (1) thì:

$$x_a^4 + 2x_a^2 + 2ax_a + a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2(x_a + 1)a + x_a^4 + 2x_a^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

Phương trình này là phương trình bậc hai theo ẩn a và phải có nghiệm nên:

$$\Delta = (x_a + 1)^2 - (x_a^4 + 2x_a^2 + 1) = -x_a^4 - x_a^2 + 2x_a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_a - x_a^2)(x_a^2 + x_a + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_a \leq 1$$

$$\Rightarrow (x_a)_{\min} = 0 \text{ thế vào (2) ta được: } a^2 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Vậy giá trị a cần tìm là: $a = -1$.

Chú ý: Nếu đề bài cần nghiệm lớn nhất thì trả lời $x_a = 1 \Leftrightarrow a = -2$

Bài 30: Giải và biện luận phương trình:

$$x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0 \quad (1)$$

Giải

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x = 0 \quad (*)$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn số là a .

Phương trình này có

$$\Delta = (x^2 - 5x - 1)^2 - (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = (x - 1)^2$$

$$\text{Suy ra: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = x^2 - 5x - 1 - x + 1 \\ a = x^2 - 5x - 1 + x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x^2 - 6x \\ a = x^2 - 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - a = 0 \\ x^2 - 4x - a - 2 = 0 \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$

Phương trình (2) có: $\Delta = 4 + a + 2 \geq 0 \Rightarrow a \geq -6$

$$\Rightarrow \text{Nghiệm của (2) là: } x_1 = 3 + \sqrt{9 + a} \vee x_2 = 3 - \sqrt{9 + a}$$

$$\text{Nghiệm của (3) là: } x_3 = 2 + \sqrt{6 + a} \vee x_4 = 2 - \sqrt{6 + a}$$

Biện luận:

- + Nếu $a < -9$ thì (2) và (3) vô nghiệm nên (1) vô nghiệm.
- + Nếu $a = -9$ thì (2) có nghiệm kép $x_0 = 3$, nên (1) có nghiệm $x_0 = 3$.
- + Nếu $-9 < a < -6$ thì (2) có nghiệm x_1, x_2 ; phương trình (3) vô nghiệm nên (1) có hai nghiệm $x = 3 \pm \sqrt{9+a}$.
- + Nếu $a = -6$ thì (2) có hai nghiệm $x_1 = 3 + \sqrt{3}; x_2 = 3 - \sqrt{3}$
Phương trình (3) có nghiệm kép $x_0 = 2$. Do đó, phương trình (1) có ba nghiệm là: $x = 3 \pm \sqrt{3}; x = 2$
- + Nếu $a > -6$ thì (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) cũng có hai nghiệm phân biệt nên (1) có bốn nghiệm phân biệt:
$$\begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{9+a} \\ x = 2 \pm \sqrt{6+a} \end{cases}$$

Kết luận:

- + Nếu $a < -9$ thì nên (1) vô nghiệm
- + Nếu $a = -9$ thì (1) có nghiệm $x = 3$.
- + Nếu $-9 < a < -6$ thì (1) có nghiệm $x = 3 \pm \sqrt{9+a}$.
- + Nếu $a = -6$ thì (1) có ba nghiệm là: $x = 3 \pm \sqrt{3} \vee x = 2$
- + Nếu $a > -6$ thì (1) có bốn nghiệm:
$$\begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{9+a} \\ x = 2 \pm \sqrt{6+a} \end{cases}$$

Bài 31: Cho hai phương trình: $x^2 + x + 4a = 0$ (1)

và $ax^2 + x + 4 = 0$ (2)

Định a để hai phương trình trên có một nghiệm chung.

Giải

- + Nếu $a = 0$ thì (2) có nghiệm $x = -4$ còn (1) $\Leftrightarrow x^2 + x = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$ nên (1) và (2) không tương đương.
- + Khi $a \neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow a^2x^2 + ax + 4a = 0$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 + x + 4a = 0 \\ a^2x^2 + ax + 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 4a = 0 \\ a^2x^2 + ax - x^2 - x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Xem (3) là phương trình bậc hai ẩn là a thì:

$$(3) \Leftrightarrow (a-1)[x(1+a)+1]x = 0$$

Do đó hệ trên tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 + x + 4a = 0 \\ (a-1)[x(1+a)+1]x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 4a = 0 \\ a-1 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x(1+a)+1 = 0 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Hoặc: $\begin{cases} x^2 + x + 4a = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{III})$

Xét hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Xét hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{1+a} \text{ (vì } a = -1 \text{ thì hệ vô nghiệm)} \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+a)^2} - \frac{a}{1+a} + 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ a = -\frac{3}{2} \vee a = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Xét hệ (III): $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ (loại)}$

Vậy các nghiệm của a cần tìm là: $a = -\frac{1}{2}; a = -\frac{3}{2}$

DẠNG 6: DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM

Bài 32: Giải phương trình: $x^{100} + (x+6)^{100} = 2 \cdot 3^{100}$

Giải

Xét hàm số: $f(x) = x^{100} + (x+6)^{100} \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99} + 100(x+6)^{99}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3$$

Bảng biến thiên

x	0	-3	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\searrow 2 \cdot 3^{100} \nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

$$f(x) \geq 2 \cdot 3^{100}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = -3$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3$.

Chú ý: Bài này có thể áp dụng bất đẳng thức để giải:

$$\text{Ta có: } x^{100} + (x+6)^{100} = (-x)^{100} + (x+6)^{100} \geq 2 \cdot \left(\frac{-x + x + 6}{2} \right)^{100}$$

$$\Rightarrow x^{100} + (x+6)^{100} \geq 2 \cdot 3^{100}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow -x = x + 6 \Leftrightarrow x = -3$$

Bài 33: Chứng minh rằng phương trình:

$$x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (1) \text{ luôn có nghiệm duy nhất.}$$

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^5 = (x+1)^2 \Rightarrow x \geq 0 \quad (2)$$

- Nếu $x = 0$ hay $x = -1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Xét $x > 0$

– Lấy loga có số e hai vế của (2) ta được:

$$\ln x^5 = \ln (x+1)^2 \Leftrightarrow 5 \ln x = 2 \ln (x+1)$$

$$\Leftrightarrow 5 \ln x - 2 \ln (x+1) = 0 \quad (3)$$

Xét hàm số: $f(x) = 5 \ln x - 2 \ln (x+1)$

$$f'(x) = \frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{3x+5}{x(x+1)} > 0 \forall x > 0$$

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ (3) luôn có đúng một nghiệm.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

Bài 34: Giải phương trình: $\sqrt[5]{27}x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0 \quad (1)$

Giải

$$\text{Đặt: } t = x^2; t \geq 0$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } \sqrt[5]{27}t^5 - 5t^3 + \sqrt[5]{864} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^5 - \frac{5}{\sqrt[5]{27}}t^3 + 2 = 0$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t^5 - \frac{5}{\sqrt[5]{27}}t^3 + 2 \text{ với } t \geq 0 \quad f'(t) = 5t^4 - \frac{15}{\sqrt[5]{27}}t^2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt[10]{9} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\sqrt[10]{9}$	$+\infty$
$f'(t)$	0	-	0
$f(t)$	2	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $f(t) \geq 0 \forall t \geq 0$

Do đó: $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[10]{9} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[10]{3}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm \sqrt[10]{3}$

Bài 35: Cho hai đa thức: $f(x) = x^4 - (1 + e^2)x^2 + e^2$

và $g(x) = x^4 - 1$ (e là cơ số của logaritnêpe)

Chứng minh rằng với các số dương a, b phân biệt thỏa mãn:

$$a^b = b^a \text{ thì } f(a).f(b) < 0 \text{ và } g(a).g(b) > 0$$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b$

Theo giả thiết: $a^b = b^a \Leftrightarrow b \ln a = a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$

$$\Leftrightarrow a^{-1} \ln a = b^{-1} \ln b \Leftrightarrow \ln a^{\frac{1}{a}} = \ln b^{\frac{1}{b}}$$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}} \Leftrightarrow h(a) = h(b)$$

Xét hàm số: $h(x) = x^{\frac{1}{x}}$ với $x > 0$

$$\Rightarrow \ln[h(x)] = \frac{\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$$

Bảng biến thiên

x	0	1	e	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$			$\frac{1}{e^e}$	
	2			$+\infty$

Từ $h(a) = h(b)$ và $a > b$ suy ra: $a < b < e < a$

Lại có: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - e^2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(a) = (a^2 - 1)(a^2 - e^2) < 0 \\ f(b) = (b^2 - 1)(b^2 - e^2) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(a).f(b) > 0 \text{ (đpcm)}$$

$$\begin{cases} g(a) = a^4 - 1 > 0 \\ g(b) = b^4 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow g(a).g(b) < 0 \text{ (đpcm)}$$

DẠNG 7: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 36: Giải phương trình: $(x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6 = 18 - 8\sqrt{5}$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức:

Với $\forall a, b \in \mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{N}$ thì: $\frac{a^{2k} + b^{2k}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

(Bất đẳng thức này dễ dàng chứng minh bằng quy nạp)

Ta có: $(x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6 = (-x-1)^6 + (x+\sqrt{5})^6$

$$\Rightarrow \frac{(-x-1)^6 + (x+\sqrt{5})^6}{2} \geq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6 \geq 18 - 8\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow -(x+1) = x+\sqrt{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

Bài 37: Giải phương trình: $\sqrt[5]{27}x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0 \quad (1)$

Giải

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế của phương trình cho x^6 ta được:

$$\sqrt[5]{27}x^4 + \frac{\sqrt[5]{864}}{x^6} = 5 \Leftrightarrow \sqrt[5]{27}x^4 + \frac{\sqrt[5]{32 \cdot 27}}{x^6} = 5 \Leftrightarrow x^4 + \frac{2}{x^6} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

Theo bất đẳng thức Cô-sy ta có: $x^4 + \frac{2}{x^6} = \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^6} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{3^3}}$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{2}{x^6} \geq \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

$$\Rightarrow \text{dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x^4}{3} = \frac{1}{x^6} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[10]{3}$$

Bài 38: Chứng minh rằng nếu phương trình:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0 \text{ có nghiệm thì: } b^2 + (c-2)^2 > 3$$

Giải

Giả sử $x_0 \neq 0$ là một nghiệm của phương trình thì (1) tương đương với:

$$x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + b \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) + c = 0 \quad (2)$$

Đặt: $t = x_0 + \frac{1}{x_0}$; điều kiện $|t| \geq 2$.

Khi đó (2) trở thành: $t^2 + bt + c - 2 = 0 \Leftrightarrow -t^2 = bt + c - 2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakopxki ta được:

$$(-t^2)^2 = (bt + c - 2)^2 \leq [b^2 + (c - 2)^2](t^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{t^4}{t^2 + 1} \leq b^2 + (c - 2)^2$$

Ta sẽ chứng minh: $\forall |t| \geq 2$ thì $\frac{t^4}{t^2 + 1} > 3$ (3)

$$\text{Thật vậy: } (3) \Leftrightarrow t^4 - 3t^2 + \frac{9}{4} > \frac{21}{4} \Leftrightarrow \left(t^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} > 0$$

Bất đẳng thức này luôn đúng với mọi $|t| \geq 2$

$$\text{Vậy } b^2 + (c - 2)^2 > 3$$

Bài 39: Giả sử phương trình: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$

Giải

Giả sử x_0 là một đã cho của phương trình đã cho thì:

$$x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -(x_0^4 + 1) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 \Rightarrow (x_0^4 + 1)^2 = (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0)^2$$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta có:

$$(x_0^4 + 1)^2 = (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x_0^6 + x_0^4 + x_0^2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x_0^4 + 1)^2}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{(x_0^4 + 1)^2}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2} \geq \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 - 1)^2 (3x_0^4 + 2x_0^2 + 3) \geq 0 \quad (*)$$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng.

$$\text{Do đó: } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3} \quad (\text{dpcm})$$

Bài 40: Cho phương trình: $x^3 - x^2 + 18ax - 2a = 0$

Định a để phương trình có ba nghiệm phân biệt dương.

Giải

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm dương phân biệt là: x_1, x_2, x_3

Theo định lý Viét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 18a \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2a \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Côsi:

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \Rightarrow 1 \geq 27.2a \Rightarrow a \leq \frac{1}{54} \quad (1)$$

$$18a = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 \geq 3\sqrt{(x_1x_2x_3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (18a)^3 \geq 27.4a^2 \Rightarrow a \geq \frac{1}{54} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow a = \frac{1}{54}$$

Mặt khác vì ba nghiệm x_1, x_2, x_3 phân biệt nên $a \neq \frac{1}{54}$

Do đó không tồn tại giá trị a thỏa mãn đề.

Bài 41: Giả sử phương trình: $x^3 - x^2 + ax + b = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng: $a^2 + 3b > 0$.

Giải

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

Theo định lý Viét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 = (x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= (x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 - 2b \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta được:

$$(x_1x_2)^2 + (x_3x_1)^2 \geq 2|x_1x_2||x_3x_1| \geq 2x_1x_2^2x_3$$

$$\text{Tương tự: } (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 \geq 2x_1x_2x_3^2$$

$$(x_3x_1)^2 + (x_1x_2)^2 \geq 2x_1^2x_2x_3$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 \geq x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -b$$

Do đó: $a^2 \geq -b - 2b \Leftrightarrow a^2 + 3b \geq 0$

Vì phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt nên $a^2 + 3b > 0$

Bài 42: Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = 8\sqrt{4x+4}$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq -1$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $8\sqrt{4x+4} \leq 4\sqrt{4.4(x+1)} \leq x+13$

Do đó: $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 \leq x + 13$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (vì } x \geq -1 \text{ nên } x+3 > 0)$$

Thử lại thì (1) đúng.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

CHƯƠNG 3.

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

$$1. |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A \leq 0 \end{cases}$$

$$2. |A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$3. |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ -A = B \end{cases}$$

B. CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CHUYÊN ĐỀ 14: ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN XÉT DẤU VÀ CHIA TRƯỜNG HỢP

Bài 1: Giải các phương trình:

$$1. \frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x|(x-2)} = 2;$$

$$2. \frac{2 - |x|}{|4 - x^2|} = |x|$$

Giải

$$1. \frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x|(x-2)} = 2 \quad (1)$$

Lập bảng xét dấu

x	-1		0	
x	-	-	0	+
x+1	-	0	+	+

Xét các trường hợp sau:

a. Nếu $x \leq -1$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 - x - 1}{x(2-x)} = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 2x(2-x) \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 (\text{loại}) \\ x = -\frac{1}{3} (\text{loại}) \end{cases}$$

b. Nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 + x + 1}{x(2-x)} = 2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 (\text{loại}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là $x = 0$.

c. Nếu $x > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 + x + 1}{x(x-2)} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2x(x-2)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{loại}) \\ x = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là: $x = 5$.

2. $\frac{2-|x|}{|4-x^2|} = |x| \quad (2)$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2	0	2	$+\infty$
$4-x^2$	-	0	+	+	0	-
x	-	-	0	+	+	+

Xét các trường hợp sau:

a. Nếu $x < -2$ thì (2) $\Leftrightarrow \frac{2+x}{x^2-4} = -x$

$$\Leftrightarrow 1 = -x(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 (\text{loại})$$

b. Nếu $-2 \leq x \leq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow \frac{2+x}{4-x^2} = -x \Leftrightarrow 1 = -x(2-x)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} (\text{nhận}) \\ x = 1 + \sqrt{2} (\text{loại}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là $x = 1 - \sqrt{2}$

c. Nếu $0 < x < 2$ thì (2) $\Leftrightarrow \frac{2-x}{4-x^2} = x \Leftrightarrow 1 = x(2+x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ x = -1 + \sqrt{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là: $x = \sqrt{2} - 1$

d. Nếu $x > 2$ thì (2) $\Leftrightarrow \frac{2-x}{x^2-4} = x \Leftrightarrow 1 = -x(x+2)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

Tóm lại: Nghiệm của phương trình là: $x = 1 - \sqrt{2}; x = \sqrt{2} - 1$.

Bài 2: Giải các phương trình:

$$1. \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x+3}{2} \quad (1)$$

$$2. \sqrt{x - 6\sqrt{x - 9}} + \sqrt{x + 6\sqrt{x - 9}} = 6 \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)^2} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x^2 - 1} - 1| + \sqrt{x^2 - 1} + 1 = \frac{x+3}{2} \quad (2)$$

$$+ \text{ Nếu } \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2}$$

$$\text{Thì (1)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} - 1 + \sqrt{x^2 - 1} + 1 = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \frac{15}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{25}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 8\sqrt{6}}{15}$$

Kết hợp điều kiện: $-3 \leq x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm

$$\text{là: } x = \frac{3 \pm 8\sqrt{6}}{15}$$

+ Nếu $\sqrt{x^2 - 1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}$

Thì (2) trở thành: $1 - \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1} + 1 = \frac{x+3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1$ (nhận)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$; $x = \frac{3 \pm 8\sqrt{6}}{15}$

2. $\sqrt{x - 6\sqrt{x - 9}} + \sqrt{x + 6\sqrt{x - 9}} = 6$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} x - 9 \geq 0 \\ x \geq 6\sqrt{x - 9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x^2 - 36x + 324 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 9$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x - 9} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{x - 9} + 3)^2} = 6$
 $\Leftrightarrow |\sqrt{x - 9} - 3| + \sqrt{x - 9} + 3 = 6$ (2)

+ Nếu $\sqrt{x - 9} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 18$ thì (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x - 9} = 6$
 $\Leftrightarrow x = 18 \Rightarrow$ nghiệm của phương trình là: $x = 18$.

+ Nếu $\sqrt{x - 9} - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 18$ thì (2) $\Leftrightarrow -\sqrt{x - 9} + 3 + \sqrt{x - 9} + 3 = 6$
 $\Rightarrow 6 = 6$ hiển nhiên $\Rightarrow x < 18$ đều là nghiệm của phương trình.
 Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $9 \leq x \leq 18$.

Bài 3: Giải các phương trình:

1. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

2. $\sqrt{x^2 - 16x + 64} + \sqrt{16x^2 - 8x + 1} = \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$

Giải

1. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2} + \sqrt{(2x - 1)^2} = \sqrt{(x + 3)^2}$

$\Leftrightarrow |x - 2| + |2x - 1| = |x + 3|$ (1)

Bảng xét dấu

x	-3	$\frac{1}{2}$	2
x-2	-	-	- 0 +
2x-1	-	- 0 +	+
x+3	- 0 +	+	+

Xét các trường hợp:

a. Nếu $x \leq -3$ thì (1) $\Leftrightarrow 2 - x + 1 - 2x = -x - 3 \Leftrightarrow x = 3$ (loại)

b. Nếu $-3 < x \leq \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow 2 - x + 1 - 2x = x + 3 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận)

c. Nếu $\frac{1}{2} < x \leq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow 2 - x + 2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow 1 = 3$ vô nghiệm.

d. Nếu $x > 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x - 2 + 2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận)

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là: $x = 3$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 3 \vee x = 0$

$$2. \sqrt{x^2 - 16x + 64} + \sqrt{16x^2 - 8x + 1} = \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$$

$$\Leftrightarrow |x - 8| + |4x - 1| = |3x - 2| \quad (2)$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	8	$+\infty$
x-8	-	-	-	0	+
4x-1	-	0	+	+	+
3x-2	-	-	0	+	+

a. Nếu $x \leq \frac{1}{4}$ thì (2) $\Leftrightarrow 8 - x + 1 - 4x = 2 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ (loại)

b. Nếu $\frac{1}{4} < x \leq \frac{2}{3}$ thì (2) $\Leftrightarrow 8 - x + 4x - 1 = 2 - 3x \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}$ (loại)

c. Nếu $\frac{2}{3} < x \leq 8$ thì (2) $\Leftrightarrow 8 - x + 4x - 1 = 3x - 2 \Leftrightarrow 7 = -2$ vô nghiệm.

d. Nếu $x > 8$ thì (2) $\Leftrightarrow x + 4x - 8 - 1 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách khác: Nếu chúng ta áp dụng bất đẳng thức: $|a| + |b| \geq |a + b|$ sẽ nhanh hơn.

Ta có: $|x - 8| + |4x - 1| = |8 - x| + |4x - 1| \geq |8 - x + 4x - 1|$

$$\Rightarrow |x - 8| + |4x - 1| \geq |3x + 7| > |3x + 2|$$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 4: Định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $x|x - 2| = m$ (1)

Giải

Cách 1:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - m = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad \text{(I) đặt } f(x) = x^2 - 2x - m$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -x^2 + 2x - m = 0 \end{cases} \quad \text{(II) đặt } g(x) = -x^2 + 2x - m$$

Để (I) có nghiệm duy nhất, ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1:

Nếu (I) vô nghiệm và (II) có nghiệm duy nhất $x < 2$.

(I) vô nghiệm:

Ta xét: $x^2 - 2x - m = 0 \Leftrightarrow m = x^2 - 2x$ (a)

Xét $h(x) = x^2 - 2x$ với $x \geq 2 \Rightarrow h'(x) = 2x - 2 > 0 \forall x \geq 2$.

Bảng biến thiên

x	2	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	$+\infty$

Để phương trình (a) vô nghiệm thì $m < 0$.

+ Với $m < 0$ thì (b) không thể có một nghiệm duy nhất $x < 2$ (vì $P = m < 0$)

Nếu (b) chỉ có thể có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1 < 2 < x_2$

$$\Leftrightarrow -g(2) < 0 \Leftrightarrow -(-m) < 0 \Leftrightarrow m < 0$$

$\Rightarrow$ giá trị $m < 0$ thỏa đề.

Trường hợp 2:

Hệ (II) vô nghiệm và hệ (I) có nghiệm duy nhất $x \geq 2$

Hệ (II) vô nghiệm: (b) $\Leftrightarrow m = -x^2 + 2x$

Xét hàm: $h(x) = -x^2 + 2x$ với $x < 2$

$$h'(x) = -2x + 2;$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(t)$	0	+	0
$f(t)$	$-\infty$	1	0

Phương trình (b) vô nghiệm $\Leftrightarrow m > 1$

Khi $m > 1$ thì $f(x) = 0$ có: $P = -m < 0$ nên $f(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu, do đó hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow f(2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow -m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$$

$\Rightarrow$ giá trị m thỏa đề là: $m > 1$.

Tóm lại: giá trị m cần tìm là: $m < 0 \vee m > 1$.

Cách 2: Dùng phương pháp đồ thị.**Bài 5:** Định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$|x^2 - 3x + 2| = x^2 - x + m \quad (1)$$

Giải**Cách 1:**

$$(1) \Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| = (x^2 - 3x + 2)(2x + m - 2)$$

(có dạng: $|A| = A + B$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 2x + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x = \frac{2-m}{2} \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ 2x + m - 2 = -2(x^2 - 3x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ 2x^2 - 4x + m + 2 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Để (1) có nghiệm duy nhất xét các trường hợp:

a. Hệ (I) có nghiệm duy nhất thỏa $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ và hệ (II) vô nghiệm với $1 < x < 2$

$$\text{Khi } x = \frac{2-m}{2} \Rightarrow \left(\frac{2-m}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{2-m}{2} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = -m$$

Xét hàm $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ với $1 < x < 2$.

$$f'(x) = 4x - 4 > 0 \quad \forall x \in (1, 2)$$

Bảng biến thiên

x	1	2
f(x)		+
f(x)	0	2

$$\text{Phương trình (2) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ -m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{giá trị m thích hợp là: } \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{cases}$$

b. Hệ (I) vô nghiệm và hệ (II) có nghiệm duy nhất: $\in (1, 2)$

$$\text{Hệ (I) vô nghiệm} \Leftrightarrow -2 < m < 0$$

Hệ (II) có nghiệm duy nhất: $\in (1, 2)$ (theo bảng biến thiên)

$$\Leftrightarrow -2 < m < 0$$

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m \in \mathbb{R}$.

Cách 2: dùng phương pháp đồ thị.

Bài 6: Định m để phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt:

$$|x^2 - 3x + m| = x^2 - 2x + m - 1 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow |x^2 - 3x + m| = (x^2 - 3x + m) + (x - 1)$$

$$\text{Phương trình trên có dạng: } |A| = A + B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ B = -2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ B = -2A \end{cases}$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 = -2(x^2 - 3x + m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 5x + 2m - 1 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi (I) có một nghiệm $x = 1$ và (II) có hai nghiệm phân biệt $x > 1$.

+ Hệ (I) có nghiệm $x = 1 \Rightarrow 1 - 3 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$ (*)

+ Đặt $f(x) = 2x^2 - 5x + 2m - 1$

$f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $> 1 \Leftrightarrow 1 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) > 0 \\ \frac{S}{2} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{33}{16} \\ m > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < m < \frac{33}{16}, \text{ kết hợp với (*)} \Rightarrow 2 < m < \frac{33}{16}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $2 < m < \frac{33}{16}$.

Bài 7: Giải và biện luận phương trình: $|x^2 + x + m| = -x^2 + x + 2$

(*)

Giải

$$\text{Phương trình (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 2 \geq 0 \\ x^2 + x + m = \pm(-x^2 + x + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 + x + m = -x^2 + x + 2 \\ x^2 + x + m = x^2 - x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 2x^2 + m - 2 = 0 \text{ (a)} \end{cases} \vee \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 2x + m + 2 = 0 \text{ (b)} \end{cases}$$

+ Phương trình (a) $\Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{m}{2}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 - \frac{m}{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$

Khi đó nghiệm của (a) là: $x_1 = -\sqrt{1 - \frac{m}{2}}; x_2 = \sqrt{1 - \frac{m}{2}}$

Với $\forall m \leq 2$ thì $x_1 < 2$; còn $x_2 > -1$. Do đó để $x_1; x_2$ là nghiệm của (*) thì $x_1 \geq -1, x_2 \leq 2$.

• $x_1 \geq -1 \Leftrightarrow -\sqrt{1 - \frac{m}{2}} \geq -1 \Rightarrow 0 \leq m \leq 2$

• $x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{m}{2}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 \geq m \geq -6$

+ Phương trình (b) $\Leftrightarrow x_3 = -\frac{m+2}{2}$; để x_3 là nghiệm của (*) thì:

$$-1 \leq -\frac{m+2}{2} \leq 2 \Rightarrow -6 \leq m \leq 0.$$

Kết luận:

a. Nếu $\begin{cases} m < -6 \\ m > 2 \end{cases}$ thì (*) vô nghiệm.

b. Nếu $m = -6$ thì (*) có nghiệm $x = 2$.

c. Nếu $-6 < m < 0$ thì

(*) có hai nghiệm: $x_2 = \sqrt{1 - \frac{m}{2}}; x_3 = -\frac{m+2}{2}$

d. Nếu $0 < m \leq 2$ thì

(*) có hai nghiệm: $x_1 = -\sqrt{1 - \frac{m}{2}}; x_2 = \sqrt{1 - \frac{m}{2}}$

e. Nếu $m = 0$ thì (*) có nghiệm $x = 1 \vee x = -1$

Bài 8: Giải và biện luận phương trình: $a|x+2| + a|x-1| = b$

(1)

Giải

Cách 1:

+ Nếu $\begin{cases} a = 0 \text{ thì (1) vô nghiệm} \\ b \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ thì (1) nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu $a \neq 0$. Lập bảng xét dấu

x	-2			1
x+2	-	0	+	+
x-1	-		-	0

Xét các trường hợp sau:

a. Nếu $x \leq -2$ thì $(1) \Leftrightarrow a(-x-2-x+1) = b \Leftrightarrow a(-2x-1) = b$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{b}{2a}.$$

Để x_1 là nghiệm của (1) thì: $-\frac{1}{2} - \frac{b}{2a} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 3$

b. Nếu $-2 < x \leq 1$ thì $(1) \Leftrightarrow a(x+2-x+1) = b \Leftrightarrow 3 = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow$ phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 1]$

c. Nếu $x > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow a(x+2+x-1) = b \Leftrightarrow x_2 = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}$

Để x_2 là nghiệm của (1) thì $\frac{b}{2a} - \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} > 3$

Kết luận:

+ Nếu $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a = b = 0$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

+ Nếu $\begin{cases} \frac{b}{a} < 3 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} \frac{b}{a} = 3 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 1]$

+ Nếu $\begin{cases} \frac{b}{a} > 3 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{b}{2a} \\ x = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2} \end{cases}$

Cách 2: Phương pháp dùng đồ thị.

Cách 3: Sử dụng hệ thức $|a+b| + |a-b| = 2 \cdot \max\{|a|; |b|\}$

$$\text{Đặt: } y = x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = y - \frac{1}{2}$$

(mục đích là đưa (1) về dạng đẳng thức trên).

Phương trình (1) trở thành:

$$a \left(\left| y + \frac{3}{2} \right| + \left| y - \frac{3}{2} \right| \right) = b \Leftrightarrow a \max \left\{ |y|; \frac{3}{2} \right\} = b \quad (2)$$

1. Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì (2) vô nghiệm nên (1) vô nghiệm.
2. Nếu $a = b = 0$ thì (2) nghiệm đúng $\forall y$ nên (1) có nghiệm với $\forall x$
3. Nếu $a \neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow \max \left\{ |y|; \frac{3}{2} \right\} = \frac{b}{2a}$ (3)

$$\text{Vì } \max \left\{ |y|; \frac{3}{2} \right\} = \frac{b}{2a} \geq \frac{3}{2} \text{ nên:}$$

$$+ \text{ Nếu } \frac{b}{2a} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 3 \text{ thì (3) vô nghiệm.}$$

$$+ \text{ Nếu } \frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 3 \text{ thì (3) } \Leftrightarrow |y| \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$$

$$+ \text{ Nếu } \frac{b}{2a} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} > 3 \text{ thì (3)}$$

$$\Leftrightarrow |y| = \frac{b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{2a} \\ y = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2} \\ x = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết luận:

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ thì (1) vô nghiệm.}$$

$$+ \text{ Nếu } a = b = 0 \text{ thì (1) nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} \frac{b}{a} < 3 \\ a \neq 0 \end{cases} \text{ thì (1) vô nghiệm.}$$

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} \frac{b}{a} = 3 \\ a \neq 0 \end{cases} \text{ thì (1) nghiệm đúng } \forall x \in [-2, 1]$$

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} \frac{b}{a} > 3 \\ a \neq 0 \end{cases} \text{ thì (1) có nghiệm } x = \pm \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}$$

CHUYÊN ĐỀ 15: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1: Cho phương trình: $x^2 - 2ax + 2|x - a| + 5 = 0$ (1)

1. Giải phương trình khi $a = 4$.

2. Định a để phương trình trên có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $t = |x - a|$; điều kiện $t \geq 0$.

$$\Rightarrow t^2 = x^2 - 2ax + a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax = t^2 - a^2$$

Khi đó (1) trở thành: $t^2 + 2t + 5 - a^2 = 0$ (2)

1. Với $a = 4$ thì $t^2 + 2t - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - 2\sqrt{3} \text{ (loại)} \\ t = 2\sqrt{3} - 1 \end{cases}$

Với $t = 2\sqrt{3} - 1 \Rightarrow |x - 4| = 2\sqrt{3} - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = 5 - 2\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 3 + 2\sqrt{3} \vee x = 5 - 2\sqrt{3}$

2. Ứng với một nghiệm $t > 0$ thì phương trình $t = |x - a|$ có đúng hai nghiệm x .
do đó để (1) có đúng hai nghiệm thì (2) có đúng một nghiệm dương hoặc (2) có hai nghiệm nhưng chỉ một nghiệm dương.

+ Nếu (2) có đúng một nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (5 - a^2) = 0 \\ t = -1 > 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

+ Nếu (2) có hai nghiệm thỏa:

$$t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 5 - a^2 < 0 \Leftrightarrow |a| > \sqrt{5}$$

Vậy giá trị của a cần tìm là: $|a| > \sqrt{5}$

Bài 2: Tìm m sao cho phương trình:

$$|-2x^2 + 10x - 8| = x^2 - 5x + m \quad (1)$$

có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + m - 4$

Đặt $t = x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4} \Rightarrow t \geq -\frac{9}{4}$

Phương trình trên trở thành: $2|t| = t + m - 4$ (2)

(*) Ứng với một nghiệm $t > -\frac{9}{4}$ thì phương trình $t = x^2 - 5x + 4$ có đúng hai nghiệm x .

Do đó để (1) có bốn nghiệm x thì (2) cần có hai nghiệm phân biệt $t > -\frac{9}{4}$.

Xét các trường hợp:

1. Nếu $t \geq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow t = m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$ (a)
2. Nếu $-\frac{9}{4} < t < 0$ thì (2) $\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}(4 - m)$ nghiệm này thỏa:

$$-\frac{9}{4} < \frac{1}{3}(4 - m) < 0 \Leftrightarrow 4 < m < \frac{43}{4} \quad (b)$$

Từ (a) và (b) $\Rightarrow 4 < m < \frac{43}{4}$ là các giá trị m cần tìm để thỏa mãn yêu cầu đề toán.

Bài 3: Cho phương trình: $\sqrt{x - 6\sqrt{x - 9}} + \sqrt{x + 6\sqrt{x - 9}} = \frac{x + m}{6}$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x \geq 9$

Đặt: $t = \sqrt{x - 9} \Rightarrow x = t^2 + 9; (t \geq 0)$

Khi đó (1) trở thành: $\sqrt{t^2 + 9 - 6t} + \sqrt{t^2 + 9 + 6t} = \frac{t^2 + 9 + m}{6}$

$$\Leftrightarrow 6|t - 3| + 6(t + 3) - t^2 - 9 = m \quad (2)$$

Đặt: $f(t) = 6|t - 3| + 6(t + 3) - t^2 - 9$

Ta có: $f(t) = \begin{cases} f_1(t) = 12t - t^2 - 9 & \text{nếu } t \geq 3 \\ f_2(t) = -t^2 + 27 & \text{nếu } 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$

$f_1'(t) = 12 - 2t; f_1'(t) = 0 \Rightarrow t = 6$

$f_2'(t) = -2t; f_2'(t) = 0 \Rightarrow t = 0$

Bảng biến thiên

t	0	3	1	$+\infty$
$f_1'(t)$				
$f_2'(t)$				
$f'(t)$				
f(t)	27	18	27	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

Phương trình (1) có nghiệm $x \geq 9$

$\Rightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 27$.

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m \leq 27$.

Bài 4: Định m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt:

$$x^4 + 2(a-1)|x^2 - 1| - 2x^2 + a^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Giải

Đặt: $t = |x^2 - 1|; t \geq 0$.

$$\Rightarrow t^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = t^2 - 1$$

Khi đó (1) trở thành: $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 2 = 0 \quad (2)$

Đặt: $f(t) = t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 2$

+ Ứng với một nghiệm $0 < t < 1$ thì phương trình $t = |x^2 - 1|$ có đúng bốn nghiệm x nên (1) có đúng bốn nghiệm phân biệt thì (2) có nghiệm thỏa mãn:

a. Hoặc (2) có nghiệm kép thuộc $(0, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (a-1)^2 - (a^2 - 2) = 0 \\ t_0 = 1 - a \in (0, 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 3 = 0 \\ 0 < 1 - a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

hệ này vô nghiệm.

b. Hoặc (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $t_1 < 0 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < \sqrt{2} \quad (a)$$

+ Mặt khác ứng với một nghiệm $t > 1$ thì phương trình $t = |x^2 - 1|$ có đúng hai nghiệm x nên để (1) có đúng bốn nghiệm phân biệt thì (2) có đúng hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $1 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) > 0 \\ \frac{S}{2} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -3$$

+ Nếu (2) có một nghiệm $t = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$

- Khi $a = \sqrt{2}$; từ (2) $\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2(1 - \sqrt{2}) \end{cases}$ (loại)

- Khi $a = -\sqrt{2}$; từ (2) $\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2(1 + \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow a = -\sqrt{2}$ thỏa đề bài.

Kết hợp: (a), (b) ta được giá trị của a cần tìm là:
$$\begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ 1 < a < \sqrt{2} \\ a < -3 \end{cases}$$

Bài 5: Cho phương trình: $ax^4 - |x^2 - 1| = 0$ (1)

1. Giải phương trình khi $a = 2$.

2. Định a để phương trình có 6 nghiệm phân biệt.

Giải

1. Khi $a = 2$ ta được: $2x^4 - |x^2 - 1| = 0$ (2)

+ Nếu $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$ thì (2) $\Leftrightarrow 2x^4 - x^2 + 1 = 0$ phương trình này vô nghiệm.

+ Nếu $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ thì (2) $\Leftrightarrow 2x^4 + x^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (loại)} \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (nhận)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Phương trình (1) $\Leftrightarrow ax^4 = |x^2 - 1|$

$$\Leftrightarrow a = \frac{|x^2 - 1|}{x^4} \text{ (vì } x = 0 \text{ không là nghiệm của phương trình).}$$

Xét $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x^4}$ với $x \neq 0$

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4} \text{ nếu } |x| \geq 1 \\ f_2(x) = \frac{1 - x^2}{x^4} \text{ nếu } -1 < x < 1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases}$$

$$f_1'(x) = 2 \cdot \frac{2 - x^2}{x^5}; f_1'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$f_2'(x) = 2 \cdot \frac{x^2 - 2}{x^5}; f_2'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f_1'(x)$	+	0	-	+	-	+	0	-
$f_2'(x)$		0		+	-		0	
$f'(x)$	+	0	-	+	-	+	0	-
f(x)	$\nearrow \frac{1}{4}$			$\nearrow +\infty$	$\searrow +\infty$	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow 0$	

Dựa vào bảng biến thiên, để (1) có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ giá trị của a thỏa

mãn là: $0 < a < \frac{1}{4}$.

Đáp số: $0 < a < \frac{1}{4}$.

Bài 6: Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-1)x + 2 = |mx - 2|$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

+ Nếu $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$, nghiệm này duy nhất.
Do đó giá trị m thỏa mãn đề bài.

+ Nếu $m \neq 0$; đặt $t = mx - 2 \Rightarrow x = \frac{t+2}{m}$

Khi đó (1) trở thành: $m\left(\frac{t+2}{m}\right)^2 - 2(m-1)\frac{t+2}{m} + 2 = |t|$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2(m-3)t + 8 - 2m = m|t| (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 2(m-3)t + 8 - 2m = mt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t^2 - 2(m-3)t + 8 - 2m = -mt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 3(2-m)t + 8 - 2m = 0 \quad (2) \quad (A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t^2 - (m-6)t + 8 - 2m = 0 \quad (3) \quad (B) \end{cases}$$

Phương trình (3) có: $\Delta = (m-6)^2 - 4(8-2m) = (m-2)^2$

$$\Rightarrow (3) \text{ có hai nghiệm: } \begin{cases} t_1 = m-4 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

• Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất.

$$\text{Hệ (B) có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 = -2 \\ m-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \geq 4 \end{cases}$$

+ Nếu $m = 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 + 4 = 0$, phương trình này vô nghiệm.
 $\Rightarrow$ giá trị $m = 2$ thỏa đề.

- + Nếu $m \geq 4$ thì $8 - 2m \leq 0 \Rightarrow P \leq 0 \Rightarrow (2)$ luôn có hai nghiệm $t_1 \leq 0 \leq t_2$ trong đó có một nghiệm không âm mà (3) luôn có một nghiệm $t = -2 < 0$ nên $\forall m \geq 4$ không thỏa mãn đề toán.
 Vậy giá trị m cần tìm là: $m = 0 \vee m = 2$.

CHUYÊN ĐỀ 16: PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bài 1: Cho phương trình: $|x|(x - 2) - 2m + 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow |x|(x - 2) = 2m - 1$$

$$\text{Đặt } f(x) = |x|(x - 2) = \begin{cases} x(x - 2) & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x(x - 2) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Xét hàm số: $y_1 = x(x - 2)$

$$y_1 = 2x - 2; y_1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$y_2 = -x^2 + 2x$$

$$y_2 = -2x + 2; y_2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y_1			$-$	0
y_2	$+$			$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow -1 < 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$$

Bài 2: Định a để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$|2x^2 - 3x - 2| = 5a - 8x - 2x^2 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow |2x^2 - 3x - 2| + 8x + 2x^2 = 5a$$

$$\text{Đặt } f(x) = |2x^2 - 3x - 2| + 8x + 2x^2$$

$$= \begin{cases} f_1(x) = 4x^2 + 5x - 2 & \text{nếu } 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ f_2(x) = 11x + 2 & \text{nếu } 2x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 4x^2 + 5x - 2 & \text{nếu } x \leq -\frac{1}{2} \\ f_2(x) = 11x + 2 & \text{nếu } -\frac{1}{2} < x < 2 \\ f_3(x) = 24 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$$

Ta có: $f_1'(x) = 8x + 5; f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}$

$$f_2'(x) = 11$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	0	+		+
$f_2'(x)$				+	
$f'(x)$	-	0	+	+	+

$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{57}{16}$	$-\frac{7}{2}$	24	$+\infty$
--------	-----------	------------------	----------------	----	-----------

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow 5a = -\frac{57}{16} \Leftrightarrow a = -\frac{57}{80}$$

Vậy giá trị của a cần tìm là: $a = -\frac{57}{80}$

Chú ý:

Thay vì lập bảng biến thiên, ta có thể vẽ đồ thị của hai hàm $f_1(x)$ và $f_2(x)$ trên cùng một đồ thị thì ta cũng được giá trị a cần tìm là: $a = -\frac{57}{80}$

Bài 3: Định m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt:

$$|-2x^2 + 10x - 8| = x^2 - 5x + m \quad (1)$$

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow |-2x^2 + 10x - 8| - x^2 + 5x = m \quad (1)$

Xét hàm số: $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 15x - 8 & \text{nếu } -2x^2 + 10x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 8 & \text{nếu } -2x^2 + 10x - 8 < 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} f_1(x) = -3x^2 + 15x - 8 \text{ nếu } 1 \leq x \leq 4 \\ f_2(x) = x^2 - 5x + 8 \text{ nếu } \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases}$$

Ta có: $f_1'(x) = -6x + 15$; $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$$f_2'(x) = 2x - 5; f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f_1'(x)$	-	-	0	+	+
$f_2'(x)$	-	+	-		+
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{43}{4}$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được, phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow 4 < m < \frac{43}{4}$$

Vậy giá trị của m cần tìm là: $4 < m < \frac{43}{4}$

Bài 4: Cho phương trình: $|x^2 - 2x| = 2x^2 - 8x + m$ (1)

Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow |x^2 - 2x| - 2x^2 + 8x = m$$

$$\text{Đặt } f(x) = |x^2 - 2x| - 2x^2 + 8x = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{nếu } \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ -3x^2 + 10x & \text{nếu } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Xét $g(x) = -x^2 + 6x$

$$g'(x) = -2x + 6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$h(x) = -3x^2 + 10x$$

$$h'(x) = -6x + 10; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{3}$	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	+				+ 0 -	
$h'(x)$		+	0 -			
$f'(x)$	+	+	0 -		+ 0 -	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{25}{3}$	8	9	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 8 < m < \frac{25}{3}$$

Bài 6: Cho phương trình: $x + 2 + |x - 4| = \frac{m + x^2 + 1}{4}$ (1)

Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm $x \geq 0$.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow 4(x + 2) + 4|x - 4| - x^2 - 1 = m$$

$$\text{Đặt } f(x) = 4(x + 2) + 4|x - 4| - x^2 - 1$$

$$= \begin{cases} -x^2 + 8x - 9 & \text{nếu } x \geq 4 \\ -x^2 + 23 & \text{nếu } x < 4 \end{cases}$$

$$\text{Xét } g(x) = -x^2 + 8x - 9$$

$$g'(x) = -2x + 8; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$h(x) = -x^2 + 23; h'(x) = -2x; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$g'(x)$			0	
$h'(x)$		-		
$f'(x)$		-	0 -	
$f(x)$		23		$-\infty$

Theo bảng biến thiên

$\Rightarrow (1)$ có đúng một nghiệm $x \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 23$

CHUYÊN ĐỀ 17: PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

Bài 1: Định m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt:

$$|x^4 - 2x^2 - 3| = \log_2 m \quad (m > 0)$$

Giải

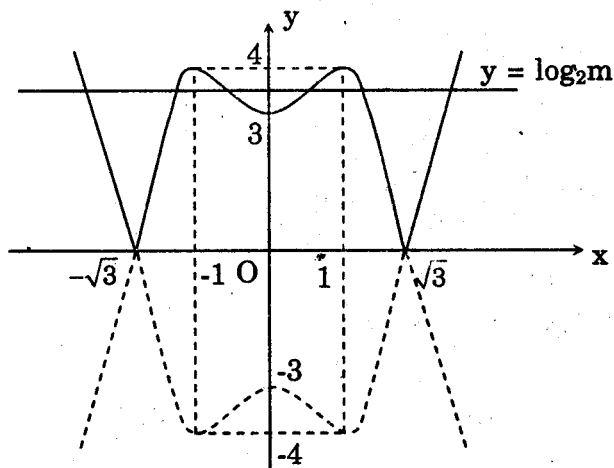
Vẽ đồ thị hàm $y = |x^4 - 2x^2 - 3|$

$$= \begin{cases} x^4 - 2x^2 - 3 & \text{nếu } |x| \geq \sqrt{3} \\ -x^4 + 2x^2 + 3 & \text{nếu } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm $y_1 = x^4 - 2x^2 - 3$ với $|x| \geq \sqrt{3}$

Và đồ thị hàm $y_2 = -x^4 + 2x^2 + 3$ với $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra:



Phương trình đã cho có đúng 6 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 3 < \log_2 m < 4 \Leftrightarrow 8 < m < 16.$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $8 < m < 16$.

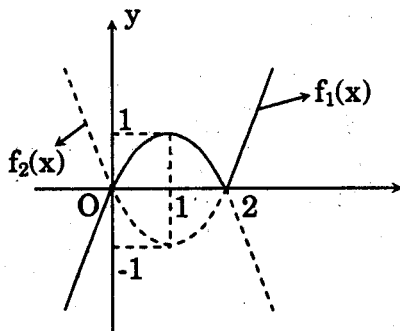
Bài 2: Định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$x|x - 2| = m \quad (1)$$

Giải

Ta có: $f(x) = x|x - 2| = \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 2x & \text{nếu } x \geq 2 \\ f_2(x) = 2x - x^2 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$

Vẽ đồ thị hai hàm $f_1(x)$ và $f_2(x)$ lên cùng một hệ trục tọa độ



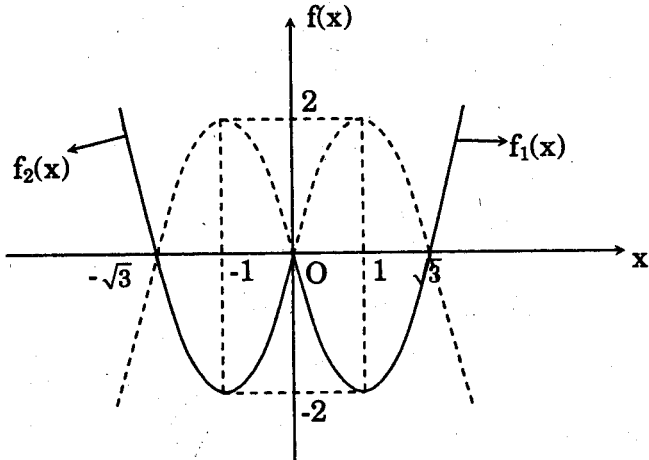
Dựa vào đồ thị, suy ra (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m > 1 \vee m < 0$

Bài 3: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x|(x^2 - 3) = m$

Giải

Xét $f(x) = |x|(x^2 - 3) = \begin{cases} f_1(x) = x^3 - 3x & \text{nếu } x \geq 0 \\ f_2(x) = 3x - x^3 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Vẽ đồ thị hai hàm $f_1(x)$ và $f_2(x)$ lên cùng một hệ trục tọa độ



$f_1(x) = 3x^2 - 3; f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 2$

$f_2(x) = 3 - 3x^2; f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 2$

Dựa vào đồ thị ta có kết quả:

- + Nếu $m < -2$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- + Nếu $\begin{cases} m = -2 \\ m > 0 \end{cases}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm.
- + Nếu $m = 0$ thì phương trình (1) có ba nghiệm.
- + Nếu $-2 < m < 0$ thì phương trình (1) có bốn nghiệm.

Bài 4: Định m để phương trình sau: $|x^2 - 3x + 2| = m - x - x^2$ (1)

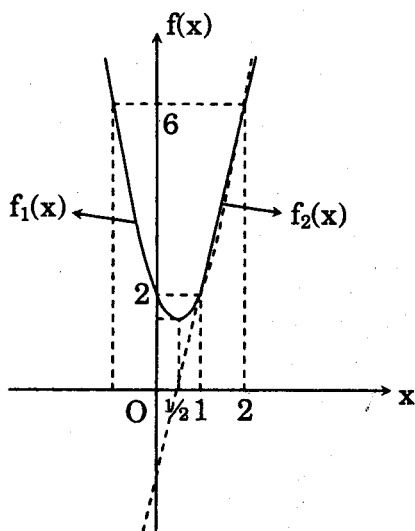
1. Có nghiệm duy nhất.
2. Có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| + x^2 + x = m$

Xét $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + x^2 + x = \begin{cases} f_1(x) = 2x^2 - 2x + 2 & \text{nếu } \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \\ f_2(x) = 4x - 2 & \text{nếu } 1 < x < 2 \end{cases}$

Vẽ đồ thị hai hàm $f_1(x); f_2(x)$ lên cùng một hệ trục tọa độ.



Dựa vào bảng biến thiên ta được kết quả:

- Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$
- Phương trình (1) có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$

Bài 5: Giải và biện luận phương trình:

$$a|x+2| + a|x-1| = b \quad (1)$$

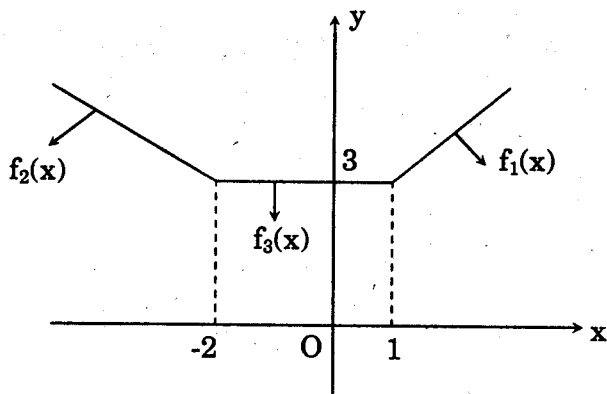
Giải

- Nếu $a = 0$ thì:
 - Nếu $b = 0$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - Nếu $b \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.
- Nếu $a \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow |x+2| + |x-1| = \frac{b}{a}$

Đặt $f(x) = |x+2| + |x-1|$

$$= \begin{cases} f_1(x) = 2x + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ f_2(x) = 3 & \text{nếu } -2 \leq x < 1 \\ f_3(x) = -2x - 1 & \text{nếu } x < -2 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $f_1(x), f_2(x)$ và $f_3(x)$ lên cùng một hệ trục tọa độ



Dựa vào đồ thị ta có kết quả sau:

+ Nếu $\frac{b}{a} < 3$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $\frac{b}{a} = 3$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 1]$

+ Nếu $\frac{b}{a} > 3$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{b}{2a} - \frac{1}{2} \vee x = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2}$

Kết luận:

+ Nếu $a = b = 0$ thì (1) nghiệm đúng với $\forall x$

+ Nếu $a = 0; b \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} \frac{b}{a} < 3 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} \frac{b}{a} = 3 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 1]$

+ Nếu $\begin{cases} \frac{b}{a} > 3 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm: $x = -\frac{1}{2} - \frac{b}{2a} \vee x = -\frac{1}{2} + \frac{b}{2a}$

CHƯƠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. LÝ THUYẾT CĂN NHỚ

$$1) \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$2) \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hoặc } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$3) \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \quad (n \in \mathbb{Z}^+) \end{cases}$$

$$4) \sqrt[n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow g(x) = [f(x)]^{\frac{1}{n+1}} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

$$5) [f(x)]^{2n} = [g(x)]^{2n} \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$6) [f(x)]^{2n+1} = [g(x)]^{2n+1} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

B. CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CHUYÊN ĐỀ 18:

LŨY THỪA HAI VẾ VÀ DÙNG CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

1. Nhận dạng: Khi phương trình có dạng:

- $\sqrt{A} = B$
- $\sqrt{A} = \sqrt{B}$
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = k$ (k là hằng số)
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C}$ (A, B, C là các hàm chứa x)
- Khi bình phương hai vế thì bậc cao triệt tiêu.
- Khi bình phương hai vế thì căn thức triệt tiêu.

2. Các bước giải

- Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình xác định.
- Bước 2: Đặt điều kiện để hai vế không âm rồi lũy thừa hai vế.
- Bước 3: Đưa về phương trình cơ bản; giải chọn nghiệm thỏa mãn điều kiện.

3. Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{2x^2 - 4x + 5} = x - 4$$

$$2. \sqrt{2 - x^2 + 3x} = \sqrt{5x^2 - 1}$$

Giải

$$1. \sqrt{2x^2 - 4x + 5} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 2x^2 - 4x + 5 = (x - 4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

$$2. \sqrt{2 - x^2 + 3x} = \sqrt{5x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 1 \geq 0 \\ 2 - x^2 + 3x = 5x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 + \sqrt{x+1} = 1$$

$$2) \sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{2+4}$$

Giải

$$1. x^2 + \sqrt{x+1} = 1$$

$$\text{Điều kiện: } 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 ; x = -1 \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1 \vee x = -1 \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$$2. \sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{2+4}$$

$$\text{Điều kiện: } x \geq -2$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 3x + 13 + 2\sqrt{(x+9)(2x+4)} = 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+9)(2x+4)} = 12 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 160x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 160 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{16-x} + \sqrt{x+9} = 7$

2. $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Giải

1. Điều kiện: $-9 \leq x \leq 16$

Phương trình $\Leftrightarrow 25 + 2\sqrt{(16-x)(x+9)} = 49$
 $\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7$

2. Điều kiện: $x > 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4x = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{1}{3}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x + \sqrt{x-11}} + \sqrt{x - \sqrt{x-11}} = 4$

2. $\sqrt{77-x^2} + x\sqrt{x+5} = \sqrt{3-2x-x^2}$

Giải

1. $\sqrt{x + \sqrt{x-11}} + \sqrt{x - \sqrt{x-11}} = 4$

Điều kiện: $x \geq 11$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x + \sqrt{x-11}} = 4 - \sqrt{x - \sqrt{x-11}}$
 $\Rightarrow x + \sqrt{x-11} = 16 - \sqrt{x-11} - 8\sqrt{x - \sqrt{x-11}} + x$
 $\Rightarrow \sqrt{x-11} - 8 = -4\sqrt{x - \sqrt{x-11}}$
 $\Rightarrow x - 11 + 64 - 16\sqrt{x-11} = 16(x - \sqrt{x-11})$
 $\Rightarrow x = \frac{53}{15}$ (loại vì $x \geq 11$)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2. $\sqrt{77-x^2} + x\sqrt{x+5} = \sqrt{3-2x-x^2}$

Điều kiện: $3-2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$

Phương trình $\Leftrightarrow 7-x^2 + x\sqrt{x+5} = 3-2x-x^2$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+5} = -4 - 2x \Rightarrow x^2(x+5) = (4+2x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm 4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Kiểm tra lại:

Với $x = -1$ thì phương trình được thỏa mãn.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4 \quad 2. \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$$

Giải

$$1. \sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$$

$$\text{Điều kiện: } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Phương trình: } \Leftrightarrow 10 + 2\sqrt{(2-x^2)(x^2+8)} = 16$$

$$\Leftrightarrow (2-x^2)(x^2+8) = 9 \Leftrightarrow -x^4 - 6x^2 + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -7 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm 1$

$$2. \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$$

$$\text{Điều kiện: } \frac{2}{3} < x$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow x^2 - (3x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2+\sqrt{3x-2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x+2+\sqrt{3x-2} = 0 \text{ vô nghiệm } \forall x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 1$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$2. x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$$

Giải

$$1. \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x - 2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-2)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = \frac{x+3}{2} \quad (*)$$

+ Nếu $\sqrt{x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ thì (*) trở thành:

$$2\sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4(x-1) = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (nhận)}$$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là: $x = 5$.

+ Nếu $1 \leq x < 2$ thì (*) trở thành: $\frac{x+3}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Tóm lại: Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = 5$.

$$2. \quad x + \sqrt{x^2 + 16} = \frac{40}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 16} + x^2 + 16 = 40$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 16} = 24 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 + 16) = (24 - x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 64x^2 = 576 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Kiểm tra lại:

+ Với $x = 3$ phương trình thỏa mãn.

+ Với $x = -3$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 3$.

Bài 7: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$2. \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$$

Giải

$$1. \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$\Leftrightarrow x + 34 - x + 3 + 3\sqrt[3]{x+34} \cdot \sqrt[3]{x-3} (\sqrt[3]{x+34} + \sqrt[3]{x-3}) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x+34} \cdot \sqrt[3]{x-3} = 12 \Leftrightarrow (x+34)(x-3) = 12^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 31x - 1830 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -61 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Nếu $x = 30$ phương trình thỏa mãn.

+ Nếu $x = -61$ phương trình thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 30 \vee x = -61$.

2.
$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1})^3 = x+1$$

$$\Leftrightarrow x-1 + 3x-1 + 3\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-1} (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1}) = x+1$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-1} \cdot \sqrt[3]{x+1} = 3(1-x)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x-1)(x+1) = (1-x)^3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(3x-1)(x+1) + (x-1)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (3x-1)(x+1) + (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Kiểm lại:

+ Với $x = 1$ thì phương trình thỏa mãn.

+ Với $x = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Tóm lại: nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$.

Bài 8: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$$

$$2. \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{10x}$$

Giải

1.
$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1})^3 = x-1$$

$$\Leftrightarrow 4x+2 + \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} (\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}) = x-1$$

$$\Leftrightarrow 4x+2 + 3\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1} = x-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1} = -(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(3x+1) = -(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[(x-1)(3x+1) + (x+1)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Kiểm tra lại:

+ Với $x = 0$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $x = -1$ phương trình thỏa mãn.

Vậy nghiệm phương trình là: $x = -1$.

2. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{10x}$

$$\Leftrightarrow 2x-1 + 2x+1 + 3\sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{2x+1} (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1}) = 10x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{10x} = 2x \Rightarrow (2x-1)(2x+1) \cdot 10x = 8x^3$$

$$\Rightarrow x[5(2x-1)(2x+1) - 4x^2] = 0$$

$$\Rightarrow x(16x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Thử lại:

+ Thay ba x trên vào nghiệm của phương trình thì ta nhận được: $x = 0; x = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0; x = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$

Bài 9: Giải phương trình sau: $x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1}$ với $x \in \mathbb{R}$

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$

$$x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1} \Leftrightarrow (x^3 + 8)^2 = 49(8x+1) \Leftrightarrow x^6 + 16x^3 - 392x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x + 5 = 0 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm $\forall x \geq 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

Bài 10: Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{x^2 - 1} = m + x$

Giải

$$\sqrt{x^2 - 1} = m + x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x^2 - 1 = (m+x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ 2mx = -1 - m^2 \end{cases} \quad (1)$$

+ Nếu $m = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \frac{-1 - m^2}{2m}$

Điều kiện: $x \geq -m \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$

- Nếu $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < -1 \end{cases}$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

- Nếu $\begin{cases} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{-1 - m^2}{2m}$.

Kết luận:

+ Nếu $\begin{cases} 0 \leq m < 1 \\ m < -1 \end{cases}$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{-1 - m^2}{2m}$.

Bài 11: Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{a+x} = a - \sqrt{a-x}$ (1)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a+x \geq 0 \\ a-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ -a \leq x \leq a \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = a$

$$\Leftrightarrow a+x+a-x+2\sqrt{a^2-x^2} = a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-x^2} = a^2 - 2a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a \geq 0 \\ 4(a^2 - x^2) = (a^2 - 2a)^2 = a^4 + 4a^2 - 4a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{4}(-a^4 + 4a^3) \end{cases} +$$

Nếu $a = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 0$.

$$+ \text{ Nếu } a \neq 0 \text{ thì (1) } \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ a^3(4-a) \geq 0 \\ x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4a^3 - a^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq a \leq 4 \\ x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2} \end{cases}$$

Vậy:

+ Nếu $a = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

+ Nếu $\begin{cases} a \geq 2 \\ a > 4 \text{ thì (1) vô nghiệm.} \\ a \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $2 \leq a \leq 4$ thì (1) có nghiệm $x = \pm \frac{a}{2} \sqrt{4a - a^2}$

Bài 12: Giải và biện luận phương trình sau:

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + m\sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1)\sqrt[3]{x^2 - a^2}$$

Giải

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + m\sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1)\sqrt[3]{x^2 - a^2} \quad (1)$$

+ Nếu $a = 0$ thì (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi $a \neq 0$ thì:

- Nếu $x = \pm a$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

- Nếu $x \neq \pm a$ thì (1) tương đương với:

$$\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} + m\sqrt[3]{\frac{x-a}{x+a}} = m+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} - 1 \right) \left(\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} - m \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} = 1 \\ \sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+a}{x-a} = 1 \text{ (phương trình vô nghiệm)} \\ \frac{x+a}{x-a} = m^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x+a = m^3(x-a) \Leftrightarrow (1-m^3)x = -am^3 - a \quad (*)$$

- Nếu $m = 1$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

- Nếu $m \neq 1$ thì phương trình (*) $\Leftrightarrow x = \frac{am^3 + a}{m^3 - 1}$

Vậy:

+ Nếu $a = 0$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $a = 1$ và $a \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 1$ và $a \neq 0$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{am^3 + a}{m^3 - 1}$.

Bài 13: Giải và biện luận phương trình: $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a$

Giải

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2} = a \Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = a$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2 = a. \forall \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{4} \left(\text{Do } \sqrt{x + \frac{1}{4}} \geq 0 \right)$$

Do đó:

+ Nếu $a < \frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq \frac{1}{4}$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = \sqrt{a}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{a} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4} - \sqrt{a} \Leftrightarrow x = a - \sqrt{a}$$

Tóm lại: + Nếu $a < \frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq \frac{1}{4}$ thì (1) có nghiệm $x = a - \sqrt{a}$

Bài 14: Giải và biện luận phương trình: $2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{x(a+x)}$

Giải

$$2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{x(a+x)} \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} a+x \geq 0 \\ a-x \geq 0 \\ x(a+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq a & (2) \\ x(a+x) \geq 0 & (3) \end{cases}$

Từ điều kiện (2) $\Rightarrow a \geq 0$

a. Nếu $a = 0$ thì (1) trở thành: $2\sqrt{x} - \sqrt{-x} = \sqrt{-x} + \sqrt{x^2}$
phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b. Nếu $a > 0$ thì từ (3) $\Rightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq 0 \end{cases}$

- Nếu $x = -a$ thì (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$ nhưng vì $a > 0$ nên $x \neq -a$.

- Khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ a > 0 \end{cases}$ thì $2\sqrt{a+x} > \sqrt{a-x}$ nên phương trình (2) tương đương với

$$(2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})^2 = a-x + \sqrt{x(a+x)}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+x) + (a-x) - 4\sqrt{a^2 - x^2} = a-x + \sqrt{x(a+x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+x}(4\sqrt{a+x} - 4\sqrt{a-x} - \sqrt{x}) = 0 \left(\text{do } \begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ nên } a+x > a-x \right)$$

$$\Leftrightarrow 16(x+a+a-x) - 32\sqrt{a^2 - x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow 32\sqrt{a^2 - x^2} = -x + 32a$$

$$\Leftrightarrow 32^2(a^2 - x^2) = x^2 + 32^2a^2 - 64ax$$

(vì $a > 0$ nên $32a - x > a - x > 0$)

$$\Leftrightarrow 32^2x^2 + x^2 - 64ax = 0 \Leftrightarrow x(1025x - 64a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025}$$

Vậy: + Nếu $a < 0$ thì (2) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq 0$ thì (2) có nghiệm $x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025}$

*** Cách biện luận khác:**

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \geq 0 \\ 4(a+x) + (a-x) - 4\sqrt{(a+x)(a-x)} = a-x + \sqrt{x(a+x)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a+x) \geq a-x \geq 0 \\ 4(a+x) - 4\sqrt{(a+x)(a-x)} - \sqrt{x(a+x)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,6a \leq x \leq a \\ \sqrt{x+a} [4\sqrt{x+a} - 4\sqrt{a-x} - \sqrt{x}] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,6a \leq x \leq a \\ \begin{cases} x = -a \\ 4\sqrt{x+a} - 4\sqrt{a-x} = \sqrt{x} \quad (*) \end{cases} \end{cases}$$

+ Nếu $x = -a$ là nghiệm của (1) thì nó phải thỏa mãn:

$$-0,6a \leq -a \leq a \Leftrightarrow a = 0$$

$$\begin{aligned} \text{+Phương trình } (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+x} \geq \sqrt{a-x} \\ 16(a+x) + 16(a-x) - 32\sqrt{(a+x)(a-x)} = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+x \geq a-x \geq 0 \\ 32\sqrt{a^2 - x^2} = 32a - x \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

+ Nếu $a < 0$ thì (4) vô nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

$$\text{+ Nếu } 0 \leq a \text{ thì hệ trên} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 32^2(a^2 - x^2) = 32^2a^2 - 64ax + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 1025x^2 - 64ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025}$$

+ Nếu $a < 0$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq 0$ thì (1) có nghiệm $x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025}$

Bài 15: Cho phương trình: $\sqrt{x^2 - 8x + m} = x - 1$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 8x + m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) = x^2 - 6x + m - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow 6 \leq m < 10$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $6 \leq m < 10$.

Bài 16: Cho phương trình: $\sqrt{2x^2 - 4mx + 3m} = x - m$ (1)

Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ 2x^2 - 4mx + 3m = (x - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ f(x) = x^2 - 2mx + 3m - m^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có đúng một nghiệm thì (2) có đúng một nghiệm $x \geq m$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:

Phương trình (2) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < m < x_2$

$$\Leftrightarrow f(m) < 0 \Leftrightarrow 3m - 2m^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$$

Trường hợp 2:

$$\text{Phương trình (2) có nghiệm kép } x_0 > m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ x_0 = m > m \end{cases} \quad (\text{vô lý})$$

Trường hợp 3:

Phương trình (2) có một nghiệm $x_1 = m$. Kiểm tra nghiệm x_2 : (2) có một

$$\text{nghiệm } x_1 = m \Leftrightarrow 3m - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

• Với $m = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = 0$ (nhận) $\Rightarrow m = 0$ thỏa đề bài.

• Với $m = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ thỏa đề bài.}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$

CHUYÊN ĐỀ 19: ĐƯA VỀ TÍCH

1. Các cách đưa về tích

Cách 1: Đặt nhân tử chung khi phương trình có sẵn một biểu thức $(x - x_0)$

Cách 2: Dùng lượng liên hiệp.

2. Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x} = 2\sqrt{x^2} \quad (1)$$

$$2. \sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2(x + 1) \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} x = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

• Nếu $x = 0$ thì (1) luôn đúng.

• Nếu $x \geq 2$ (a) thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-2)} = 2\sqrt{x.x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x - 2} = 2x + 1 \Leftrightarrow 4(x^2 - x - 2) = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{8} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

2. Điều kiện $\begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

• Nếu $x = -1$ thì (2) luôn đúng.

• Nếu $x \geq 1$ (a) thì:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2x+6)} + \sqrt{(x+1)(x-1)} = 2\sqrt{(x+1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3x+5+2\sqrt{(2x+6)(x-1)} = 4(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+4x-6} = x-1$$

$$\Leftrightarrow 4(2x^2+4x-6) = x^2-2x+1 \text{ (vì } x \geq 1 \text{ nên } x-1 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2+18x-25=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (nhận)} \\ x=-\frac{25}{7} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = \pm 1$.

Bài 2: Giải các phương trình:

$$1. \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 - 1} = 2\sqrt{x^2 - x} \quad (1)$$

$$2. \sqrt{2x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 - 1} = 2(x - 1) \quad (2)$$

Giải

$$1. \text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Cách 1:

- Nếu $x = 1$ thì (1) luôn đúng.
- Nếu $x > 1$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(+2)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x} \quad (3)$$

$$\text{Vì } x > 1 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{x+2} > \sqrt{x} \\ \sqrt{x+1} > \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} > 2\sqrt{x}$$

 $\Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

- Nếu $x \leq -2$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(+2)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(-x-2)} + \sqrt{(1-x)(-x-1)} = 2\sqrt{(1-x)(-x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-1} = 2\sqrt{-x} \quad (4)$$

$$\text{Vì } x \leq -2 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{-x-2} < \sqrt{-x} \\ \sqrt{-x-1} < \sqrt{-x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-1} < 2\sqrt{-x}$$

 $\Rightarrow (4)$ vô nghiệm.Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.**Cách 2:**Bình phương hai vế. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 + x^2 - 1 + 2\sqrt{(x^2 + x - 2)(x^2 - 1)} = 4(x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 + 2\sqrt{(x-1)^2(x+2)(x+1)} = 4x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow 2|x-1|\sqrt{(x+2)(x+1)} = 2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+3) \geq 0 \\ 4(x-1)^2(x+2)(x+1) = (x-1)^2(2x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x \geq 1 \\ x = 1 \\ 4(x^2 + 3x + 2) - (2x+3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

2. Điều kiện $\begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$

• Nếu $x = 1$ thì (2) nghiệm đúng.

• Nếu $x \geq 2$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-4)} - \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{(x-1)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = \sqrt{4x-4} + \sqrt{x+1}$$

Phương trình này vô nghiệm vì $\sqrt{4x-4} + \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-4} \forall x \geq 2$

• Nếu $x \leq -1$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-4)} - \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4-2x)} - \sqrt{(1-x)(-1-x)} = -2(1-x) = -2\sqrt{(1-x)(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-2x} - \sqrt{-1-x} = -2\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-2x} + 2\sqrt{1-x} = \sqrt{-1-x} \quad (3)$$

• Với $\forall x \leq -1$ thì $1-x > -1-x \Rightarrow 2\sqrt{1-x} > \sqrt{-1-x}$

$\Rightarrow \sqrt{4-2x} + 2\sqrt{1-x} > \sqrt{-1-x} \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $x = 1$.

Bài 3: Giải phương trình sau: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = \frac{4x-1}{3}$

Giải

Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ (a)

Cách 1:

Nhân hai vế của (1) cho $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x}$ ta được:

$$(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x})(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x}) = \frac{1}{3}(4x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x})$$

$$\Leftrightarrow 4x-1 = \frac{1}{3}(4x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \text{ (nhận)} \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(3x+1)(2-x)} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+5x-3x^2} = 3-x$$

$$\Leftrightarrow 2+5x-3x^2 = x^2-6x+9 \text{ vì (a) nên } 3-x > 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-11x+7=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{7}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{1}{4}; x = 1; x = \frac{7}{4}$

Cách 2:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{3x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{2-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 3x+1 \\ v^2 = 2-x \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = 4x-1$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow u-v = \frac{1}{3}(u^2 - v^2) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u+v = 3 \end{cases}$$

- Với $u = v \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

- Với $u+v=3 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$

$$\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(3x+1)(2-x)} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(2-x)} = 3-x \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{7}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là : $x = \frac{1}{4}; x = 1; x = \frac{7}{4}$.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4-x \quad (1)$$

$$2. \frac{2x}{\sqrt{3x+1}-1} = x+1 \quad (2)$$

Giải

Các nhận xét quan trọng:

1. Nhân lượng liên hiệp khi phương trình có dạng:

$$\text{Dạng 1: } \sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = kx+h$$

Dạng 2: $\frac{ax+b}{\sqrt{cx+d} \pm \alpha} = kx+h$

Dạng 3: $\frac{ax^2+b}{\sqrt{cx^2+d} \pm \alpha} = kx+h$

2. Khi nhân với một biểu thức luôn khác 0 thì ta nhân tự nhiên mà không xét thêm điều kiện gì.
3. Nếu biểu thức đó không biết dấu thì ta phải xét trường hợp biểu thức đó bằng 0 có nghiệm thỏa mãn phương trình hay không? Khi biểu thức đó khác 0 thì ta nhân vào hai vế hay vào tử số và mẫu số.
4. Đối với dạng 1 thì ta nên dùng cách 2 để lời giải đơn giản hơn.
5. Đối với dạng 2, dạng 3 ngoài cách giải trên còn có thể đặt t bằng biểu thức căn.

1. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+3} > 0 \\ v = \sqrt{2x-1} \geq 0 \end{cases}$; điều kiện: $\frac{1}{2} \leq x < 4$ (a)

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 = x+3 \\ v^2 = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = 4-x$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow u+v = u^2 - v^2$

$$\Leftrightarrow u+v = (u+v)(u-v) \Leftrightarrow u-v = 1$$

$$\Leftrightarrow u = 1+v \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 2x+2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = 3-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x-1) = (3-x)^2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 14x + 13 = 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \quad x=1 \text{ thỏa (a).}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1$.

Chú ý:

Nếu ta nhân lượng liên hiệp vào hai vế thì phải để ý:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} > 0 \forall x > \frac{1}{2}$$

2. Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \neq 0$

(2) $\Leftrightarrow \frac{2x(\sqrt{3x+1}+1)}{3x} = x+1$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3x+1}+1) = 3x+3 \Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1} = 3x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 4(3x+1) = (3x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$

Chú ý: Bài này ta có thể đặt $t = \sqrt{3x+1}$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1. x - 4 = \frac{x^2}{(\sqrt{1+x} + 1)^2} \quad (1)$$

$$2. 2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - 1) = x \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $x \geq 4$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} \quad & \Leftrightarrow x - 4 = \frac{x^2(\sqrt{1+x} - 1)^2}{[(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1+x} - 1)]^2} \\ & \Leftrightarrow x - 4 = (\sqrt{1+x} - 1)^2 = 2 + x - 2\sqrt{1+x} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = 3 \Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là: $x = 8$

2. Điều kiện: $x \geq -1$

Nhân hai vế của phương trình cho $\sqrt{1+x} + 1$ ta được:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1) = x(\sqrt{1+x} + 1) \\ & \Leftrightarrow 2x\sqrt{1+x} = x(\sqrt{1+x} + 1) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{1+x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là: $x = 0$

CHUYÊN ĐỀ 20 : ĐẶT ẨN PHỤ TOÀN PHẦN

1. Các dạng phương trình chuẩn

$$\text{Dạng 1: } \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm \alpha\sqrt{(a+bx)(c-bx)} = d$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx}$
- Bước 3: Tìm điều kiện của t .
- Bước 4: Bình phương t ; tính tích $\sqrt{(a+bx)(c-bx)}$ theo t .
- Bước 5: Đưa về phương trình bậc hai theo t .

$$\text{Dạng 2: } \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm \alpha(a+bx)\sqrt{\frac{c-bx}{a+bx}} = d$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đưa biểu thức $a+bx$ vào trong căn được dạng 1.

$$\text{Dạng 3: } \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm 2\sqrt{Ax^2+Bx+D} = Kx+h$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx}$
- Bước 3: Tìm điều kiện của t .
- Bước 4: Bình phương t ; tính các hàm còn lại theo t .
- Bước 5: Đưa về phương trình bậc hai theo t .

$$\text{Dạng 4: } ax \pm \sqrt{b-a^2x^2} \pm \alpha x \sqrt{b-a^2x^2} + c = 0$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = ax \pm \sqrt{b-a^2x^2}$
- Giải như các bước trên ở dạng 3.

$$\text{Dạng 5: } x + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = b$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Qui đồng bỏ mẫu, đưa về dạng 4.

$$\text{Dạng 6: } \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = b$$

Cách giải:

- Qui đồng và bỏ mẫu đưa về dạng 4.

$$\text{Dạng 7: } (ax+b)(cx+d) \pm \alpha \sqrt{Ax^2+Bx+D} = K$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt $t = \sqrt{Ax^2+Bx+D}$

$$\text{Dạng 8: } \sqrt{a+bx} + \sqrt{c-bx} = \sqrt{Ax^2+Bx+D}$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Bình phương hai vế được dạng 7.

2. Phương trình chứa một biểu thức liên hiệp: $f(x).g(x) = 1$

Cách giải: Đặt $t = f(x)$ thì $g(x) = \frac{1}{t}$

3. Phương trình chứa một biểu thức $f(x)$ giống nhau

Cách giải: Đặt $t = f(x)$

4. Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} + \sqrt{(2+x)(6-x)} = 8 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} - (1+x)\sqrt{\frac{8-x}{1+x}} = 3 \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $-2 \leq x \leq 6$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} > 0$$

$$\Rightarrow t^2 = 8 + 2\sqrt{(2+x)(6-x)} \Rightarrow \sqrt{(2+x)(6-x)} = \frac{t^2 - 8}{2}$$

$$(1) \text{ trở thành: } t + \frac{t^2 - 8}{2} = 8 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -6(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} = 4 \Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{(2+x)(6-x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2+x)(6-x)} = 4 \Leftrightarrow (2+x)(6-x) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2(\text{nhận})$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

2. Điều kiện: $-1 < x \leq 8$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} - \sqrt{(1+x)(8-x)} = 3 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} > 0$$

$$\Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(1+x)(8-x)} \Rightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = \frac{t^2 - 9}{2}$$

Phương trình (3) trở thành:

$$t - \frac{t^2 - 9}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(\text{loại}) \\ t = 3(\text{nhận}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(\text{loại}) \\ x = 8(\text{nhận}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 8$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1. x + \sqrt{2-x^2} + x\sqrt{2-x^2} = 3 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{x} + \sqrt{4-x} = \sqrt{5+4x-x^2} \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (a)

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{2-x^2} \Rightarrow t^2 = 2 + 2x\sqrt{2-x^2}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{2-x^2} = \frac{t^2 - 2}{2}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$t + \frac{t^2 - 2}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ với } t = 2 &\Leftrightarrow x + \sqrt{2-x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = 2-x \\ &\Leftrightarrow 2-x^2 = (2-x)^2 \text{ (do (a) nên } 2-x > 0) \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet \text{ với } t = -4 \Leftrightarrow x + \sqrt{2-x^2} = -4 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = -x-4.$$

Phương trình này có nghiệm $\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ vì $-x-4 < 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = 1$.

$$2. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 5+4x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ (a)}$$

$$(2) \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4x-x^2} = 5 + 4x - x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x - x^2 - 2\sqrt{4x-x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{4x-x^2} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-x^2} = 1 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{2+5x-3x^2} = 9-2x \quad (1)$$

$$2. \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ (a)

Đặt $t = \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} > 0$

$$\Rightarrow t^2 = 2x + 2\sqrt{(3x+1)(2-x)} + 3$$

$$\Rightarrow 2x + 2\sqrt{2+5x-3x^2} = t^2 - 3$$

Khi đó: (1) trở thành: $t + t^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$

• với $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{2+5x-3x^2} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{2+5x-3x^2} = 3-x$$

$$\Leftrightarrow 2+5x-3x^2 = (3-x)^2 \text{ (vì (a) nên } 3-x > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{4} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = 1 \vee x = \frac{7}{4}$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{2x}\sqrt{1-x^2} = 0$ (3)

Đặt: $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2x\sqrt{1-x^2} = t^2 - 1$

(3) trở thành: $t - \sqrt{2}(t^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

• với $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} - x \Leftrightarrow 1-x^2 = (\sqrt{2}-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (nhận)}$$

• với $t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-x^2 = \frac{1}{2} + x^2 + \sqrt{2}x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ thỏa mãn (a)}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$1. 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} = 48$$

$$2. \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} + 2\sqrt{(x - 1)(x + 3)} = 4 - 2x$$

Giải

$$1. 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} = 48$$

Điều kiện: $x \geq 5$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x - 5} + \sqrt{x} \quad (t > 0) \Rightarrow t^2 = 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x}$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 + 2t - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -8 (\text{loại}) \\ t = 6 \end{cases}$$

$$+ \text{ với } t = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x - 5} + \sqrt{x} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} = 36 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 5x} = 41 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x \leq \frac{41}{2} \\ x = \frac{41^2}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$

$$2. \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} + 2\sqrt{(x - 1)(x + 3)} = 4 - 2x$$

Điều kiện: $x \geq 4$

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow x - 4 = \frac{x^2 (\sqrt{1 + x} - 1)^2}{\left[(\sqrt{1 + x} + 1)(\sqrt{1 + x} - 1) \right]^2}$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = (\sqrt{1 + x} - 1)^2 = 2 + x - 2\sqrt{1 + x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + x} = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 8$.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x} + \sqrt{x + 7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 35 - 2x$$

$$2. 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$$

Giải

$$1. \sqrt{x} + \sqrt{x + 7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 35 - 2x \quad (1)$$

Điều kiện: $0 \leq x \leq \frac{35}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} + 2x = 35$$

Đặt: $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+7}; t > 0$

$$t^2 = 2x + 7 + 2\sqrt{x^2+7x} \Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2+7x} = t^2 - 7$$

Phương trình (1) trở thành:

$$t + t^2 - 7 = 35 \Leftrightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 (\text{loại}) \\ t = 6 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{29}{2} \\ 4(x^2 + 7x) = 4x^2 - 116x + 29^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{29}{2} \\ x = \frac{29^2}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x = \left(\frac{29}{12}\right)^2$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \left(\frac{29}{12}\right)^2$

$$2. \quad 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \quad (1)$$

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

Đặt: $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}; t > 0$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sqrt{x-x^2} \Rightarrow \sqrt{x-x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } 1 + \frac{3}{4}(t^2 - 1) = t \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x-x^2} = -\frac{8}{18} \text{ phương trình này vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0 \vee x = 1$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19} \quad (2)$$

Giải

$$1. \text{ Đặt: } t = x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow t \geq \frac{3}{4}$$

Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3$

$$\Leftrightarrow 2t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3t} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 3t} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t^2 + 3t = (3 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$$+ \text{ Với } t = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = 2$.

2. Đặt $t = x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \Rightarrow t \geq \frac{7}{4}$

(2) trở thành: $\sqrt{t+5} + \sqrt{t} = \sqrt{3t+13}$

$$\Leftrightarrow 2t + 5 + 2\sqrt{t(t+5)} = 3t + 13$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t(t+5)} = t + 8 \Leftrightarrow 4t(t+5) = (t+8)^2$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{16}{3} \text{ (loại)} \\ t = 4 \end{cases}$$

$$- \text{ Khi } t = 4 \quad x^2 + x + 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

1. $1 - \sqrt{x + \sqrt{x+1}} + 1 = \sqrt{x+1}$

2. $\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = x$

Giải

1. $1 - \sqrt{x + \sqrt{x+1}} + 1 = \sqrt{x+1} \quad (1)$

Điều kiện: $x \geq -1$

Đặt: $t = \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x+1$

Khi đó: (1) trở thành: $1 - \sqrt{t^2 + t} = t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 + t} = 1 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 + t = (1 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{9}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{8}{9}$.

2. Điều kiện: $x \geq 4$. Đặt: $t = \sqrt{x-4} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x-4 \Rightarrow x = t^2 + 4$

Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{t^2 + 4 - 4t} + \sqrt{t^2 + 4 + 4t} = t^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t+2)^2} = t^2 + 4 \Leftrightarrow |t-2| + t+2 = t^2 + 4 \quad (2)$$

+ Nếu $t-2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$ thì (2) $\Leftrightarrow 2t = t^2 + 4$

Phương trình này vô nghiệm.

+ Nếu $0 \leq t \leq 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow t = 0$

Với $t = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 4$.

Bài 8: Giải các phương trình sau:

$$1. x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}x + 6$$

$$2. x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{11}{4} - \frac{28}{9}x$$

Giải

$$1. x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 8 = 0 \quad (1)$$

Đặt: $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}; t \geq 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 4 \end{cases} \text{ với } t = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -2 \vee x = \frac{7}{2}$

$$2. x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{11}{4} - \frac{28}{9}x \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } 9x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-1 - \sqrt{73}}{18} \\ x \geq \frac{-1 + \sqrt{73}}{18} \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{9x^2 + x - 2}{9} - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} - \frac{91}{36} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{9x^2 + x - 2}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 9x^2 + x - 2$$

Phương trình (2) trở thành:

$$\frac{t^2}{9} - 5t - \frac{91}{36} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 180t - 91 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} (\text{loại}) \\ t = \frac{91}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{91}{2} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{91}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + x - 2 = \frac{91^2}{4} \Leftrightarrow 36x^2 + 4x - 8289 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{298408}}{36} \text{ thỏa mãn (*)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{-2 \pm \sqrt{298408}}{36}$$

Bài 9: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4}$$

$$2. \sqrt{(1+x)(2-x)} = 1 + 2x - 2x^2$$

Giải

$$1. \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4} \quad (1)$$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}; t \geq 0$$

$$\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = t^2 - \frac{1}{4}t^4$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow t = 2 - \frac{1}{4} \left(t^2 - \frac{t^4}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow t = 2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{16} \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0$.

$$2. \sqrt{(1+x)(2-x)} = 1 + 2x - 2x^2 \quad (1)$$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 2$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \sqrt{2+x-x^2} = (2+x-x^2) - 3 \quad (2)$$

Đặt: $t = \sqrt{2+x-x^2}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2+x-x^2$

Phương trình (2) trở thành: $t = 2t^2 - 3 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (\text{loại}) \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$

Với $t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2+x-x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1}{2}$.

Bài 10: Giải các phương trình sau:

1. $(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x$

2. $(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 120x$

Giải

1. $(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x \quad (1)$

Điều kiện: $x \geq 0$. Phương trình (1)

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 6) = 168x$

$\Leftrightarrow (x + 5\sqrt{x} + 6)(x + 7\sqrt{x} + 6) = 168x$

$\Leftrightarrow (x + 6\sqrt{x} - \sqrt{x} + 6)(x + 6\sqrt{x} + \sqrt{x} + 6) = 168x$

$\Leftrightarrow (x + 6\sqrt{x} + 6)^2 = 169x = (13\sqrt{x})^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6\sqrt{x} + 6 = 13\sqrt{x} \\ x + 6\sqrt{x} + 6 = -13\sqrt{x} \end{cases}$ (phương trình này vô nghiệm vì $x \geq 0$)

$\Leftrightarrow x - 7\sqrt{x} + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 36 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = 36$.

2. $(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 120x \quad (1)$

Điều kiện: $x \geq 0$

(1) $\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 6) = 120x$

$\Leftrightarrow [(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 6)][(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)] = 120x$

$\Leftrightarrow (x + 7\sqrt{x} + 6)(x + 5\sqrt{x} + 6) = 120x \quad (2)$

Vì $x = 0$ không là nghiệm nên:

$$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + 7 \right) \left(\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + 5 \right) = 120$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}}; t \geq 2\sqrt{6}$$

Phương trình trên trở thành:

$$(t+7)(t+5) - 120 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 85 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -17 (\text{loại}) \\ t = 5 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 5 \Leftrightarrow t = \sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} = 5 \Leftrightarrow x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 4 \vee x = 9$

Bài 11: Giải các phương trình sau:

$$1. x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$$

$$2. 2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$$

Giải

$$1. x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{2x+3}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2 - 3)$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\frac{1}{4}(t^2 - 3)^2 + 2(t^2 - 3) + 5 = 2t$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 2t^2 - 8t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 + t^2 + 3t + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^3 + t^2 + 3t + 5 = 0 \text{ phương trình này vô nghiệm } \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -1$.

$$2. 2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } \sqrt{1-x} = 1 - 2x^2 - 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow 1-x = 1 + 4x^4 + 4x^2(1-x^2) - 4x^2 + 8x^3\sqrt{1-x^2} - 4x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow x(1 + 8x^2\sqrt{1-x^2} - 4\sqrt{1-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^2\sqrt{1-x^2} - 4\sqrt{1-x^2} + 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đặt: $t = \sqrt{1 - x^2}$; $t \geq 0$; suy ra $x^2 = 1 - t^2$

Phương trình (2) trở thành: $8(1 - t^2)t - 4t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 8t^3 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)(8t^2 - 4t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{2} = 0 \text{ vô nghiệm vì } t \geq 0 \\ 4t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ (vì } t \geq 0) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x^2 = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

Thử lại các nghiệm của phương trình ta được nghiệm thích hợp là:

$$x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

Bài 12: Giải các phương trình:

$$1. \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}} = 2$$

$$2. 2\sqrt[3]{(1+x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0$$

Giải

$$1. \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}} = 2. \text{ Đặt kiện: } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \geq 0 \\ b = \sqrt{3x^2+4x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2x-1 \\ b^2 = 3x^2+4x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x) \Rightarrow x^2 + 2x = \frac{a^2 + b^2}{3}$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{3}} = -a + b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - a \geq 0 \\ \frac{a^2 + b^2}{3} = (b - a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq a \\ a^2 + b^2 - 3ab = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } b \geq a \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x+1} \geq \sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Phương trình (1): } a^2 - 3ba + b^2 = 0$$

$$\Delta = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2 \Rightarrow a = \frac{3b \pm \sqrt{5}b}{2}$$

+ Với $a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot b$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3(7 - 3\sqrt{5})x^2 + 4(6 - 3\sqrt{5})x + 9 - 3\sqrt{5} = 0$$

Phương trình này có nghiệm kép: $x_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

+ Với $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} b$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3(7 + 3\sqrt{5})x^2 + 4(6 + 3\sqrt{5})x + 9 + 3\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

2. $2\sqrt[3]{(1+x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0 \quad (1)$

Vì $x = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình nên (1) tương đương với:

$$2\sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}} + 3 + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = 0 \quad (2)$$

Đặt: $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ thì $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{t}$

Khi đó: (2) trở thành: $2t + 3 + \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$

+ Với $t = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = -1$

$$\Leftrightarrow 1+x = x-1 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

+ Với $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 8(x+1) = x-1 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{7}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{9}{7}$

Bài 13: Giải phương trình sau:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^5 + \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^5 = 123$$

Giải

$$\text{Vì } (\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 1 \text{ nên}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 1} - x \text{ thì } \sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{t}$$

$$\text{Do đó phương trình đã cho tương đương: } t^5 + \frac{1}{t^5} = 123 \Leftrightarrow t^{10} - 123t^5 + 1 = 0$$

$$\text{Đặt: } y = t^5 \text{ thì } y^2 - 123y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{123 \pm 55\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^5 = \frac{123 - 55\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^5 \\ t^5 = \frac{123 + 55\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ x^2 + 1 = x^2 + (3 - \sqrt{5})x + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ + Với}$$

$$t = \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = x + \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 14: Giải phương trình sau:

$$\frac{2002x^4 + x^4\sqrt{x^2 + 2002} + x^2}{2001} = 2002$$

Giải

Thay 2002 bởi a: $a > 0$

$$\text{Ta giải phương trình: } \frac{ax^4 + x^4\sqrt{x^2 + a} + x^2}{a - 1} = a$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ax^4 + x^4\sqrt{x^2+a} + x^2 = a^2 - a \\
&\Leftrightarrow x^4(a + \sqrt{x^2+a}) + (\sqrt{x^2+a})^2 - a^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^4(a + \sqrt{x^2+a}) + (\sqrt{x^2+a} - a)(\sqrt{x^2+a} + a) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+a} + a)(x^4 + \sqrt{x^2+a} - a) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^4 + \sqrt{x^2+a} - a = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2)^2 - (\sqrt{x^2+a})^2 + x^2 + \sqrt{x^2+a} = a \\
&\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{x^2+a})(x^2 + \sqrt{x^2+a}) + x^2 + \sqrt{x^2+a} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{x^2+a})(x^2 - \sqrt{x^2+a} + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{x^2+a} + 1 = 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

Đặt: $t = \sqrt{x^2+a} > 1$ suy ra $t^2 = x^2 + a$

Thì: (2) $\Leftrightarrow t^2 - t + 1 - a = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1 - \sqrt{4a-3}}{2} < 1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{4a-3} - 1)$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{4a-3} - 1)}$$

Với $a = 2002$ ta được nghiệm của phương trình cho là: $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{8005} - 1)}$

Bài 15: Giải phương trình sau: $\sqrt{\frac{6}{2-x}} + \sqrt{\frac{10}{3-x}} = 4$

Giải

Điều kiện: $x < 2$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{\frac{6}{2-x}} > 0 \Rightarrow t^2 = \frac{6}{2-x} \Rightarrow 3-x = \frac{6}{t^2} + 1 = \frac{6+t^2}{t^2}$$

Do đó: (1) trở thành:

$$t + t\sqrt{\frac{10}{6+t^2}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10}{6+t^2}} = \frac{4-t}{t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < t < 4 \\ 10t^2 = (6+t^2)(4-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ 0 < t < 4 \\ t^3 - 6t^2 - 48 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Xét phương trình (2):

Đặt: $f(t) = t^3 - 6t^2 - 48$ với $0 < t < 4$

$$f'(t) = 3t^2 - 12t \quad ; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	4
f'(t)		-
f(t)	-48	-80

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) = 0$ luôn vô nghiệm $\forall t \in (0, 4)$

$$\Rightarrow \text{phương trình chỉ có nghiệm } t = 2 \Leftrightarrow \frac{6}{2-x} = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -1$.

Bài 16: Giải phương trình sau: $1 + x - 2x^2 = \sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{2x + 1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Nếu $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$ thì (1) thỏa mãn.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} \quad & \Leftrightarrow (1-x)(1+2x) = \sqrt{(2x-1)(2x+1)} - \sqrt{2x+1} \\ & \Leftrightarrow (1-x)(1+2x) = \sqrt{2x+1}(\sqrt{2x-1}-1) \end{aligned}$$

Đặt: $t = \sqrt{2x+1}$; điều kiện: $t \geq \sqrt{2}$ (vì $x \geq \frac{1}{2}$)

Ta được: $(1-x)t^2 = t(\sqrt{2x-1}-1)$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{1-x} \quad (\text{vì } t \geq \sqrt{2}) \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = -\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \frac{(\sqrt{2x-1}-1)(\sqrt{2x-1}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \frac{-2}{\sqrt{2x-1}+1}$$

Phương trình này vô nghiệm vì vế phải âm, vế trái dương.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$

CHUYÊN ĐỀ 21: ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG TOÀN PHẦN

Bài 1: Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$

Giải

$$x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } t^2 - (x + 3)t + 3x = 0$$

$$\Delta = (x + 3)^2 - 12x = (x - 3)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = x \end{cases}$$

+ Với $t = x \Rightarrow x^2 + 1 = x^2$ phương trình này vô nghiệm.

$$+ \text{ Với } t = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình này là: $x = \pm 2\sqrt{2}$

Bài 2: Giải phương trình sau: $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$

Giải

$$(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x^2 + 1}; t \geq 1$$

$$(1) \Leftrightarrow (4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2(x^2 + 1) + 2x - 1$$

$$\Rightarrow (4x - 1) = 2t^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2t^2 + (1 - 4x)t + 2x - 1 = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (1 - 4x)^2 - 8(2x - 1) = (4x - 3)^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2} (\text{loại}); t = 2x - 1$$

+ Với $t = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{4}{3}$

Bài 3: Giải phương trình sau: $(3 - x)\sqrt[3]{\frac{3 - x}{x - 1}} + (x - 1)\sqrt[3]{\frac{x - 1}{3 - x}} = 2$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Đặt: $t = \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$ thì $\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = \frac{1}{t}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$(3-x)t + (x-1)\frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow (3-x)t^2 - 2t + x - 1 = 0$$

Ta có: $\Delta = (x-2)^2 \Rightarrow t = 1; t = \frac{x-1}{3-x}$

+ Với $t = 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

+ Với $t = \frac{x-1}{3-x} \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2$

Tóm lại: Phương trình đã cho có nghiệm: $x = 2$.

Bài 4: Giải phương trình sau: $2(1-x)\sqrt{2x^2+2x-1} = x^2-x+1$ (1)

Giải

Đặt: $t = \sqrt{2x^2+2x-1} \geq 0 \Rightarrow 2x^2+2x-1 = t^2$
 $\Rightarrow 2x^2 = t^2 + 1 - 2x$

(1) trở thành: $4(1-x)t = t^2 + 1 - 2x - 2x + 2$
 $\Leftrightarrow t^2 - 4(1-x)t - 4x + 3 = 0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta = 4(1-x)^2 + 4x - 3 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

$\Rightarrow$ (2) có hai nghiệm: $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 - 4x \end{cases}$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

• Với $t = 3 - 4x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x-1} = 3 - 4x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4x \geq 0 \\ 2x^2 + 2x - 1 = (3 - 4x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13 - \sqrt{29}}{14}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $\begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{13 - \sqrt{29}}{14} \end{cases}$

CHUYÊN ĐỀ 22: ĐẶT HAI ẨN ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH HOẶC TỔNG CÁC ĐẠI LƯỢNG KHÔNG ÂM

Bài 1: Giải phương trình: $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

Giải

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8} \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^3 + 8 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \quad (2)$$

Đặt: $\begin{cases} a = x + 2 \\ b = x^2 - 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = x^2 - 3x + 2$

Do đó (2) trở thành: $2(b - a) = 3\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq a \\ 4(b - a)^2 = 9ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq a \text{ (*)} \\ 4a^2 + 4b^2 - 17ab = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3)

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 17a + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{4} \\ a = 4b \end{cases}$$

Kết hợp với (*) ta được: $a = \frac{b}{4} \Leftrightarrow 4a = b$

$$\Leftrightarrow 4(x + 2) = x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{13} \\ x = 3 + \sqrt{13} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 3 \pm \sqrt{13}$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$

Giải

$$\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2} \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq 1$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ b = x-3 \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x-1 \\ b^2 = (x-3)^2 \end{cases}$

Phương trình (1) trở thành:

$$a + b = \sqrt{2b^2 + 2a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \geq 0 \\ (a + b)^2 = 2(a^2 + b^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b \geq 0 \\ (a - b)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \geq 0 \\ a = b \end{cases}$$

$$\text{Khi } a = b \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 5$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \sqrt{x^4 - 1}$

Giải

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \sqrt{x^4 - 1} \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq 1$

$$\text{Đặt: } a = \sqrt{x-1} \geq 0; b = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} > 0$$

$$\Rightarrow a \cdot b = \sqrt{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)} = \sqrt{x^4 - 1}$$

Phương trình (1) trở thành: $a + b = 1 + ab$

$$\Leftrightarrow a(1-b) - (1-b) = 0 \Leftrightarrow (1-b)(a-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } a = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$+ \text{ Với } b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 0 (\text{loại})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \geq 0 \\ b = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2x-1 \\ b^2 = 3x^2 + 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = \frac{a^2 + b^2}{3}$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{3}} = -a + b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - a \geq 0 \\ \frac{a^2 + b^2}{3} = (b - a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq a \\ a^2 + b^2 - 3ab = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Với } b \geq a \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 4x + 1} \geq \sqrt{2x - 1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Phương trình (1): } a^2 - 3ba + b^2 = 0$$

$$\Delta = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2 \Rightarrow a = \frac{3b \pm \sqrt{5}b}{2}$$

$$- \text{ Với } a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3(7 - 3\sqrt{5})x^2 + 4(6 - 3\sqrt{5})x + 9 - 3\sqrt{5} = 0$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm kép: } x_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$- \text{ Với } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} (3x^2 + 4x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3(7 + 3\sqrt{5})x^2 + 4(6 + 3\sqrt{5})x + 9 + 3\sqrt{5} = 0$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm kép: } x_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5x^2 + 14x + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)(5x + 9)} = \sqrt{(x + 4)(x - 5)} + 5\sqrt{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(5x + 9) = (x + 4)(x - 5) + 25(x + 1) + 10\sqrt{(x + 1)(x + 4)(x - 5)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x + 4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x + 4)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \\ b = \sqrt{x + 4} \end{cases} \text{ thì (2) trở thành:}$$

$$+ 2a^2 + 3b^2 = 5ab \Leftrightarrow 2a^2 - 5ba + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = \frac{3b}{2}$$

$$+ \text{Với } a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{x + 4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}; x = \frac{5 - \sqrt{61}}{2} (\text{loại})$$

$$+ \text{Với } a = \frac{3}{2}b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = \frac{3}{2}\sqrt{x + 4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow x = 8; x = -\frac{7}{4} (\text{loại})$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \vee x = 8.$$

Bài 6: Giải phương trình sau : $5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2+2)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq 1$

$$(1) \Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2(x^2+2) \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2-x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x+1 \\ b^2 = x^2-x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 5ab = 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b}{2}; a = 2b$$

$$+ \text{Với } a = \frac{b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ thỏa } (*)$$

$$+ \text{Với } a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$$

phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}.$$

Bài 7: Giải phương trình sau: $10\sqrt{x^3+8} = 3(x^2-x+6)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq -2$

$$(1) \Leftrightarrow 10\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} = 3(x^2-x+6)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{x+2} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2-2x+4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x+2 \\ b^2 = x^2-2x+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 - x + 6$$

Phương trình (1) trở thành:

$$10ab = 3(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b}{3} \vee a = 3b$$

$$+ \text{ Với } a = \frac{b}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2-2x+4} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = 3b \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 3\sqrt{x^2-2x+4} \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 19x + 34 = 0 \text{ (phương trình này vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$$

Bài 8: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{7x+1} \\ b = -\sqrt[3]{x^2-x-8} \\ c = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 7x+1 \\ b^3 = -(x^2-x-8) \\ c^3 = x^2-8x-1 \end{cases}$$

$$(1) \text{ trở thành: } a + b + c = 2 \Rightarrow (a + b + c)^3 = 8 \quad (2)$$

$$\text{Lại có: } a^3 + b^3 + c^3 = 8 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) } \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3b^2c \\ + 6abc + 3c^2a + 3c^2b$$

$$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + a^2c + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow a = -b; b = -c; c = -a$$

$$+ \text{ Nếu } a = -b \Leftrightarrow \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \Leftrightarrow 7x+1 = x^2-x-8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } b = -c \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-x-8} = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \Leftrightarrow x = 1$$

$$+ \text{ Nếu } c = -a \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-8x-1} = -\sqrt[3]{7x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 1 = -7x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Thay các giá trị $x \in \{-1, 0, 1, 9\}$ vào phương trình đều thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \{-1, 0, 1, 9\}$.

Bài 9: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = 3 + \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{2-x} \\ b = \sqrt[3]{7+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 2-x \\ b^3 = 7+x \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = 9$$

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3 \\ a^3 + b^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3 \\ (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ (a+b)^3 - 3ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 2 \\ \sqrt[3]{7+x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1 \\ \sqrt[3]{7+x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -6; x = 1$.

Bài 10: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{x^2 - 7x + 8} + \sqrt[3]{x^2 - 6x + 7} - \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12} = 3 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{x^2 - 7x + 8} \\ b = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 7} \\ c = \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = x^2 - 7x + 8 \\ b^3 = x^2 - 6x + 7 \\ c^3 = 2x^2 - 13x - 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 27 \quad (2)$$

Phương trình (1) trở thành:

$$a + b + c = 3 \Leftrightarrow (a + b + c)^3 = 27 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow (a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } a = -b \text{ thì } \sqrt[3]{x^2 - 7x + 8} = -\sqrt[3]{x^2 - 6x + 7}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 13x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 5$$

$$+ \text{ Với } b = -c \text{ thì } \sqrt[3]{x^2 - 6x + 7} = \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 19 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

$$+ \text{ Với } c = -a \text{ thì } \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12} = \sqrt[3]{x^2 - 7x + 8}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{29}$$

Thay các nghiệm trên vào (1) ta thấy đều thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{3}{2}; x = 5; x = \frac{7 \pm 5\sqrt{5}}{2}; x = 3 \pm \sqrt{29}$$

CHUYÊN ĐỀ 23: ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Cách giải

Dạng 1: Phương trình có dạng: $x^4 + b = a\sqrt[n]{ax \pm b}$ ($n \in \mathbb{Z}^+; n \geq 2$)

- Đặt: $t = \sqrt[n]{ax \pm b}$
- Đưa về hệ đối xứng.

Dạng 2: $\sqrt[n]{a - f(x)} + \sqrt[n]{b + f(x)} = c; \quad m, n \in \mathbb{Z}^+; \begin{cases} m \geq 2 \\ n \geq 2 \end{cases}$

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[n]{a - f(x)} \\ v = \sqrt[n]{b + f(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^n = a - f(x) \\ v^n = b + f(x) \end{cases} \Rightarrow u^n + v^n = a + b$

- Kết hợp với phương trình đã cho ta được hệ: $\begin{cases} u + v = c \\ u^n + v^n = a + b \end{cases}$

2. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình sau: $x^2 + \sqrt{x+5} = 5 \quad (1)$

Giải

Điều kiện: $x \geq -5$

Đặt: $t = \sqrt{x+5}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x+5$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} x^2 + t = 5 & (2) \\ t^2 - x = 5 & (3) \end{cases}$

Lấy (2) - (3) ta được:

$$x^2 - t^2 + t + x = 0 \Leftrightarrow (t+x)(1+x-t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+x=0 \\ t-x=1 \end{cases}$$

+ Với $t+x=0 \Rightarrow t=-x$ thế vào (2) ta được:

$$x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Vì $t \geq 0$ nên $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ nên nghiệm x_2 bị loại.

+ Với $t = x+1$ thế vào (2) ta được:

$$x^2 + x + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \mp \sqrt{17}}{2}$$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ nên nghiệm x_3 bị loại.

Tóm lại: Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$

Bài 2: Giải phương trình sau: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1)

Giải

Đặt: $t = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow t^3 = 2x-1$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2t & (2) \\ t^3 = 2x - 1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 + 1 = 2x \end{cases}$$

Lấy (2) - (3) ta được $x^3 - t^3 = 2(t-x)$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2) + 2(x-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ x^2 + xt + t^2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

- Phương trình (4) có $\Delta_1 = t^2 - 4(t^2 + 2) = -8 - 3t^2 < 0$;

do đó (4) vô nghiệm.

- Với $x = t$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài 3: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1$

Giải

Điều kiện: $x \leq \frac{1}{2}$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} \\ b = \sqrt{\frac{1}{2} - x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = \frac{1}{2} + x \\ b^2 = \frac{1}{2} - x \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^2 = 1$$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^2 = 1 \\ b = 1 - a \end{cases} \Rightarrow a^3 + (1 - a)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 + a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0; a = 1; a = -2$$

$$+ \text{ Với } a = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = -2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm \frac{1}{2}; x = -\frac{17}{2}$.

Bài 4: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{18 + x^2} = 5$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{x^2 - 1} \\ b = \sqrt[3]{18 + x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = x^2 - 1 \\ b^3 = 18 + x^2 \end{cases} \Rightarrow b^3 - a^3 = 19$$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ b^3 - a^3 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b \\ b^3 - (5 - b)^3 = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b^3 - 15b^2 + 75b - 144 = 0 \Leftrightarrow (b - 3)(2b^2 - 9b + 48) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 2b^2 - 9b + 48 = 0 \end{cases} \text{ (phương trình này vô nghiệm)}$$

$$+ \text{ Với } b = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{18 + x^2} = 3 \Rightarrow x = \pm 3$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \pm 3$

Bài 5: Giải phương trình sau: $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt{2}$

Giải

Điều kiện: $2 \leq x \leq 6$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[4]{x-2} \geq 0 \\ b = \sqrt[4]{6-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = x-2 \\ b^4 = 6-x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 4$$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 4 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 4 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2b^2 - 8ab = 0 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \vee ab = 4 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} ab = 0 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} ab = 4 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình:}$$

$$x^2 - \sqrt{2}x + 4 = 0 \text{ (phương trình này vô nghiệm)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2 \vee x = 6$.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$1. x + \sqrt{2-x^2} + x\sqrt{2-x^2} = 3$$

$$2. \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3$$

Giải

1. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = x; |a| \leq \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2-x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 \\ b^2 = 2-x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a + b + ab = 3 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + ab = 3 \\ (a+b)^2 - 2ab = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 - ab \\ ab = 1 \\ ab = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 - ab \\ ab = 1 \\ ab = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \\ a + b = -4 \\ ab = 7 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$$\Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình: } t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra $a = b = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{1-x^2} \geq 0 \\ b = \sqrt[3]{1-x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1-x^2 \\ b^3 = 1-x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^3$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^2 = b^3 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^3 \\ a = 3 - 2b \end{cases} \Rightarrow b^3 - (3 - 2b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^3 - 4b^2 + 12b - 9 = 0 \Leftrightarrow (b-1)(b^2 - 3b + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 1 \text{ vì } b^2 - 3b + 9 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài 7: Giải phương trình sau: $\sqrt[4]{313+x} + \sqrt[4]{313-x} = 6$

(1)

Giải

Điều kiện: $-313 \leq x \leq 313$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[4]{313+x} \geq 0 \\ b = \sqrt[4]{313-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = 313+x \\ b^4 = 313-x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 626$$

Phương trình (1) trở thành hệ:

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 626 \\ a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + b^4 = 626 \\ b = 6 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^4 + (6-a)^4 = 626 \Leftrightarrow a^4 + (a-6)^4 = 626 \quad (2)$$

Đặt: $t = a - 3 \geq -3$ thì (2) trở thành:

$$(t+3)^4 + (t-3)^4 = 626 \Leftrightarrow 2t^4 + 108t^2 - 464 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = -58 < 0 \text{ (loại)} \\ t^2 = 4 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \Rightarrow b = 1 \\ a = 1 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

$$- \text{ Với } \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{313+x} = 5 \\ \sqrt[4]{313-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 312$$

$$- \text{ Với } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{313+x} = 1 \\ \sqrt[4]{313-x} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -312$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm 312$.

Bài 8: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{4}$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{\sin^2 x}; 0 \leq a \leq 1 \\ b = \sqrt[3]{\cos^2 x}; 0 \leq b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = \sin^2 x \\ b^3 = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = 1$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 1 \\ a + b = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] = 1 \\ a+b = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \sqrt[3]{4} \\ ab = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2 - \sqrt[3]{4}X + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} (m \in \mathbb{Z}).$$

Bài 9: Giải phương trình sau: $9 + \sqrt{9 + \sqrt{x}} = x$

Giải

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt: } a = 9 + \sqrt{x} \Rightarrow a > 9$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } \begin{cases} 9 + \sqrt{a} = x \quad (1) \\ 9 + \sqrt{x} = a \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{x} = x - a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{x} + (\sqrt{a} - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{a} + \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{x} \text{ thế vào (1) ta được:}$$

$$9 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 9 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{37}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} (38 + 2\sqrt{37}) \text{ hay } x = \frac{1}{2} (19 + \sqrt{37})$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{1}{2} (19 + \sqrt{37})$$

Bài 10: Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \geq \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad (*)$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 1} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2 - 3x - 2} \geq 0 \\ c = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} > 0 \\ d = \sqrt{x^2 - x + 2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2x^2 - 1 \\ b^2 = x^2 - 3x - 2 \\ c^2 = 2x^2 + 2x + 3 \\ d^2 = x^2 - x + 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x^2 + 3x + 1 \\ c^2 - d^2 = x^2 + 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \\ (a + b)(a - b) = (c + d)(c - d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \\ a - b = c - d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = c^2 \\ b^2 = d^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = 2x^2 + 2x + 3 \\ x^2 - 3x - 2 = x^2 - x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

 NGHIỆM $x = -2$ thỏa mãn điều kiện (*). Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -2$.

Bài 11: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2 \quad (1)$

Giải

Đặt: $3y = \sqrt[3]{81x - 8} + 2 \Rightarrow \sqrt[3]{81x - 8} = 3y - 2$

$$\Rightarrow 81x - 8 = (3y - 2)^3 = 27y^3 - 2 \cdot 27y^2 + 36y - 8$$

$$\Rightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y$$

Từ đó (1) chuyển về hệ: $\begin{cases} 3y = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x & (2) \\ 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y & (3) \end{cases}$

Lấy (2) - (3) ta được:

$$3(y-x) = x^3 - y^3 + 2(y^2 - x^2) + \frac{4}{3}(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Phương trình (4)} \Leftrightarrow x^2 + (y-2)x + y^2 - 2y + \frac{13}{3} = 0$$

$$\Delta_y = (y-2)^2 - 4 \left(y^2 - 2y + \frac{13}{3} \right) = -3y^2 + 4y - \frac{40}{3}$$

$$\text{Lại có: } \Delta = 4 - 40 = -36 < 0$$

$\Rightarrow \Delta_y < 0 \quad \forall y \Rightarrow$ phương trình (4) vô nghiệm.

+ Với $x = y$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \mp \sqrt{\frac{8}{3}} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0; x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 12: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^3 + 6$

Giải

$$\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^3 + 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-9} + 3 = (x-3)^3 + 9$$

$$\text{Đặt: } a = \sqrt[3]{x-9} + 3 \Rightarrow x-9 = (a-3)^3 \Leftrightarrow (a-3)^3 + 9 = x$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành hệ: } \begin{cases} x = (a-3)^3 + 9 \\ a = (x-3)^3 + 9 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow x - a = (a-3)^3 - (x-3)^3$$

$$\Leftrightarrow x - a = (a-x) \left[(a-3)^2 + (x-a)^2 + (a-3)(x-a) \right]$$

$$\Leftrightarrow (a-x) \left[(a-3)^2 + (x-a)^2 + (a-3)(x-a) + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ (a-3)^2 + (x-a)^2 + (a-3)(x-a) + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = a-3 \\ v = x-3 \end{cases} \text{ thì (2)} \Leftrightarrow u^2 + vu + v^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = v^2 - 4(v^2 + 1) = -3v^2 - 4 < 0$$

$\Rightarrow$ phương trình này vô nghiệm $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

+ Với $a = x$ thế vào (1) ta được:

$$(x-3)^3 - x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 8x + 18 = 0 \end{cases} \text{(phương trình này vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 1$.

Bài 13: Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{\sqrt{3x+10}} + \frac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Giải

Điều kiện: $x > -2$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{3x+10} > 0 \\ b = \sqrt{x+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3x+10 \\ 3b^2 = 3x+6 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 3b^2 = 4$$

Phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ \frac{1}{a} + \frac{6}{ab} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ \frac{6}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ a = 6 + b \end{cases} \Rightarrow (6+b)^2 - 3b^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 - 12b - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \\ b = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } b = 8 \Rightarrow a = 14 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+10} = 14 \\ \sqrt{x+2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 62$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 62$.

Bài 14: Giải phương trình sau: $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} = x^2 + \frac{25}{12}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } 12 - \frac{12}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12 - \frac{12}{x^2} \\ b^2 = x^2 + \frac{12}{x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 12 + x^2$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a + b = x^2 + \frac{25}{12} \Leftrightarrow a + b = x^2 + 12 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a + b = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Mặt khác: $|x| \geq 1 \Rightarrow x^2 + \frac{12}{x^2} > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} > 1$

$\Rightarrow b > 1$. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 15: Giải phương trình sau: $\frac{\sqrt[3]{10-x} + \sqrt[3]{8-x}}{\sqrt[3]{10-x} - \sqrt[3]{8-x}} = 9 - x$ (1)

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{10-x} \\ b = \sqrt[3]{8-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 10-x \\ b^3 = 8-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 18-2x \\ a^3 - b^3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}(a^3 + b^3) = 9 - x$$

Và $a^3 - b^3 = 2$

Khi đó (1) trở thành: $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{1}{2}(a^3 + b^3) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ 2(a+b) = (a-b)(a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \vee \quad \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ (a-b)(a^2 - ab + b^2) = 2 \end{cases} \quad (II)$$

• Hệ (I) $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{10-x} = 1 \\ \sqrt[3]{8-x} = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ \sqrt[3]{8-x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

• Hệ (II): $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ (a-b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a^2 - ab + b^2 = a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 = 2 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a^3 = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 8$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x \in \{8; 9; 10\}$

Bài 16: Giải phương trình sau: $(8 \cos^3 x + 1)^3 = 162 \cos x - 27$ (1)

Giải

Đặt: $a = 2 \cos x$; $-2 \leq a \leq 2$

Phương trình (1) trở thành: $(a^3 + 1)^3 = 81a - 27$

Lại đặt: $a^3 + 1 = 3b$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} 27b^3 = 81a - 27 \\ 3b = a^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 = 3a - 1 \\ a^3 = 3b - 1 \end{cases}$ (2)

$$\Rightarrow b^3 - a^3 = 3(a - b) \Leftrightarrow (b - a)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^2 + ab + b^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3) có: $\Delta = b^2 - 4(b^2 + 3) = -3b^2 - 12 < 0$

nên (3) vô nghiệm.

+ Với $a = b$ thế vào (2) ta được: $a^3 - 3a + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = -1 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 17: Giải phương trình sau: $4x^2 + \sqrt{2x+1} + 5 = 12x$

Giải

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt: } \sqrt{2x+1} = ay + b \Rightarrow 2x+1 = (ay+b)^2 = a^2y^2 + 2aby + b^2$$

• Tìm a, b để hệ sau có dạng đối xứng loại 2.

$$\begin{cases} 4x^2 + ay + b + 5 = 12x \\ 2x+1 = a^2y^2 + 2aby + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + ay + b + 5 = 0 \\ a^2y^2 + 2aby + b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên là hệ đối xứng loại (2)

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = -\frac{2ab}{12} = -\frac{2}{a} = \frac{b^2-1}{b+5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Như vậy ta được: $\sqrt{2x+1} = -2y + 3$

Điều kiện: $-2y + 3 > 1 \Rightarrow y < 1$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} 4x^2 - 12x - 2y + 8 = 0 \\ 4y^2 + 12y - 2x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - y + 4 = 0(1) \\ 2y^2 - 6y - x + 4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(x^2 - y^2) - 6(x - y) + x - y = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)[2(x + y) - 5] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$

+ Với $x = y$ thế vào (1) ta được:

$2x^2 - 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{7 + \sqrt{17}}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \quad (\text{vì } y = x < 1)$

+ Với $x + y = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2} - x$ ta được: $2x^2 - 6x - \frac{5}{2} + x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{13}}{4} \text{ (loại do } y < 1) \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{4} \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = \frac{7 - \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{4} \end{cases}$

Bài 18: Giải phương trình sau:

$$x^3 + (3 - a^2)a = 3\sqrt{3x + (x^2 - 3)a} \quad (1)$$

Giải

Đặt: $t = \sqrt{3x + (x^2 - 3)a} \Rightarrow t^3 = 3x + (x^2 - 3)a$

Phương trình (1) trở thành: $\begin{cases} x^3 + (3 - a^2)a = 3t \\ t^3 = 3x + (a^2 - 3)a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3t = (a^2 - 3)a \quad (2) \\ t^3 - 3x = (a^2 - 3)a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + tx + t^2 + 3 = 0(*) \end{cases}$

Phương trình (*) có $\Delta = t^2 - 4(t^2 + 3) = -3t^2 - 12 < 0$ nên (*) luôn vô nghiệm.

+ Với $x = t$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - 3x = (a^2 - 3)a \Leftrightarrow x^3 - 3x - a^3 + 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x^2 + ax + a^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3) có: $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 3) = 12 - 3a^2$

1. Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 12 - 3a^2 < 0 \Leftrightarrow |a| > 2$ thì (3) vô nghiệm nên (1) có nghiệm duy nhất $x = a$.

2. Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ thì (3) có nghiệm kép: $x_0 = -\frac{a}{2} = \pm 1$ nên (1) có

nghiệm: $\begin{cases} x = 2 \vee x = -1 \text{ nếu } a = 2 \\ x = -2 \vee x = 1 \text{ nếu } a = -2 \end{cases}$

3. Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2$ thì:

a. Nếu (3) có nghiệm $x = a$.

Từ (3) $\Rightarrow a^2 + a^2 + a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

+ Nếu $a = 1$ thì (3) trở thành: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

+ Nếu $a = -1$ thì (3) trở thành: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

b. Nếu $\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ thì (3) có hai nghiệm phân biệt khác a.

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$$

Tóm lại:

+ Nếu $|a| > 2$ thì (1) có nghiệm $x = a$

+ Nếu $\begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $x = 2 \vee x = -1$

+ Nếu $\begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $x = -2 \vee x = 1$

+ Nếu $\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ thì (1) có ba nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x = a \\ x = \frac{-a \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{2} \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 24: PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ

1. Các đặc trưng

a. Khi ẩn $x \in [-a, a]$ với $a > 0$ thì đặt
$$\begin{cases} x = a \sin t \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ x = a \cos t \left(0 \leq t \leq \pi \right) \end{cases}$$

b. Khi ẩn $0 \leq x \leq a$ thì đặt
$$\begin{cases} x = a \sin^2 t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ x = a \cos^2 t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

c. Khi phương trình chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = \frac{a}{\cos t}$ với $t \in [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ hoặc đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \setminus \{0\}$

d. Khi phương trình chứa $\sqrt{x^2 + a^2}$ thì đặt $x = a \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$

2. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-x^2}{3}} \quad (1)$$

Giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Đặt: $x = \cos t; 0 \leq t \leq \pi \Rightarrow \sin t \geq 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \cos^2 t}} \left[\sqrt{(1 + \cos t)^3} - \sqrt{(1 - \cos t)^3} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1 + \sin t} \sqrt{2} \left(\cos^3 \frac{t}{2} - \sin^3 \frac{t}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sin t}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \right) \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) = \frac{2 + \sin t}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sin t) (\sqrt{6} \cos t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Bài 2: Giải phương trình sau:

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \quad (1) \quad \text{với } 0 < a < 1$$

Giải

Với $0 < a < 1$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x = 1 + \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x$$

Chia hai vế của phương trình trên cho $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$ ta được:

$$1 = \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x \quad (2)$$

Vì $0 < a < 1$ nên đặt: $a = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ thì $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Do đó (2) trở thành: } 1 = (\sin \varphi)^x + (\cos \varphi)^x \quad (3)$$

$$+ \text{ Nếu } x < 2 \text{ thì: } \begin{cases} (\sin \varphi)^x > \sin^2 \varphi \\ (\cos \varphi)^x > \cos^2 \varphi \end{cases}$$

$\Rightarrow (\sin \varphi)^x + (\cos \varphi)^x > \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ nên (3) vô nghiệm.

$$+ \text{ Nếu } x > 2 \text{ thì } \begin{cases} (\sin \varphi)^x < \sin^2 \varphi \\ (\cos \varphi)^x < \cos^2 \varphi \end{cases}$$

$\Rightarrow (\sin \varphi)^x + (\cos \varphi)^x < 1 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

Do đó phương trình (3) chỉ có thể có nghiệm $x = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$.

Bài 3: Giải phương trình sau:

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)} \quad (1)$$

Giải

Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Đặt: $x = \cos t; t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$\cos^3 t + \sqrt{(1 - \cos^2 t)^3} = \cos t \sqrt{2(1 - \cos^2 t)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2} \cos t \sin t$$

$$\Leftrightarrow (\cos t + \sin t)(1 - \cos t \sin t) = \sqrt{2} \cos t \sin t \quad (3)$$

Đặt: $y = \cos t + \sin t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

Với $0 \leq t \leq \pi$ thì $y \in [-1, \sqrt{2}]$

Phương trình (2) trở thành:

$$y\left(1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right) - \sqrt{2} \frac{y^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow y(3 - y^2) - \sqrt{2}(y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + \sqrt{2}y^2 - 3y - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (y - \sqrt{2})y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ y^2 + 2\sqrt{2}y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} - 1 \text{ (loại)} \\ y = -\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

+ Với $y = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + m2\pi \Rightarrow x = \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ Với $y = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + 1$

$$\Leftrightarrow \sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} + x = 1 - \sqrt{2}$$

$$(\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{2} - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{2} \\ 1 - x^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2(1 - \sqrt{2})x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 - \sqrt{2} \\ 2x^2 - 2(1 - \sqrt{2})x + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

Bài 4: Giải phương trình sau: $\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Giải

Điều kiện: $-1 < x < 1$

Đặt: $x = \cos t; t \in (0, \pi) \Rightarrow \sin t > 0$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \cos t}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \cos t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 t}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{\sin t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{2} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right)}{1 + \sqrt{2} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) - \sin t} \cdot \sin t = 1 \quad (1)$$

Lại đặt: $y = \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

Với $0 < t < \pi$ thì $y \in (-1, 1) \Rightarrow y^2 = 1 - \sin t \Rightarrow \sin t = 1 - y^2$

Khi đó (1) trở thành: $\frac{(2 + \sqrt{2}y)(1 - y^2)}{1 + \sqrt{2}y - (1 - y^2)} = 1$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{2}y)(1 - y^2) - y^2 - \sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}y^3 + 3y^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sqrt{2}y^2 + 4y + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}y^2 + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y + \sqrt{2})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

+ Với $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + m2\pi \\ \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + 4m\pi \\ t = -\frac{7\pi}{6} + m4\pi \end{cases}$$

+ Với $t \in (0, \pi) \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 5: Giải phương trình sau: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} = x \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 - 4x^2}}} \right)$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - 4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$

Đặt $x = \frac{1}{2} \cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$2\sqrt{1 + \sqrt{1 - \cos^2 t}} = \cos t \left(1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 - \cos^2 t}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1 + \sin t} = \cos t (1 + \sqrt{1 + 2\sin t})$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) = \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \right) (1 + \sqrt{1 + 2\sin t})$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(\sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) (1 + \sqrt{1 + 2\sin t}) \quad (2)$$

$$\left(\text{vì } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} > 0 \right)$$

Đặt $y = \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \Rightarrow \sin t = 1 - y^2$

Với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \in [0, 1]$

Khi đó (2) trở thành:

$$2 = y \left[1 + \sqrt{1 + 2(1 - y^2)} \right] \Leftrightarrow 2 - y = y\sqrt{3 - 2y^2}$$

$$\Leftrightarrow (2 - y)^2 = y^2 (3 - 2y^2) \Leftrightarrow 2y^4 - 2y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(y^3 + y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 (y^2 + 2y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 1$$

+ Với $y = 1 \Rightarrow \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} = 1 \Leftrightarrow t = 0 \left(\text{vì } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.}$$

CHUYÊN ĐỀ 25: DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐỐI LẬP

1. Cách giải

Để giải phương trình $f(x) = g(x)$ thì ta chứng minh

- a. $f(x) \leq g(x)$
- b. $f(x) \geq g(x)$
- c. $f(x) \leq A \leq g(x)$
- d. $f(x) \geq A \geq g(x)$
- e. Chứng minh $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại một điểm duy nhất.
– Sau đó xét dấu “=” xảy ra.

2. Công cụ sử dụng

- a. Dùng khảo sát hàm số
- b. Dùng bất đẳng thức Côsi; Bunhiakopxky
- c. Dùng tính chất của bất đẳng thức
- d. Đưa về dạng $f(u) = f(v)$

3. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8}$

Giải

$$\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 15} - \sqrt{x^2 + 8} = 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x^2 + 15} + \sqrt{x^2 + 8}} = 3x - 2 \quad \text{ĐK: } 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{7}{\sqrt{x^2 + 15} + \sqrt{x^2 + 8}};$$

Để thấy $f(x)$ là hàm giảm trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

$g(x) = 3x - 2$ là hàm tăng trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Nên đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ chỉ có thể cắt nhau tại một điểm duy nhất.

Lại có: $f(1) = g(1) = 1$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5} + \sqrt{5x+5} = 11$

Giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

$$\text{Đặt: } f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5} + \sqrt{5x+5}; x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} + \frac{5}{2\sqrt{5x+5}} > 0 \quad \forall x > -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm tăng trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Lại có: $f(4) = 11$ nên $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x - 2} = 3x - x^2 - 2$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq 2$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} + x^2 - 2x = \sqrt{x - 2} + x - 2$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 - 2x \geq 0 \\ v = x - 2 \geq 0 \end{cases}$ ta được: $\sqrt{u} + u = \sqrt{v} + v$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t} + t$; $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 1 > 0 \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm tăng trên $[0; +\infty)$

Do đó: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 - 2x = x - 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại) do } x \geq 2 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$.

Bài 4: Giải phương trình: $2x^4 + 8 = 4\sqrt{4 + x^2} + 4\sqrt{x^4 - 4}$

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi ta được:

$$2x^4 + 8 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + 2 + 2 + 2 + 2 \geq$$

$$8\sqrt{\frac{x^4}{2} \cdot \frac{x^4}{2} \cdot \frac{x^4}{2} \cdot \frac{x^4}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 8x^2$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta có:

$$4\sqrt{4 + x^4} + 4\sqrt{4 - x^4} \leq \sqrt{32(4 + x^4 + x^4 - 4)} = \sqrt{64x^4} = 8x^2$$

Do đó dấu bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2x^4 + 8 = 8x^2 \\ 4\sqrt{4 + x^4} + 4\sqrt{x^4 - 4} = 8x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 = 0 \\ \sqrt{4 + x^4} + \sqrt{x^4 - 4} = 2x^2 \end{cases} \quad \text{hệ này vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} = x^4 - 8x^2 + 28$ (1)

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 8 + x^3 \geq 0 \\ 64 - x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$$

Ta có: $x^4 - 8x^2 + 28 = (x^2 - 4)^2 + 12 \geq 12$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta được:

$$1 \cdot \sqrt{8 + x^3} + 1 \cdot \sqrt{64 - x^3} \leq \sqrt{(1+1)(8 + x^3 + 64 - x^3)} = 12$$

Do đó:
$$\begin{cases} x^4 - 8x^2 + 28 \geq 12 \\ \sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} \leq 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" trong (1) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 + 28 = 12 \\ \sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{8 + x^3} = \sqrt{64 - x^3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 12 \\ x = \sqrt[3]{28} \end{cases} \Rightarrow \text{hệ này vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

Giải

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x + \frac{1}{x} = 4$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta có:

$$\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x + \frac{1}{x} \leq \sqrt{(1+1+1+1)\left(2 - x^2 + 2 - \frac{1}{x^2} + x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x + \frac{1}{x} \leq 4$$

Dấu bất đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 7: Giải phương trình: $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1 - x} + \sqrt{x} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})} \leq \sqrt{2\sqrt{2(x+1-x)}} = 2\sqrt{2} = \sqrt[4]{8} \\ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$$

$$\text{Do đó dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{1-x} \\ \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq \frac{1}{2}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{x}\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{(x+1)(x+2+2x-1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$\Rightarrow$ Dấu bất đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow x(2x-1) = x+2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Bài 9: Giải phương trình:

$$12 - 3x = \sqrt{3-x}\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x}\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}\sqrt{3-x}$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 3$$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3-x}\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x}\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}\sqrt{3-x} \leq \\ & \leq \sqrt{(3-x+4-x+5-x)(3-x+4-x+5-x)} \leq 12-3x \end{aligned}$$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x}\sqrt{5-x} = 4-x \\ \sqrt{3-x}\sqrt{4-x} = 5-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(5-x) = (4-x)^2 \\ (4-x)(3-x) = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15-8x+x^2 = 16-8x+x^2 \\ (4-x)(3-x) = (5-x)^2 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = \frac{x^2}{4} + 2$

Giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2(1+x+1-x)} = 2$$

Mặt khác: $\frac{x^2}{4} + 2 \geq 2$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 0$.

Bài 11: Giải phương trình: $\sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} = \sqrt{\frac{99}{2}}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 17-x^8 \geq 0 \\ 2x^8-1 \geq 0 \end{cases} (*)$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{34-2x^8} + \sqrt{2x^8-1} \leq \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)(34-2x^8+2x^8-1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} \leq \sqrt{\frac{99}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{34-2x^8} = \sqrt{2x^8-1}$$

$$\Leftrightarrow 2(34-2x^8) = 2x^8-1 \Leftrightarrow x^8 = \frac{99}{2} \text{ thỏa } (*)$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[8]{\frac{69}{6}} = \pm \sqrt[8]{\frac{23}{2}}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm \sqrt[8]{\frac{23}{2}}$

Bài 12: Giải phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{12-x} = 2\sqrt{3(x^2+1)}$

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 12$

Theo bất đẳng thức Bunhiakovsky ta được:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{12-x} \leq \sqrt{(x^2+1)(x+12-x)} = \sqrt{12(x^2+1)} = 2\sqrt{3(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \text{dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{12-x}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{12-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2(12-x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x(12-x) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 12x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{6 \pm \sqrt{35}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0 \vee x = \frac{6 \pm \sqrt{35}}{2}$

Bài 13: Giải phương trình: $(x + 8\sqrt{x} + 4)(x - \sqrt{x} + 4) = 36x$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x + 8\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} = 36$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8\right) \left(x + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) = 36$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 4 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8 \geq 12$

Lại có: $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1 \geq 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8\right) \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) \geq 36$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 4$.

Bài 14: Giải phương trình:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z + 11) \quad (1)$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ z \geq 2 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + y - 4\sqrt{y-1} + z - 6\sqrt{z-2} + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 2)^2 + (\sqrt{z-2} - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-1} - 2 = 0 \\ \sqrt{z-2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 11 \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 11 \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 26: PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Định lý

Phương trình $f(x) = g(m)$ (m là tham số) có nghiệm $x \in D$

$\Leftrightarrow$ hàm $g(m)$ thuộc miền giá trị của hàm số $f(x)$.

2. Cách giải

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình xác định

Bước 2: Đặt ẩn phụ t (nếu phương trình phức tạp)

Bước 3: Tìm miền xác định của t

Bước 4: Đưa phương trình về dạng $f(t) = g(m)$

Bước 5: Khảo sát và lập bảng biến thiên hàm $f(t)$

Bước 6: Dựa vào định lý trên để tìm m .

3. Bài tập

Bài 1: Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} - \sqrt{4x-x^2} = m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 4$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên

x	0	2	4
t'	+	0	-
t	2	$2\sqrt{2}$	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow 2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

Khi đó (1) trở thành: $t - \frac{1}{2}(t^2 - 4) = m$ (2)

Để (1) có nghiệm thì (2) có nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{2}(t^2 - 4)$

$$f'(t) = 1 - t < 0 \quad \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$$

Bảng biến thiên

t	2	$2\sqrt{2}$
f(t)	-	
f(t)	2	$2\sqrt{2} - 2$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2$$

Bài 2: Cho phương trình:

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} - (2-x)\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = m \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} - \sqrt{(2-x)(2+x)} = m \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} \Rightarrow \sqrt{(2+x)(2-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 4)$$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2+x} \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	-2	0	2
t'	+	0	-
t	2	$2\sqrt{2}$	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow 2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

Khi đó (2) trở thành: $t - \frac{1}{2}(t^2 - 4) = m$

- Ứng với một giá trị $t \in (2; 2\sqrt{2})$ thì phương trình $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$ có hai nghiệm x phân biệt.

Xét hàm số: $f(t) = t - \frac{1}{2}(t^2 - 4)$

$$f'(t) = 1 - t < 0, \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$$

Bảng biến thiên

t	2	$2\sqrt{2}$
f(t)	-	
f(t)	2	$2\sqrt{2} - 2$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2$$

Bài 3: Cho phương trình:

$$2(x + \sqrt{2-x^2}) - x\sqrt{2-x^2} - 3m + 2 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

Đặt $t = x + \sqrt{2-x^2} \Rightarrow x\sqrt{2-x^2} = \frac{1}{2}(t^2 - 2)$

$$t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{\sqrt{2-x^2} - x}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
t'	+	0	-
t	$-\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq 2$

(1) trở thành: $2t - \frac{1}{2}(t^2 - 2) + 2 = 3m \Leftrightarrow 2t - \frac{1}{2}t^2 + 3 = 3m \quad (2)$

- Biện luận số nghiệm tương quan giữa t và x (dựa vào bảng biến thiên)

+ Ứng với một giá trị $t \in [\sqrt{2}; 2)$ thì phương trình $t = x + \sqrt{2 - x^2}$ có đúng hai nghiệm x phân biệt.

+ Ứng với một giá trị $t \in [-\sqrt{2}; 2) \vee t = 2$ thì phương trình $t = x + \sqrt{2 - x^2}$ có đúng một nghiệm x .

Xét hàm số: $f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2 + 3$; $f'(t) = 2 - t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
f(t)		+	
f(t)	$2 - 2\sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2}$	5

Dựa vào bảng biến thiên và cách biện luận số nghiệm ở trên, ta suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm $t \in [\sqrt{2}; 2)$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{2} \leq 3m < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(2 + 2\sqrt{2}) \leq m < \frac{5}{3}$

Bài 4: Cho phương trình: $(x + 1)(x - 3) + \sqrt{8 + 2x - x^2} = 2m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

Đặt $t = \sqrt{8 + 2x - x^2} = \sqrt{9 - (1 - x)^2} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq t \leq 3$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 + \sqrt{8 + 2x - x^2} = 2m$

$\Leftrightarrow 8 - t^2 - 3 + t = 2m \Leftrightarrow -t^2 + t + 5 = 2m$ (2)

Để (1) có nghiệm $x \in [-2; 4]$ thì (2) có nghiệm $t \in [0; 3]$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 5$

$f'(t) = -2t + 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{2}$	3
t'	+	0	-
t	5	$\frac{21}{4}$	-1

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2m \leq \frac{21}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{11}{8}$$

Bài 5: Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} = \sqrt{5m+4x-x^2}$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4x-x^2} = 5m + 4x - x^2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{4x-x^2} - (4x-x^2) + 5 = 5m \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(2-x)^2} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$$

$$(2) \text{ trở thành: } 2t - t^2 + 5 = 5m \quad (3)$$

Để (1) có nghiệm $x \in [0; 4]$ thì (3) có nghiệm $t \in [0; 2]$

Xét hàm số: $f(t) = 2t - t^2 + 5$; $f'(t) = 2 - 2t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên

t	0	1	2
f'(t)	+	0	-
f(t)	5	6	5

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 5 \leq 5m \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{6}{5}$$

Bài 6: Cho phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 2$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(1-x)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

$$(1) \text{ trở thành: } \sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} = m \quad (2)$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}$;

$$f'(t) = \frac{\sqrt{1-t} - \sqrt{1+t}}{2\sqrt{1-t^2}}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Bảng biến thiên

t	0	1
f(t)	-	
f(t)	2	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m \leq 2$$

Bài 7: Cho phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{2-x} = m(3x+5)$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

- Nếu $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ thì (1) vô nghiệm
- Khi $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} \neq 0$; nhân vế vế của (1) cho $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$ ta được:

$$(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2-x})(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}) = m(3x-5)(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}) \Leftrightarrow$$

$$3x-5 = m(3x-5)(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x})$$

$$\Leftrightarrow 1 = m(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}) \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} \quad (2) \quad (m \neq 0)$$

Để (1) có nghiệm $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ thì (2) có nghiệm $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ và $x \neq \frac{5}{3}$.

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$$

Bảng biến thiên

t	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2
f(x)	+		
f(x)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	1

Theo yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{m} \leq 1 \\ \frac{1}{m} \neq \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq \sqrt{2} \\ m \neq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài 8: Cho phương trình: $2\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x \geq 1$

Ta thấy: $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1$

Đặt $t = 2\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \geq 1$ thì $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{t^2}$

(1) trở thành: $\frac{2}{t} + t^2 = m$ (2)

Để (1) có nghiệm $x \geq 1$ thì (2) có nghiệm $t \geq 1$

Xét hàm $f(t) = \frac{2}{t} + t^2$

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + 2t = 2 \cdot \frac{t^3 - 1}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	1	$+\infty$
f(t)		+
f(t)	3	$\rightarrow +\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn
 $\Leftrightarrow m \geq 3$.

Bài 9: Cho phương trình:

$$m(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 1) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 3 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = t^2 - 2$

$$t' = x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}; \quad t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
t'		+	-
t	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$

(1) trở thành: $m(t+1) = t^2 + t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 1}{t+1}$

Để (1) có nghiệm $x \in [-1; 1]$ thì (2) có nghiệm $t \in [\sqrt{2}; 2]$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$; $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t + 1)^2} > 0 \forall t \in [\sqrt{2}; 2]$

Bảng biến thiên

t	$\sqrt{2}$	2
f(t)	+	
f(t)	$2\sqrt{2} - 1$	$\frac{7}{3}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq m \leq \frac{7}{3}$$

Bài 10: Cho phương trình: $16\sqrt{x-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = mx$ (1)

1. Giải phương trình khi $m = 10$.
2. Định m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x > 1$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 16\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x-1}} = m$ (2)

Đặt $t = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$; $t' = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
t'	+	0	-
t	0	$\frac{1}{2}$	0

Từ biến thiên suy ra: $0 < t \leq \frac{1}{2}$

Phương trình (2) trở thành: $16t + \frac{1}{t} = m$ (3)

1. Với $m = 10$

(3) $\Leftrightarrow 16t + \frac{1}{t} = 10 \Leftrightarrow 16t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8} \vee t = \frac{1}{2}$

+ Với $t = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8\sqrt{x-1} = x$

$$\Leftrightarrow 64(x-1) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 64x + 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 - \sqrt{960} \\ x = 32 + \sqrt{960} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } \begin{cases} x = 32 \pm \sqrt{960} \\ x = 2 \end{cases}$$

2. Định m để phương trình có nghiệm:

$$\text{Để (1) có nghiệm } x > 1 \text{ thì (3) có nghiệm } t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = 16t + \frac{1}{t} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = \frac{16t^2 - 1}{t^2}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow 16t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
f'(t)		-	0
f(t)	$+\infty$	8	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị m thỏa đề bài là: $m \geq 8$.

$$\text{Bài 11: Cho phương trình: } m\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x} = m \quad (1)$$

1. Giải phương trình khi $m = 2$.

2. Định m để (1) có hai nghiệm và mọi nghiệm của nó để thỏa mãn bất phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2 \leq 0$.

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x} \geq 0 \\ b = \sqrt{x+1} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x \\ b^2 = x+1 \end{cases} \Rightarrow b^2 - a^2 = 1 \text{ và } ab = \sqrt{x^2+x}$$

Khi đó (1) trở thành:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ ma + b - ab = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ m(a-1) - (a-1)b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ (a-1)(m-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ a = 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = m \end{cases} \quad (II)$$

1. Khi $m = 2$

$$\text{Giải hệ (I): } \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Giải hệ (II): } \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

2. Phương trình (1) luôn có nghiệm $x = 1$.

Để có hai nghiệm thì hệ (II) có thêm một nghiệm nữa.

$$\text{Hệ (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = m^2 - 1 \geq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1 (*)$$

+ Với $x = 1$ thỏa bất phương trình (2)

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$$

$$\text{Kết hợp (*)} \Rightarrow 1 \leq m \leq 2$$

(a)

+ Với $x = m^2 - 1$ thỏa (2)

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2 - m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2} . \text{ Kết hợp với (*)} \Rightarrow 1 \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad (b)$$

$$\text{Từ (a); (b)} \Rightarrow \text{các giá trị của } m \text{ cần tìm là: } 1 \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

CHUYÊN ĐỀ 27: PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

1. Cách giải

- Đưa bài toán về sự tương giao của đường thẳng và đường tròn; elip; hypebol; parabol.
- Vẽ đồ thị; dựa vào đồ thị để kết luận.

2. Bài tập

Bài 1. Định m để phương trình có nghiệm:

$$\sqrt{2x - x^2} = m - x \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } y = \sqrt{2x - x^2} ; y \geq 0$$

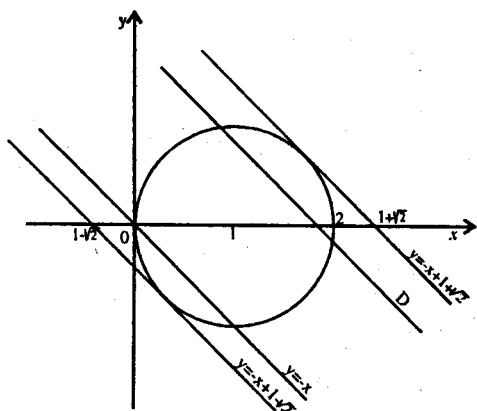
$$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 & (C) \\ y = m-x & (D) \end{cases} (*)$$

(C) là đường tròn tâm $I(1,0)$, bán kính $R = 1$

(D) là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -x$

Đồ thị:



Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}$

Bài 2: Cho phương trình: $mx - \sqrt{x-3} = m+1$ (1)
định m để phương trình có nghiệm.

Giải

Đặt $y = \sqrt{x-3}$, $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x-3$

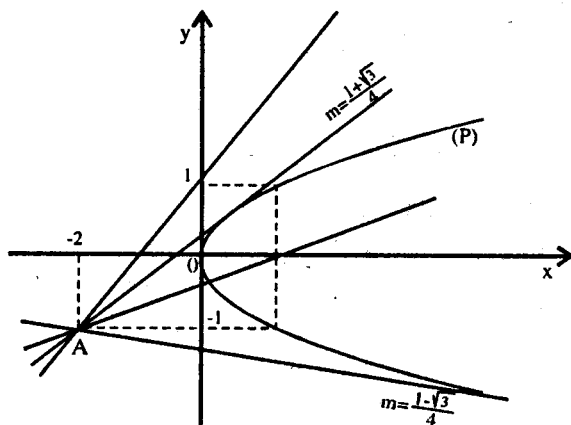
Phương trình (1) tương đương với hệ:
$$\begin{cases} y^2 = x-3 \\ mx - y = m+1 \end{cases}$$

Lại đặt $X = x-3$, ta được $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = X & (P) \\ mX - y + 2m - 1 = 0 & (D) \end{cases}$

Họ đường thẳng D qua điểm cố định $A(-2, -1)$

Hai tiếp tuyến kẻ từ A tới (P) có hệ số góc lần lượt là:

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$$



Dựa vào đồ thị suy ra:

$$\text{Hệ trên có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Bài 3: Cho phương trình: $\sqrt{\frac{x+1}{2}} - \sqrt{3-x} = m$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm.

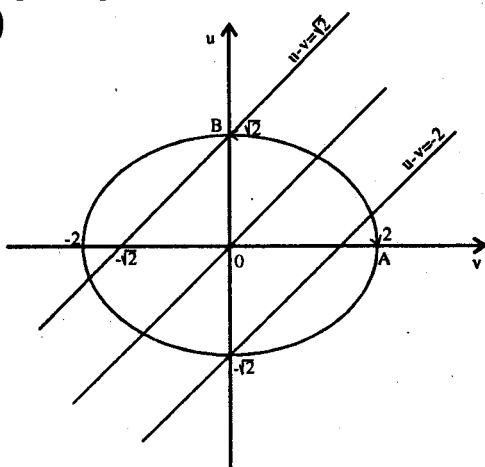
Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt{\frac{x+1}{2}}, u \geq 0 \\ v = \sqrt{3-x}, v \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2 = x+1 \\ v^2 = 3-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2u^2 + v^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} = 1$$

Phương trình (1) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} u - v = m \quad (D) \\ \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} = 1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$$



Đường thẳng D qua điểm $(0, \sqrt{2}) \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$

và D qua điểm $(2, 0) \Leftrightarrow m = -2$

Đường thẳng $u - v = \sqrt{2}$ cắt Ov tại điểm $(-\sqrt{2}, 0)$

Dựa vào đồ thị, suy ra hệ trên có nghiệm

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \sqrt{2}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq m \leq \sqrt{2}$

Bài 4: Cho phương trình: $mx - 1 = \sqrt{4x - x^2 - 3}$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Đặt: $y - 1 = \sqrt{4x - x^2 - 3}, y \geq 1$

$$\Rightarrow (y - 1)^2 = 4x - x^2 - 3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 & (C) \\ y = mx & (D) \end{cases}$$

Đường thẳng D tiếp xúc với (C)

$$\Leftrightarrow d(I, D) = R \text{ với } I(2, 1); R = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m - 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = 1 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Đường thẳng D qua $A(1, 1) \Leftrightarrow m = 1$

và D qua $B(3, 1) \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ đường thẳng D tiếp xúc với (C)

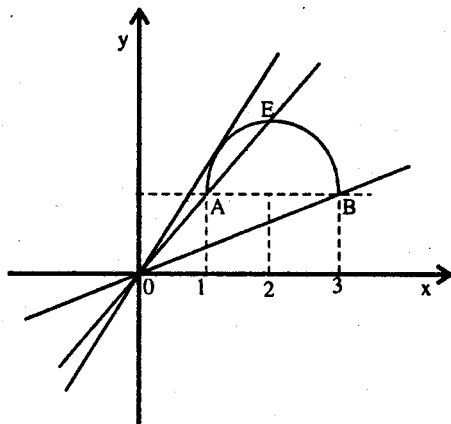
hoặc D cắt cung EB.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$m = \frac{4}{3} \text{ hoặc } \frac{1}{3} \leq m \leq 1$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là:

$$m = \frac{4}{3} \text{ hoặc } \frac{1}{3} \leq m \leq 1$$



Bài 5: Cho phương trình: $\sqrt{2x - m} + \sqrt{x + 1} = 3$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm.

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt{2x - m} \\ v = \sqrt{x + 1} \end{cases}$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 2x - m \\ 2v^2 = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow u^2 - 2v^2 = -m - 2$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} u, v \geq 0 \\ u + v = 3 \\ u^2 - 2v^2 = -m - 2 \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 ; u, v > 0 \\ \frac{v^2}{\frac{m+2}{2}} - \frac{u^2}{m+2} = 1 \quad (H) \quad (m \neq -2) \end{cases}$$

(H) là một hyperbol có đỉnh trục lớn:

$$A\left(\sqrt{\frac{m+2}{2}}, 0\right) \quad (m > -2)$$

Hệ (2) có nghiệm nếu (H) cắt đoạn BD

$$\text{Điều này xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m+2}{2}} \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 16$$

Khi $m = -2$ thì:

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} * v \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3(\sqrt{2} - 1) > 0 \\ u = 6 - 3\sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+2} = 6 - 3\sqrt{2} \\ \sqrt{x+1} = 3(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

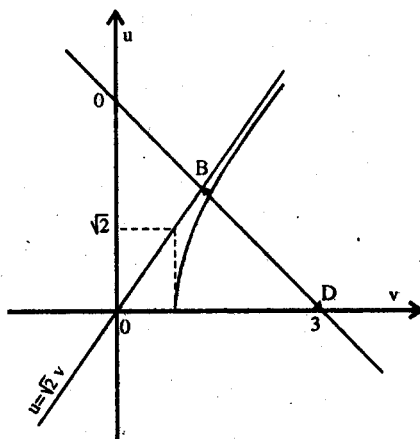
$$\Leftrightarrow x = 26 - 18\sqrt{2} > 0$$

Tóm lại các giá trị của m cần tìm là:

$$-2 \leq m \leq 16$$

+ Nhận xét:

- Cách 1: sử dụng sự tương giao giữa đường thẳng và parabol.
- Cách 2: sử dụng sự tương giao giữa đường tròn và đường thẳng.



Bài 6: Cho phương trình: $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = 0$ (1)

Định m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

+ Nếu $a = 0$ thì $x = 3 \Rightarrow$ (1) chỉ có đúng 1 nghiệm
nên $a = 0$ không thỏa đề.

+ Nếu $a \neq 0$:

Nhân hai vế của (1) cho a ta được:

$$a^4x^4 + 6a^3x^2 - ax + 9a^2 + 3a = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = ax$ thì (2) trở thành:

$$t^4 + 6at^2 - t + 9a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow 9a^2 + 3(2t^2 + 1)a + t^4 - t = 0 \quad (3)$$

Xem (3) là phương trình bậc hai theo ẩn số là a

(3) có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \Delta = 9(2t^2 + 1)^2 - 36(t^4 - t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 36t^2 + 36t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow 9(2t+1)^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Khi đó hai nghiệm của (3) là:

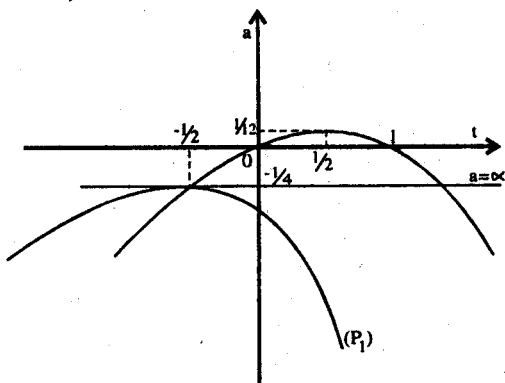
$$a = \frac{-t^2 - t - 1}{3} \quad \vee \quad a = \frac{t - t^2}{3}$$

Xét hệ trục tọa độ (tOa):

vẽ hai parabol:

$$(P_1): a = \frac{-1}{3}(t^2 + t + 1) ;$$

$$(P_2): a = \frac{1}{3}(t - t^2)$$



lên cùng một hệ trục tọa độ.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $a = \alpha$ cắt hai parabol (P_1) và (P_2) tại hai điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị, suy ra $\Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq a < \frac{1}{12}$

Bài 7: Cho phương trình: $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ (1)

Định a để phương trình có đúng hai nghiệm khác nhau.

Giải

Phương trình (1) tương đương với:

$$\begin{cases} x \geq a \\ x^2 + 2x + 2 + a = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x < a \\ x^2 + 6x + 2 - 3a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq a \\ a = -x^2 - 2x - 2 \end{cases} \quad (I) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x < a \\ a = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 2) \end{cases} \quad (II)$$

Xét hệ trục tọa độ (xOa):

Vẽ các parabol:

$$(P_1): a = -x^2 - 2x - 2 ; \quad (P_2): a = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 2) \text{ và đường thẳng:}$$

$$x = a.$$

Phương trình (1) có đúng hai nghiệm khi:

- Hệ (I) có đúng một nghiệm và hệ (II) có đúng một nghiệm.

Điều đó có nghĩa là: Hệ (I) tồn tại một điểm $M(x, a)$ với $x > a$

và hệ (II) tồn tại một điểm $N(x,a)$ với $x < a$

Dựa vào đồ thị suy ra, các giá trị của a cần tìm là: $-2 < a < -1$

Bài 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + (2-3a)x + 2a^2 - 2a < 0 \\ ax = 1 \end{cases} \quad (1). \text{ Định } a \text{ để hệ có nghiệm.}$$

Giải

$$\text{Hệ (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x-2a+2) < 0 \\ ax = 1 \end{cases}$$

Xét hệ trục tọa độ (xoa). Vẽ các đường thẳng:

$$d_1: x-a=0; \quad d_2: x-2a+2=0$$

và hyperbol (H): $ax = 1$ lên cùng một hệ trục tọa độ

Các điểm (a,x) thỏa mãn hệ (1) nằm trên cung MN và cung PQ

- Đường thẳng d_1 cắt (H) tại Q có: $a_1 = -1$ và tại M có: $a_2 = 1$

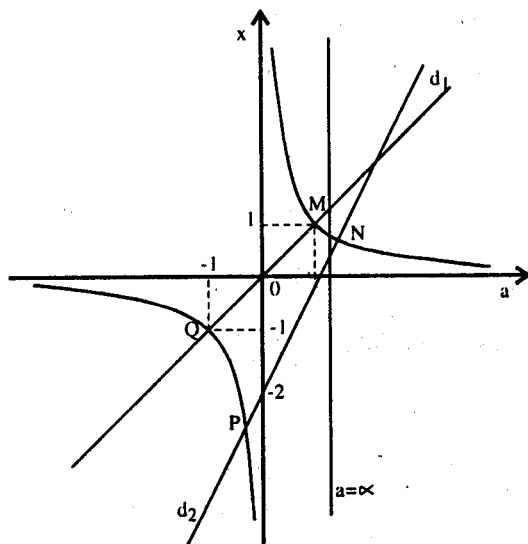
- Đường thẳng d_2 cắt (H) tại N có: $a_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

và tại P có: $a_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $a = \alpha$ cắt cung MN và cung PQ

Dựa vào đồ thị, suy ra điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$-1 < a < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } -1 < a < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$



CHUYÊN ĐỀ 28: PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI

1. Cách giải

- **Bước 1:** Đặt điều kiện xác định của phương trình
- **Bước 2:** Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai.
- **Bước 3:** Biện luận tương quan số nghiệm giữa t và x trong phương trình đặc ẩn phụ. Dùng công thức so sánh nghiệm.

2. Bài tập

Bài 1: Cho phương trình: $m^2 + 2(m+1)\sqrt{x} = x + 5 + 4m$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$

Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$

(1) trở thành: $m^2 + 2(m+1)t = t^2 + 5 + 4m$

$$\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2(m+1)t - m^2 + 4m + 5 = 0 \quad (2)$$

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (5 + 4m - m^2) > 0 \\ 5 + 4m - m^2 \geq 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2m - 4 > 0 \\ 5 + 4m - m^2 \geq 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \\ -1 \leq m \leq 5 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $2 < m \leq 5$.

Bài 2: Cho phương trình:

$$2\sqrt{2x - x^2} - 2m(\sqrt{x} + \sqrt{2-x}) + 2m^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 2$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \Rightarrow 2\sqrt{2x - x^2} = t^2 - 2$

$$t' = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{2x-x^2}}; t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	2
f'(t)	+	0	-
f(t)	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$

Phương trình (1) trở thành:

$$f(t) = t^2 - 2mt + 2m^2 - 6 = 0 \quad (2)$$

- Ứng với một giá trị $t \in [\sqrt{2}, 2)$ thì phương trình $t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ có hai nghiệm x phân biệt.

Do đó, để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa

$$\text{mãn: } \sqrt{2} < t_1 < t_2 < 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(\sqrt{2}) > 0 \\ f(2) > 0 \\ \sqrt{2} < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - m^2 > 0 \\ 2m^2 - 2\sqrt{2}m - 4 > 0 \\ 2m^2 - 4m - 2 > 0 \\ \sqrt{2} < m < 2 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm}$$

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn đề bài.

Bài 3: Cho phương trình:

$$2x\sqrt{4-x^2} - 2(m-2)(x + \sqrt{4-x^2}) + m^2 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{4-x^2} \Rightarrow 2x\sqrt{4-x^2} = t^2 - 4$$

$$t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	-2	$\sqrt{2}$	2
t'	+	0	-
t	-2	$2\sqrt{2}$	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow -2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

$$(1) \text{ trở thành: } f(t) = t^2 - 2(m-2)t + m^2 - 4 = 0 \quad (2)$$

• Biện luận số nghiệm giữa t và x

+ Ứng với một giá trị $t = 2\sqrt{2}$ hoặc $t \in [-2; 2)$ thì phương trình $t = x + \sqrt{4 - x^2}$ có đúng một nghiệm x .

+ Ứng một giá trị $t \in [2; 2\sqrt{2})$ thì phương trình $t = x + \sqrt{4 - x^2}$ có đúng hai nghiệm phân biệt x .

Xét các trường hợp sau:

TH1: (2) có hai nghiệm $t_1; t_2 \in (-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(2) > 0 \\ -2 < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} - 2 < m < 2$$

TH2: (2) có đúng một nghiệm $t \in (2; 2\sqrt{2})$

THa: (2) có nghiệm kép $\in (2; 2\sqrt{2})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t_0 = m - 2 \in (2; 2\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m - 2 \in (2; 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.

THb: (2) có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < t_1 < 2\sqrt{2} < t_2 \\ t_1 < -2 < 2 < t_2 < 2\sqrt{2} \\ \begin{cases} f(2) > 0 \\ f(2\sqrt{2}) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-2) < 0 \\ f(2\sqrt{2}) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

TH3: nếu (2) có một nghiệm $t_1 = -2$

$$\Rightarrow m^2 + 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -2 - 2\sqrt{3} \vee m = 2\sqrt{3} - 2$$

• Với $m = -2 - 2\sqrt{3}$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 + 2(4 + 2\sqrt{3})t + 12 + 8\sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = -6 - 4\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

• Với $m = 2\sqrt{3} - 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 - 2(2\sqrt{3} - 4)t + 12 - 8\sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 4\sqrt{3} - 6 \in (-2; 2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ giá trị $m = 2\sqrt{3} - 2$ thỏa mãn đề bài.

TH4: Nếu (2) có một nghiệm $t_1 = 2$.

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 8 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

TH5: Nếu (2) có một nghiệm $t = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow m^2 - 4\sqrt{2}m + 4 + 8\sqrt{2} = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $2\sqrt{3} - 2 \leq m < 2$

CHUYÊN ĐỀ 29: PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

1. Các bất đẳng thức vectơ .

a. $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Nếu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ cùng chiều với $\vec{b}$

b. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Nếu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \text{ hay } \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \end{cases}$

2. Cách giải

Bước 1: Từ phương trình: biến đổi để các biểu thức có dạng $\sqrt{a^2 + b^2}$

Bước 2: Chọn các vectơ

Bước 3: Sử dụng các bất đẳng thức trên

– Sau đó xét dấu “=” xảy ra.

3. Bài tập

Bài 1 . Giải các phương trình sau:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2$$

Giải

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 2$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}\left(x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\vec{b}\left(-x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1, \sqrt{3}) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 2$$

Ta có:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq 2$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{2}}{-x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 0$

Bài 2: Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{9x^2 - 12x + 13}$

Giải

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{9x^2 - 12x + 13}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = \sqrt{(3x-2)^2 + 9}$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(2x-1, 1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(2x-1)^2 + 1}$$

$$\vec{b}(x-1, 2) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3x-2, 3) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(3x-2)^2 + 9}$$

Ta có bất đẳng thức:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 4} \geq \sqrt{(3x-2)^2 + 9}$$

$\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow 4x-2 = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{1}{3}$

Bài 3: Giải phương trình: $\left| \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right| = \sqrt{5}$

Giải

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x-1)^2 + 4} - \sqrt{(x-3)^2 + 1} \right| = \sqrt{5}$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(x-1, 2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$$\vec{b}(x-3, 1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{(x-3)^2 + 1}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2, 1) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow \left| \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right| \leq \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow x-1 = 2(x-3) \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 5$

Bài 4: Giải phương trình: $\left| \sqrt{x^3 + x} + (1-x)\sqrt{1-x} \right| = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$

Giải

$$\left| \sqrt{x^3 + x} + (1-x)\sqrt{1-x} \right| = \sqrt{2x^2 - 2x + 2} \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^3 + x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + 1) \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{x^2+1} + (1-x)\sqrt{1-x} = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$$

Xét các vectơ:

$$\vec{a}(\sqrt{x}, \sqrt{1-x}) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x+1-x} = 1$$

$$\vec{b}(\sqrt{x^2+1}, 1-x) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{x^2+1+(1-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x}\sqrt{x^2+1} + (1-x)\sqrt{1-x}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow \sqrt{x} \sqrt{x^2 + 1} + (1-x) \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$$

$\Rightarrow$ dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

+ Hoặc có một trong hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$:

$$\text{Để thấy chỉ có thể } \vec{a} \text{ là vectơ } \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{1-x} = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

+ Hoặc hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = 0$$

Phương trình này vô nghiệm.

Do vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3}$

Giải

$$\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3}$$

Xét các vectơ:

$$\vec{a}(\sin x, \cos x) \Rightarrow |\vec{a}| = 1$$

$$\vec{b}(\sqrt{1 + \cos^2 x}, \sqrt{1 + \sin^2 x}) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x}}{\cos x} \Rightarrow \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow (1 + \cos^2 x) \cos^2 x = \sin^2 x (1 + \sin^2 x)$$

Với: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ nên:

$$(1 + \cos^2 x) \cos^2 x = 1 - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^4 x = 2 - 3\cos^2 x + \cos^4 x \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m \frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Thử trực tiếp họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + m \frac{\pi}{2}$ vào phương trình

ta nhận nghiệm cuối cùng là: $x = \frac{\pi}{4} + m \frac{\pi}{2}$

với: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \neq \{-2, -1, 1, 2\} \\ m \text{ chẵn: } m = 4n \end{cases}$

$\Rightarrow$ nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

Tóm lại nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} = 10$

Giải

$$\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 4} + \sqrt{(2x+3)^2 + 1} + \sqrt{(5-3x)^2 + 25} = 10$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(x-2, 2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$$

$$\vec{b}(2x+3, 1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{4x^2 + 12x + 10}$$

$$\vec{c}(5-3x, 5) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{9x^2 - 30x + 50}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (6, 8) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 10$$

Theo bất đẳng thức: $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} \geq 10$$

Suy ra: Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng chiều

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{2x+3}{1} = \frac{5-3x}{5} \quad (\text{hệ này vô nghiệm})$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7: Giải phương trình: $\sin x \sqrt{1 - \cos x} + \cos x \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \quad (1)$

Giải

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(\sin x, \cos x) \Rightarrow |\vec{a}| = 1$$

$$\vec{b}(\sqrt{1 - \cos x}, \sqrt{1 + \cos x}) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \sqrt{1 - \cos x} + \cos x \sqrt{1 + \cos x}$$

Theo bất đẳng thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow \sin x \sqrt{1 - \cos x} + \cos x \sqrt{1 + \cos x} \leq \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng chiều:

$$\Leftrightarrow \vec{a} = m\vec{b} \text{ với } m > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \sqrt{1 + \cos x} - \cos x \sqrt{1 - \cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \sqrt{1 + \cos x} = \cos x \sqrt{1 - \cos x} \quad (1)$$

Vì chu kỳ của hàm sin, cos là 2π nên ta xét trên một chu kỳ:

+ Nếu $\frac{\pi}{2} \leq x < 2\pi$ thì $\sin x \cdot \cos x \leq 0$ nên suy ra phương trình (2) vô nghiệm.

+ Nếu $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x \geq 0$ và $\cos x \geq 0$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 x (1 + \cos x) = \cos^2 x (1 - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 + \cos x) = \cos^2 x (1 - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 8 . Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$$

Giải

Phương trình (1) tương đương với:

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \frac{3}{4}} = m$$

Trong một hệ trục tọa độ phẳng nào đó, xét các điểm sau:

$$A(-x, 0) ; B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ta có:

$$\overline{AB}\left(x + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; |\overline{AB}| = AB = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\overline{AC}\left(x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; |\overline{AC}| = AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\overline{BC}(-1, 0) ; |\overline{BC}| = BC = 1$$

Với mọi điểm $A(-x, 0)$ thì ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên

$$|AB - AC| < BC$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right| < 1 \Rightarrow |m| < 1$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là $|m| < 1$

CHƯƠNG 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

CHUYÊN ĐỀ 30. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- 1) Nếu $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$ thì hệ phương trình đúng với $\forall x, y$.
- 2) Nếu $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ và $c_1 \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.
- 3) Nếu a_1, a_2, b_1, b_2 không đồng thời bằng không:

+ Tính: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

a) Nếu $D = 0$:

+ $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $D_x = D_y = 0$ thì hệ có thể vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm (nên thay giá trị cụ thể của tham số vào hệ phương trình đã cho rồi kết luận)

b) Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất là:
$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$$

Bài 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6ax + (2 - a)y = 3 \\ (a - 1)x - ay = 2 \end{cases}$$

- 1) Giải và biện luận hệ phương trình.
- 2) Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ trên. Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y độc lập với a .

Giải

1) Giải và biện luận hệ:
$$\begin{cases} 6ax + (2-a)y = 3 \\ (a-1)x - ay = 2 \end{cases}$$

Do các hệ số trong hệ phương trình đã cho không đồng thời bằng 0 nên ta tính:

$$D = \begin{vmatrix} 6a & 2-a \\ a-1 & -a \end{vmatrix} = -6a^2 - (2-a)(a-1) = -5a^2 - 3a + 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2-a \\ 2 & -a \end{vmatrix} = -3a - 2(2-a) = -(a+4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 12a - 3(a-1) = 9a + 3$$

• Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow -5a^2 - 3a + 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \frac{2}{5} \end{cases} \text{ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất}$$

là:
$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{a+4}{5a^2+3a-2} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{9a+3}{-5a^2-3a+2} \end{cases}$$

• Nếu $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{2}{5} \end{cases}$. Khi đó $D_x \neq 0$ và $D_y \neq 0$ nên hệ đã cho vô nghiệm.

2) Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 6ax + (2-a)y = 3 \\ (a-1)x - ay = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6x-y)a = 3-2y & (1) \\ (x-y)a = 2+x & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với $(x-y)$ và nhân (2) với $(-6x+y)$ rồi cộng vế theo vế ta được: $(3-2y)(x-y) + (2+x)(-6x+y) = 0$

Đây là hệ thức cần tìm.

Bài 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + 4y = m^2 + 4 \\ x + (m+3)y = 2m+3 \end{cases}$$

1) Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm (x, y) thỏa $x \geq y$

2) Với các giá trị của m đã tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $A = x + y$.

Giải

1) Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m+3 \end{vmatrix} = m(m+3) - 4 = (m-1)(m+4)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m^2+4 & 4 \\ 2m+3 & m+3 \end{vmatrix} = (m^2+4)(m+3) - 4(2m+3) \\ = m(m-1)(m+4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m^2+4 \\ 1 & 2m+3 \end{vmatrix} = m(2m+3) - (m^2+4) \\ = (m-1)(m+4)$$

- Với $m \neq 1$ và $m \neq -4$ thì $D \neq 0$ nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = m \\ y = \frac{D_y}{D} = 1 \end{cases}$$

- Hệ có nghiệm (x, y) thỏa $x \geq y \Leftrightarrow m \geq 1$

Đối chiếu với điều kiện $D \neq 0$ ta được giá trị của m cần tìm là: $m > 1$.

2) Khi $m > 1$

$$\text{Tổng } A = x + y = m + 1$$

Ta thấy hàm $A = m + 1$ là hàm tăng $\forall m > 1$ nên nó không đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1, +\infty)$

Bài 3: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c \end{cases}$$

- Với $c = 1$, giải và biện luận hệ theo a và b .
- Tìm b để với mọi a ta luôn tìm được c để hệ có nghiệm.
- Tìm b để tồn tại c sao cho hệ có nghiệm với $\forall a$.

Giải

1) Khi $c = 1$, hệ đã cho trở thành:
$$\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

* Tính các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \quad D_x = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = ab - 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - b$$

* Nếu $a^2 \neq 1 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{ab-2}{a^2-1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{2a-b}{a^2-1} \end{cases}$$

* Nếu $a = 1$ thì $D = 0$; $D_x = b - 2$; $D_y = 2 - b$

+ Nếu $b = 2$ thì $D_x = D_y = 0$ khi đó hệ có nghiệm với $\forall x, y$.

+ Nếu $b \neq 2$ thì hệ vô nghiệm.

* Nếu $a = -1$ thì $D = 0$; $D_x = -b - 2$; $D_y = -b - 2$

+ Nếu $b \neq -2$ thì $D_x \neq 0$; $D_y \neq 0 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

+ Nếu $b = -2$ thì $D_x = D_y = 0 \Rightarrow$ hệ có nghiệm $\forall x, y$.

2) Xét $D = a^2 - 1$

+ Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất với $\forall c$ nên không cần điều kiện cho b .

+ Nếu $a = 1$ thì hệ trở thành:
$$\begin{cases} x + y = b \\ x + y = c^2 + c \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $\Leftrightarrow c^2 + c = b \Leftrightarrow c^2 + c - b = 0$

Để có c tồn tại thì $\Delta = 1 + 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\frac{1}{4}$

+ Nếu $a = -1$ thì hệ trở thành:
$$\begin{cases} -x + y = b \\ x - y = c^2 + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -b \\ x - y = c^2 + c \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $\Leftrightarrow c^2 + c + b = 0$

Để có c tồn tại thì $\Delta = 1 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}$

* Tóm lại giá trị b cần tìm để yêu cầu bài toán là:

$$-\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}$$

3) Tồn tại c sao cho hệ có nghiệm với $\forall a$

Dĩ nhiên khi $a \neq \pm 1$ thì hệ luôn có nghiệm

Như vậy ta cần quan tâm đến hai giá trị của a là: $a = 1$; $a = -1$ thì hệ cũng phải có nghiệm. Điều này được thỏa mãn khi và chỉ khi tồn tại b để hai phương trình $c^2 + c - b = 0$ (1) và $c^2 + c + b = 0$ (2) có nghiệm chung.

Giả sử c_0 là nghiệm chung của (1) và (2). Thế thì:

$$\begin{cases} c_0^2 + c_0 + b = 0 \\ c_0^2 + c_0 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

với $b = 0$ thì (1) và (2) trở thành: $c^2 + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = -1 \end{cases}$

Rõ ràng hai nghiệm này là hai nghiệm chung của (1) và (2).

* Tóm lại giá trị của b cần tìm là: $b = 0$.

Bài 4: Giả sử hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ bx + cy = a & (2) \\ cx + ay = b & (3) \end{cases}$$

có nghiệm. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Giải

Nhân (1) với c^2 ; nhân (2) với a^2 ; nhân (3) với b^2 ta được:
$$\begin{cases} (ax)c^2 + (by)c^2 = c^3 \\ (bx)a^2 + (cy)a^2 = a^3 \\ (cx)b^2 + (ay)b^2 = b^3 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ba phương trình trên ta được:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= ac(cx + ay) + bc(cy + bx) + ab(ax + by) \\ &= ac.b + bc.a + ab.c = 3abc \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài 5: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 3m \\ mx + y = 2m + 1 \end{cases}$$

1) Giải và biện luận hệ.

2) Định $m \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm nguyên.

Giải

1) Giải và biện luận hệ:

Ta tính các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3m & m \\ 2m+1 & 1 \end{vmatrix} = 3m - m(2m+1) = 2m(1-m)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3m \\ m & 2m+1 \end{vmatrix} = 2m+1 - 3m^2 = (1-m)(1+3m)$$

• Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{2m}{1+m} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1+3m}{1+m} \end{cases}$$

• Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

+ Nếu $m = 1$ thì $D = D_x = D_y = 0$, khi đó hệ có nghiệm $\forall x, y$

+ Nếu $m = -1$ thì $D_x \neq 0$ và $D_y \neq 0$, khi đó hệ vô nghiệm.

2) Khi $m \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{2m}{m+1} = 2 - \frac{2}{m+1} \\ y = \frac{3m+1}{m+1} = 3 - \frac{2}{m+1} \end{cases}$$

Để x, y nguyên thì $(m+1)$ phải là ước số của 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=1 \\ m+1=-1 \\ m+1=2 \\ m+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \\ m=1 \\ m=-3 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m = \{-3, -2, 0, 1\}$.

Bài 6: Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} x(1 - \sin a) + y \cos a = \cos a \\ x \cos a + (1 - \sin a)y = \sin a \end{cases}$

Giải

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \sin a & \cos a \\ \cos a & 1 - \sin a \end{vmatrix} = (1 - \sin a)^2 - \cos^2 a = 2 \sin a (\sin a - 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \cos a & \cos a \\ \sin a & 1 - \sin a \end{vmatrix} = \cos a (1 - \sin a) - \sin a \cos a = \cos a (1 - 2 \sin a)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 - \sin a & \cos a \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin a (1 - \sin a) - \cos^2 a = \sin a - 1$$

• Biện luận:

$$+ \text{ Nếu } D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a \neq 0 \\ \sin a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq k\pi \\ a \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{thì hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{\cos a (1 - 2 \sin a)}{2 \sin a (\sin a - 1)} \\ y = \frac{1}{2 \sin a} \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = 0 \\ \sin a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = k\pi \\ a = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$- \text{ Nếu } a = k\pi \text{ thì hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} x + (-1)^k = (-1)^k \\ (-1)^k x + y = 0 \end{cases}$$

Ta thấy: dù k chẵn hay k lẻ thì hệ trên luôn vô nghiệm.

- Nếu $a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 0.x + 0.y = 0 \\ 0.x + 0.y = 1 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

• Tóm lại:

+ Nếu $\begin{cases} a \neq k\pi \\ a \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x = \frac{\cos a(1 - 2\sin a)}{2\sin a(\sin a - 1)} \\ y = \frac{1}{2\sin a} \end{cases}$$

+ Nếu $\begin{cases} a = k\pi \\ a = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ thì hệ vô nghiệm.

Bài 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a-1)x + y = a+1 \\ x - ay = a+3 \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị hữu tỉ của a để hệ có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x nhận giá trị nguyên.

Giải

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a(a-1) - 1 = -a^2 + a - 1$

$$D_x = \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a+3 & -a \end{vmatrix} = -a(a+1) - (a+3) = -a^2 - 2a - 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a-1 & a+1 \\ 1 & a+3 \end{vmatrix} = (a-1)(a+3) - (a+1) = a^2 + a - 4$$

Ta thấy: $D = -a^2 + a - 1 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

nên hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{a^2 + 2a + 3}{a^2 - a + 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{a^2 + a - 4}{-a^2 + a - 1} \end{cases}$$

Xét biểu thức: $x = \frac{a^2 + 2a + 3}{a^2 - a + 1}$

• $a^2 + 2a + 3 = (a + 1)^2 + 2 > 0$

• $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

Suy ra: $x = \frac{a^2 + 2a + 3}{a^2 - a + 1} > 0$ với $\forall a \in \mathbb{R}$

Đẳng thức trên $\Leftrightarrow (x - 1)a^2 - (x + 2)a + x - 3 = 0$ (1)

+ Với $x = 1$ thì (1) trở thành: $-3a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$ giá trị này thỏa mãn đề bài.

+ Với $x > 1$ (do x là số nguyên dương)

Để (1) có nghiệm hữu tỉ thì phải có:

$\Delta = (x + 2)^2 - 4(x - 1)(x - 3) = -3x^2 + 20x - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{10 - \sqrt{76}}{3} \leq x \leq \frac{10 + \sqrt{76}}{3}$

vì x nguyên và $x > 1$ nên $x = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

* Lần lượt thế các giá trị $x = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ và (1) ta thấy chỉ có $x = 3$ và $x = 6$ thỏa mãn.

+ Với $x = 3$ thì (1) có hai nghiệm: $a = 0$ và $a = \frac{5}{2}$

+ Với $x = 6$ thì (1) có hai nghiệm: $a = \frac{3}{5}$ và $a = 1$

Vậy để x nguyên thì a nhận các giá trị hữu tỉ là:

$a = \left\{-\frac{2}{3}; 0; \frac{3}{5}; 1; \frac{5}{2}\right\}.$

Bài 8: Định a để hệ sau có bốn nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} 2a(x^2 + 2x) - (a + 1)|y| = 1 - 3a \\ (a - 2)(x^2 + 2x) + a|y| = 3a - 2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Nhận xét: hệ này chưa có dạng là hệ bậc nhất hai ẩn, ta chuyển hệ này về dạng đó bằng cách đặt:

$$\begin{cases} X = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1 \geq -1 \\ Y = |y| \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Điều kiện: $\begin{cases} X \geq -1 \\ Y \geq 0 \end{cases}$

Khi đó hệ này trở thành: $\begin{cases} 2aX - (a + 1)Y = 1 - 3a \\ (a - 2)X + aY = 3a - 2 \end{cases} \quad (II)$

Các hệ số của hệ (II) không thể đồng thời bằng 0 nên ta tính:

$$D = \begin{vmatrix} 2a & -a-1 \\ a-2 & a \end{vmatrix} = (a-1)(3a+2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1-3a & -a-1 \\ 3a-2 & a \end{vmatrix} = 2a-2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2a & 1-3a \\ a-2 & 3a-2 \end{vmatrix} = (a-1)(9a-2)$$

- Điều kiện cần: hệ (I) có nghiệm thì hệ (II) có nghiệm

$$\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

- Điều kiện đủ: hệ (II) có hai nghiệm phân biệt thỏa:

$$\begin{cases} X > -1 \\ Y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{3a+2} > -1 \\ Y = \frac{D_y}{D} = \frac{9a-2}{3a+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{4}{3} \vee a > \frac{2}{9}$$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $a < -\frac{4}{3} \vee a > \frac{2}{9}$

Bài 9: Cho hệ phương trình:	$\begin{cases} x + (1+m)y = 0 \end{cases} \quad (1)$
	$\begin{cases} (1-m)x + my = 1+m \end{cases} \quad (2)$
	$\begin{cases} (1+m)x + (4-m)y = -1-m \end{cases} \quad (3)$

Tìm m để hệ có nghiệm

Giải

* Điều kiện cần của bài toán là hệ: $\begin{cases} x + (1+m)y = 0 \\ (1-m)x + my = 1+m \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1+m \\ 1-m & m \end{vmatrix} = m - (1-m^2) = m^2 + m - 1$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1+m \\ 1+m & m \end{vmatrix} = -(1+m)^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-m & 1+m \end{vmatrix} = 1+m$$

+ Khi $D = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

thì $D_x \neq 0$ và $D_y \neq 0$ nên hệ (1) và (2) có nghiệm, suy ra hệ đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ thì hệ (1) và (2) có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(1+m)^2}{m^2+m-1}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{1+m}{m^2+m-1}$$

Hệ đã cho có nghiệm nếu nghiệm của (1) và (2) là nghiệm đúng phương trình (3).

Thế $x = \frac{-(1+m)^2}{m^2+m-1}$ và $y = \frac{1+m}{m^2+m-1}$ vào (3) ta được:

$$\frac{-(1+m)^3}{m^2+m-1} + \frac{(4-m)(1+m)}{m^2+m-1} = -(1+m)$$

$$\Leftrightarrow (1+m)[4-m+m^2+m-1-(1+m)^2] = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m = 1 \vee m = -1$

CHUYÊN ĐỀ 31. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN SỐ

$$\begin{aligned} 1. \text{Dạng hệ: } \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ g(x) = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

2. Cách giải:

+ Khử tham số giữa hai phương trình (1) và (2) (nếu có thể) được một trong hai phương trình chứa tham số.

+ Sau đó, giải tìm x , rồi thế vào hệ đã cho, tìm giá trị của tham số.

+ Có giá trị của tham số thử lại.

Bài 1:

$$\text{Định } a, b \text{ để hệ sau có nghiệm: } \begin{cases} ax^2 + (a+1)x + a + b - 1 = 0 & (1) \\ (a+1)x^2 + (a-1)x + a + b = 0 & (2) \\ (a-b)x^2 - x + ab = 0 & (3) \end{cases}$$

Giải

Lấy (2) trừ (1) ta được: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thế $x = 1$ vào (3) ta được: $a - b - 1 + ab = 0$

$$\Leftrightarrow b(a-1) + a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} a = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ thế vào (2) ta được: $b = -3$

+ Với $\begin{cases} x=1 \\ b=-1 \end{cases}$ thế vào (2) ta được: $a = \frac{1}{3}$

Tóm lại hệ đã cho có nghiệm: $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$

Bài 2: Định m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} x(x-1)+m-1=0 \\ x^4+x^2+2x+1-m^2=0 \end{cases}$

Giải

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(x+1)=m \\ x^4+(x+1)^2=m^2 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u=x^2 \geq 0 \\ v=x+1 \end{cases} \Rightarrow u=(v-1)^2 \quad (*)$$

$$\text{Hệ (I) trở thành: } \begin{cases} u-v=m \\ u^2+v^2=m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=m \\ (u+v)^2+(u-v)^2=2m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-v=m \\ (u+v)^2=m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=m \\ \begin{cases} u+v=m \\ u+v=-m \end{cases} \end{cases}$$

$$1) \text{ Xét hệ: } \begin{cases} u-v=m \\ u+v=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=m \\ v=0 \end{cases} \text{ thế vào (*) ta được: } m=1.$$

$$\text{Khi } m=1 \text{ ta được: } \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

$$\text{Nghiệm này thỏa hệ: } \begin{cases} x^2-(x+1)=1 \\ x^4+(x+1)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \text{giá trị } m=1 \text{ thỏa đề.}$$

$$2) \text{ Xét hệ: } \begin{cases} u-v=m \\ u+v=-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=-m \end{cases}$$

$$\text{thế vào (*) ta được: } (m+1)^2=0 \Leftrightarrow m=-1$$

$$\text{Khi } m=-1 \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

$$\text{Nghiệm này thỏa hệ: } \begin{cases} x^2-(x+1)=-1 \\ x^4+(x+1)^2=1 \end{cases}$$

Tóm lại giá trị của m cần tìm là: $m = \pm 1$

Bài 3: Định a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 + 4 - 5x + 10x |x| = 0 & (1) \\ x^2 + 2(1-a)x + a^2 - 2a = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Trước hết ta giải phương trình (1):

Ta có: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 4$	+	+	0	-	0	+
$ x $	-	0	+	+	+	+

+ Nếu $x \leq 0$ thì (1) trở thành:

$$-18x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{4}{9} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

+ Nếu $0 < x \leq 1$ thì (1) trở thành:

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

+ Nếu $1 < x \leq 4$ thì (1) trở thành: $0 = 0$, đúng với $\forall x \in (1, 4]$

+ Nếu $x > 4$ thì (1) trở thành:

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Tóm lại: nghiệm của (1) là: $\begin{cases} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Xét phương trình (2): $x^2 + 2(1-a)x + a^2 - 2a = 0$

Ta có: $\Delta' = (1-a)^2 - a^2 + 2a = 1$

$\Rightarrow$ hai nghiệm của phương trình (2) là: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -2 + a \end{cases}$

Như vậy hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a - 2 \end{cases} \quad (*)$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ hệ (*) có nghiệm duy nhất.

Xét các trường hợp sau:

1) Nếu $\begin{cases} a = -1 \\ a - 2 < 1 \\ a - 2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a < 3 \\ a > 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1$

$$2) \text{ Nếu } \begin{cases} a-2=-1 \\ a < 1 \\ a > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a < a \text{ vô nghiệm} \\ a > 4 \end{cases}$$

$$3) \text{ Nếu } \begin{cases} 1 \leq a \leq 4 \\ a-2 \neq -1 \\ \begin{cases} a-2 < 1 \\ a-2 > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 4 \\ a \neq 1 \\ \begin{cases} a < 3 \\ a > 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < 3$$

$$4) \text{ Nếu } \begin{cases} a \neq -1 \\ 1 \leq a-2 \leq 4 \\ \begin{cases} a < 1 \\ a > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq a \leq 6 \\ \begin{cases} a < 1 \\ a > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 4 < a \leq 6$$

Tóm lại các giá trị của a cần tìm là:

$$a = -1 \text{ hoặc } 1 < a < 3 \text{ hoặc } 4 < a \leq 6.$$

Bài 4: Cho hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy + x - y - 2 = 0 & (1) \\ mx^2 - 4my + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Định m để hệ trên có hai nghiệm phân biệt.

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2 - (2y-1)x + y^2 - y - 2 = 0$$

Xem phương trình này là phương trình bậc hai theo ẩn x .

$$\text{Ta có: } \Delta = (2y-1)^2 - 4(y^2 - y - 2) = 9$$

$$\text{Suy ra hai nghiệm của (1) là: } \begin{cases} x = \frac{2y-1-3}{2} = y-2 \\ x = \frac{2y-1+3}{2} = y+1 \end{cases}$$

Do đó hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = y-2 \\ x = y+1 \\ mx^2 - 4my + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ mx^2 - 4m(x+2) + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ mx^2 - 4m(x-1) + 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ mx^2 - 4mx - 8m + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = x-1 \\ mx^2 - 4mx + 4m + 1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt, ta xét các trường hợp sau:

1) Phương trình (3) có nghiệm kép và (4) có nghiệm kép khác nhau:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 = 4m^2 - m(1-8m) = 0 \\ \Delta'_2 = 4m^2 - m(4m+1) = 0 \\ x_0 = 2 \\ x'_0 = 2 \end{cases} \quad \text{hệ này không thỏa mãn do } x_0 = x'_0$$

2) Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt và (4) vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m(1-8m) > 0 \\ 4m^2 - m(4m+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12m^2 - m > 0 \\ -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{1}{12} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$$

3) Phương trình (3) vô nghiệm và (4) có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 < 0 \\ \Delta'_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 0 < m < \frac{1}{12} \end{cases} \text{ vô lý.}$$

Tóm lại: Các giá trị của m cần tìm là $m > \frac{1}{12}$

Bài 5: Định m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5 & (1) \\ x^4 + 8x^2 + 16mx + 16m^2 + 32m + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Bất phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2(x+2)^2 + 4x^2 - 5(x-2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 20x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (a)$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 16m^2 + 2(8x + 16m) + x^4 + 8x^2 + 16 = 0$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo m . Để tồn tại m thì:

$$\Delta' = (8x+16)^2 - 16(x^4 + 8x^2 + 16) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^2 + 256x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \quad (b)$$

Từ (a) và (b), suy ra: $x = 2$

$$\text{Thế } x = 2 \text{ vào (2) ta được: } 16m^2 + 64m + 64 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m = -2$

CHUYÊN ĐỀ 32. HỆ PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

PHƯƠNG PHÁP:

- * Lấy phương trình này rút y theo x (hoặc rút x theo y) rồi thế vào phương trình kia.
- * Sau khi thế ta sẽ được một phương trình một ẩn số. Áp dụng các phương pháp đã biết như phương pháp tam thức bậc hai; phương pháp đạo hàm; phương pháp đồ thị ... để giải phương trình này.

Bài 1: Giải các hệ phương trình:

$$1) \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (2x + y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x - y)^2 = 0 \\ 2x + y + \frac{1}{2x - y} = 3 \end{cases}$$

Giải

$$1) \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 38 \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy - 3x - 2y = (u+1)(v+2) - 3(u+1) - 2(v+2) \\ = uv - (u+v) - 5$$

Do đó hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} uv - (u+v) = 21 \\ u^2 + v^2 = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv - (u+v) = 21 \\ (u+v)^2 - 2uv = 38 \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} S = u + v \\ P = u \cdot v \end{cases} \text{ . Điều kiện: } S^2 - 4P \geq 0$$

$$\text{Ta được: } \begin{cases} P - S = 21 \\ S^2 - 2P = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 21 + S \\ S^2 - 2(21 + S) = 38 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 21 + S \\ S^2 - 2S - 80 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 21 + S \\ \begin{cases} S = -8 \\ S = 10 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 10 \\ P = 31 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} S = 10 \\ P = 31 \end{cases} \text{ suy ra } S^2 - 4P = 100 - 4 \cdot 31 < 0 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \text{ thỏa: } S^2 - 4P \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + v = -8 \\ u \cdot v = 13 \end{cases} \Rightarrow u, v \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$X^2 + 8X + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -4 - \sqrt{3} \\ X = -4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = -4 - \sqrt{3} \\ v = -4 + \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} u = -4 + \sqrt{3} \\ v = -4 - \sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 - \sqrt{3} \\ y = -2 + \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 + \sqrt{3} \\ y = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} x = -3 - \sqrt{3} \\ y = -2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \sqrt{3} - 3 \\ y = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (2x + y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x - y)^2 = 0 & (1) \\ 2x + y + \frac{1}{2x - y} = 3 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $2x - y \neq 0$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (2x + y)^2 - 5(2x + y)(2x - y) + 6(2x - y)^2 = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = 25(2x - y)^2 - 24(2x - y)^2 = (2x - y)^2$$

$$\text{Suy ra hai nghiệm: } \begin{cases} t_1 = \frac{5(2x - y) - (2x - y)}{2} = 2(2x - y) \\ t_2 = \frac{5(2x - y) + (2x - y)}{2} = 3(2x - y) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t_1 = 2(2x - y) \Leftrightarrow 2x + y = 2(2x - y)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3y \text{ thế vào (2) ta được:}$$

$$4y + \frac{1}{2y} = 3 \Leftrightarrow 8x^2 - 6y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t_2 = 3(2x - y) \Leftrightarrow 2x + y = 3(2x - y)$$

$\Leftrightarrow x = y$ thế vào (2) ta được:

$$3x + \frac{1}{x} = 3 \quad \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

$\Rightarrow$ phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

* Cách khác:

Vì $2x - y \neq 0$ nên chia hai vế của (1) cho $(2x - y)^2$ ta được:

$$\left(\frac{2x+y}{2x-y} \right)^2 - 5 \frac{2x+y}{2x-y} + 6 = 0$$

Để dàng giải ra ta được: $\begin{cases} \frac{2x+y}{2x-y} = 2 \\ \frac{2x+y}{2x-y} = 3 \end{cases}$

Từ đây ta giải như trên.

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases}$$

Giải.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + y^2 + 4y = 1 \\ 3(x^2 - 3x) - 2(y^2 + 4y) = 3 \end{cases} \quad (I)$

Đặt: $\begin{cases} a = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4} \\ b = y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4 \geq -4 \end{cases}$

Hệ (I) trở thành: $\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 1 \\ y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -4 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, 0\right); \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, -4\right)$
 $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, 0\right); \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, -4\right)$

Bài 3: Giải hệ: $\begin{cases} x\sqrt{x} - \sqrt{x} = y\sqrt{y} + 8\sqrt{y} & (1) \\ x - y = 5 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$ và $y \geq 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x}(x-1) = \sqrt{y}(y+8)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x(x-1)^2 = y(y+8)^2 \end{cases} \quad (3)$

Từ (2) $\Rightarrow y = x - 5$ thế vào (3) ta được:

$x(x-1)^2 = (x-5)(x+3)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 22x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \text{ (loại)} \\ x = 9 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: (9, 4)

Bài 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ (x+1)y^2 + xy = m(y+2) & (2) \end{cases}$

- 1) Giải hệ khi $m = 4$.
- 2) Định m để hệ có nghiệm duy nhất.
- 3) Định m để hệ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Giải

Từ (1) $\Rightarrow x = m - y$ thế vào (2) ta được:

$(1 + m - y)y^2 + y(m - y) = my + 2m$

$\Leftrightarrow y^3 - my^2 + 2m = 0 \quad (3)$

1) Khi $m = 4$ thì (3) trở thành: $y^3 - 4y^2 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y^2 - 2y - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 1 - \sqrt{5} \\ y = 1 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \pm \sqrt{5} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho ứng với $m = 4$ là:

$(2, 2); (3 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}); (3 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$

2) Phương trình (3) $\Leftrightarrow y^3 = m(y^2 - 2) \Leftrightarrow f(y) = \frac{y^3}{y^2 - 2} = m$

(vì $y = \pm \sqrt{2}$ không là nghiệm của phương trình)

Xét hàm số: $f(y) = \frac{y^3}{y^2 - 2}$ với $y \neq \pm \sqrt{2}$

Ta có: $f'(y) = \frac{y^4 - 6y^2}{(y^2 - 2)^2}$; $f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm \sqrt{6} \end{cases}$

Lập bảng biến thiên của hàm $f(y)$:

y	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(y)$	+	0	-	-	0	+	
$f(y)$	$-\infty$			$-\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$	$+\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra:

- Phương trình (3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{-3\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3\sqrt{6}}{2}$
- Phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3\sqrt{6}}{2} \\ m > \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Bài 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1 & (1) \\ x - y = a & (2) \end{cases}$

Xác định a để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Từ (2) $\Rightarrow y = x - a$ thế vào (1) ta được:

$$\sqrt{x^2 + 4x(x-a) - 3(x-a)^2} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left(\sqrt{2x^2 + 2ax - 3a^2} \right)^2 = (x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2(a-1)x - 3a^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

Đặt: $f(x) = x^2 + 2(a-1)x - 3a^2 - 1$

Điều kiện trên được thỏa mãn $\Leftrightarrow -1 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 - (3a^2 + 1) > 0 \\ -3a^2 - 2a + 2 > 0 \\ 1 - a + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{7}}{3} < a < \frac{\sqrt{7}-1}{3} \\ a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{7}}{3} < a < \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < a < \frac{\sqrt{7}-1}{3}$

Bài 6: Cho hệ:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a \\ x^2 + y^2 + bxy = 3 \end{cases} \quad (1)$$

1) Giải hệ khi $a = b = 1$.

2) Xác định tất cả các giá trị của a, b để hệ trên có nhiều hơn bốn nghiệm phân biệt.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} &\Leftrightarrow (x+y)(x-y+a) - (x-y+a) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y+a)(x+y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+a=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \end{aligned}$$

1) Khi $a = b = 1$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-1=0 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \quad (II)$$

* Giải hệ (I)

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-y+1=0 \\ x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x^2+(x+1)^2+x(x+1)-3=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 3x^2+3x-2=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-3-\sqrt{33}}{6} \\ y=\frac{3-\sqrt{33}}{6} \end{cases} &\text{ hoặc } \begin{cases} x=\frac{-3-\sqrt{33}}{6} \\ y=\frac{3+\sqrt{33}}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

* Giải hệ (II)

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2+(1-x)^2+x(1-x)-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \end{cases}$$

* Tóm lại: Nghiệm của hệ là $(-1, 2); (2, -1); \left(\frac{-3-\sqrt{33}}{6}, \frac{3+\sqrt{33}}{6} \right)$

2) Hệ đã cho viết lại:
$$\begin{cases} x-y+a=0 \\ x+y-1=0 \\ x^2+y^2+bxy-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y+a=0 \\ x^2+y^2+bxy-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+y^2+bxy-3=0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} (A) \\ (B) \end{matrix}$$

Xét hệ (B)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+bxy-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2+(1-x)^2+bx(1-x)-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ (2-b)x^2+(b-2)x-2=0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ này có tối đa hai nghiệm (x, y) .

* Xét hệ (A)

$$\begin{cases} y=x+a \\ x^2+(x+a)^2+bx(x+a)-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+a \\ (2+b)x^2+(2+b)ax+a^2-3=0 \end{cases} (*)$$

Hệ đã cho có nhiều hơn bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có nhiều hơn bốn nghiệm mà (*) là phương trình bậc hai nên để nó có hơn hai nghiệm thì (*) phải là phương trình vô định.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+2=0 \\ a^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy các giá trị của a, b cần tìm là: $\begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-\sqrt{3} \\ b=-2 \end{cases}$

Bài 7: Định m để hệ sau có bốn nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = y^2 - 2y \\ (x - m)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2 = (y - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\text{Do đó hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 1 - x \\ (x - m)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ (x - m)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ (x - m)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (B)$$

$$* \text{ Xét hệ (A): } \begin{cases} y = x + 1 \\ (x - m)^2 + (x + 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 2x^2 + 2(1 - m)x + m^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{2} < m < \sqrt{2} - 1$$

$$* \text{ Xét hệ (B): } \begin{cases} y = 1 - x \\ (x - m)^2 + (1 - x)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 2x^2 - 2(1 + m)x + m^2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \Delta' = (1 + m)^2 - 2m^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}$$

Để thấy hai nghiệm của hệ (A) và hai nghiệm của hệ (B) luôn khác nhau. Do đó hệ đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ hệ (A) có hai nghiệm phân biệt và hệ (B) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{2} < m < \sqrt{2} - 1 \\ 1 - \sqrt{2} < m < \sqrt{2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < m < \sqrt{2} - 1$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $1 - \sqrt{2} < m < \sqrt{2} - 1$.

Bài 8: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x - y) \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1) Giải hệ khi $m = -5$.

2) Định m để hệ có đúng ba nghiệm $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$ trong đó: x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng và trong ba số đó có hai số có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1.

Giải

Khi đó hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - m = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad (I) \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - m = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad (II)$

1) Khi $m = -5$

- Giải hệ (I): $x = y = -\frac{1}{2}$

- Giải hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 5 = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$ (hệ này vô nghiệm)

Vậy nghiệm của hệ là: $x = y = \frac{1}{2}$.

2) Hệ đã cho luôn có nghiệm $x = y = -\frac{1}{2}$, $\forall m$ và hiển nhiên giá trị tuyệt đối của

x (của nghiệm trên) luôn < 1 . Do vậy hai nghiệm x có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1 phải nằm trong hệ (II).

* Yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì trước hết hệ (II) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của hệ (I) (xét về hoành độ)

Hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x(1+x) + (1+x)^2 - m = 0 \\ y = -1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 - m = 0 \\ y = -1 - x \end{cases}$

Hệ phương trình (II) có hai nghiệm phân biệt, trong đó hoành độ

$x \neq -\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4(1 - m) > 0 \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$

• Hai nghiệm của (2) có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1:

$\begin{cases} |x_1| > 1 \\ |x_2| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|1 + \sqrt{4m - 3}\right| > 2 \\ \left|\sqrt{4m - 3} - 1\right| > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{4m - 3} > 3 \Leftrightarrow m > 3$

- Ba nghiệm (theo hoành độ) x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng nên theo đề bài thì thứ tự của ba nghiệm trên là: x_1, x_3, x_2
Ta có: $x_1 + x_2 = 2x_3 = -1 \Rightarrow$ luôn luôn thỏa mãn
(áp dụng định lý Viét cho phương trình (2)).
Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m > 3$.

Bài 9: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = a & (1) \\ x\sqrt{x} + (16 - a)\sqrt{x} = 7\sqrt{y} + 10 + 6a & (2) \end{cases}$$

Định a để hệ có ba nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $x, y > 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{y} = -a + x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ y = (x - a)^2 \end{cases}$

Thế vào (2) ta được:

$$x\sqrt{x} + (16 - a)\sqrt{x} = 7\sqrt{(x - a)^2} + 10 + 6a$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} + (16 - a)\sqrt{x} = 7(x - a) + 10 + 6a$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 7x + (16 - a)\sqrt{x} - 10 + a = 0$$

Đặt: $\sqrt{x} = t \geq 0$ thì (3) trở thành:

$$t^3 - 7t^2 + (16 - a)t - 10 + a = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - 6t + 10 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ f(t) = t^2 - 6t + 10 - a = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(4) có nghiệm $\Leftrightarrow a \geq 1$

Khi đó: $x \geq a \Leftrightarrow t = \sqrt{x} \geq \sqrt{a}$

Như vậy hệ đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (4) có nghiệm phân biệt thỏa các điều kiện sau:

$$\begin{cases} \sqrt{a} \leq t_1 < t \\ t_1 \neq 1 \\ t_2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(\sqrt{a}) \geq 0 \\ \frac{S}{2} - \sqrt{a} > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a \leq \frac{25}{9}$$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $1 < a < \frac{25}{9}$.

CHUYÊN ĐỀ 33. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 1

1. Định nghĩa: Hệ $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ gọi là hệ đối xứng loại 1 nếu hoán vị giữa x, y thì

biểu thức $f(x, y)$ và $g(x, y)$ không đổi.

2. Cách giải:

+ Đặt: $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \quad (*)$

+ Đưa hệ đã cho về hệ theo S và P : $\begin{cases} F(S, P) = 0 \\ G(S, P) = 0 \end{cases} \quad (I)$

+ Giải hệ (I) tìm S và P .

+ Thế S, P vào (*) ta được x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ thỏa mãn } \Delta = S^2 - 4P \text{ không âm}$$

3. Biện luận hệ:

- Hệ đã cho vô nghiệm nếu hệ (I) vô nghiệm hoặc hệ (I) có nghiệm (S, P) mà $S^2 - 4P < 0$

- Hệ đã cho có nghiệm, nếu hệ (I) có nghiệm (S, P) thỏa:

$$S^2 - 4P \geq 0$$

- Ứng với nghiệm (S_0, P_0) của hệ (I) thỏa điều kiện $S_0^2 - 4P_0 > 0$ thì hệ đã cho

có hai nghiệm phân biệt:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(S_0 \pm \sqrt{S_0^2 - 4P_0} \right) \\ y = \frac{1}{2} \left(S_0 \pm \sqrt{S_0^2 - 4P_0} \right) \end{cases}$$

- Khi (S_0, P_0) thỏa: $S_0^2 - 4P_0 = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = y = \frac{S_0}{2}$$

4. Chú ý:

1) Nếu hệ đã cho có chứa dạng tổng $(x + y)$, tích (xy) thì ta đặt ẩn phụ để đưa về dạng trên.

2) Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ đã cho thì (y_0, x_0) cũng là một nghiệm của hệ đã cho. Do vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = y_0.$$

Bài 1: Giải các hệ phương trình:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 + y^3 + (xy)^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$

Giải

$$1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$; điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - (2 - S) = 4 \\ P = 2 - S \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 - S \\ S^2 + S - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 - S \\ S = 2 \\ S = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \\ S = -3 \\ P = 5 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \end{cases}$ ta có: $S^2 - 4P = 9 - 20 < 0$

$\Rightarrow$ cặp nghiệm này không thỏa mãn.

+ Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases}$ thỏa: $S^2 - 4P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(0, 2); (2, 0)$

$$2) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 + (xy)^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) + (xy)^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} S^3 - 3SP + P^3 = 17 \\ S + P = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3S(5-S) + (5-S)^3 = 17 \\ P = 5 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 5S + 6 = 0 \\ P = 5 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ S = 3 \\ P = 5 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \\ S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases}$ ta có: $S^2 - 4P = 4 - 12 < 0$

$\Rightarrow$ cặp nghiệm này không thỏa mãn.

+ Với $\begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases}$ thỏa mãn: $S^2 - 4P \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$, suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ X=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(1, 2); (2, 1)$.

Bài 2: Giải các hệ phương trình:

$$1) \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 9 \\ x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

Giải

1) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \end{cases}$. Điều kiện: $\begin{cases} |a| \geq 2 \\ |b| \geq 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ b^2 - 2 = y^2 + \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 13 \\ a+b = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases}$$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 5X + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=2 \\ X=3 \end{cases} \text{ Suy ra } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=2 \\ y+\frac{1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y^2-3y+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=3 \\ y+\frac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$$\left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right); \left(1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1\right); \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$$

2) Điều kiện: $x, y \neq 0$

$$\text{Biến đổi hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=49 \end{cases} \quad (\text{Hệ 1})$$

Bài 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+xy+y=m+1 \\ x^2y+y^2x=m \end{cases} \quad (I)$$

1) Giải hệ khi $m=2$.

2) Định m để hệ có ít nhất một nghiệm (x, y) dương.

Giải

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=m+1 \\ xy(x+y)=m \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}; \text{ điều kiện: } S^2-4P \geq 0$$

$$\text{Hệ (I) trở thành: } \begin{cases} S+P=m+1 \\ S.P=m \end{cases} \quad (II)$$

1) Khi $m=2$, ta được: $\begin{cases} S+P=3 \\ S.P=2 \end{cases} \Rightarrow S, P \text{ là nghiệm của phương trình:}$

$$X^2-3X+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ X=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases}$$

+ Loại cặp nghiệm $\begin{cases} S=1 \\ P=2 \end{cases}$ vì không thoả: $S^2 - 4P \geq 0$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy nghiệm của hệ là: $x=y=1$.

2) Từ hệ (II) $\Rightarrow S, P$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - (m+1)X + m = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm là: $X=1 \vee X=m$

$$\Rightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=m \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S=m \\ P=1 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} S=1 \\ P=m \end{cases}$, ta có $S^2 - 4P = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=m \end{cases} \Rightarrow x, y \text{ là nghiệm của phương trình:}$$

$X^2 - X + m = 0$. Phương trình này có nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m \geq 0 \\ S = 1 > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4} \quad (a)$$

+ Với $\begin{cases} S=m \\ P=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow x, y \text{ là nghiệm của phương trình:}$

$X^2 - mX + 1 = 0$. Phương trình này có nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 \geq 0 \\ S = m > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2 \quad (b)$$

Hợp hai điều kiện (a), (b) ta được giá trị của m cần tìm là:

$$0 < m \leq \frac{1}{4} \vee m \geq 2$$

Bài 4: Định a để hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$ và $y \geq 0$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} X = \sqrt{x} \geq 0 \\ Y = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases}$$

Hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases} X + Y = a \\ X^2 + Y^2 - XY = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = a \\ (X + Y)^2 - 3XY = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = a \\ XY = \frac{1}{3}(a^2 - a) \end{cases}$$

Suy ra X, Y là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - at + \frac{1}{3}(a^2 - a) = 0 \quad (1)$$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow 0 \leq t_1 \leq t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - a^2 \geq 0 \\ a^2 - a \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 4 \\ a = 0 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $a = 0$ hoặc $1 \leq a \leq 4$.

Bài 5: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases} \quad (I)$$

- 1) Giải hệ khi $m = 12$.
- 2) Định m để hệ có nghiệm.

Giải

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) + y(y+1) = 8 \\ x(x+1) \cdot y(y+1) = m \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \\ v = y(y+1) = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Hệ (I) trở thành: } \begin{cases} u + v = 8 \\ u \cdot v = m \end{cases}$$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$f(X) = X^2 - 8X + m = 0 \quad (1)$$

1) Khi $m = 12$ thì (1) $\Leftrightarrow X^2 - 8X + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } \begin{cases} u=2 \\ v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y^2+y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \\ y=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } \begin{cases} u=6 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ y^2+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \\ y=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$(1,2); (1,-3); (-2,2); (-2,-3); (2,1); (2,-2); (-3,1); (-3,-2)$

2) Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq X_1 \leq X_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ f\left(-\frac{1}{4}\right) \geq 0 \\ \frac{S}{2} + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-m \geq 0 \\ m + \frac{33}{16} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{33}{16} \leq m \leq 16$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $-\frac{33}{16} \leq m \leq 16$.

Bài 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m \\ x^4 + y^4 = m - m^2 \end{cases} \quad (I)$

1) Giải phương trình khi $m = \frac{1}{2}$

2) Định m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases} \text{ thì } x^4 + y^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$\text{Hệ (I) trở thành: } \begin{cases} S^2 - P = m \\ (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = m - m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = m + P \\ (m - P)^2 - 2P^2 = m - m^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = m + P \\ f(P) = P^2 + 2mP + m - 2m^2 \end{cases} \quad (2) \quad (II)$$

1) Khi $m = \frac{1}{2}$ thì hệ (II) trở thành:

$$\begin{cases} S^2 = \frac{1}{2} + P \\ P^2 + P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = \frac{1}{2} + P \\ P = 0 \\ P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ P = 0 \\ S^2 = -\frac{1}{2} \text{ (vô nghiệm)} \\ P = -1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với: } \begin{cases} S = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với: } \begin{cases} S = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

2) Định m để hệ đã cho có bốn nghiệm phân biệt:

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow P + m \geq 0 \Leftrightarrow P \geq -m$$

+ Khi $P > -m$ thì (1) $\Leftrightarrow S = \pm \sqrt{m + P}$ (hai giá trị S khác nhau)

+ Khi $P = -m$ thì (1) $\Leftrightarrow S = 0$ (một giá trị)

+ Khi $P < -m$ thì (1) vô nghiệm.

Với mỗi nghiệm (S, P) của hệ (II) thì nghiệm của hệ (I) là (x, y) thỏa mãn phương trình: $X^2 - SX + P = 0$

- Với $\Delta = S^2 - 4P > 0 \Leftrightarrow m + P - 4P > 0 \Leftrightarrow P < \frac{m}{3}$

Khi đó hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt

- Với $\Delta = 0 \Leftrightarrow P = \frac{m}{3}$ thì hệ đã cho có một nghiệm.

- Với $\Delta < 0 \Leftrightarrow P > \frac{m}{3}$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

Do vậy: hệ đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất P thỏa: $-m < P < \frac{m}{3}$ (a)

Mặt khác: Gọi P_1, P_2 là hai nghiệm của (2) thì: $\frac{P_1 + P_2}{2} = -m$

$$\Rightarrow P_1 < -m < P_2$$

Từ đó, điều kiện (a) $\Leftrightarrow P_1 < -m < P_2 < \frac{m}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-m) < 0 \\ f\left(\frac{m}{3}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3m^2 < 0 \\ m - \frac{11m^2}{9} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < \frac{9}{11}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $\frac{1}{3} < m < \frac{9}{11}$.

Bài 7: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} a(x + y) + z = a \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

Định a để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Hệ này đối xứng với x, y. Do đó, nếu gọi (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm của hệ thì (y_0, x_0, z_0) cũng là một nghiệm của hệ. Như vậy, hệ có nghiệm duy nhất thì cần $x_0 = y_0$, thế vào hệ đã cho ta được:

$$\begin{cases} 2ax_0 + z_0 = a \\ z_0 = 2x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 2x_0^2 \\ 2x_0^2 + 2ax_0 - a = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Vì nghiệm x_0 là duy nhất nên phương trình (*) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 0 \end{cases}$

* Thử lại:

+ Với $a = 0$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \text{ duy nhất.}$$

Vậy $a = 0$ thỏa đề bài.

+ Với $a = -2$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -2(x+y)+z=-2 \\ x^2+y^2=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+2=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ z=2 \end{cases} \text{ nghiệm này cũng duy nhất.} \end{aligned}$$

Vậy $a = -2$ thỏa đề bài. Tóm lại các giá trị của a cần tìm là: $\begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases}$

Bài 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2a+1 \\ x^2+y^2=a^2+2a-3 \end{cases} \quad (I)$

Định a để hệ có nghiệm (x, y) thỏa x, y nhỏ nhất.

Giải

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2a-1 \\ (x+y)^2-2xy=a^2+2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2a-1 \\ xy=\frac{1}{2}(3a^2-6a+4) \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (2a-1)t + \frac{1}{2}(3a^2-6a+4) = 0$$

Phương trình này có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Xét: } xy = \frac{1}{2}(3a^2-6a+4) = f(a)$$

$$\text{Ta có: } f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Bảng biến thiên:

a	1	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$f_{\min}$		

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra:

$$xy \text{ đạt min} \Leftrightarrow f(a) \text{ min} \Leftrightarrow a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị của a cần tìm là: $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 9. Giả sử hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases} \quad (I)$$

có nghiệm (x, y, z) . Chứng minh rằng: $-\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$

Giải

Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức của một số nào đó trong ba số, chẳng hạn là x . Ta tìm miền giá trị của x , ta tìm x sao cho hệ đã cho đối với hai ẩn y và z có nghiệm.

Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+z)^2 - 2yz = 8 \\ x(y+z) + yz = 4 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} S = y+z \\ P = yz \end{cases}$ thì hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases} x^2 + S^2 - 2P = 8 \\ x.S + P = 4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 + S^2 - 2P = 8 \\ x.S + P = 4 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (2) $\Rightarrow P = 4 - x.S$, thế vào (1) ta được:

$$S^2 + 2x.S + x^2 - 16 = 0 \quad (3)$$

$$\Delta' = x^2 - (x^2 - 16) = 16$$

Suy ra (3) có nghiệm: $\begin{cases} S_1 = -x + 4 \Rightarrow P_1 = x^2 - 4x + 4 \\ S_2 = -x - 4 \Rightarrow P_2 = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} S_1 = 4 - x \\ P_1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = 4-x \\ yz = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow y, z$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - (4-x)t + x^2 - 4x + 4 = 0$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow (4-x)^2 - 4(x^2 - 4x + 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 8x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{8}{3} \quad (a)$$

+ Với $\begin{cases} S_2 = -4 - x \\ P_2 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = -4-x \\ yz = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow y, z$ là nghiệm của phương trình:

$$u^2 + (4+x)u + x^2 + 4x + 4 = 0$$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow (4+x)^2 - 4(x^2 + 4x + 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 8x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq x \leq 0 \quad (b)$$

Từ (a); (b) suy ra: $-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$

Như vậy ta chứng minh được: $-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$

Chứng minh tương tự cho trường hợp của y và z.

Tóm lại: với (x, y, z) thỏa hệ (I) ta được: $-\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$

Bài 10: Định a để hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2 + y^2} + xy = 1 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 + y^2} + xy = 1 \\ x^2 + y^2 - axy = 0 \end{cases}$. Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ v = xy \neq 0 \end{cases}$

Ta được: $\begin{cases} 2u + v = 1 \\ u^2 = av \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 2u \\ u^2 = a(1 - 2u) \end{cases} \quad (1)$

vì $v \neq 0$ nên $1 - 2u \neq 0 \Leftrightarrow u \neq \frac{1}{2}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{u^2}{1 - 2u} = a$

Xét hàm: $f(u) = \frac{u^2}{1 - 2u}$ với $u > 0$ và $u \neq \frac{1}{2}$

$f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

u	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'(u)	+		0	-
f(u)	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $\begin{cases} u > 0 \\ u \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị của a cần tìm: $\begin{cases} a > 0 \\ a \leq -1 \end{cases} \quad (a)$

Mặt khác: $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow$ hai số $\frac{x}{y}$ và $\frac{y}{x}$ cùng dấu.

$$\text{Do đó: } a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow |a| = \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right|$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi thì: } |a| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -2 \\ a \geq 2 \end{cases} \quad (b)$$

Giao hai điều kiện (a) và (b) ta được giá trị a cần tìm là: $a \leq -2$ và $a \geq 2$.

Bài 11: Tìm các giá trị của m để đồ thị sau có đúng hai nghiệm:

$$\begin{cases} (x+y)^8 = 256 \\ x^8 + y^8 = 2+m \end{cases}$$

Giải

* **Nhận xét:** Nếu gọi (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ thì $(-x_0, -y_0)$ và $(-y_0, -x_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Vậy, hệ có đúng hai nghiệm thì phải có $x_0 \neq 0$ và $x_0 \neq y_0$.

Thay $x_0 = y_0$ vào hệ đã cho ta được:

$$\begin{cases} (2x_0)^8 = 156 \\ 2x_0^8 = m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^8 = 2 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \\ m = 0 \end{cases}$$

• Ngược lại, khi $m = 0$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} (x+y)^8 = 256 \\ x^8 + y^8 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta được:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &\leq 2(x^2 + y^2) \\ \Rightarrow (x+y)^4 &\leq 2^2(x^2 + y^2)^2 \leq 2^3(x^4 + y^4) \\ \Rightarrow (x+y)^8 &\leq 2^6(x^4 + y^4)^2 \leq 2^7(x^8 + y^8) = 2^8 \\ \Rightarrow (x+y)^8 &\leq 256 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$, thế vào (2) ta được:

$$2x^8 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 = y$$

Rõ ràng hệ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m = 0$.

CHUYÊN ĐỀ 34. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 2

1. Định nghĩa: Hệ đối xứng loại 2 là hệ mà khi thay x bởi y và y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia.

$$\begin{aligned} \text{2. Dạng của hệ: } &\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

3. Cách giải:

Nếu $f(x, y)$ là đa thức thì ta biến đổi hệ (1) và (2) như sau:

$$\text{Hệ (1) và (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 \\ f(x, y) + f(y, x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)\varphi(x, y) = 0 \\ f(x, y) + f(y, x) = 0 \end{cases}$$

Từ đây, giải tiếp.

4. Chú ý:

+ Có trường hợp có thể cộng hoặc trừ hai phương trình cho nhau ta cũng có thể giải được.

+ Nếu các biểu thức trong hệ không có dạng đa thức thì ta đặt ẩn phụ.

Bài 1: Giải các hệ phương trình:

$$1) \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 3y = \frac{4y}{x} \\ y - 3x = \frac{4x}{y} \end{cases}$$

Giải

$$1) \begin{cases} x^3 = 3x + 8y & (1) \\ y^3 = 3y + 8x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 3(x - y) - 8(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 5 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 5 = 0 \end{cases} & \text{(phương trình này vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Thế $x = y$ vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} x^3 &= 3x + 8x \Leftrightarrow x(x^2 - 11) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{11} \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = \pm\sqrt{11} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(0, 0); (\sqrt{11}, \sqrt{11}); (-\sqrt{11}, -\sqrt{11})$.

$$2) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Lấy hai phương trình trừ đi ta được: $x^2 - y^2 = 4(y - x)$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

+ Với $x = y$ thế vào (1) ta được: $-2x^2 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 = y \text{ (loại)} \\ x = 2 = y \end{cases}$

+ Với $x + y + 4 = 0 \Rightarrow y = -x - 4$ thế vào (1) ta được:

$$x^2 + 3x(x + 4) = -4(x + 4) \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -2$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(2, 2)$ hoặc $(-2, -2)$.

Bài 2: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 = y^3 - 4y^2 + my & (1) \\ y^2 = x^3 - 4x^2 + mx & (2) \end{cases}$$

Giải

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$x^2 - y^2 = y^3 - x^3 - 4(y^2 - x^2) + m(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (y - x)[x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + xy + y^2 + m - 3(x + y) = 0 \end{cases}$$

+ Với $x = y$ thế vào (2) ta được: $x^3 - 5x^2 + mx = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 5x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 = y \\ x^2 - 5x + m = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ta thấy hệ đã cho luôn có nghiệm $x = y = 0$, $\forall m$ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là phương trình (3) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 25 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{25}{4}$$

+ Với $m > \frac{25}{4}$ thì điều kiện đủ là phương trình:

$$x^2 + xy + y^2 + m - 3(x + y) = 0 \text{ phải vô nghiệm.}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x + y^2 - 3y + m = 0$$

Đặt: $f(x) = x^2 + (y - 3)x + y^2 - 3y + m$ có: $\Delta_1 = -3y^2 + 6y + 9 - 4m$

Lại có $\Delta_2' = 36 - 12m < 0$ với mọi $m > \frac{25}{4}$

Suy ra: $\Delta_1 < 0, \forall y \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ luôn vô nghiệm $\forall m > \frac{25}{4}$.

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m > \frac{25}{4}$.

Bài 3: Định m để hệ sau có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + |y| = m \\ \sqrt{y^2 + 2} + |x| = m \end{cases}$$

Giải

Nhận xét: Ta thấy đây là hệ chẵn đối với hai ẩn (x, y) . Nếu gọi (x_0, y_0) là nghiệm của hệ thì $(-x_0, -y_0)$ cũng là một nghiệm của hệ. Do đó, để hệ có nghiệm duy nhất thì cần: $\begin{cases} x_0 = -x_0 \\ y_0 = -y_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = 0$

Thế vào hệ đã cho ta được: $m = \sqrt{2}$

Ngược lại: Khi $m = \sqrt{2}$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + |y| = \sqrt{2} \\ \sqrt{y^2 + 2} + |x| = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{2} \\ |y| > 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} + |x| \geq \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + 2} \geq \sqrt{2} \\ |x| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y^2 + 2} + |x| \geq \sqrt{2}$$

Do đó dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 0$

Vậy $m = \sqrt{2}$ là giá trị cần tìm

Bài 4: Cho hệ: $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = m \\ 2y + \sqrt{x-1} = m \end{cases} \quad (I)$

- 1) Định m để hệ có nghiệm.
- 2) Định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} X = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ Y = \sqrt{y-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 1 = x \\ Y^2 + 1 = y \end{cases}$

Hệ (I) trở thành: $\begin{cases} 2(X^2 + 1) + Y = m & (1) \\ 2(Y^2 + 1) + X = m & (2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) ta được: $2(X^2 - Y^2) + Y - X = 0$

$$\Leftrightarrow (X - Y)(2X + 2Y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y \\ 2X + 2Y - 1 = 0 \end{cases}$$

Với $X = Y$ thế vào (1) ta được: $2X^2 + X + 2 = m$ (3)

$$\text{Với } 2X + 2Y = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2} - X \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq X \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Thế } Y = \frac{1}{2} \text{ vào (1) ta được: } 2X^2 - X + \frac{5}{2} = m \quad (4)$$

1) Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm

$$X \geq 0 \text{ hoặc phương trình (4) có nghiệm } 0 \leq X \leq \frac{1}{2}$$

Xét phương trình (3): $2X^2 + X + 2 = m$

Xét hàm: $f(X) = 2X^2 + X + 2$ với $X \geq 0$

$$f'(X) = 4X + 1 > 0 \quad \forall X \geq 0 \Rightarrow f(X) \geq f(0) = 2$$

$\Rightarrow$ Phương trình (3) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 2$

Xét phương trình (4): $2X^2 - X + \frac{5}{2} = m$

Xét hàm: $g(X) = 2X^2 - X + \frac{5}{2}$ với $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$

$$g'(X) = 4X - 1, \quad g'(X) = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên:

X	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$g'(X)$	-	0	+
$g(X)$	$\frac{5}{2}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{5}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên thì (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{19}{8} \leq m \leq \frac{5}{2}$

2) Hệ có nghiệm duy nhất:

+ Theo câu (1) thì: Nếu $2 \leq m \leq \frac{19}{8}$ hoặc $m > \frac{5}{2}$ thì phương trình (3) có nghiệm duy nhất còn (4) vô nghiệm nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

+ Với $m = \frac{19}{8}$ thì (4) có nghiệm duy nhất $X = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{17}{16}$ còn (3) có nghiệm $X = \frac{1}{4} = Y \Leftrightarrow x = y = \frac{17}{16}$ duy nhất nên $m = \frac{19}{8}$ thỏa mãn.

* Tóm lại: hệ đã cho có nghiệm duy nhất là: $2 \leq m \leq \frac{19}{8}$ v $m > \frac{5}{2}$

Bài 5: Định m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = m+1 \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{y} = m+1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad \quad \quad (2)$$

Giải

* **Cách 1:** Dùng đạo hàm. Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Từ hệ $\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = \sqrt{1-x} + \sqrt{y}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{1-x} = -\sqrt{1-y} + \sqrt{y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t} - \sqrt{1-t}$ với $0 \leq t \leq 1$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{1-t}} > 0, \forall t \in (0,1)$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm tăng.

Do đó: $\begin{cases} f(x) = f(y) \\ 0 \leq x, y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$

Khi $x = y$ thế vào (1) ta được: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = m+1$ (3)

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ với $0 \leq x \leq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f'(x)	+	0	-
f(x)	1	$\sqrt{2}$	1

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm duy nhất.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị của m cần tìm là: $m = \sqrt{2} - 1$

* **Cách 2:** Dùng điều kiện cần và đủ

Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ thì $(1-x_0, 1-y_0)$ cũng là một nghiệm của hệ. Vì vậy, hệ có nghiệm duy nhất thì cần:

$$\begin{cases} x_0 = 1-x_0 \\ y_0 = 1-y_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$$

Điều kiện đủ: Khi $m = \sqrt{2} - 1$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-y} = 2\sqrt{2} \end{cases} (*)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxky thì:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{y} + \sqrt{1-y} \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-y} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-x \\ y=1-y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2} \text{ thỏa } (*).$$

CHUYÊN ĐỀ 35. HỆ ĐẲNG CẤP

1. Dạng của hệ:
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2 = 0 \end{cases}$$

2. Cách giải:

- Giải hệ khi $x = 0$.
- Khi $x \neq 0$, đặt $y = tx$ để đưa về hệ phương trình bậc hai theo t và x .
- Khử x để được phương trình bậc hai theo t .
- Giải tìm t , rồi tìm x, y .

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x - y) = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 5 \\ \frac{y}{x} - \frac{2x}{y} = -\frac{5}{2} - \frac{2}{xy} \end{cases}$$

Giải

1) Khi $x = 0$ thì hệ vô nghiệm, đặt $y = tx$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases} x^3(1-t^3) = 7 & (1) \\ x^3t(1-t) = 2 & (2) \end{cases}$$

Vì $t = 0$ hay $t = 1$ không là nghiệm của hệ (1) và (2) nên lấy (1) chia cho (2) ta được $\frac{1-t^3}{t(1-t)} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2(1+t+t^2) = 7t$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{2}, \text{ từ (1)} \Rightarrow x^3 = \frac{7}{1 - \frac{1}{8}} = 8 \Rightarrow x = 2$$

$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ nghiệm của hệ là: $(2, 1)$

$$+ \text{ Với } t = 2, \text{ từ (1)} \Rightarrow x^3 = \frac{7}{1 - 8} = -1 \Rightarrow x = -1$$

$\Rightarrow y = -2 \Rightarrow$ nghiệm của hệ là $(-1, -2)$

Vậy nghiệm của hệ là $(-1, -2); (2, 1)$.

2) Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 5 \\ 2(y^2 - 2x^2) = 5xy - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 5 \\ 2y^2 - 4x^2 + 5xy = -4 \end{cases}$$

Khi $x = 0$ thì hệ trên vô nghiệm, đặt $y = t.x$ ta được:

$$\begin{cases} x^2(1 + t - t^2) = 5 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(2t^2 - 4 + 5t) = -4 & (2) \end{cases}$$

Nếu $2t^2 + 5t - 4 = 0$ thì (2) vô nghiệm, lấy (1) chia (2) ta được:

$$\frac{1 + t - t^2}{2t^2 + 5t - 4} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow 6t^2 + 29t - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{16}{3} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{2}, \text{ từ (1)} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{1 + t - t^2} = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow$ nghiệm của hệ là: $(2, 1); (-2, -1)$

$$+ \text{ Với } t = -\frac{16}{3}, \text{ từ (1)} \Rightarrow x^2 = -\frac{9}{59} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(2, 1); (-2, -1)$.

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$

Giải

Khi $x = 0$ thì hệ vô nghiệm, đặt $y = tx$, ta được:

$$\begin{cases} 2x^3 t(1 - t^2) = 3x \\ x^3(1 + t^2) = 10tx \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{2t(1 - t^2)}{1 + t^2} = \frac{3}{10t} \Leftrightarrow 20t^4 - 17t^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = \frac{1}{4} \\ t^2 = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm \frac{1}{2} \\ t = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

+ Với $t = \frac{1}{2}$, từ (1) $\Rightarrow x^2 = \frac{10t}{1+t^2} = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow$ nghiệm của hệ là: $(2, 1); (-2, -1)$

+ Với $t = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow x^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} \cdot \frac{5}{2}$

hay $x = \pm \frac{5}{2} \sqrt{\frac{27}{125}} \Rightarrow y = \pm \frac{5}{2} \sqrt{\frac{27}{125}}$

$\Rightarrow$ nghiệm của hệ là: $\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{5}{2}\sqrt{\frac{27}{125}}\right); \left(-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{27}{125}}\right)$

Tóm lại nghiệm của hệ là: $(2, 1); (-2, -1);$

$$\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{5}{2}\sqrt{\frac{27}{125}}\right); \left(-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{27}{125}}\right)$$

Bài 3: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m \end{cases}$$

1) Giải hệ khi $m = 0$

2) Định m để hệ có nghiệm.

Giải

1) Khi $m = 0$ ta được hệ:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$$

Khi $x = 0$ thì hệ trên vô nghiệm, đặt $y = tx$, ta được:

$$\begin{cases} x^2(3 + 2t + t^2) = 11 \\ x^2(1 + 2t + 3t^2) = 17 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{3 + 2t + t^2}{1 + 2t + 3t^2} = \frac{11}{17} \Leftrightarrow 16t^2 - 12t - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{4} \\ t = 2 \end{cases}$$

+ Với $t = -\frac{5}{4}$, từ (1) $\Rightarrow x^2 = \frac{11}{3 + 2t + t^2} = \frac{16}{3}$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \pm \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right); \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

+ Với $t = 1$, từ (1) $\Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 2$

$\Rightarrow$ nghiệm của hệ là $(1, 2); (-1, -2)$

* Tóm lại nghiệm của hệ đã cho là: $(1, 2); (-1, -2);$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right); \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$$

2) Định m để hệ có nghiệm:

+ Khi $x = 0$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} y^2 = 11 \\ 3y^2 = 17 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 11 \\ m = 16 \end{cases}$$

Như vậy, khi $m = 16$ thì hệ có nghiệm $x = 0$

+ Khi $m \neq 16$ thì hệ không có nghiệm $x = 0$

Đặt: $y = tx$, ta được hệ: $\begin{cases} x^2(3 + 2t + t^2) = 11 \\ x^2(1 + 2t + 3t^2) = 17 + m \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2t + 3t^2}{3 + 2t + t^2} = \frac{17 + m}{11}$$

$$\Leftrightarrow (16 - m)t^2 - 2(6 + m)t - 40 - 3m = 0 \quad (*)$$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m - 338 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - 11\sqrt{3} \leq m \leq 5 + 11\sqrt{3}$$

Bài 4: Xác định m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2mxy + (m+1)y^2 = m \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 + (m+1)xy + 2y^2 = 2m - 1 \end{cases} \quad (2)$$

có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Lấy (1) - (2) vế theo vế ta được:

$$(m-1)xy + (m-1)y^2 = 1 - m \quad (3)$$

+ Nếu $m = 1$ thì (3) luôn thỏa mãn với $\forall x, y \in \mathbb{R}$ và hệ đã cho trở thành:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

Phương trình này có vô số nghiệm x, y mà $-1 \leq y \leq 1$ nên $m = 1$ không thỏa mãn.

+ Nếu $m \neq 1$ thì (3) $\Leftrightarrow xy + y^2 = -1$

$$\Rightarrow x = -\frac{1+y^2}{y} \quad (\text{vì } y = 0 \text{ không là nghiệm}), \text{ thế vào (2) ta được:}$$

$$\left(\frac{1+y^2}{y}\right)^2 - (m+1)(1+y^2) + 2y^2 = 2m - 1$$

$$\Leftrightarrow (2-m)y^4 + (2-3m)y^2 + 1 = 0$$

$$\text{Đặt: } u = y^2 \geq 0 \text{ thì } (2-m)u^2 + (2-3m)u + 1 = 0 \quad (4)$$

Hệ đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (4)$ có hai nghiệm phân biệt thỏa:

$$0 < u_1 < u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-3m)^2 - 4(2-m) > 0 \\ \frac{1}{2-m} > 0 \\ \frac{3m-2}{2-m} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 8m - 4 > 0 \\ 2-m > 0 \\ \frac{3m-2}{2-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4+2\sqrt{13}}{9} < m < 2$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $\frac{4+2\sqrt{13}}{9} < m < 2$

CHUYÊN ĐỀ 36. HỆ CÓ DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Cách giải:

+ Xét các biểu thức bên trong dấu trị tuyệt đối và loại bỏ dấu trị tuyệt đối

+ Đặt ẩn phụ để đưa về các hệ đã biết cách giải.

Bài 1: Giải các hệ phương trình:

$$1) \begin{cases} |x+1| - |y+1| + 3 = 0 \\ |x+2| - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ x|x| + y|y| = -2 \end{cases}$$

Giải

$$1) \begin{cases} |x+1| - |y+1| + 3 = 0 & (1) \\ |x+2| - 2y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow |x+2| = 3 - 2y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2y \geq 0 \\ x + 2 = \pm(3 - 2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 1 - 2y \\ x = 2y - 5 \end{cases} \end{cases}$$

* Thay $x = 1 - 2y$ vào (1) ta được: $|2 - 2y| - |y + 1| + 3 = 0$ (3)

Bảng xét dấu:

y	$-\infty$		-1	1	$\frac{3}{2}$
$2 - 2y$	+		+	0	-
$y + 1$	-		0	+	+

+ Nếu $y \leq -1$ thì (3) $\Leftrightarrow 2 - 2y + y + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 6$ (loại)

+ Nếu $-1 < y \leq 1$ thì (3) $\Leftrightarrow 2 - 2y - y - 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$ (loại)

+ Nếu $1 < y \leq \frac{3}{2}$ thì (3) $\Leftrightarrow 2y - 2 - y - 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (loại)

* Thay $x = 2y - 5$ vào (1) ta được: $|2y - 4| - |y + 1| + 3 = 0$ (5)

với $y \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2y - 4 < 0$ nên (5) tương đương với $|y + 1| = -2y + 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y + 7 \geq 0 \\ y + 1 = \pm(-2y + 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{7}{2} \\ y = 8 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \text{ Suy ra: } x = -1$$

* Tóm lại hệ đã cho có nghiệm là: $(-1, 2)$

$$2) \begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 & (1) \\ |x| \cdot |x| + y|y| = -2 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có: $\Delta' = y^2 + 3y^2 = 4y^2$

$\Rightarrow$ (1) có hai nghiệm $\begin{cases} x = -y \\ x = 3y \end{cases}$

Thay $x = -y$ vào (2) ta được: $-y|y| + y|y| = -2$ phương trình này vô nghiệm.

Thay $x = 3y$ vào (2) ta được: $3y|3y| + y|y| = -2 \Leftrightarrow y|y| = -\frac{1}{5}$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Bài 2: Định m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} |x + y| + |x - y| = m & (1) \\ x^2 + y^2 = m^4 & (2) \end{cases}$

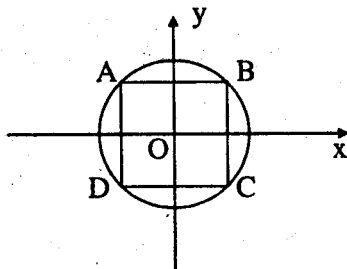
Giải

+ Nếu $m < 0$ thì hệ vô nghiệm.

+ Nếu $m \geq 0$. Xét $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x \leq y \leq x$

Từ (1) $\Rightarrow m = 2x \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$

Vẽ đồ thị của (1) khi: $\begin{cases} -\frac{m}{2} \leq y \leq \frac{m}{2} \\ x = \frac{m}{2} \end{cases}$



Đồ thị của (2) là đường tròn, đường kính m^2 . Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường tròn (C) và hình vuông ABCD có điểm chung. Điều này xảy ra khi và chỉ khi bán kính m^2 của đường tròn (C) không lớn hơn bán kính đường tròn ngoại tiếp của hình vuông ABCD và không nhỏ hơn bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD, tức là:

$$\frac{m}{2} \leq m^2 \leq \frac{m\sqrt{2}}{2} \quad (m \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } m = 0.$$

Bài 3: Tìm m để hệ sau có đúng tám nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} 2|x| + |y| = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a & (2) \end{cases}$$

Giải

Vẽ đồ thị của (1) là bốn cạnh của hình thoi ABCD với:

$$A\left(\frac{1}{2}, 0\right); B(0, 1); C\left(-\frac{1}{2}, 0\right); D(0, -1)$$

Các điểm $M(x, y)$ thỏa (2) nằm trên đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = \sqrt{a}$ với $a > 0$.

Hệ đã cho có đúng tám nghiệm khi và chỉ khi đường tròn (C) của (2) cắt bốn cạnh của hình thoi ABCD tại tám điểm phân biệt.

Xét hai vị trí đặc biệt của đường tròn:

a) Đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi

Gọi r_1 là bán kính của đường tròn này, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông

ta có:
$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}.$$

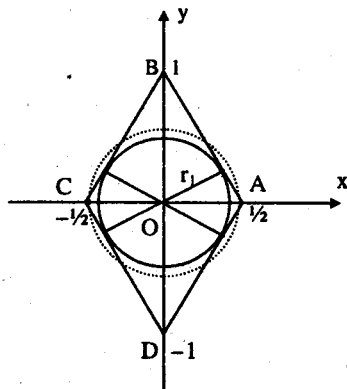
b) Đường tròn tâm O đi qua $A\left(\frac{1}{2}, 0\right).$

Đường tròn này có bán kính $r_2 = OA = \frac{1}{2}$.

Từ đó, đường tròn cắt bốn cạnh của hình vuông tại tám điểm phân biệt có bán kính thoả:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} < a^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$



Bài 4: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x| + y = 4 & (1) \\ x^2 - 2y^2 + 2|x| - y + 2 - a = 0 & (2) \end{cases}$$

Định a để hệ có nghiệm.

Giải

Từ (1) $\Rightarrow |x| = 4 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 4$

Thế $|x| = 4 - y$ vào (2) ta được: $-y^2 - 11y + 26 = a$ (3)

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $y \leq 4$

Xét hàm số: $f(y) = -y^2 - 11y + 26$; $f'(y) = -2y - 11$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{11}{2}$$

Bảng biến thiên:

y	$-\infty$	$-\frac{11}{2}$	4
$f'(y)$	$+$	0	$-$
$f(y)$	$-\infty$	$-\frac{17}{4}$	$-\frac{3}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (3) có nghiệm $y \leq 4$

$$\Leftrightarrow a \leq -\frac{17}{4}$$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $a \leq -\frac{17}{4}$.

CHUYÊN ĐỀ 37. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Các phương pháp thường sử dụng:

- 1) Đặt ẩn phụ.
- 2) Dùng đồ thị.
- 3) Dùng đạo hàm.
- 4) Dùng tam thức bậc hai.
- 5) Dùng điều kiện cần và đủ.

Bài 1: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 8\sqrt{2} - \sqrt{2xy} > 0 \Rightarrow \sqrt{xy} < 8$$

$$\text{Hệ (1) và (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+y)^2 - 2xy} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(16 - 2\sqrt{xy})^2 - 2xy} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \quad (3)$$

Đặt: $t = \sqrt{xy}$; $0 < t < 8$

$$(3) \text{ trở thành: } \sqrt{(16 - 2t)^2 - 2t^2} + t\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 4$$

Như vậy ta được: $\begin{cases} \sqrt{xy} = 4 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} \text{ và } \sqrt{y} \text{ là nghiệm của phương trình:}$

$$X^2 - 4X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow x = y = 4$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x = y = 4$.

Bài 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x} \geq 0 \\ b = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases}$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 35 \\ a^2b + b^2a = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 35 \\ ab(a+b) = 30 \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} S = a+b \\ P = ab \end{cases}; \text{điều kiện } S^2 - 4P \geq 0$$

$$\text{Hệ (II) trở thành: } \begin{cases} S^3 - 3SP = 35 \\ SP = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 = 125 \\ SP = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \text{ thỏa } S^2 - 4P > 0$$

$$\text{Hệ (II) trở thành: } \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ b=3 \\ a=3 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{y}=3 \\ \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \\ x=9 \\ y=4 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2(x+y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases} \quad (\text{I})$$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{x} \\ b = \sqrt[3]{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a^3 \\ y = b^3 \end{cases}$$

$$\text{Hệ (I) trở thành: } \begin{cases} 2(a^3 + b^3) = 3ab(a+b) \\ a+b=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 3ab(a+b) \\ a+b=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2[(a+b)^2 - 3ab] = 3ab \\ a+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ ab=8 \end{cases}$$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 6t + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=64 \end{cases} \vee \begin{cases} x=64 \\ y=8 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(8, 64); (64, 8)$.

Bài 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2} & (1) \\ x+y-xy=9 & (2) \end{cases}$$

Giải

Đặt: $t = \sqrt{\frac{6x}{x+y}} > 0$

(1) trở thành: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \vee t = 2$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{6x}{x+y}} = 2 \Leftrightarrow \frac{6x}{x+y} = 4 \Leftrightarrow x+y = \frac{3}{2}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$

Kết hợp với (2) ta được hệ:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x+y-xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2} - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x^2 - 3x + 18 = 0 \end{cases} \quad \text{hệ này vô nghiệm.}$$

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 11x$, thế vào (2) ta được:

$11x^2 - 12x + 9 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

Tóm lại: hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 5: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{2+\sqrt{xy}} & (I) \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 7 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

Giải

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x} > 0 \\ b = \sqrt{y} > 0 \end{cases}$

Hệ (I) trở thành: $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{7}{2+ab} \\ ab(a^2 + b^2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{7ab}{2+ab} \\ ab(a^2 + b^2) = 7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{7ab}{2+ab} \\ ab \cdot \frac{7ab}{2+ab} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{7ab}{2+ab} \\ 7t^2 = 7(2+t) \end{cases} \quad (\text{với } t = ab > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{7 \cdot 2}{2+2} \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = \frac{7}{2} \\ ab = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = \frac{15}{2} \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \sqrt{\frac{15}{2}} \quad (\text{do } ab > 0) \\ ab = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - \sqrt{\frac{15}{2}}X + 2 = 0$ phương trình này vô nghiệm. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 6: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \left(3 - \frac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y} = 4 \\ \left(3 + \frac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x} = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{y+42x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{2y}} \\ \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{2y}} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{y+42x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} = 3 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{15}{y+42x}$$

$$\Leftrightarrow y(y+42x) - 2x(y-42x) = 15xy$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 84x^2 + 25xy = 0 \Leftrightarrow (y-3x)(y+28x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y-3x=0 \quad (\text{vì } x > 0, y > 0 \text{ nên } y+28x > 0)$$

$$\Leftrightarrow y=3x \text{ thế vào (*) ta được: } \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3x}} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{5+2\sqrt{6}}{27} \Rightarrow y = \frac{5+2\sqrt{6}}{9}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x = \frac{5+2\sqrt{6}}{27}$ và $y = \frac{5+2\sqrt{6}}{9}$.

Bài 7: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2 + x + y + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + y + 1} = 10 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9} = 10 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{73 - 16x + x^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 9} & (1) \\ y = 8 - x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} &\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - \sqrt{x^2 + 9} \geq 0 \\ 73 - 16x + x^2 = 109 - 20\sqrt{x^2 + 9} + x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \sqrt{91} \\ 9x^2 - 72x + 144 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 4 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x = y = 4$.

Bài 8: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{3 + 2x^2y - x^4y^2} + x^4(1 - 2x^2) = y^4 \\ 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} = x^3(x^3 - x + 2y^2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 - (1 - x^2y)^2} = 2x^6 + y^4 - x^4 \\ -\sqrt{1 + (x - y)^2} = 1 - x^6 + x^4 - 2x^3y^2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được:

$$\sqrt{4 - (x^2y - 1)^2} = (x^3 - y^2)^2 + 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } 4 - (x^2y - 1)^2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{4 - (x^2y - 1)^2} \leq 2$$

$$\text{và } \begin{cases} (x^3 - y^2)^2 + 1 \geq 1 \\ \sqrt{1 + (x - y)^2} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow (x^3 - y^2)^2 + 1 - \sqrt{(x - y)^2 + 1} \geq 2$$

$$\text{Do đó từ (*) ta } \begin{cases} x^2y - 1 = 0 \\ x^3 - y^2 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x = y = 1$.

Bài 9: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+6} = 14 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+6} + \sqrt{y} + \sqrt{y+6} = 24 \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{x} + \sqrt{y+6} - \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+6} + \sqrt{y} + \sqrt{y+6} = 24 \\ \frac{6}{\sqrt{x} + \sqrt{x+6}} + \frac{6}{\sqrt{y} + \sqrt{y+6}} = 4 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x} + \sqrt{x+6} \geq \sqrt{6} \\ b = \sqrt{y} + \sqrt{y+6} \geq \sqrt{6} \end{cases}$ ta được hệ:

$$\begin{cases} a + b = 24 \\ ab = 36 \end{cases} \Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình.}$$

$$t^2 - 24t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 + 6\sqrt{3} \\ t = 12 - 6\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 12 + 6\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 + 6\sqrt{3} \\ b = 12 - 6\sqrt{3} < \sqrt{6} \end{cases}$$

Tóm lại hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 10: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{9x}{5} \\ \frac{x}{y} = \frac{5 + 3x}{30 - 6y} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x - \sqrt{x^2 - y^2} \neq 0 \\ x^2 - y^2 \geq 0 \\ y \neq 0 \\ y \neq 5 \end{cases} \quad (*)$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y}}{\frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{y}} = \frac{9x}{5} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (2)} &\Rightarrow (30 - 6y)x = (5 + 3x)y \\ &\Leftrightarrow 9xy = 30x - 5y \Leftrightarrow \frac{9x}{5} = 6 \cdot \frac{x}{y} - 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y}}{\frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{y}} = 6 \cdot \frac{x}{y} - 1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} * \text{ Nếu } y > 0 \text{ thì (5)} &\Leftrightarrow \frac{\frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}}{\frac{x}{y} - \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}} = 6 \cdot \frac{x}{y} - 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Đặt: $t = \frac{x}{y}$ thì (6) trở thành:

$$\frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{t - \sqrt{t^2 - 1}} = 6t - 1 \Leftrightarrow \left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)^2 = 6t - 1$$

$$\Leftrightarrow 2t\sqrt{t^2 - 1} = 2t(3 - t) \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{5}{3}$$

+ Với $t = 0 \Rightarrow x = 0$ không thỏa mãn (*)

+ Với $t = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$ thay vào (4) ta được: $x = 5 \Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow$ nghiệm của hệ là: (5, 3)

Nếu $y < 0$, làm tương tự như trên ta được kết quả là bài toán không có nghiệm.

Tóm lại nghiệm của hệ là (5, 3).

Bài 11: Định a để hệ có đúng hai nghiệm:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = a \\ x + y = 3a \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -2 \end{cases}$ và $a \geq 0$. Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{y+2} \geq 0 \end{cases}$

Hệ đã cho trở thành:
$$\begin{cases} u+v=a \\ u^2+v^2=3a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=a-u \\ u^2+v^2=3a+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=a-u \\ f(u)=2u^2-2au+a^2-3a-3=0 \end{cases} \quad (1)$$

Từ (1) $\Rightarrow a-u \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq u \leq a$

Để hệ có đúng hai nghiệm thì (2) có nghiệm $0 \leq u \leq a$

Nếu $a=0$ thì $u=\sqrt{\frac{3}{2}}$ nên chỉ xét $0 < u \leq a$

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn $\Leftrightarrow 0 < u_1 < u_2 \leq a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(0) > 0 \\ f(a) \geq 0 \\ 0 < \frac{a}{2} < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2+6a+6 > 0 \\ a^2-3a-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{21}}{2} < a < 3+\sqrt{15}$$

Vậy giá trị của a cần tìm là: $\frac{3+\sqrt{21}}{2} < a < 3+\sqrt{15}$.

Bài 12: Tìm a để hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x+y+\sqrt{2x(y-1)+a}=2 \end{cases} \quad (1)$$

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x(y-1)+a}=2-(x+y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-(x+y) \geq 0 \\ 2x(y-1)+a=[2-(x+y)]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq 2 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=a+1 \end{cases} \quad (2)$$

+ Nếu $a \leq -1$ thì (3) vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $a > -1$ thì các điểm $M(x, y)$ thỏa (3) nằm trên đường tròn tâm $I(1,2)$, bán kính $R = \sqrt{a+1}$.

Mặt khác, điểm $M(x, y)$ thỏa mãn (2) thì nằm trên nửa mặt phẳng xác định bởi $x+y \leq 2$

Điều này cần và đủ hệ có nghiệm là: (C) có điểm chung với nửa mặt phẳng xác định bởi $x+y \leq 2$.

Ta có: khoảng cách từ $I(1,2)$ đến đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ là: $d(I, \Delta) = \frac{|1+2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Do đó, yêu cầu bài toán được thỏa mãn $\Leftrightarrow R \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy các giá trị của a cần tìm là: $a \geq -\frac{1}{2}$.

Bài 13: Giải và biện luận hệ:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = a \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y+1} = a \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Cách 1:

Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = a \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}) - (\sqrt{2-x} - \sqrt{2-y}) = 0 \end{cases} \quad (1)$

(2)

Nếu $x = y = -1$ hoặc $x = y = 2$ thì (2) không thỏa mãn.

nên (2) $\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} + \frac{x-y}{\sqrt{2-y} + \sqrt{2-x}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{2-y} + \sqrt{2-x}} \right) = 0$

$\Leftrightarrow x = y$

Kết hợp với (1) ta được:
$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = a \end{cases} \quad (3)$$

Nếu $a \leq 0$ thì (3) vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.

Nếu $a > 0$ thì (3) $\Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{(x+1)(2-x)} = a^2$

Từ đó ta được:
$$\begin{cases} x = y \\ 2\sqrt{(x+1)(2-x)} = a^2 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ a \geq \sqrt{3} \\ 4(x+1)(2-x) = (a^2 - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ a \geq \sqrt{3} \\ x^2 - x - 2 + \frac{1}{4}(a^2 - 3)^2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Phương trình (4) có $\Delta = 9 - (a^2 - 3)^2 = 6a^2 - a^4$

a) Nếu $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2(6 - a^2) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{6}$ thì (4) có hai nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{6a^2 - a^4} \right] \\ x_2 = y_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{6a^2 - a^4} \right] \end{cases}$$

b) Nếu $\begin{cases} a > \sqrt{6} \\ a < \sqrt{3} \end{cases}$ thì (4) vô nghiệm.

Tóm lại:

+ Nếu $\begin{cases} a > \sqrt{6} \\ a < \sqrt{3} \end{cases}$ thì hệ vô nghiệm.

+ Nếu $\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{6}$ thì hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{6a^2 - a^4} \right] \\ x_2 = y_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{6a^2 - a^4} \right] \end{cases}$$

Cách 2:

$$\text{Từ hệ} \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = \sqrt{y+1} + \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} = \sqrt{y+1} - \sqrt{2-y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Xét hàm $f(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{2-t}$ với $-1 \leq t \leq 2$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2-t}} > 0, \forall t \in (-1, 2)$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm tăng trên $[-1, 2]$

$$\text{nên } \begin{cases} \forall x, y \in [-1, 2] \\ f(x) = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

Thế $x = y$ vào một trong hai phương trình của hệ ban đầu rồi làm như cách 1.

Bài 14: Tìm m để hệ sau có đúng bốn nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4m = 2x - 1 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + (x-1)^2 + 4m = 0 \end{cases} \quad \text{Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt{|x-1|} \geq 0 \\ v = \sqrt{7|y|} \geq 0 \end{cases}$$

$$(I) \text{ trở thành: } \begin{cases} 1 - u = v \\ u^4 + v^4 + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - u = v \\ u^4 + (1-u)^4 = -4m \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 1 - u \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq u \leq 1$$

Ứng với một nghiệm $1 \geq u \geq 0$ thì phương trình $u = \sqrt{|x-1|}$ có đúng hai nghiệm x nên để hệ có đúng bốn nghiệm phân biệt thì (2) chỉ có thể có một nghiệm $u \in (0, 1]$.

Xét hàm số: $f(u) = u^4 + (1-u)^4$ với $0 < u \leq 1$

$$f'(u) = 4u^3 - 4(1-u)^3$$

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow u^3 = (1-u)^3 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

u	0	$\frac{1}{2}$	1
f'(u)	-	0	+
f(u)	1	$\frac{1}{8}$	1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (2) có đúng một nghiệm $u \in [0,1]$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{4} \vee m = -\frac{1}{32}$$

Bài 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} + 6y = 24 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 32$

Lấy (1) + (2) ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} + \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 + 6y = 21$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} + \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} = (y-3)^2 + 12$$

Theo bất đẳng thức Bunhiakovsky, ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq \sqrt{(1+1)(x+32-x)} = 8$$

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq \sqrt{2(\sqrt{x} - \sqrt[4]{32-x})} \leq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} + \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq 12$$

Do đó dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ \sqrt{x} = \sqrt[4]{32-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=16 \end{cases}$

Thế $\begin{cases} y=3 \\ x=16 \end{cases}$ trực tiếp vào hệ (1) và (2) ta thấy nghiệm này thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\begin{cases} y=3 \\ x=16 \end{cases}$

Bài 16: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} m(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ m(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (m-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

1) Giải hệ khi $m = 16$.

2) Định m để hệ có nghiệm.

Giải

Nếu $m = 0$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} xy = 0 \\ -\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \text{ tùy ý} \end{cases}$

$\Rightarrow$ nghiệm của hệ là: $(0, y)$ với $y \in \mathbb{R}$.

Nếu $m \neq 0$, đặt $t = \sqrt[3]{x}$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} m(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = t^3 y \\ m(t^8 + t^6 + t^2 + 1) + (m-1)t^4 = 2yt^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 & (1) \\ m(t^8 + t^6 + t^4 + yt^3 + 1) = (2y+1)t^4 & (2) \end{cases}$$

Vì $t = 0$ không là nghiệm của hệ (I) nên chia hai vế của (1) cho t^3 và của (2)

cho t^4 ta được:

$$\begin{cases} m\left(t^3 + \frac{1}{t^3} + t + \frac{1}{t}\right) = y \\ m\left(t^4 + \frac{1}{t^4} + t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right) = 2y + 1 \end{cases} \quad (II)$$

Ta có: $t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t^2 + \frac{1}{t}\right)^3 - 3\left(t + \frac{1}{t}\right)$; $t^4 + \frac{1}{t^4} = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 2$

Đặt: $u = t + \frac{1}{t}$; $|u| \geq 2$ và $u^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$

Hệ (II) trở thành: $\begin{cases} m(u^3 - 3u + u) = y \\ m[(u^2 - 2)^2 - 2 + u^2 - 2 + 1] = 2y + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3 - 2u) = y \\ m(u^4 - 3u^2 + 1) = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3 - 2u) = y \\ m(u^4 - 3u^2 + 1) = 2m(u^3 - 2u) + 1 \end{cases} \quad (3)$$

1) Khi $m = 16$

$$(3) \Leftrightarrow 16(u^4 - 3u^2 + 1) = 32(u^3 - 2u) + 1$$

$$\Leftrightarrow (2u - 1)^4 - 18(2u - 1)^2 + 32 = 0$$

Đặt $a = (2u - 1)^2$ ta được: $a^2 - 18a + 32 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2u - 1)^2 = 2 \\ (2u - 1)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{2} \text{ (loại)} \\ u = \frac{5}{2} \\ u = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow u = \frac{5}{2} \text{ (do } |u| \geq 2 \text{)}$$

$$\text{với } u = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = 16 \left[\left(\frac{5}{2} \right)^3 - 5 \right] = 170$$

$$+ \text{ Với } t = 2 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 170$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(8, 170); \left(\frac{1}{8}, 170 \right)$

2) Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm

$$(3) \Leftrightarrow m(u^4 - 3u^2 + 1 - 2u^3 + 4u) = 1$$

$$\Leftrightarrow u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1 = \frac{1}{m}$$

Xét hàm số: $f(u) = u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1$ với $|u| \geq 2$

Ta có: $f'(u) = 4u^3 - 6u^2 - 6u + 4$

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow 4u^3 - 6u^2 - 6u + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -1 \vee u = \frac{1}{2} \vee u = 2$$

Bảng biến thiên:

u	$-\infty$	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f'(u)$	-	-	0	+	0	+
$f(u)$	$+\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm thỏa mãn $|u| \geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{1+3m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{3} \\ m > 0 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{3} \\ m > 0 \end{cases}$

CHUYÊN ĐỀ 38. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BA ẨN SỐ

Các phương pháp giải:

1. Dùng tính đơn điệu
2. Dùng phương pháp bị chặn
3. Đưa về tổng bình phương
4. Đặt ẩn phụ
5. Dùng BĐT Côsi
6. Lượng giác hoá

Bài 1: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0 \\ 2y^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0 \\ 2z^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$

Xét hàm $f(t) = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{2t^2 + 3t + 3}$

Ta có: $2t^2 + 3t + 3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = -\frac{1}{6} (4t + 3) (2t^2 + 3t + 3)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4}$$

Từ đó suy ra:

$+ f(t)$ tăng nếu $t \leq -\frac{3}{4}$ và $f(t)$ giảm nếu $t \geq -\frac{3}{4}$

- Xét $t \leq -\frac{3}{4}$ thì hàm $f(t)$ tăng:

Giải sử hệ có nghiệm (x_0, y_0, z_0)

+ Nếu $x_0 < y_0$ thì $f(x_0) < f(y_0) \Rightarrow z_0 < x_0 \Rightarrow f(z_0) < f(x_0)$

$\Rightarrow y_0 > z_0 \Rightarrow x_0 > y_0 > z_0$, điều này vô lý.

Như vậy, hệ chỉ có thể có nghiệm $x_0 = y_0 = z_0$, thế vào ta được:

$$2x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)(2x_0^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm $x_0 = y_0 = z_0 = -1$

- Xét $t \geq -\frac{3}{4}$ thì hàm $f(t)$ giảm:

Chứng minh tương tự như trên ta cũng được nghiệm $x_0 = y_0 = z_0 = -1$ nhưng nghiệm này loại vì $(x_0, y_0, z_0) \geq -\frac{3}{4}$

* Tóm lại hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x_0 = y_0 = z_0 = -1$

Bài 2: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 = y + 1 & (1) \\ y^2 = z + 1 & (2) \\ z^2 = x + 1 & (3) \end{cases}$$

Giải

- Giả sử $x > y > z$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow z^2 > x^2 > y^2$ (a)

+ Nếu $x \leq 0$ thì $0 \geq x > y \Rightarrow y^2 > z^2$ điều này vô lý với (a) do đó phải có $x > 0$.

+ Nếu $z \geq 0$ thì $x > y > z \geq 0 \Rightarrow y^2 > z^2$ mâu thuẫn với (a) do đó phải có $z < 0$.

Từ $x > 0 \Rightarrow z^2 - 1 > 0 \Rightarrow z < -1$ (vì $z < 0$)

$\Rightarrow z + 1 < 0 \Rightarrow y^2 < 0$ (theo (2)), điều này vô lý.

- Giả sử $x > z > y$:

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow z^2 > y^2 > x^2$ (b)

+ Nếu $x \leq 0$ thì $0 \geq x > z > y \Rightarrow z^2 < y^2$, mâu thuẫn với (b) nên ta phải có $x > 0$.

+ Nếu $y \geq 0$ thì $x > z > y \geq 0 \Rightarrow x^2 > y^2$ mâu thuẫn với (b) nên ta phải có $y < 0$

Với $x > 0 \Rightarrow z^2 = x + 1 > 1 \Rightarrow \begin{cases} z > 1 \\ z < -1 \end{cases}$

Theo (2) thì $z > -1$ nên $z > 1$

Cũng từ (2) $\Rightarrow y^2 = z + 1 > 2 \Rightarrow |y| > \sqrt{2}$

Vì $y < 0$ nên $y < -\sqrt{2}$.

Khi đó $x^2 = y + 1 < 1 - \sqrt{2} < 0$ (điều này vô lý)

Khi hoán vị vòng quanh (x, y, z) thì hệ không đổi nên tương tự xét các trường hợp còn lại và chứng minh tương tự, ta cũng được điều mâu thuẫn. Như vậy, hệ chỉ có thể có nghiệm $x = y = z$.

Thế $x = y = z$ vào (1) ta được: $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 3: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4z^2 + 12 = 0 & (1) \\ y^2 - 4yz + x^2 - 12 = 0 & (2) \\ 16z^2 - 8xz + 4y^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Giải

Lấy (1) + (2) + (3) vế theo vế ta được:

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (16z^2 - 8xz + x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (y - 2z)^2 + (x - 4z)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \end{cases}$$

Thế vào hệ đã cho ta được:

$$\begin{cases} 16z^2 - 32z + 4z^2 + 12 = 0 \\ 4z^2 - 8z^2 + 16z^2 - 12 = 0 \\ 16z^2 - 32z^2 + 16z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: (4, 2, 1) hoặc (-4, -2, -1)

Bài 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^6 + y^6 + z^6 = 3 \end{cases} \quad (1)$$

Giải

Theo bất đẳng thức Bunhiakovsky ta được:

$$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$, thế vào (1) ta được:

$$3x^6 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1 = y = z$$

Vậy nghiệm của hệ là: (1, 1, 1); (-1, -1, -1).

Bài 5: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$$

Giải

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên chia mỗi phương trình cho x^2 ta được:

$$\begin{cases} \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} = 6 \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} \left(\frac{1}{x} + y \right) = 6 \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \frac{y}{x} \\ b = \frac{1}{x} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{y}{x} \\ b^2 - 2a = \frac{1}{x^2} + y^2 \end{cases}$$

$$\text{Hệ (I) trở thành: } \begin{cases} ab = 6 \\ b^2 - 2a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ a = \frac{1}{2}(b^2 - 5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ \frac{b}{2}(b^2 - 5) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ b^3 - 5b - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ (b-3)(b^2 + 3b + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ b = 3 \end{cases} \quad (\text{do } b^2 + 3b + 4 > 0, \forall b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 2 \\ \frac{1}{x} + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \frac{1}{x} + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(1, 2); \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\text{Bài 6: Giải hệ phương trình sau: } \begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$$

Giải

- Nhận xét: Hệ có nghiệm $x = y = z = 1$. Ta chứng minh nghiệm này là duy nhất.

Thật vậy:

$$+ \text{ Nếu } x > 1 \text{ thì } x^5 - x^4 = x^4(x - 1) > 0$$

$$\text{Từ đó suy ra: } 2x^2y < 2 \Rightarrow y < \frac{1}{x^2} < 1$$

$$\Rightarrow y - 1 < 0 \Rightarrow y^5 - y^4 = y^4(y - 1) < 0$$

$$\Rightarrow 2y^2z > 2 \Rightarrow z > \frac{1}{y^2} > 1 \Rightarrow z^5 - z^4 = z^4(z - 1) > 0$$

$$\Rightarrow 2z^2x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{z^2} < 1 \text{ (điều này mâu thuẫn)}$$

• Nếu $x < 1$: Chứng minh tương tự như trên.

Từ đó dễ dàng suy ra: $x = y = z = 1$

Bài 7: Giải hệ phương trình sau:	$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3-z \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 \\ y^2 + z^2 = 6z \\ z \leq 3 \end{cases}$
---	---

Giải

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2(3+z)x + 3z + 3 = 0 & (1) \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 & (2) \\ y^2 + z^2 = 6z & (3) \\ z \leq 3 & (4) \end{cases}$$

Xem (1) là phương trình bậc hai theo x :

Ta có: $\Delta' = (3+z)^2 - 3(3z+3) = z^2 - 3z = z(z-3) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \leq 0 \\ z \geq 3 \end{cases} \quad (5)$$

Phương trình (3) có nghiệm $\Leftrightarrow -z^2 + 6z \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 6$ (6)

Từ (4), (5) và (6), suy ra $z = 3$ hoặc $z = 0$.

+ Với $z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \text{ (loại theo (1))} \end{cases}$$

+ Với $z = 3 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 52 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{217}}{2} \quad (a)$$

Lại có: từ (1) $\Rightarrow x = \frac{1}{3} \left(3 + z \pm \sqrt{z^2 - 3z} \right)$ hay $x = 2$ (b)

Từ (a) và (b) $\Rightarrow$ trường hợp này vô nghiệm.

- Với $y = -3$

Từ (2) $\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad (c)$

Từ (1) $\Rightarrow x = 2 \quad (d)$

Từ (c) và (d) $\Rightarrow x = 2$

Tóm lại nghiệm của hệ đã cho là: $(1, 0, 0)$ hoặc $(2, -3, 3)$.

Bài 8: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

Giải

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y(1 - x^2) \\ 2y = z(1 - y^2) \\ 2z = x(1 - z^2) \end{cases}$

Khi $x = \pm 1; y = \pm 1; z = \pm 1$ không là nghiệm của hệ trên

nên hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x}{1 - x^2} \\ z = \frac{2y}{1 - y^2} \\ x = \frac{2z}{1 - z^2} \end{cases} \quad (1)$

(2)

(3)

Đặt $x = \operatorname{tg} \alpha$; $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ thì:

$(1) \Leftrightarrow y = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$

$(2) \Leftrightarrow z = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$

$(3) \Leftrightarrow x = \frac{2\operatorname{tg} 4\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 4\alpha} = \operatorname{tg} 8\alpha = \operatorname{tg} \alpha$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 8\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\alpha}{7} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\forall -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{k\alpha}{7} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$\Rightarrow$ nghiệm $\alpha = \left\{-\frac{3\pi}{7}, -\frac{2\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}, 0, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}\right\}$

$\Rightarrow$ nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = \operatorname{tg} \alpha \\ y = \operatorname{tg} 2\alpha \\ z = \operatorname{tg} 4\alpha \end{cases}$

với α là các giá trị $\left\{-\frac{3\pi}{7}, -\frac{2\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}, 0, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}\right\}$.

Bài 9: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} xyz = 32 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 = 96 \\ x, y, z > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải

Ta có $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 = (x^2 + z^2) + (z^2 + 4y^2) + 4xy$
 $\geq 2xz + 4yz + 4xy$ (theo bất đẳng thức Côsi) (1)

Cũng theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$2xz + 4yz + 4xy \geq 3\sqrt{2 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} = 3\sqrt{32^2} = 96 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 \geq 96$

$$\Rightarrow \text{Dấu "}" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ z = 2y \\ 2xz = 4yz = 4xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases} \text{ thế vào (*) ta được:}$$

$$2y \cdot y \cdot 2y = 32 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là: (4, 2, 4)

Bài 10: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 - 3x = y(3x^2 - 1) \\ y^3 - 3y = z(3y^2 - 1) \\ z^3 - 3z = x(3z^2 - 1) \end{cases}$$

Giải

Vì $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ không là nghiệm của hệ

$$\text{nên hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} \\ z = \frac{y^3 - 3y}{3y^2 - 1} \\ x = \frac{z^3 - 3z}{3z^2 - 1} \end{cases}$$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ và khác $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, đặt: $x = \tan \alpha$

$$\left(\text{với } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ và } \alpha \neq \pm \frac{\pi}{6} \right)$$

Ta được:
$$\begin{cases} y = \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \operatorname{tg} 3\alpha \\ z = \frac{\operatorname{tg}^3 3\alpha - 3 \operatorname{tg} 3\alpha}{3 \operatorname{tg}^2 3\alpha - 1} = \operatorname{tg} 9\alpha \\ x = \frac{\operatorname{tg}^3 9\alpha - 3 \operatorname{tg} 9\alpha}{3 \operatorname{tg}^2 9\alpha - 1} = \operatorname{tg} 27\alpha \end{cases}$$

Suy ra: $\operatorname{tg} 27\alpha = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{26}$ (với $k \in \mathbb{Z}$)

Vì: $\begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{6} \\ \alpha \neq -\frac{\pi}{6} \end{cases}$ nên $\begin{cases} \frac{k\pi}{26} \neq \frac{\pi}{6} \\ \frac{k\pi}{26} \neq -\frac{\pi}{6} \end{cases}$ hiển nhiên $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{26} < \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow -13 < k < 13 \\ &\Rightarrow k = \{-12, -11, -10, \dots, 0, 1, 2, \dots, 10, 11, 12\} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:
$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} \alpha \\ y = \operatorname{tg} 3\alpha \\ z = \operatorname{tg} 9\alpha \end{cases}$$

với $\begin{cases} \alpha = \frac{k\pi}{26} \\ k = \{-13, -12, \dots, 12, 13\} \end{cases}$

Bài 11: Giải hệ:
$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) & (1) \\ xy + yz + zx = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x, y, z \neq 0$

Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ thì $(-z, -y, -x)$ cũng là một nghiệm của hệ và từ (1) suy ra x, y, z cùng dấu nên ta chỉ cần xét x, y, z dương là đủ.

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ và khác 0, đặt:
$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} \alpha \\ y = \operatorname{tg} \beta \\ z = \operatorname{tg} \gamma \end{cases}$$

$$\text{với } \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \beta, \gamma < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Từ đó hệ (1) và (2) trở thành:

$$\begin{cases} 3 \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = 4 \left(\operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right) = 5 \left(\operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (3)} &\Leftrightarrow 3 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} = 4 \frac{\operatorname{tg}^2 \beta + 1}{\operatorname{tg} \beta} = 5 \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma + 1}{\operatorname{tg} \gamma} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Phương trình (4)} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) = 1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \cot g(\beta + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

Từ (5) và (6), suy ra 2α ; 2β và 2γ là các góc trong một tam giác vuông, có các cạnh 3, 4, 5 (nhớ: $5^2 = 3^2 + 4^2$)

$$\text{Suy ra: } 2\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = 1 = z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \beta = y = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha = x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$ hoặc $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

$$\text{Bài 12: Giả sử } x, y, z \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 & (2) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c} & (3) \end{cases}$$

Hãy tính tổng $S = x^3 + y^3 + z^3$ theo a, b, c .

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S = x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx) + 3xyz \\ &= a^3 - 3a(xy + yz + zx) + 3xyz \end{aligned}$$

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow xyz = c(xy + yz + zx)$$

$$\text{Lại có: } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow xy + yz + zx &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x + y + z)^2 \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow xyz = c\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\text{Vậy } S = a^3 - \frac{3a}{2}(b^2 - a^2) + \frac{3c}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\text{hay } S = a^3 + \frac{3}{2}(b^2 - a^2)(c - a)$$

Bài 13: Định m để hệ sau có nghiệm:	$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + xy - yz - xz = 1 \\ y^2 + z^2 + yz = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \end{cases}$
--	---

Giải

+ Nếu $z = 0$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ y^2 = 2 \\ x^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = 0 \\ y^2 = 2 \\ x^2 = m \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình (*) luôn vô nghiệm nên hệ trên vô nghiệm.

+ Khi $z \neq 0$. Đặt $a = \frac{x}{z}; b = \frac{y}{z}$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 - 1 + \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z} - \frac{y}{z} - \frac{x}{z} = \frac{1}{z^2} \\ \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1 + \frac{y}{z} = \frac{2}{z^2} \\ \left(\frac{x}{z}\right)^2 + 1 + \frac{x}{z} = \frac{m}{z^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 + ab - b - a = \frac{1}{z^2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 1 + b = \frac{2}{z^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 + a = \frac{m}{z^2} \end{cases} \quad (3)$$

Lấy (1) - (2) ta được: $a^2 + ab - 2b - a - 2 = -\frac{1}{z^2}$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-2) + b(a-2) = -\frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow a+b+1 = -\frac{1}{z^2(a-2)} \Rightarrow b = -\frac{1}{z^2(a-2)} - (a+1)$$

Thay vào (2) ta được:

$$\left(\frac{1}{z^2(a-2)} + a+1 \right)^2 - \left(\frac{1}{z^2(a-2)} + a+1 \right) + 1 = \frac{2}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z^4(a-2)^2} + \frac{5}{z^2(a-2)} + a^2 + a + 1 = 0 \quad (4)$$

Từ (3): $a^2 + a + 1 = \frac{m}{z^2}$ thay vào phương trình (4) ta được:

$$\frac{1}{z^4(a-2)^2} + \frac{5}{z^2(a-2)} + \frac{m}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 \cdot m(a-2)^2 + 5 \cdot \frac{m}{a^2+a+1} (a-2) + 1 = 0 \quad (5)$$

Từ (3) $\Rightarrow z^2 = \frac{m}{a^2+a+1}$ thay vào (5) ta được:

$$\frac{m^2}{a^2+a+1} (a-2)^2 + 5 \cdot \frac{m}{a^2+a+1} (a-2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2+1)a^2 + (5m-4m^2+1)a + 4m^2 - 10m + 1 = 0 \quad (6)$$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (6) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = (5m-4m^2+1)^2 - 4(m^2+1)(4m^2-10m+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - \frac{50}{3}m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{25-\sqrt{616}}{3} \leq m \leq \frac{25+\sqrt{616}}{3}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $\frac{25-\sqrt{616}}{3} \leq m \leq \frac{25+\sqrt{616}}{3}$.

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
Chương 1. Phương trình bậc nhất, bậc hai. Tam thức bậc hai	5
A. Kiến thức cần nhớ	5
B. Các chuyên đề toán và phương pháp giải.....	7
Chuyên đề 1. Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất	7
Chuyên đề 2. Nghiệm của phương trình bậc nhất thỏa mãn một điều kiện cho trước.....	8
Chuyên đề 3. Giải và biện luận phương trình bậc hai	10
Chuyên đề 4. Chứng minh một phương trình bậc hai có nghiệm.....	13
Chuyên đề 5. Phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn một điều kiện cho trước.....	19
Chuyên đề 6. Quan hệ nghiệm của hai phương trình bậc hai	44
Chuyên đề 7. Các ứng dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai	57
Chương 2. Phương trình bậc ba, bậc bốn và đa thức	66
A. Lý thuyết cần nhớ.....	66
B. Các chuyên đề toán và phương pháp giải.....	67
Chuyên đề 8. Nhẩm nghiệm. Đưa về phương trình tích.....	67
Chuyên đề 9. Dùng phương pháp khảo sát hàm số.....	70
Chuyên đề 10. Dùng tính chất cực trị của hàm bậc ba	74
Chuyên đề 11. Nghiệm của phương trình bậc ba thỏa mãn một điều kiện cho trước	78
Chuyên đề 12. Các dạng phương trình bậc bốn chuẩn.....	84
Chuyên đề 13. Các phương pháp khác để giải phương trình đa thức.....	109
Chương 3. Phương trình chứa giá trị tuyệt đối	136
A. Lý thuyết cần nhớ.....	136
B. Các chuyên đề toán và phương pháp giải.....	136
Chuyên đề 14. Đưa về phương trình cơ bản. Xét dấu và chia trường hợp ...	136
Chuyên đề 15. Phương pháp đặt ẩn phụ	147
Chuyên đề 16. Phương pháp khảo sát hàm số	152
Chuyên đề 17. Phương pháp đồ thị.....	155

Chương 4. Phương trình chuỗi căn thức	160
A. Lý thuyết căn nhớ.....	160
B. Các chuyên đề toán và phương pháp giải.....	160
Chuyên đề 18. Lũy thừa hai vế và dùng công thức cơ bản.....	160
Chuyên đề 19. Đưa về tích	172
Chuyên đề 20. Đặt ẩn phụ toàn phần	177
Chuyên đề 21. Đặt ẩn phụ không toàn phần	194
Chuyên đề 22. Đặt hai ẩn đưa về phương trình tích hoặc tổng các đại lượng không âm.....	196
Chuyên đề 23. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình	202
Chuyên đề 24. Phương pháp lượng giác hóa.....	215
Chuyên đề 25. Dùng phương pháp đối lập	220
Chuyên đề 26. Phương pháp khảo sát hàm số	226
Chuyên đề 27. Phương pháp đồ thị.....	235
Chuyên đề 28. Phương pháp tam thức bậc hai.....	242
Chuyên đề 29. Phương pháp vectơ	245
Chương 5. Hệ phương trình đại số	251
Chuyên đề 30. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số	251
Chuyên đề 31. Hệ phương trình một ẩn số.....	260
Chuyên đề 32. Hệ phương trình giải bằng phương pháp thế	265
Chuyên đề 33. Hệ đối xứng loại 1	275
Chuyên đề 34. Hệ đối xứng loại 2	287
Chuyên đề 35. Hệ đẳng cấp.....	293
Chuyên đề 36. Hệ có dấu trị tuyệt đối.....	297
Chuyên đề 37. Hệ phương trình vô tỷ	301
Chuyên đề 38. Hệ phương trình ba ẩn số	314