



# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

**5** 2017  
Số 479

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



*Lagrange*  
(1736-1813)

Nhà toán học và nhà thiên văn Pháp



BẢ BA BA=CHÍN+CHÍN





# ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2017

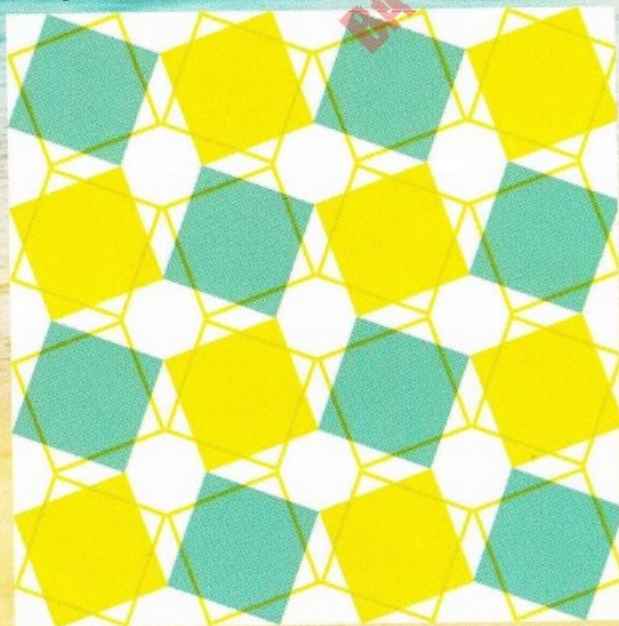
## Đợt 1

LTS. Mùa hè này Toán học và Tuổi trẻ xin mời các bạn tham gia Cuộc thi ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2017. Cuộc thi được chia làm hai đợt, để ra được đăng lần lượt trên Tạp chí TH&TT các số 479 (tháng 5/2017) và 480 (tháng 6/2017). Đối tượng dự thi là tất cả các bạn yêu thích Toán trên cả nước. Bạn hãy gửi lời giải ba bài đố vui Đợt 1 về Tòa soạn trước ngày 31/7/2016 (theo dấu Bưu điện) và lời giải ba bài Đợt 1 sẽ đăng trong TH&TT số 482 (tháng 8/2017).

### Bài 1. HÌNH VUÔNG VÀ TAM GIÁC VUÔNG VỚI 2017

a) Tìm hai hình vuông với số đo các cạnh là các số nguyên sao cho tổng diện tích hai hình vuông đó bằng 2017. Hãy lập luận để lời giải cần ít phép thử nhất.

b) Hãy tìm các tam giác vuông có số đo các cạnh đều là số nguyên sao cho số đo một cạnh bằng 2017.



ĐAN QUỲNH (Hà Nội)

### Bài 2. TAM GIÁC NGUYÊN !

Tam giác nguyên là tam giác có độ dài các cạnh là các số nguyên.

Không tính đến đơn vị đo, hãy tìm tất cả các tam giác nguyên có chu vi bằng diện tích.



NHƯ HOÀNG (Hà Nội)

### Bài 3. PHÂN CHIA MỘT TAM GIÁC ĐỀU

Cho tam giác đều  $ABC$ . Hãy vẽ đoạn thẳng  $DE$  với điểm  $D$  thuộc cạnh  $AB$ , điểm  $E$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho đoạn thẳng  $DE$  có độ dài ngắn nhất và chia tam giác  $ABC$  thành hai phần có diện tích bằng nhau.

VIỆT HẢI (Hà Nội)



## TRUNG HỌC CƠ SỞ

# TÌM LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN TÌM CỰC TRỊ TÍCH THÔNG QUA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG DỤNG

PHẠM VĂN SƠN

(GV Trường THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, Phú Thọ)

Các bài toán cực trị chứa tích thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi đồng thời nó là dạng toán được rất nhiều bạn yêu toán quan tâm, tìm hiểu. Có nhiều cách để giải quyết dạng toán này. Xin giới thiệu tới bạn đọc một bất đẳng thức khá đơn giản sau giúp giải quyết hiệu quả các bài toán cực trị tích.

## I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Bất đẳng thức:

$$x^m(b-x^n)^p \leq \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot p^p \cdot \left(\frac{b}{\frac{m}{n} + p}\right)^{\frac{m}{n} + p} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi:  $x = \sqrt[n]{\frac{mb}{m+pn}}$ .

Với  $b$  là số thực dương,  $p, m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq x \leq \sqrt[n]{b}$

và ta công nhận công thức sau:  $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$  với  $p, q$  là các số nguyên dương,  $a > 0$ .

**Chứng minh.** Đặt:  $A = x^m(b-x^n)^p$

Vì  $0 \leq x \leq \sqrt[n]{b}$  nên  $x \geq 0, b-x^n \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$ .

$$A = x^m(b-x^n)^p \Leftrightarrow A^n = (x^m(b-x^n)^p)^n$$

$$= x^{mn}(b-x^n)^{pn} = (x^n)^m(b-x^n)^{pn}.$$

Đặt  $x^n = a$ ,  $0 \leq a \leq b \Rightarrow A^n = a^m(b-a)^{pn}$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \underbrace{(b-a)(b-a)(b-a) \dots (b-a)}_{pn}$$

$$= \left(\frac{m}{pn}\right)^m \underbrace{\left(\frac{pn}{m}a\right)\left(\frac{pn}{m}a\right)\left(\frac{pn}{m}a\right) \dots \left(\frac{pn}{m}a\right)}_m \times \underbrace{(b-a)(b-a)(b-a) \dots (b-a)}_{pn}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho  $m+pn$  số không âm trong đó có  $m$  số  $\frac{pn}{m}a$  và  $pn$  số  $b-a$ :

$$\underbrace{\left(\frac{pn}{m}a\right)\left(\frac{pn}{m}a\right)\left(\frac{pn}{m}a\right) \dots \left(\frac{pn}{m}a\right)}_m \times \underbrace{(b-a)(b-a)(b-a) \dots (b-a)}_{pn}$$

$$\leq \left( \frac{\left(\frac{pn}{m}a\right) + \left(\frac{pn}{m}a\right) + \dots + \left(\frac{pn}{m}a\right) + \underbrace{(b-a) + (b-a) + \dots + (b-a)}_{pn}}{m+pn} \right)^{m+pn}$$

$$= \left( \frac{pna + pn(b-a)}{m+pn} \right)^{m+pn} = \left( \frac{pnb}{m+pn} \right)^{m+pn}$$

$$\Rightarrow A^n \leq \left(\frac{m}{pn}\right)^m \left(\frac{bpn}{m+pn}\right)^{m+pn}$$

$$\Rightarrow A \leq \sqrt[n]{\left(\frac{m}{pn}\right)^m \left(\frac{bpn}{m+pn}\right)^{m+pn}}$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} p^p \left(\frac{b}{\frac{m}{n} + p}\right)^{\frac{m}{n} + p}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi :}$$

$$\frac{pn}{m}a = b-a \Leftrightarrow \frac{pn}{m}x^n = b-x^n \Leftrightarrow x^n \left(\frac{pn}{m} + 1\right) = b$$

$$\Leftrightarrow x^n = \frac{bm}{m+pn} \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\frac{bm}{m+pn}}.$$

## II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài toán 1.** Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = x^3(2-x)^5, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

**Lời giải.** Với  $0 \leq x \leq 2$ :  $x \geq 0, 2-x \geq 0$ , áp dụng bất đẳng thức (\*) cho biểu thức  $x^3(2-x)^5$  với  $m=3, n=1, p=5, b=2$ , ta có:

$$A = x^3(2-x)^5 \leq \left(\frac{3}{1}\right)^3 \cdot 5^5 \cdot \left(\frac{2}{3+5}\right)^8 = \frac{5^5 \cdot 3^3}{4^8}.$$

Dấu “=” xảy ra khi :  $x = \frac{2.3}{3+5.1} = \frac{3}{4}$ .

**Bài toán 2.** Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = x(5-2x)^3, 0 \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

**Lời giải.** Với  $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$  thì  $x \geq 0, 5-2x \geq 0$ . Ta

có:  $P = x(5-2x)^3 = \frac{1}{2}(2x)(5-2x)^3 = \frac{1}{2}a(5-a)^3$   
(với  $a = 2x, 0 \leq a \leq 5$ ). Áp dụng BĐT (\*) cho  $a(5-a)^3$  với  $m=1, n=1, p=3, b=5$ :

$$P = \frac{1}{2}a(5-a)^3 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)^1 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{5}{\frac{1}{1}+3}\right)^{1+3} \\ = \frac{3^3 \cdot 5^4}{2 \cdot 4^4} = \frac{16875}{512}.$$

Dấu “=” xảy ra khi :  $a = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{8}$ .

**Bài toán 3.** Tìm giá trị lớn nhất của  $P = x\sqrt{1-x}$ .

**Lời giải.** ĐK:  $x \leq 1$ .

+ Nếu  $x \leq 0 \Rightarrow x\sqrt{1-x} \leq 0 \Rightarrow P \leq 0$  (1).

+ Nếu  $0 < x \leq 1 \Rightarrow P = x\sqrt{1-x} \geq 0$ .

Khi đó bình phương hai vế:  $P^2 = x^2(1-x)$ .

Áp dụng bất đẳng thức (\*) cho biểu thức  $x^2(1-x)$  có  $m=2, n=1, p=1, b=1$ :

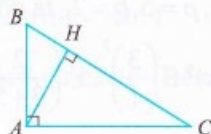
$$P^2 = x^2(1-x) \leq \left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot 1^1 \cdot \left(\frac{1}{\frac{2}{1}+1}\right)^{2+1} = \frac{4}{27}$$

$\Rightarrow P \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ . Dấu “=” xảy ra khi :  $x = \frac{2}{3}$  (2).

Từ (1) và (2): GTLN của  $P$  là  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$  khi  $x = \frac{2}{3}$ .

**Nhận xét.** Việc áp dụng bất đẳng thức (\*) còn giúp ta nhanh chóng tìm được cực trị của một số bài toán hình học có yếu tố diện tích. Ta tìm hiểu một bài toán điển hình cho dạng toán này:

**Bài toán 4.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = 2a$ . Đường cao  $AH$ , tìm vị trí điểm  $H$  để diện tích  $\triangle AHC$  lớn nhất.



**Lời giải.** Đặt  $HC = x, 0 < x < 2a \Rightarrow HB = 2a - x$ .

Ta có:  $AH = \sqrt{x(2a-x)}$ .

$$S_{AHC} = \frac{1}{2}AH.HC = \frac{1}{2}x\sqrt{x(2a-x)} \text{ (đvdt)}.$$

$S_{AHC}$  lớn nhất  $\Leftrightarrow x\sqrt{x(2a-x)}$  lớn nhất

$$\Leftrightarrow x^3(2a-x) \text{ lớn nhất.}$$

Vì  $0 < x < 2a$  nên  $x, 2a-x$  đều là những số dương. Áp dụng bất đẳng thức (\*) cho biểu thức  $x^3(2a-x)$  có  $m=3, n=1, p=1, b=2a$ :

$$x^3(2a-x) \leq \left(\frac{3}{1}\right)^3 \cdot 1^1 \cdot \left(\frac{2a}{3+1}\right)^4 = \frac{27a^4}{16}.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = \frac{3a}{2}$ .

Vậy GTLN của  $S_{AHC}$  là  $\frac{3\sqrt{3}a^2}{8}$  (đvdt) khi  $H$  là

điểm trên cạnh  $BC$  thỏa mãn  $HC = \frac{3a}{2} = \frac{3}{4}BC$ .

**Bài toán 5.** Cho  $0 < x, y, z < \sqrt{6}$  và  $x+y+z=3\sqrt{3}$ .

Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{6-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-z^2}}.$$

**Phân tích.** Để sử dụng được bất đẳng thức (\*) ta biến đổi như sau:

$$P = \frac{1}{\sqrt{6-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-z^2}} \\ = \frac{x^s}{\sqrt{x^{2s}(6-x^2)}} + \frac{y^s}{\sqrt{y^{2s}(6-y^2)}} + \frac{z^s}{\sqrt{z^{2s}(6-z^2)}}, s \in \mathbb{N}^*.$$

Với ý tưởng đơn giản các mẫu ta tìm GTLN của:  $x^{2s}(6-x^2), y^{2s}(6-y^2), z^{2s}(6-z^2)$ .

Vì  $0 < x, y, z < \sqrt{6} \Rightarrow x, y, z, 6-x^2, 6-y^2, 6-z^2$  là các số dương.

Áp dụng BĐT (\*) cho biểu thức  $x^{2s}(6-x^2)$  với  $m=2s, n=2, p=1, b=6$ :

$$x^{2s}(6-x^2) \leq \left(\frac{2s}{2}\right)^s \cdot 1^1 \cdot \left(\frac{6}{s+1}\right)^{s+1} = s^s \cdot \left(\frac{6}{s+1}\right)^{s+1}.$$

Tương tự:

$$y^{2s}(6-y^2) \leq s^s \cdot \left(\frac{6}{s+1}\right)^{s+1}, z^{2s}(6-z^2) \leq s^s \cdot \left(\frac{6}{s+1}\right)^{s+1}.$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$x = y = z = \sqrt{\frac{2s \cdot 6}{2s+1 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{6s}{s+1}}.$$

Vì  $0 < x, y, z < \sqrt{6}, x + y + z = 3\sqrt{3}$  nên ta chọn  $s \in \mathbb{N}^*$  sao cho:

$$0 < \sqrt{\frac{6s}{s+1}} < \sqrt{6}, \sqrt{\frac{6s}{s+1}} = \sqrt{3} \Rightarrow s = 1.$$

**Lời giải.** Với  $0 < x, y, z < \sqrt{6}$

$\Rightarrow x, y, z, 6 - x^2, 6 - y^2, 6 - z^2$  là các số dương.

$$P = \frac{1}{\sqrt{6-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-z^2}} \\ = \frac{x}{\sqrt{x^2(6-x^2)}} + \frac{y}{\sqrt{y^2(6-y^2)}} + \frac{z}{\sqrt{z^2(6-z^2)}}.$$

Ta tìm GTLN của các mẫu:

$$x^2(6-x^2), y^2(6-y^2), z^2(6-z^2), 0 < x, y, z < \sqrt{6}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (\*) cho biểu thức  $x^2(6-x^2)$  với  $b=6, m=2, n=2, p=1$ :

$$x^2(6-x^2) \leq 9 \Rightarrow \sqrt{x^2(6-x^2)} \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2(6-x^2)}} \geq \frac{x}{3}. \text{ Tương tự:}$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2(6-y^2)}} \geq \frac{y}{3}, \frac{z}{\sqrt{z^2(6-z^2)}} \geq \frac{z}{3}. \text{ Suy ra}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{6-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-z^2}} \geq \frac{x+y+z}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = z = \sqrt{3}$ .

Vậy GTNN của  $P$  là  $\sqrt{3}$  khi  $x = y = z = \sqrt{3}$ .

**Bài toán 6.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

**Tìm GTNN của:**  $P = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2}.$

**Phân tích.** Để sử dụng được bất đẳng thức (\*) ta biến đổi như sau:

$$P = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \\ = \frac{a^{s+1}}{a^s(1-a^2)} + \frac{b^{s+1}}{b^s(1-b^2)} + \frac{c^{s+1}}{c^s(1-c^2)}, s \in \mathbb{N}^*.$$

Vì  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  nên  $0 < a, b, c < 1 \Rightarrow a, b, c, 1-a^2, 1-b^2, 1-c^2$  là các số dương. Ta tìm GTNN để đơn giản các mẫu:

$$a^s(1-a^2), b^s(1-b^2), c^s(1-c^2).$$

Áp dụng bất đẳng thức (\*) cho biểu thức  $a^s(1-a^2)$  với  $m=s, n=2, p=1, b=1$ :

$$a^s(1-a^2) \leq \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{s}{2}+1} \cdot 1^1 \left(\frac{1}{\frac{s}{2}+1}\right)^{\frac{s}{2}+1}$$

$$= \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \left(\frac{2}{s+2}\right)^{\frac{s}{2}+1}.$$

$$\text{Tương tự: } b^s(1-b^2) \leq \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \left(\frac{2}{s+2}\right)^{\frac{s}{2}+1},$$

$$c^s(1-c^2) \leq \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot \left(\frac{2}{s+2}\right)^{\frac{s}{2}+1}.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c = \sqrt{\frac{s}{s+2}}.$

Vì  $0 < a, b, c < 1, a^2 + b^2 + c^2 = 1$  nên ta chọn  $s$ :

$$0 < \sqrt{\frac{s}{s+2}} < 1 \text{ và } 3\left(\sqrt{\frac{s}{s+2}}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3s}{s+2} = 1, s \in \mathbb{N}^* \Rightarrow s = 1.$$

$$\text{Lời giải. } P = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \\ = \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}. \text{ Từ BDT (*):}$$

$$a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}, b(1-b^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}, c(1-c^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

$$\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (do } a^2 + b^2 + c^2 = 1).$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Vậy GTNN của  $P$  là  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  khi  $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

**Bài toán 7.** Cho  $a, b, c \in [0;1]$ . Chứng minh

$$\text{rằng: } \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3abc.$$

**Phân tích.** Xét  $a, b, c \in (0;1]$ . Để sử dụng được bất đẳng thức (\*) ta biến đổi như sau:

$$\text{Ta có } VT = \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \\ = \frac{a^s}{a^s(2-a)} + \frac{b^s}{b^s(2-b)} + \frac{c^s}{c^s(2-c)}, s \in \mathbb{N}^*.$$

Ta tìm GTLN của các mẫu:

$$a^s(2-a), b^s(2-b), c^s(2-c).$$

Vì  $a, b, c \in (0;1] \Rightarrow a, b, c, 2-a, 2-b, 2-c$  là các số dương.

(Xem tiếp trang 28)

# Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

## THPT CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 478, tháng 4 năm 2017)

### VÒNG 1

**Câu 1.** Đáp số.  $A = -1$ .

**Câu 2.** a) Với  $m = 2$  ta có (d):  $y = 2x$ . Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của PT:  $x^2 = 2x$ .

+ Với  $x = 0$  thì tọa độ giao điểm là  $(0; 0)$ .

+ Với  $x = 2$  thì tọa độ giao điểm là  $(2; 4)$ .

b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm PT

$$x^2 = mx - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 2 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1; x_2 \Leftrightarrow$  PT (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 + 4 > 0, \text{ đúng với mọi } m.$$

Theo định lí Viète  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 > \frac{1}{2} \\ x_2 > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) > 0 \\ \left(x_1 - \frac{1}{2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} > 0 \\ x_1 + x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{7}{2} \Leftrightarrow m > \frac{7}{2} \\ m > 1 \end{cases}$$

**Câu 3.** a) Trừ theo về PT thứ nhất cho PT thứ hai của hệ được  $x^2 - y^2 = y - x \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0$ .

Hệ PT có 4 nghiệm  $(x; y)$  là  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); (-1; 0) \text{ và } (0; -1).$$

b) ĐK:  $x \geq -3$ . PT  $\Leftrightarrow x + 3 + \sqrt{x + 3} + \frac{1}{4} = 4x^2 + 6x + \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + 3} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2$$

• TH1:  $\sqrt{x + 3} + \frac{1}{2} = 2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x + 3} = 2x + 1$

$$\left(\text{ĐK: } x \geq -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8} \text{ (thỏa mãn).}$$

• TH2:  $\sqrt{x + 3} + \frac{1}{2} = -2x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x + 3} = -2x - 2$

(ĐK:  $-3 \leq x \leq -1$ )

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 7x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7 - \sqrt{33}}{8} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy PT có 2 nghiệm  $x_1 = \frac{-7 - \sqrt{33}}{8}; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}$ .

**Câu 4.** Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là  $x$  (h) với  $x > 4$ .

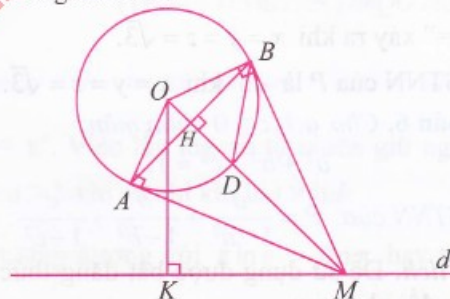
Khi đó thời gian người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là  $x + 6$  (h). Theo bài ra ta có PT:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 6} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ (loại); } x = 6 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là 6h; thời gian người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là 12h.

**Câu 5.** a) Bốn điểm  $O, A, M, B$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $OM$ .



b) Do  $MA, MB$  là hai tiếp tuyến của đường tròn ( $O$ ) nên  $MO$  là phân giác của  $\widehat{AMB}$  và  $\widehat{BD} = \widehat{AD}$ .

Lại có  $\widehat{MBD} = \widehat{ABD}$ , suy ra  $BD$  là phân giác của  $\widehat{ABM}$ . Từ đó  $D$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABM$ .

c) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AB$  với  $MO$ ,  $K$  là hình chiếu của  $O$  trên đường thẳng  $d$ . Ta có  $MH \perp AB$ ,  $H$  là trung điểm của  $AB$ ,  $OK = 2R$ .

$$AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{OM^2 - R^2};$$

$$AH = \frac{AM \cdot AO}{OM} = \frac{R \sqrt{OM^2 - R^2}}{OM};$$

$$MH = \frac{AM^2}{OM} = \frac{OM^2 - R^2}{OM}.$$

$$\text{Khi đó } S_{MAB} = \frac{1}{2} MH \cdot AB = MH \cdot HA$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(OM^2 - R^2)R\sqrt{OM^2 - R^2}}{OM^2} \\
&= R \left[ 1 - \left( \frac{R}{OM} \right)^2 \right] OM \sqrt{1 - \left( \frac{R}{OM} \right)^2} \\
&= R \cdot OM \left( \sqrt{1 - \left( \frac{R}{OM} \right)^2} \right)^3.
\end{aligned}$$

Ta luôn có  $OM \geq OK = 2R$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{R}{OM} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \left( \frac{R}{OM} \right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MAB} = R \cdot OM \left( \sqrt{1 - \left( \frac{R}{OM} \right)^2} \right)^3$$

$$\geq R \cdot 2R \cdot \left( \sqrt{\frac{3}{4}} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Vậy  $S_{MAB}$  nhỏ nhất khi  $M \equiv K$ .

**Câu 1. a)** Ta có  $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{b} = a + b + \frac{a}{b} + 1$

$$\Leftrightarrow 1 = (a-b) \left( \frac{1}{b} + a + b + \frac{a}{b} + 1 \right).$$

$$\text{Có VP} = \frac{a}{b} - 1 + a^2 - b^2 + \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}.$$

$$\text{Mà } \frac{a^2}{b} = \frac{b^3}{b} = b^2; \frac{a}{b} = \frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow \text{VP} = -1 + a^2 = -1 + 2 = 1 = \text{VT (đpcm)}.$$

$$\text{b) } (x-2)^3 = \left( \sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1} \right)^3$$

$$= (\sqrt{28}+1) - (\sqrt{28}-1)$$

$$-3\sqrt[3]{(\sqrt{28}+1)(\sqrt{28}-1)} \left( \sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1} \right)$$

$$= 20 - 9x \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 21x = 28 \Rightarrow P = 2044.$$

**Câu 2. a)** Giả sử  $(d_1)$  cắt  $(d_2)$  tại  $A(x; y)$  thì  $A(1; 0)$ . Để  $(d_1)$ ,  $(d_2)$ ,  $(d_3)$  đồng quy thì  $A \in (d_3)$

$$\Leftrightarrow a^3 - a^2 - a - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 4a^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

$$\Leftrightarrow (a\sqrt[3]{4})^3 = (a+1)^3 \Leftrightarrow a\sqrt[3]{4} = a+1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}.$$

b) PT được sửa lại

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2015. \text{ Ta có}$$

$$xy(z+1) + y(z+1) + x(z+1) + (z+1) = 2016$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = 2016$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = 7 \cdot 3^2 \cdot 2^5 = 16 \cdot 14 \cdot 9.$$

Vậy nghiệm  $(x; y; z)$  của PT là  $(15; 13; 8)$ .

Nếu PT đề bài là  $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2016$  thì PT vô nghiệm.

**Câu 6.** Do  $abc \geq 1$  nên  $\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{\frac{a^5}{abc} + b^2 + c^2}$

$$= \frac{1}{\frac{a^4}{bc} + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{\frac{2a^4}{b^2 + c^2} + b^2 + c^2} = \frac{b^2 + c^2}{2a^4 + (b^2 + c^2)^2}.$$

Ta lại có:  $2a^4 + (b^2 + c^2)^2 \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2$  (dùng định nghĩa hoặc biến đổi tương đương)

$$\Rightarrow \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} \leq \frac{3(b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} \leq \frac{3(c^2 + a^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3(a^2 + b^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta thu được:

$$\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

## VÒNG 2

**Câu 3. a)** Hệ PT  $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{2x}{x^2 + 1} \\ y^3 = -2(x-1)^2 - 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } -2(x-1)^2 - 1 \leq -1 \Rightarrow y^3 \leq -1 \Rightarrow y \leq -1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow y = -1$  nên  $x = 1$ . Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy  $(x; y) = (1; -1)$  là nghiệm của hệ.

b) ĐK:  $x \geq -1$ . Đặt  $\sqrt{2x+5} = a; \sqrt{2x+2} = b$  ( $a \geq 0; b \geq 0$ ). Ta có:  $a^2 - b^2 = 3$ ;

$$\sqrt{4x^2 + 14x + 10} = \sqrt{(2x+5)(2x+2)} = ab.$$

$$\text{Thay vào PT đã cho ta được: } (a-b)(1+ab) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a-b)(1-a)(1-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 1-a=0 \\ 1-b=0 \end{cases} \text{ nên}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x+5} = \sqrt{2x+2} \text{ (VN)} \\ \sqrt{2x+5} = 1 \\ \sqrt{2x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (loại)} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy PT có nghiệm  $x = -\frac{1}{2}$ .

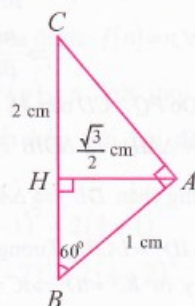
**Câu 4.** Tính được đường cao

AH của  $\triangle ABC$  bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (cm)

và  $BC = 2$  (cm).

Thể tích của khối tròn xoay là:

$$\frac{1}{3} BC \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{\pi}{2} (\text{cm}^3).$$



# ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ TĨNH NĂM HỌC 2016 - 2017

(Thời gian làm bài: 150 phút)

**Câu 1. (1,5 điểm)** Cho ba số  $a, b, c$  thỏa mãn:

$$c^2 + 2(ab - bc - ac) = 0, \quad b \neq c \quad \text{và} \quad a + b \neq c.$$

Chứng minh rằng:  $\frac{2a^2 - 2ac + c^2}{2b^2 - 2bc + c^2} = \frac{a - c}{b - c}$ .

**Câu 2. (2,5 điểm)** a) Giải phương trình:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x+1} = 3x^2 - 2x - 1.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x + \frac{3}{x+y} = 13 \\ 12(x^2 + xy + y^2) + \frac{9}{(x+y)^2} = 85 \end{cases}$$

**Câu 3. (2,5 điểm)** a) Tìm các bộ ba số nguyên dương  $(x, y, z)$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 0 \end{cases}$$

b) Cho  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn:  $a + b + c = 2016$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a + \sqrt{2016a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2016b + ac}} + \frac{c}{c + \sqrt{2016c + ab}}.$$

**Câu 4. (2,5 điểm)** Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $E$  thay đổi trên cung nhỏ  $AB$  ( $E$  khác  $A$  và  $B$ ). Từ  $B$  và  $C$  lần lượt kẻ các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$ , các tiếp tuyến này cắt đường thẳng  $AE$  theo thứ tự tại  $M$  và  $N$ . Gọi  $F$  là giao điểm của  $BN$  và  $CM$ .

a) Chứng minh:  $MB \cdot CN = BC^2$ .

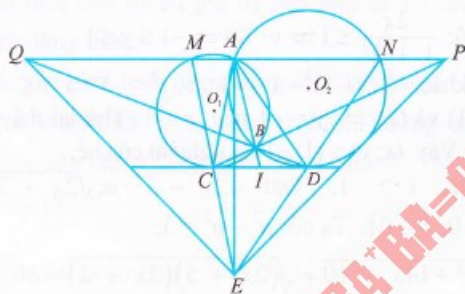
b) Khi điểm  $E$  thay đổi trên cung nhỏ  $AB$ , chứng minh đường thẳng  $EF$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 5. (1 điểm)** Trên một đường tròn, lấy 1000 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Mỗi điểm được gán với một giá trị là một số thực khác không, giá trị của mỗi điểm màu xanh bằng tổng giá trị của hai điểm màu đỏ kề với nó, giá trị của mỗi điểm màu đỏ bằng tích giá trị của hai điểm màu xanh kề với nó. Tính tổng giá trị của 1000 điểm trên.

**LÊ THẾ THÔNG**

(GV THPT Lê Quảng Trí, Kỳ Anh, Hà Tĩnh) *Giới thiệu*

**Câu 5.** a) Do  $MN \parallel CD$  nên  $\widehat{EDC} = \widehat{ENA}$ .



Mặt khác  $\widehat{CDA} = \widehat{DNA}$  (cùng chắn  $\widehat{DA}$ )

$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{CDA}$  hay  $DC$  là phân giác của  $\widehat{EDA}$ . Tương tự,  $CD$  cũng là phân giác của  $\widehat{ECA}$ . Từ đó  $\triangle ACD = \triangle ECD$  (g.c.g)  $\Rightarrow DA = DE \Rightarrow \triangle DAE$  cân tại  $D \Rightarrow AE \perp CD$ .

b) Ta có  $CD$  là trung trực của  $AE$  và  $CD \parallel MN$  nên  $CD$  là đường trung bình  $\triangle MNE \Rightarrow CD = \frac{1}{2}MN$ .

$$\begin{aligned} \text{Lại có } CD \parallel PQ &\Rightarrow \frac{BC}{BP} = \frac{BD}{BQ} = \frac{CD}{PQ} \\ &\Rightarrow \frac{BC}{BP} + \frac{BD}{BQ} = \frac{2CD}{PQ} = \frac{MN}{PQ}. \end{aligned}$$

c) Do  $PQ \parallel CD$  nên  $AE \perp PQ$  (\*). Gọi  $I = AB \cap CD$ .

Xét  $\triangle AID$  và  $\triangle DIB$  có: góc  $\widehat{I}$  chung,  $\widehat{IAD} = \widehat{IDB}$  (cùng chắn  $\widehat{DB}$ )  $\Rightarrow \triangle AID \sim \triangle DIB$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{IB}{ID}$

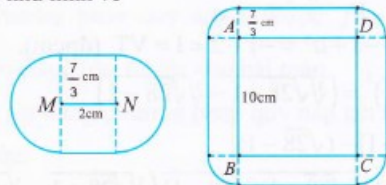
$$\Rightarrow ID^2 = IA \cdot IB. \quad \text{Tương tự: } IC^2 = IA \cdot IB.$$

Suy ra  $IC^2 = ID^2 \Rightarrow IC = ID$ . Do  $CD \parallel PQ$ , theo định lý

$$\text{Thales, ta có: } \frac{ID}{AQ} = \frac{IB}{AB} = \frac{IC}{AP} \Rightarrow AQ = AP \quad (**)$$

Từ (\*) và (\*\*) suy ra  $AE$  là trung trực của  $PQ$  và  $EPQ$  là tam giác cân tại  $E$ .

**Câu 6.** Với mỗi đoạn thẳng và hình vuông đã cho, xét các hình bao như hình vẽ



Tổng diện tích của 8 hình bao đoạn thẳng là

$$S_1 = 8 \left[ \frac{28}{3} + \left( \frac{7}{3} \right)^2 \pi \right] \approx 211,50 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích hình bao hình vuông là

$$S_2 = 100 + \frac{280}{3} + \left( \frac{7}{3} \right)^2 \pi \approx 210,44 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Do  $S_1 > S_2$  mà các hình bao đoạn thẳng nằm hoàn toàn trong hình bao hình vuông nên tồn tại 2 đoạn thẳng  $d_1, d_2$  có hình bao giao nhau.

Gọi  $I$  là điểm thuộc phần giao đó thì trên  $d_1, d_2$  tồn tại hai điểm  $E, F$  thuộc hai đoạn thẳng sao cho  $IE \leq \frac{7}{3}$  cm,

$$IF \leq \frac{7}{3} \text{ cm. Khi đó } EF \leq IE + IF \leq \frac{14}{3} \text{ cm.}$$

**NGUYỄN THANH GIANG**

(GV THPT chuyên Hưng Yên) *Giới thiệu*

NGUYỄN VĂN MẬU  
NGUYỄN MINH TUẤN  
(Hội Toán học Hà Nội)

### SENIOR SECTION

#### 1. QUESTION

**Question 1.** Suppose  $x_1, x_2, x_3$  are the roots of polynomial  $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ .

The sum  $|x_1| + |x_2| + |x_3|$  is

(A): 4 (B): 6 (C): 8 (D): 10 (E): None of the above.

**Question 2.** How many pairs of positive integers  $(x, y)$  are there, those satisfy the identity  $2^x - y^2 = 4$ ?

(A): 1 (B): 2 (C): 3 (D): 4 (E): None of the above.

**Question 3.** The number of real triples  $(x, y, z)$  that satisfy the equation  $x^4 + 4y^4 + z^4 + 4 = 8xyz$  is

(A): 0; (B): 1; (C): 2; (D): 8; (E): None of the above.

**Question 4.** Let  $a, b, c$  be three distinct positive numbers. Consider the quadratic polynomial

$$P(x) = \frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + 1.$$

The value of  $P(2017)$  is

(A): 2015 (B): 2016 (C): 2017 (D): 2018 (E): None of the above.

**Question 5.** Write 2017 following numbers on the blackboard:

$$-\frac{1008}{1008}, -\frac{1007}{1008}, \dots, -\frac{1}{1008}, 0, \frac{1}{1008}, \frac{2}{1008}, \dots, \frac{1007}{1008}, \frac{1008}{1008}.$$

One processes some steps as: erase two arbitrary numbers  $x, y$  on the blackboard and then write on it the number  $x + 7xy + y$ . After 2016 steps, there is only one number.

The last one on the blackboard is

(A):  $-\frac{1}{1008}$  (B): 0 (C):  $\frac{1}{1008}$  (D):  $-\frac{144}{1008}$

(E): None of the above.

**Question 6.** Find all pairs of integers  $a, b$  such that the following system of equations has a unique integral solution  $(x, y, z)$ :

$$\begin{cases} x+y=a-1 \\ x(y+1)-z^2=b \end{cases}$$

**Question 7.** Let two positive integers  $x, y$  satisfy the condition  $x^2 + y^2 \leq 44$ . Determine the smallest value of  $T = x^3 + y^3$ .

**Question 8.** Let  $a, b, c$  be the side-lengths of triangle  $ABC$  with  $a+b+c=12$ . Determine the smallest value of  $M = \frac{a}{b+c-a} + \frac{4b}{c+a-b} + \frac{9c}{a+b-c}$ .

**Question 9.** Cut off a square carton by a straight line into two pieces, then cut one of two pieces into two small pieces by a straight line, ect. By cutting 2017 times we obtain 2018 pieces. We write number 2 in every triangle, number 1 in every quadrilateral, and 0 in the other polygons. Is the sum of all inserted numbers always greater than 2017?

**Question 10.** Consider all words constituted by eight letters from  $\{C, H, M, O\}$ . We arrange the words in an alphabet sequence. Precisely, the first word is CCCCCCCC, the second one is CCCCCCCH, the third is CCCCCCCM, the fourth one is CCCCCCCO, ..., and the last word is OOOOOOOO.

a) Determine the 2017th word of the sequence?

b) What is the position of the word HOMCHOMC in the sequence?

**Question 11.** Let  $ABC$  be an equilateral triangle, and let  $P$  stand for an arbitrary point inside the triangle. Is it true that

$$|\widehat{PAB} - \widehat{PAC}| \geq |\widehat{PBC} - \widehat{PCB}|?$$

**Question 12.** Let  $(O)$  denote a circle with a chord  $AB$ , and let  $W$  be the midpoint of the minor arc  $AB$ . Let  $C$  stand for an arbitrary point on the major arc  $AB$ . The tangent to the circle  $(O)$  at  $C$  meets the tangents at  $A$  and  $B$  at points  $X$  and  $Y$ , respectively. The lines  $WX$  and  $WY$  meet  $AB$  at points  $N$  and  $M$ , respectively. Does the length of segment  $NM$  depend on position of  $C$ ?

**Question 13.** Let  $ABC$  be a triangle. For some  $d > 0$  let  $P$  stand for a point inside the triangle such that  $|AB| - |PB| \geq d$ , and  $|AC| - |PC| \geq d$ . Is the following inequality true  $|AM| - |PM| \geq d$ , for any position of  $M \in BC$ ?

**Question 14.** Put  $P = m^{2003}n^{2017} - m^{2017}n^{2003}$ , where  $m, n \in \mathbb{N}$ .

- a) Is  $P$  divisible by 24?  
b) Do there exist  $m, n \in \mathbb{N}$  such that  $P$  is not divisible by 7?

**Question 15.** Let  $S$  denote a square of side-length 7, and let eight squares with side-length 3 be given. Show that it is impossible to cover  $S$  by those eight small squares with the condition: an arbitrary side of those (eight) squares, is either coincided, parallel, or perpendicular to others of  $S$ .

## 2. ANSWER AND SOLUTION

**Question 1.** Answer. The solution is (B).

**Question 2.** Answer. The solution is (A).

**Question 3.** Answer. The solution is (E).

**Question 4.** Answer. The solution is (D).

**Question 5.** Answer. The solution is (D).

**Question 6. Solution.** Write the given system in

the form  $\begin{cases} x+y+1=a \\ x(y+1)-z^2=b \end{cases}$  (\*). System (\*) is

symmetric by  $x$ ;  $y+1$  and is reflect in  $z$  at 0 then the necessary condition for (\*) to have a unique solution is  $(x, y+1, z) = (t, t, 0)$ . Putting this in (\*), we find  $a^2 = 4b$ . Conversely, if  $a^2 = 4b$  then  $(x-(y+1))^2 + 4z^2 = (x+y+1)^2 + 4z^2 - 4x(y+1) = a^2 - 4b = 0$ . This implies the system has a unique solution  $(x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} - 1, 0\right)$ .

**Question 7. Solution.** Note that  $44 = 4 \times 11$ . It follows  $x^2 + y^2 \equiv 11$ . We shall prove that  $x \equiv 11$  and  $y \equiv 11$ . Indeed, if  $x$  and  $y$  are not divisible by 11 then by the Fermat's little theorem, we have  $x^{10} + y^{10} \equiv 2 \pmod{11}$  (1). On the other hand, since  $x^2 + y^2 \equiv 11$  then  $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{11}$ . It follows  $x^{10} + y^{10} \equiv 0 \pmod{11}$ , which is not possible by (1). Hence,  $x \equiv 11$  or  $y \equiv 11$  and that follow  $x \equiv 11$  and  $y \equiv 11$  simultaneously (if  $x \equiv 11$  then from  $x^2 + y^2 \equiv 11$ , it follows  $y^2 \equiv 11$  and then  $y \equiv 11$ ). In other side, we have  $x^2 + y^2 \equiv 4$  and  $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ ,  $y^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . We then have  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $y^2 \equiv 0 \pmod{4}$ . It follows  $x \equiv 2, y \equiv 2$ . Since  $(2, 11) = 1$ ,  $x \equiv 22$  and  $y \equiv 22$ . Thus,  $\min A = 22^3 + 22^3 = 21296$ .

**Question 8. Solution.** Let

$$x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{c+a-b}{2}; z = \frac{a+b-c}{2} \text{ then } x, y, z > 0 \text{ and } x+y+z = \frac{a+b+c}{2} = 6, a = y+z,$$

$b = z+x, c = x+y$ . We have

$$M = \frac{y+z}{2x} + \frac{4(z+x)}{2y} + \frac{9(x+y)}{2z} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{9x}{z} \right) + \left( \frac{4z}{y} + \frac{9y}{z} \right) \right] \geq \frac{1}{2} \left( 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{9x}{z}} + 2\sqrt{\frac{4z}{y} \cdot \frac{9y}{z}} \right) = 11.$$

The equality yields if and only if  $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{4x}{y} \\ \frac{z}{x} = \frac{9x}{z} \\ \frac{4z}{y} = \frac{9y}{z} \end{cases}$ .

$$\text{Equivalently, } \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ 2z = 3y \end{cases}$$

By simple computation we receive  $x = 1, y = 2, z = 3$ . Therefore,  $\min S = 11$  when  $(a, b, c) = (5, 4, 3)$ .

**Question 9. Solution.** After 2017 cuts, we obtain 2018  $n$ -convex polygons with  $n \geq 3$ . After each cut the total of all sides of those  $n$ -convex polygons increases at most 4. We deduce that the total number of sides of 2018 pieces is not greater than  $4 \times 2018$ . If the side of a piece is  $k_j$ , then the number inserted on it is greater or equal to  $5 - k_j$ . Therefore, the total of all inserted numbers on the pieces is greater or equal to  $\sum_j (5 - k_j) = 5 \times 2018 - \sum_j k_j$   
 $\geq 5 \times 2018 - 4 \times 2018 = 2018 > 2017$ .

The answer is positive.

**Question 10. Solution.** We can associate the letters C;H;M;O with four numbers 0; 1; 2; 3, respectively. Thus, the arrangement of those words as a dictionary is equivalent to arrangement of those numbers increasing.

a) Number 2016 (the 2017<sup>th</sup> word) in quaternary is  $\{133200\}_4 = \{00133200\}_4 \sim \text{CCHOOMCC}$ .

b) The word HOMCHOMC is corresponding to the number  $\{13201320\}_4$  which means the number 13201320 in quaternary. Namely,  $\{13201320\}_4 = 4^7 + 3 \times 4^6 + 2 \times 4^5 + 0 \times 4^4 + 1 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2 \times 4 + 0$ . A simple computation gives  $\{13201320\}_4 = 30840$ . Thus, the word HOMCHOMC is 30841<sup>th</sup> in the sequence.

**Question 11. Solution.** If  $P$  lies on the symmetric straightline  $Ax$  of  $\triangle ABC$ , then

$$|\widehat{PAB} - \widehat{PAC}| = |\widehat{PBC} - \widehat{PCB}|.$$

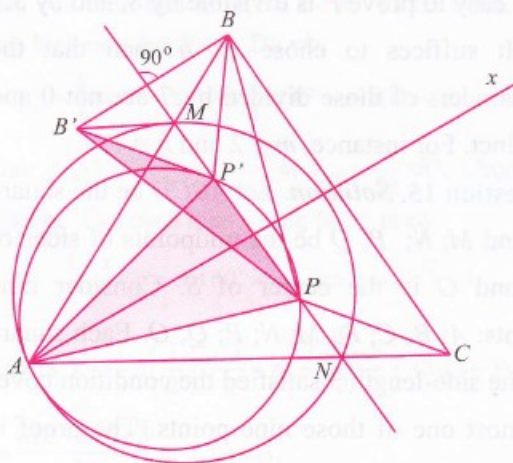


Figure 6

We should consider other cases. Let  $P'$  denote the symmetric point of  $P$  with respect to  $Ax$ . The straightline  $PP'$  intersects  $AB$  and  $AC$  at  $M$  and  $N$ , respectively. Choose  $B'$  that is symmetric point of  $B$  with respect to  $MN$ .

Then  $|\widehat{PAB} - \widehat{PAC}| = \widehat{PAP'}$ , and

$$|\widehat{PBC} - \widehat{PCB}| = \widehat{PBP'} = \widehat{PB'P'}.$$

We will prove that  $\widehat{PAP'} \geq \widehat{PB'P'}$  (\*)

Indeed, consider the circumscribed circle ( $O$ )

of the equilateral triangle  $AMN$ . Since  $\widehat{MB'N} = \widehat{MBN} \leq \widehat{MBC} = \widehat{MAN} = 60^\circ$ ,  $B'$  is outside ( $O$ ).

Consider the circumscribed circle ( $O'$ ) of the equilateral triangle  $APP'$ . It is easy to see that ( $O'$ ) inside ( $O$ ), by which  $B'$  is outside ( $O'$ ).

Hence,  $\widehat{PAP'} \geq \widehat{PB'P'}$ . The inequality (\*) is proved.

**Question 12. Solution.** Let  $T$  be the common point of  $AB$  and  $CW$ . Consider circle ( $Q$ ) touching  $XY$  at  $C$  and touching  $AB$  at  $T$ .

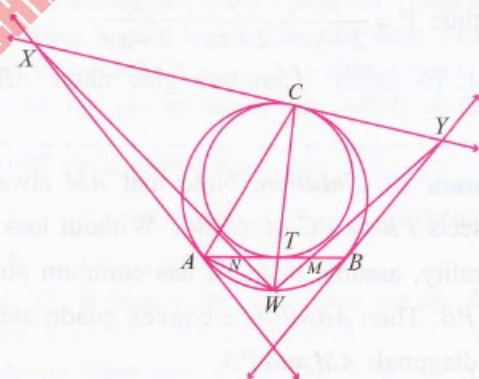


Figure 7

Since  $\widehat{ACW} = \widehat{WAT}$   $\left( = \frac{1}{2} \widehat{AW} = \frac{1}{2} \widehat{WB} \right)$  and

$\widehat{AWT} = \widehat{CWA}$ , we obtain that  $\triangle AWT, \triangle CWA$  are similar triangles. Then  $WA^2 = WT \times WC$ . It is easy to see that  $WX$  is the radical axis of  $A$  and ( $Q$ ), thus it passes through the midpoint  $N$  of segment  $AT$ . Similarly,  $WY$  passes through the midpoint  $M$  of segment  $BT$ . We deduce

$$MN = \frac{AB}{2}.$$

# ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI NĂM HỌC 2016 - 2017

(Thời gian làm bài: 150 phút)

## Bài 1. (5 điểm)

1) Chứng minh  $n^5 + 5n^3 - 6n$  chia hết cho 30, với mọi số nguyên dương  $n$ .

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(x; y)$  sao cho  $x^2 + 8y$  và  $y^2 + 8x$  là các số chính phương.

## Bài 2. (5 điểm) 1) Giải phương trình

$$\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} = 1 + \frac{3}{2x}.$$

2) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}.$$

**Bài 3. (3 điểm)** Với các số thực không âm  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .

1) Chứng minh  $x + y + z \leq 2 + xy$ .

2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy}.$$

**Bài 4. (6 điểm)** Cho tam giác nhọn  $ABC$

( $BC > CA > AB$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ) và có trục tâm  $H$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BHC$  cắt tia phân giác của góc  $\widehat{ABC}$  tại điểm thứ hai  $M$ . Gọi  $P$  là trực tâm tam giác  $BCM$ .

1) Chứng minh bốn điểm  $A, B, C, P$  cùng thuộc một đường tròn.

2) Đường thẳng qua  $H$  song song với  $AO$  cắt cạnh  $BC$  tại  $E$ . Gọi  $F$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $CF = BE$ . Chứng minh ba điểm  $A, F, O$  thẳng hàng.

3) Gọi  $N$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABM$ . Chứng minh  $PN = PO$ .

**Bài 5. (1 điểm)** Trên bàn có 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Hai người  $A$  và  $B$  lần lượt mỗi người lấy một tấm thẻ trên bàn sao cho nếu người  $A$  lấy tấm thẻ đánh số  $n$  thì đảm bảo người  $B$  chọn được tấm thẻ đánh số  $2n+2$ . Hỏi người  $A$  có thể lấy được nhiều nhất bao nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu trên?

**LÊ ĐẠI HẢI**

(Phòng GDPT, Sở GD&ĐT Hà Nội) *Giới thiệu*

**Question 13. Solution.** Note that  $AM$  always intersects  $PB$  or  $PC$  of  $\triangle PBC$ . Without loss of generality, assume that  $AM$  has common point with  $PB$ : Then  $ABMP$  is a convex quadrilateral with diagonals  $AM$  and  $PB$ .

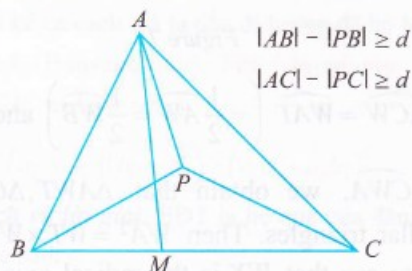


Figure 8

It is known that for every convex quadrilateral, we have  $|AM| + |PB| \geq |AB| + |PM|$ , that follows  $|AM| - |PM| \geq |AB| - |PB| \geq d$ .

**Question 14. Solution.** We have

$$\begin{aligned} P &= m^{2003} n^{2003} (n^{14} - m^{14}) \\ &= m^{2003} n^{2003} (n^7 - m^7)(n^7 + m^7). \end{aligned}$$

It is easy to prove  $P$  is divisible by 8, and by 3.

b) It suffices to choose  $m; n$  such that the remainders of those divided by 7 are not 0 and distinct. For instance,  $m = 2$  and  $n = 1$ .

**Question 15. Solution.** Let  $ABCD$  be the square  $S$ , and  $M; N; P; Q$  be the midpoints of sides of  $S$ , and  $O$  is the center of  $S$ . Consider nine points:  $A; B; C; D; M; N; P; Q; O$ . Each square of the side-length 3 satisfied the condition cover at most one of those nine points. The proof is complete.

# THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

## ĐỀ SỐ 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

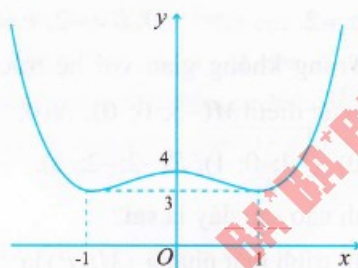
**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

|      |           |      |           |      |           |     |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-2$      | $-1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ | $1$  | $+\infty$ |     |

Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = -3$  và đạt cực tiểu tại điểm  $x = -1$ .
- B. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $x = -2$  làm tiệm cận đứng.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; -1)$ .
- D. Đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành.

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị (C) như hình dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Giá trị lớn nhất của hàm số là 4.
- B. Tổng các điểm cực trị của hàm số bằng 7.
- C. Đồ thị (C) không có điểm cực đại nhưng có hai điểm cực tiểu là  $(-1; 3)$  và  $(1; 3)$ .
- D. Đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân.

**Câu 3.** Số nào trong các số phức sau là số thuần ảo?

- A.  $(\sqrt{3} + 3i) + (\sqrt{3} - 3i)$ .
- B.  $(1 + i)^2$ .
- C.  $(1 + i)(2 - i)$ .
- D.  $\frac{3 + 2i}{2 + 3i}$ .

**Câu 4.** Số phức  $z = (1 + 2i)^2(1 - i)$  có phần ảo là

- A. 7.
- B. 1.
- C. -1.
- D. -7.

**Câu 5.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số  $y = \ln|x|$  có đạo hàm tại mọi  $x \neq 0$

và  $(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}$ .

B.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{2017} x = -\infty$ .

C.  $\log_{0,5}(x - 1) > \log_{0,5} x \Leftrightarrow x - 1 < x$ .

D. Đồ thị của hàm số  $y = \log_{2017} x$  nằm phía bên trái trục tung.

**Câu 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ .

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Mặt phẳng  $x - y - z = 0$  đi qua gốc tọa độ.
- B. Mặt phẳng  $3x - 2z + 1 = 0$  có tọa độ vector pháp tuyến là  $(3; 0; -2)$ .
- C. Mặt phẳng  $(P): 2x + 4y + 6z + 1 = 0$  song song với mặt phẳng  $(Q): x + 2y + 3z + 5 = 0$ .
- D. Khoảng cách từ điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  đến mặt phẳng  $(P): 2x + y + 2z + 1 = 0$  là  $\frac{2x_0 + y_0 + 2z_0 + 1}{3}$ .

**Câu 7.** Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây **không** có đường tiệm cận đứng?

A.  $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1}$ .

B.  $y = \frac{x^2 + 3x - 10}{2 - x}$ .

C.  $y = \log_2 x$ .

D.  $y = \frac{2 - 3x}{x - 1}$ .

**Câu 8.** Nếu  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3 + 2017} + C$  ( $C$  là hằng số bất kỳ) thì  $f(x)$  bằng

A.  $x^2 e^{x^3 + 2017}$ .

B.  $x^2 e^{3x^2 + 2017}$ .

C.  $\frac{1}{3} e^{3x^2}$ .

D.  $x^2 e^{x^3 + 2016}$ .

**Câu 9.** Đồ thị hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây có ba đường tiệm cận?

$$A. y = \frac{2x+1}{x-1}.$$

$$B. y = \frac{x+2}{x^2-4}.$$

$$C. y = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}.$$

$$D. y = \frac{1}{2016x+2017}.$$

**Câu 10.** Một khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng  $a$  và thể tích bằng  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ . Cạnh bên của khối chóp đó bằng

$$A. \frac{5\sqrt{a}}{12}.$$

$$B. \frac{3a}{4}.$$

$$C. \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

$$D. \frac{a\sqrt{35}}{4}.$$

**Câu 11.** Giá trị lớn nhất hàm số  $y = \sqrt{2x-x^2}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$  là

$$A. 0.$$

$$B. 1.$$

$$C. 2.$$

$$D. \sqrt{3}.$$

**Câu 12.** Nếu  $f(x) = 2017e^{\ln^2 x}$  thì  $f'(e)$  bằng

$$A. 4034.$$

$$B. 4034e.$$

$$C. 0.$$

$$D. 2017e.$$

**Câu 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-3; 3; -1)$  và mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $2x - y - z + 14 = 0$ . Tọa độ hình chiếu  $H$  vuông góc của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(P)$  là

$$A. H(-1; 2; -2).$$

$$B. H(1; -2; 2).$$

$$C. H(0; 8; 6).$$

$$D. H(-5; 4; 0).$$

**Câu 14.** Hàm số nào sau đây **không** có giá trị nhỏ nhất?

$$A. y = x^4 + x^2 - 2.$$

$$B. y = x^3 - 3x + 2.$$

$$C. y = x^2 + x - 2.$$

$$D. y = \sin x - \cos x.$$

**Câu 15.** Bé Na bơm không khí vào một quả bóng cao su hình cầu. Giả sử thể tích của quả bóng sau khi bơm thêm bằng 2 lần thể tích quả bóng trước khi bơm. Hỏi bán kính của quả bóng tăng lên mấy lần so với trước?

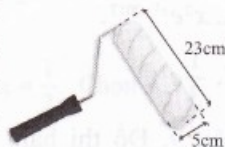
$$A. 2.$$

$$B. \sqrt{2}\pi.$$

$$C. \sqrt[3]{2}.$$

$$D. \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

**Câu 16.** Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm (hình bên). Sau khi lăn tròn 15 vòng thì



trục lăn tạo trên sân phẳng hình có diện tích là

$$A. 3450\pi \text{ cm}^2.$$

$$B. 862,5\pi \text{ cm}^2.$$

$$C. 1725 \text{ cm}^2.$$

$$D. 1725\pi \text{ cm}^2.$$

**Câu 17.** Nếu  $(0,1a)^{\sqrt{3}} < (0,1a)^{\sqrt{2}}$  và

$$\log_b \frac{2}{3} < \log_b \frac{1}{\sqrt{2}}$$
 thì:

$$A. \begin{cases} 0 < a < 10 \\ b > 1 \end{cases}.$$

$$B. \begin{cases} 0 < a < 10 \\ 0 < b < 1 \end{cases}.$$

$$C. \begin{cases} a > 10 \\ b > 1 \end{cases}.$$

$$D. \begin{cases} a > 10 \\ 0 < b < 1 \end{cases}.$$

**Câu 18.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  đỉnh  $S$ , có độ dài cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên bằng  $2a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABI$ .

$$A. V = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}.$$

$$B. V = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}.$$

$$C. V = \frac{a^3\sqrt{11}}{8}.$$

$$D. V = \frac{a^3\sqrt{11}}{6}.$$

**Câu 19.** Giá trị thực của  $b$  và  $c$  để số phức  $z = 1 + i$  thỏa mãn  $z^2 + bz + c = 0$  là

$$A. b = c = 0.$$

$$B. b = 2, c = -2.$$

$$C. b = 2, c = 2.$$

$$D. b = -2, c = 2.$$

**Câu 20.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $M(-5; 0; 0)$ ,  $N(0; -5; 0)$ ,  $P(0; 0; 10)$ ,  $Q(1; 0; 1)$ ,  $R(-2; -2; 2)$ .

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Phương trình mặt phẳng  $(MNP)$  là

$$2x + 2y - z + 10 = 0.$$

B. Bốn điểm  $M, N, P, R$  đồng phẳng.

C. Bốn điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

D. Khoảng cách giữa hai điểm  $Q$  và  $R$  bằng  $\sqrt{14}$ .

**Câu 21.** Một ô tô đang chạy với vận tốc 19m/s thì người lái hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -38t + 19$  (m/s), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm

phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 4,75m. B. 4,5m. C. 4,25m. D. 5m.

**Câu 22.** Gọi  $A, B, C$  lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức  $1-i, 2+i, -1$ . Hỏi ba điểm  $A, B, C$  trên tạo thành tam giác gì? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Cân tại  $A$ . B. Vuông cân tại  $A$ .  
C. Vuông tại  $A$ . D. Đều.

**Câu 23.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - x, y = 0, x = 0$  và  $x = 2$  được tính bởi công thức:

A.  $\int_0^2 (x^2 - x) dx$ . B.  $\int_1^2 (x^2 - x) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx$ .  
C.  $\int_0^2 (x - x^2) dx$ . D.  $\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx$ .

**Câu 24.** Tìm  $x$  để  $2017 \ln(x-1) = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \dots + \log(\tan 88^\circ) + \log(\tan 89^\circ)$ .

A.  $x = 2$ . B.  $x = e$ . C.  $x = e + 1$ . D.  $x = 2018$ .

**Câu 25.** Số nghiệm chung của hai phương trình

$9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$  và  $16^{\frac{1}{x-2}} - \frac{1}{x+2} = 0, 25^{\frac{3x-1}{x^2-4}}$  là  
A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

**Câu 26.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log(4x-4) < \log x + \log(x-1)$  là:

A.  $(1; +\infty)$ . B.  $(-\infty; 4)$ . C.  $(4; +\infty)$ . D.  $(1; 4)$ .

**Câu 27.** Biết

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 2) \cos x}{\sin^2 x + 4 \sin x + 7} dx = a \ln \sqrt{12} + (b-1) \ln \sqrt{7},$$

với  $a, b$  là các số nguyên. Tổng  $a+b$  bằng

A. 1. B. -1. C. 0. D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 28.** Tìm số phức  $z$  biết  $z + |z| = 4 + 2\sqrt{2}i$ .

A.  $z = 1 - 2\sqrt{2}i$ . B.  $z = 1 + 2\sqrt{2}i$ .  
C.  $z = 4 - 2\sqrt{2}i$ . D.  $z = -1 + 2\sqrt{2}i$ .

**Câu 29.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; -1; 0)$ , mặt phẳng  $(P)$ :

$$x + y + z - 4 = 0 \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Tọa độ điểm  $N$  thuộc  $(P)$  sao cho đường thẳng  $MN$  song song với  $d$  là

A.  $N(1; 0; 2)$ . B.  $N(1; -3; 2)$ .  
C.  $N(1; 6; -3)$ . D.  $N(3; -3; 4)$ .

**Câu 30.** Cho  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{64}$  và  $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln m$ ,

với  $n, m$  là các số nguyên dương. Khi đó:

A.  $1 < n+m < 5$ . B.  $n = m$ . C.  $n > m$ . D.  $n < m$ .

**Câu 31.** Các nhà nghiên cứu cho biết dân số của thế giới năm 1950 là 2,56 tỉ người và năm 1960 là 3,04 tỉ người. Đồng thời các nhà nghiên cứu còn công bố rằng dân số của thế giới tăng hàng năm theo một hàm mũ theo thời gian có dạng như sau  $P(t) = P(0) \cdot e^{kt}$  trong đó  $P(0)$  là dân số thế giới tại thời điểm chọn làm mốc,  $P(t)$  là dân số thế giới tại thời điểm  $t$  (năm) và hệ số  $k$  là hằng số. Hãy ước lượng dân số thế giới vào năm 2020 có khoảng bao nhiêu tỉ người?

A.  $\approx 8$  tỉ người. B.  $\approx 8,33$  tỉ người.  
C.  $\approx 8,4$  tỉ người. D.  $\approx 8,52$  tỉ người.

**Câu 32.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\sqrt{1-3x}}{\log_2(x+1)}$

là tập nào dưới đây?

A.  $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$ . B.  $(-1; 0)$ .  
C.  $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ . D.  $\left(-1; \frac{1}{3}\right]$ .

**Câu 33.** Đặt  $M$  là giá trị lớn nhất,  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$  trên đoạn  $[-5; 5]$ . Khi đó tổng  $M+m$  có giá trị là một số thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (369; 471). B. (313; 315).

C. (149; 151). D. (-6; 10).

**Câu 34.** Hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 8(\sin^6 x + \cos^6 x)$  và  $f(0) = 1$  là

A.  $5x - \frac{3}{4}\sin 4x + 1$ . B.  $5x + \frac{3}{4}\sin 4x + 1$ .

C.  $8x + 1$ . D.  $5 - 3\cos 4x$ .

**Câu 35.** Tìm  $a$  biết  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(a-2)x} - 1}{x} = 2017$  (với  $a \neq 2$ ).

A.  $a = 3$ . B.  $a = 2018$ . C.  $a = 2019$ . D.  $a = \ln 4$ .

**Câu 36.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  với  $AB = a, BC = 2a, SA = 2a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Tính thể tích  $V$  của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

A.  $V = \frac{9\pi a^3}{2}$ . B.  $V = 36\pi a^3$ .

C.  $V = \frac{5\sqrt{5}\pi a^3}{6}$ . D.  $V = 12a^2\pi^3$ .

**Câu 37.** Cho  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 - 4z + 6 = 0$ . Khi đó giá trị  $\frac{z_1^2 + z_2^2}{(z_1 + z_2)^{2017}}$  bằng

A.  $-\frac{1}{2^{2014}}$ . B.  $\frac{8}{2^{2017}}$ . C.  $\frac{1}{2^{4032}}$ . D.  $\frac{28}{2^{2017}}$ .

**Câu 38.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông,  $SA \perp (ABCD)$  với  $A(0; 0; 0), B(4; 0; 0), D(0; 4; 0), S(0; 0; 4)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $MN$ . Một học sinh làm như sau:

**Bước 1.** Do  $ABCD$  là hình vuông nên

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow C(4; 4; 0), \overrightarrow{SC} = (4; 4; -4).$$

$$M(4; 2; 0), N(0; 2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-4; 0; 0).$$

$$[\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{MN}] = 16(0; 1; 1).$$

**Bước 2.** Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $SC$  và song song với  $MN$  là mặt

phẳng đi qua  $S(0; 0; 4)$

và có vector pháp tuyến

$\vec{n} = (0; 1; 1)$  có phương

trình là  $y + z - 4 = 0$ .

**Bước 3.**

$$d(SC, MN) = d(M, (\alpha)) = \frac{|2 + 0 - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

**Câu 39.** Bạn học cùng lớp với mình tên Na đã tìm ra được đáp số đúng của bài toán như sau:

“Cho hình phẳng  $H$  giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$y = \frac{3x+5}{2x+2}, \text{ trục hoành, trục tung và đường}$$

thẳng  $x = 2$ . Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay tạo được khi quay  $H$  quanh trục hoành”.

Tuy nhiên lúc bạn ghi xong đáp số của bài toán trên vào giấy kiểm tra thì bạn đã sơ ý làm đổ bình mực nước lên tờ giấy đang viết và cuối cùng bạn không còn thấy được đáp số đúng của bài toán trên là bao nhiêu nhưng bạn nhớ được đáp

số đó có dạng  $V = \left(\frac{a}{b} + 3\ln 3\right)\pi$ , trong đó  $a, b$

nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Các

bạn hãy chỉ giúp bạn Na tìm lại  $a$  và  $b$  là bao nhiêu để bạn có được đáp số đúng của bài toán.

A.  $a = 9, b = 4$ .

B.  $a = 31, b = 6$ .

C.  $a = 3, b = 2$ .

D.  $a = 5, b = 3$ .

**Câu 40.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $a$ . Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông  $ABCD$  và đáy là hình tròn nội tiếp

hình vuông  $A'B'C'D'$ . Diện tích toàn phần của khối nón đó bằng

- A.  $\frac{\pi a^3}{4}$ . B.  $\frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{4}$ .  
C.  $\frac{\pi a^2}{4}(2\sqrt{5}+1)$ . D.  $\frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5}+1)$ .

**Câu 41.** Cho hàm số  $y = e^x \cos x$ . Có bao nhiêu điểm cực đại của hàm số trên đoạn  $[0; 5\pi]$  để giá trị của  $(\sin x + \cos x)^2$  tại các điểm cực đại này bằng 2?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

**Câu 42.** Với giá trị thực nào của tham số  $m$  thì đường thẳng  $y = 2x + m$  cắt đồ thị của hàm số

$y = \frac{x+3}{x+1}$  tại hai điểm phân biệt  $M, N$  sao cho  $MN$  ngắn nhất?

- A.  $m = 3$ . B.  $m = -3$ . C.  $m = -1$ . D.  $m = 1$ .

**Câu 43.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $H(2; -1; -2)$  là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ  $O$  xuống mặt phẳng  $(P)$ , số đo góc giữa mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(Q)$  có phương trình  $x - y - 11 = 0$  bằng

- A.  $90^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $45^\circ$ . D.  $30^\circ$ .

**Câu 44.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số

$$y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$$

có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 3 < x_2$ .

- A.  $m \neq 1$ . B.  $m > 1$ . C.  $m < \frac{3}{2}$ . D.  $m > \frac{3}{2}$ .

**Câu 45.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $a$  để  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4az + 9a = 0$  là phương trình mặt cầu có chu vi đường tròn lớn bằng  $2\sqrt{3}\pi$ ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 46.** Giải bất phương trình:  $xe^{2017x} > -\frac{1}{e^{2017}}$ .

Một học sinh làm như sau:

**Bước 1.** Vì hàm số  $f_1(x) = x$  và  $f_2(x) = e^{2017x}$  là các hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  nên hàm số

$f(x) = xe^{2017x}$  là tích hai hàm số đồng biến cũng là hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Bước 2.** Mà  $f(-1) = (-1)e^{-2017} = -\frac{1}{e^{2017}}$ .

Do đó

$$xe^{2017x} > -\frac{1}{e^{2017}} \Leftrightarrow f(x) > f(-1) \Leftrightarrow x > -1.$$

**Bước 3.** Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là  $S = (-1; +\infty)$ .

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Sai ở bước 1. B. Sai từ bước 2.  
C. Sai từ bước 3. D. Đúng.

**Câu 47.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(0; 1; 3)$ ,  $N(10; 6; 0)$  và mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $x - 2y + 2z - 10 = 0$ .

Điểm  $I(-10; a; b)$  thuộc mặt phẳng  $(P)$  sao cho  $|IM - IN|$  lớn nhất. Khi đó tổng  $T = a + b$  bằng

- A.  $T = 6$ . B.  $T = 5$ . C.  $T = 1$ . D.  $T = 2$ .

**Câu 48.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

- A.  $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$ . B.  $-3 < m < -\frac{1}{5}$ .  
C.  $m < -3$ . D.  $m \geq -\frac{1}{5}$ .

**Câu 49.** Với mỗi đỉnh của hình lập phương, xét tứ diện xác định bởi đỉnh ấy và các trung điểm của ba cạnh cùng xuất phát từ đỉnh ấy. Khi ta cắt bỏ các khối tứ diện này thì tỉ số thể tích phần còn lại so với khối lập phương bằng

- A.  $\frac{3}{4}$ . B.  $\frac{39}{50}$ . C.  $\frac{5}{6}$ . D.  $\frac{4}{5}$ .

**Câu 50.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ), có đồ thị  $(C)$ . Với điều kiện nào của  $a$  để cho tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  tại điểm có hoành độ

$x_0 = -\frac{b}{3a}$  là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất?

- A.  $a < 0$ . B.  $a > 0$ . C.  $-1 < a < 0$ . D.  $a < 1$ .

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)



## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/479 (Lớp 6).** Sắp xếp các số từ 1 đến 20 vào một đường tròn sao cho tổng của hai số liên kề là một số nguyên tố.

TA MINH HIẾU  
(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

**Bài T2/479 (Lớp 7).** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\widehat{ABC} < 45^\circ$ . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $AB$  có chứa điểm  $C$  lấy các điểm  $D$  và  $E$  sao cho:  $BD = BA$  và  $\widehat{DBA} = 90^\circ$ ;  $\widehat{EBC} = \widehat{CBA}$  và  $ED$  vuông góc với  $BD$ .

Chứng minh rằng:  $BE = AC + DE$ .

ĐÀO QUỐC CHUNG  
(GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An)

**Bài T3/479.** Cho  $x$  và  $y$  là hai số thực thỏa mãn điều kiện  $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^4 + y^4 + (x + y)^4$$

VŨ ĐỨC CẢNH (Hà Nội)

**Bài T4/479.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB < AC$  và ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Cạnh  $BC$  tiếp xúc đường tròn  $(O)$  ở  $D$ . Kẻ  $OI$  vuông góc với đoạn thẳng  $AD$  tại  $I$ . Tia  $IO$  cắt đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$  ở  $K$ . Chứng minh tứ giác  $BIKC$  là tứ giác nội tiếp.

HUỖNH THANH TÂM  
(CB Bưu điện An Nhơn, Bình Định)

**Bài T5/479.** Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 28x + 4}}{x + 2} + 8 = \frac{x + 4}{\sqrt{x} - 1} + 2x.$$

TRẦN ANH TUẤN  
(GV THCS Nhân Hậu, Lý Nhân, Hà Nam)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/479.** Cho các số thực không âm  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+c^2} - a - b - c \leq 2.$$

VŨ VĂN LIÊM

(Cẩm Quan, Cẩm Xá, Mỹ Hòa, Hưng Yên)

**Bài T7/479.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^8 = 21y + 13 \\ (x^3 + y^3)^3 (x^4 + y^4)^4 = \frac{(x+y)^{25}}{2^{18}} \end{cases}$$

VŨ HỒNG PHONG  
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

**Bài T8/479.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $P$  nằm trong tam giác.  $E, F$  theo thứ tự là giao điểm của  $BP, CP$  và  $AC, AB$ .  $K$  là giao điểm của  $AP$  và  $EF$ .  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $K$  trên  $BC$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AF$ .  $N$  là giao điểm của  $MK$  và  $PE$ . Chứng minh rằng  $\widehat{KHM} = \widehat{KHN}$ .

NGUYỄN HỮU TÂM  
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

**Bài T9/479.** Với  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  là một song ánh. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương  $a, b, c, d$  sao cho  $a < b < c < d$  và  $f(a) + f(d) = f(b) + f(c)$ .

TRẦN NGỌC THẮNG  
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/479.** Cho dãy  $(u_n)$  các số nguyên dương thỏa mãn

$$0 \leq u_{m+n} - u_m - u_n \leq 2 \text{ với mọi } m, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại hai số thực dương  $a_1, a_2$  sao cho  $[a_1 n] + [a_2 n] - 1 \leq u_n \leq [a_1 n] + [a_2 n] + 1$  với mọi  $n \leq 2017$ .

(Ở đây kí hiệu  $[x]$  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $x$ ).

LÊ XUÂN ĐẠI  
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

**Bài T11/479.** Tìm tất cả các hàm số liên tục  $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  sao cho  $f(x+2016)$

$$= f\left(\frac{x+2017}{x+2018}\right) + \frac{x^2 + 4033x + 4066271}{x+2018}, \forall x > 0.$$

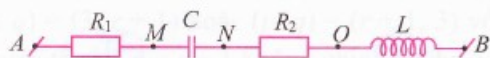
NGUYỄN LÁI  
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

**Bài T12/479.** Cho đường tròn  $(O)$  và hai điểm  $B, C$  cố định trên  $(O)$ . Một điểm  $A$  thay đổi trên  $(O)$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác nhọn và có  $AB < AC$ .  $D$  là một điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $AB = AD$ .  $BD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $E$  khác  $B$ . Hình chiếu vuông góc của  $E$  trên  $AC$  là  $H$ , hình chiếu vuông góc của  $D$  trên  $AE$  là  $M$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $K$ . Điểm  $N$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $K$  trên đường thẳng  $AB$ .

- a) Chứng minh rằng  $MN$  đi qua trung điểm  $I$  của  $BD$ .  
b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMH$  cắt nhau tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh rằng trung điểm đoạn thẳng  $PQ$  luôn thuộc một đường thẳng cố định khi  $A$  thay đổi trên đường tròn  $(O)$ .

NGUYỄN NGỌC TÚ  
(GV THPT chuyên Hà Giang)

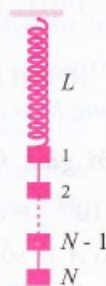
**Bài L1/479.** Cho đoạn mạch như hình vẽ. Trong đó  $R_1 = 30 \Omega$ , cuộn cảm thuần. Đặt vào hai đầu đoạn mạch  $AB$  một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng  $U = 150 \text{ V}$  và tần số  $f = 50 \text{ Hz}$  thì công suất tiêu thụ trong mạch bằng  $500 \text{ W}$ . Nối hai đầu cuộn cảm thuần bằng một dây dẫn có điện trở không đáng kể. Khi đó điện áp hiệu dụng trên các đoạn  $AM$  và  $MO$  bằng nhau và bằng  $50\sqrt{3} \text{ V}$ . Xác định độ tự cảm  $L$  của cuộn dây.



THANH LÂM (Hà Nội)

**Bài L2/479.** Người ta bố trí hệ như hình vẽ: Lò xo nhẹ  $L$  đủ dài, có độ cứng  $k$ , đầu trên gắn vào giá cố định còn đầu dưới treo  $N$  vật nhỏ đánh số theo thứ tự từ trên xuống là  $1, 2, \dots, N-1, N$  (với  $N \geq 3$ ). Các vật có khối lượng lần lượt là  $m_1, m_2, \dots, m_{N-1}, m_N$ . Giữ các vật nối với nhau bằng các đoạn dây nhẹ không co giãn. Lúc đầu hệ cân bằng. Tại một thời điểm dây nối giữa vật  $N$  và vật  $N-1$  được đốt nhẹ (lần 1). Khi lò xo giãn cực đại lần thứ hai thì đốt dây nối giữa vật  $N-1$  và  $N-2$  (lần 2). Ta làm tương tự như thế cho đến thời điểm lò xo giãn cực đại lần thứ  $N-1$  thì đốt dây nối giữa vật 2 và vật 1 (lần  $N-1$ ). Bỏ qua ma sát.

- a) Tìm điều kiện để sau mỗi lần đốt dây các vật còn lại đều dao động điều hòa.  
b) Xét trường hợp  $N = 4$ . Cho  $m_1 = m_2 = m_0$  và  $m_3, m_4$  được chọn có giá trị lớn nhất có thể đạt được. Tìm biên độ dao động khi chỉ còn lại vật  $m_1$  dao động.



NGUYỄN MINH TUẤN  
(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/479 (For 6<sup>th</sup> grade).** Place the numbers from 1 to 20 on a circle such that the sum of any two numbers which are next to each other is a prime number.

**Problem T2/479 (For 7<sup>th</sup> grade).** Given a right triangle  $ABC$  with the right angle  $A$  and  $\widehat{ABC} < 45^\circ$ . On the half plane determined by  $AB$ , containing  $C$ , choose two points  $D$  and  $E$  such that  $BD = BA$ ,  $\widehat{DBA} = 90^\circ$ ,  $\widehat{EBC} = \widehat{CBA}$ , and  $ED$  is perpendicular to  $BD$ . Prove that  $BE = AC + DE$ .

**Problem T3/479.** Given two real numbers  $x$  and  $y$  such that  $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ . Find the maximum and minimum values of the expression

$$P = x^4 + y^4 + (x + y)^4.$$

**Problem T4/479.** Given a triangle  $ABC$  with  $AB < AC$ . Let  $(O)$  be the incircle of  $ABC$ . The side  $BC$  is tangent to  $(O)$  at  $D$ . Choose  $I$  on  $AD$  such that  $OI$  is perpendicular to  $AD$ . The ray  $IO$  intersect the perpendicular bisector of  $BC$  at  $K$ . Prove that  $BIKC$  is an inscribed quadrilateral.

**Problem T5/479.** Solve the equation

$$\frac{\sqrt{x^2 + 28x + 4}}{x + 2} + 8 = \frac{x + 4}{\sqrt{x - 1}} + 2x.$$

### FOR HIGHSCHOOL

**Problem T6/479.** Given non-negative numbers  $a, b$ , and  $c$  such that  $ab + bc + ca = 1$ . Prove that

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} + \sqrt{1 + c^2} - a - b - c \leq 2.$$

**Problem T7/479.** Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^8 = 21y + 13 \\ (x^3 + y^3)^3 (x^4 + y^4)^4 = \frac{(x + y)^{25}}{2^{18}} \end{cases}$$

**Problem T8/479.** Given a triangle  $ABC$  and  $P$  is a point lying inside  $ABC$ . Let  $E$  (resp.  $F$ ) be the intersection between  $BP$  and  $CP$  (resp.  $AC$  and  $AB$ ). Let  $K$  be the intersection between  $AP$  and  $EF$ . Let  $H$  be the perpendicular projection of  $K$  on  $BC$ . On the side  $AF$ , choose an arbitrary point  $M$ . Assume that  $N$  is the intersection between  $MK$  and  $PE$ . Prove that  $\widehat{KHM} = \widehat{KHN}$ .

**Problem T9/479.** Given a bijection  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ . Prove that there exist positive integers  $a, b, c$ , and  $d$  such that  $a < b < c < d$  and  $f(a) + f(d) = f(b) + f(c)$ .

(Xem tiếp trang 26)



**Bài T1/475.** Cho số tự nhiên  $n$ . Hãy tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  sao cho số  $A = 1010n^2 + 2010(n + p) + 10^{10^{1954}}$  có thể viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

**Lời giải.** Giả sử  $A = 1010n^2 + 2010(n + p) + 10^{10^{1954}} = a^2 - b^2$ , trong đó  $a, b$  là hai số tự nhiên. Do  $A$  là số chẵn nên  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  là số chẵn. Ta thấy  $a + b = a - b + 2b$  nên  $a + b$  và  $a - b$  phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ, nhưng tích của chúng là số chẵn nên  $a + b$  và  $a - b$  đều là số chẵn, từ đó tích  $(a + b)(a - b) = A$  chia hết cho 4, suy ra số  $B = 1010n^2 + 2010(n + p)$  chia hết cho 4. Từ  $B = 4.252n^2 + 4.502(n + p) + 2(n^2 + n + p)$  chia hết cho 4 suy ra  $n^2 + n + p = n(n + 1) + p$  chia hết cho 2. Vì tích hai số nguyên liên tiếp  $n(n + 1)$  chia hết cho 2 nên  $p$  phải chia hết cho 2, mà  $p$  là số nguyên tố nên  $p = 2$ . Với  $p = 2$  ta có  $A = 4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$  với  $k$  là số nguyên dương. Chỉ có một số nguyên tố  $p = 2$  thỏa mãn điều kiện bài toán.  $\square$

➤**Nhận xét.** Số tìm được suy ra từ giả thiết của bài toán, nhưng ta chưa biết số đó có thỏa mãn điều kiện ban đầu của bài toán hay không, do vậy cần phải thử lại, nhiều bạn quên điều này. Có nhiều cách rút ra kết luận từ điều kiện số  $B$  chia hết cho 4. Chẳng hạn  $B = 1010n^2 + 2010(n + p) = 1010n(n + 1) + 1000n + 208p + 2p$  chia hết cho 4 nên  $2p$  chia hết cho 4. Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Thanh Hằng, 6A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** Hoàng Lê Bích Ngọc, 6A, THCS Thái Thịnh, Q. Đống Đa; **Quảng Trị:** Nguyễn Thiện Nhân, 6A, THCS Hội Yên, Hải Quế, Hải Lăng; **Quảng Ngãi:** Lê Phạm Kiều Duyên, 6A3, THCS Nguyễn Nghiêm, TP. Quảng Ngãi.

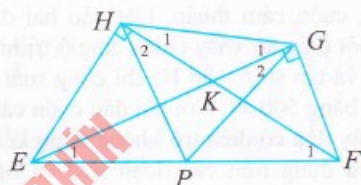
VIỆT HẢI

**Bài T2/475.** Giả sử tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$  thỏa mãn  $\widehat{ABC} + \widehat{MAC} = 90^\circ$ . Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  là tam giác cân hoặc vuông.

**Lời giải.** Giả sử tam giác  $ABC$  không cân tại  $A$ , ta xét trường hợp  $AB < AC$  (trường hợp  $AB > AC$ , do cũng có  $\widehat{ACB} + \widehat{MAB} = 90^\circ$ , ta đổi vai trò của  $B$  và  $C$ ).

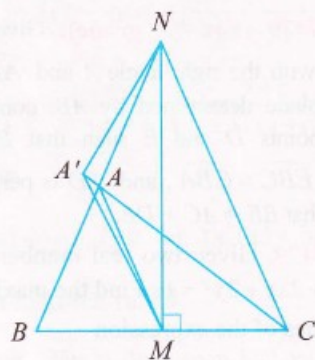
Ta có Bổ đề sau đây:

**Bổ đề.** Các tam giác vuông  $EFH$  và  $EFG$  có chung cạnh huyền  $EF$  và  $G, H$  nằm cùng nửa mặt phẳng bờ  $EF$ . Khi đó ta có  $\widehat{HGE} = \widehat{HFE}$  và  $\widehat{GEF} = \widehat{GHF}$ .



**Chứng minh.** Gọi  $P$  là trung điểm của  $EF$ , ta có  $PH = PG = PE = PF$  nên  $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = \widehat{G_1} + \widehat{G_2}$  và  $\widehat{H_2} = \widehat{F_1}$ ,  $\widehat{G_2} = \widehat{E_1}$ , suy ra  $\widehat{H_1} + \widehat{F_1} = \widehat{G_1} + \widehat{E_1}$  (1). Mặt khác,  $\widehat{H_1} + \widehat{G_1} = \widehat{F_1} + \widehat{E_1}$  (2). Từ (1) và (2), trừ theo vế suy ra  $\widehat{G_1} = \widehat{F_1}$ ,  $\widehat{H_1} = \widehat{E_1}$  (đpcm).

Trở lại bài toán.



Kẻ trung trực của  $BC$ . Từ giả thiết suy ra góc  $B$  nhọn, nên đường trung trực của  $BC$  phải cắt tia  $BA$  tại  $N$  nằm ngoài đoạn  $AB$ .

Tam giác  $NBC$  cân tại  $N$ , có  $NM$  là trung trực của  $BC$  nên nó cũng là phân giác của góc  $BNC$ , do đó  $\widehat{B} + \widehat{MNB} = \widehat{B} + \widehat{MNC} = 90^\circ$ , mà

$$\widehat{B} + \widehat{MAC} = 90^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MNC} \quad (1)$$

Hạ  $NA'$  vuông góc với  $AC$ , ta có  $\widehat{NMC} = \widehat{NA'C}$   
 $= 90^\circ$  suy ra  $\widehat{MA'C} = \widehat{MNC}$  (2) (theo Bổ đề).  
 Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{MAC} = \widehat{MA'C}$ , do đó  $A'$   
 trùng  $A$  và góc  $BAC$  vuông.

Vậy tam giác  $ABC$  là tam giác cân hoặc vuông  
 tại  $A$ .  $\square$

➤ **Nhận xét.** Chỉ có một bạn có lời giải đúng là Lê  
 Đại Việt, 7A2, THCS Hoa Lư, Quận 9, TP. Hồ Chí  
 Minh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

**Bài T3/475. Giải phương trình:**

$$\frac{x}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x^3}+x}{4}.$$

**Lời giải.** ĐK:  $x \geq 0$ .

Cách 1. Nhận thấy  $x = 0$  là một nghiệm của  
 phương trình.

Với  $x > 0$ , chia cả hai vế của phương trình cho  
 $x$ , ta nhận được  $\frac{1}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x}{2\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+1}{4}$ .

Đặt  $\sqrt{x} = y$  ( $y > 0$ ), ta có  $\frac{1}{2y+1} + \frac{y^2}{2y+3} = \frac{y+1}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{(y+1)(2y-3)^2}{4(2y+1)(2y+3)} = 0 \Leftrightarrow (y+1)(2y-3)^2 = 0.$$

Do  $y > 0$  nên  $y+1 > 1$ , suy ra  $(2y-3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}. \text{ Từ đó suy ra } x = \frac{9}{4}.$$

Vậy tập nghiệm của PT là  $S = \left\{0; \frac{9}{4}\right\}$ .

Cách 2. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức  
 Schwarz:

Với hai số  $x, y$  dương và hai số  $a, b$  bất kì, ta có

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (*), \text{ đẳng thức xảy ra khi và}$$

chỉ khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ . Thật vậy

$$(*) \Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Trở về bài toán T3/475. Áp dụng BĐT (\*) ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}+3} \\ &\geq \frac{(\sqrt{x}+x)^2}{4\sqrt{x}+4} = \frac{x(\sqrt{x}+1)^2}{4(\sqrt{x}+1)} = \frac{x(\sqrt{x}+1)}{4} = \frac{\sqrt{x^3}+x}{4} = VP. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{x}{2\sqrt{x}+3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(2x - \sqrt{x} - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - \sqrt{x} - 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1) :

$$2x - \sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \text{ (do } \sqrt{x} \geq 0) \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Do  $x = 0$  và  $x = \frac{9}{4}$  đều thỏa mãn điều kiện  $x \geq 0$ ,

nên tập nghiệm của PT là  $S = \left\{0; \frac{9}{4}\right\}$ .  $\square$

➤ **Nhận xét.** Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một  
 trong hai cách trên. Có bạn đã sử dụng BĐT Cauchy  
 để đánh giá  $VT \geq VP$  hoặc có bạn sử dụng biến đổi  
 tương đương nhưng không đặt ẩn phụ nên biến đổi  
 dài và phức tạp hơn. Tuyên dương các bạn sau có lời  
 giải tốt: **Hà Nội:** Nguyễn Đặng Nhật Minh, 8C2,  
 THCS Achimedes Academy; **Phú Thọ:** Nguyễn Thu  
 Hằng, Ngô Đức Trung, Phạm Thị Minh Ngọc, 8D,  
 THCS Cao Mai. Lâm Thao, Lê Trung Hiếu, 8A2,  
 THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng,  
 8B, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh:** Hoàng Quốc  
 Khánh, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ; **Sơn La:**  
 Trần Văn Chiến, Nguyễn Trung Thế, THCS Chất  
 lượng cao Mai Sơn, TK9, TT Hát Lót, Mai Sơn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

**Bài T4/475.** Cho hình thang cân  $ABCD$  nội tiếp  
 đường tròn  $(O)$  với  $AB$  song song với  $CD$  và  
 $AB < CD$ .  $M$  là trung điểm  $CD$ .  $P$  là điểm bất kỳ  
 thuộc đoạn thẳng  $MD$ .  $AP$  cắt  $(O)$  tại  $Q$  khác  $A$ ,  
 $BP$  cắt  $(O)$  tại  $R$  khác  $B$ .  $QR$  cắt  $CD$  tại  $E$ . Gọi  $F$   
 là điểm đối xứng của  $P$  qua  $E$ . Giả sử  $EA$  tiếp xúc  
 với  $(O)$ , chứng minh rằng  $AF$  vuông góc với  $AQ$ .

**Lời giải.** Vì  $EA$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  nên  
 $\widehat{EAR} = \widehat{AQE}$  (cùng chắn cung  $AR$ ).

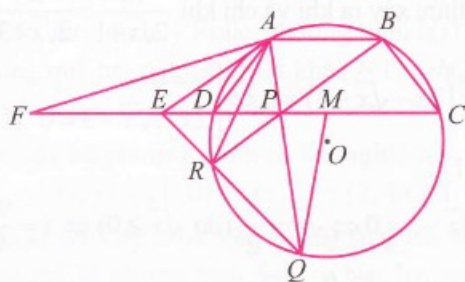
Suy ra  $\triangle EAR \sim \triangle EQA$  (g.g), do đó

$$EA^2 = ER \cdot EQ \quad (1)$$

Mặt khác, vì  $ABCD$  là hình thang cân nên

$\widehat{BC} = \widehat{DA}$ , ta có

$$\begin{aligned}\widehat{DPR} &= \frac{1}{2} \widehat{RD} + \frac{1}{2} \widehat{BC} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{RD} + \frac{1}{2} \widehat{DA} = \frac{1}{2} \widehat{AR} = \widehat{QOR}.\end{aligned}$$



Suy ra  $\triangle EPR \sim \triangle EQP$  (g.g), do đó

$$EP^2 = ER \cdot EQ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $EA = EP$ . Mà  $E$  là trung điểm của  $PF$  nên  $EA = EP = EF$ . Suy ra  $\triangle FAP$  vuông tại  $A$ , do đó  $AF \perp AQ$ .  $\square$

➤ **Nhận xét.** Không nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và chỉ có bạn **Hoàng Quốc Khánh**, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ, **Hà Tĩnh** cho lời giải tốt.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/475.** Cho  $x, y$  là các số thực thuộc khoảng  $(0; 1)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức:  $P = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y)$ .

**Lời giải.** Cách 1. (Của bạn **Đỗ Cao Bách Tùng**, 8B, THCS Trần Mai Ninh, **TP. Thanh Hóa**).

Ta có:  $2P^2 = 2\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \frac{x+y}{\sqrt{3}}\right)^2$

$$= \left(x\sqrt{2-2y^2} + \sqrt{2-2x^2} \cdot y + x\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot y\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được:

$$\begin{aligned}2P^2 &\leq \left[x^2 + (\sqrt{2-2x^2})^2 + x^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right] \\ &\quad \times \left[y^2 + (\sqrt{2-2y^2})^2 + y^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2P^2 \leq \left(\frac{8}{3}\right)^2 \Leftrightarrow P \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

(Do  $x, y \in (0; 1)$  nên  $P > 0$ ).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Vậy  $\max P = \frac{4\sqrt{2}}{3}$  khi  $x = y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Cách 2. (Theo đa số các bạn) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\begin{aligned}x\sqrt{1-y^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x\sqrt{2-2y^2}) \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x^2 + 2 - 2y^2) \quad (1)\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } y\sqrt{1-x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(y^2 + 2 - 2x^2) \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại được:

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} \leq \frac{x^2 + \frac{2}{3}}{2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x^2 + \frac{2}{3}\right) \quad (3)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(y^2 + \frac{2}{3}\right) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra  $P \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Vậy  $\max P = \frac{4\sqrt{2}}{3}$  khi  $x = y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .  $\square$

➤ **Nhận xét.** Cả hai cách đều dựa vào đánh giá các tổng

$$x^2 + (\sqrt{2-2x^2})^2 + x^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$\text{và } y^2 + (\sqrt{2-2y^2})^2 + y^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

không đổi. Cách 2 sử dụng thêm điều kiện cần để  $P$  đạt được giá trị lớn nhất là  $x = y$ . Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** **Hoàng Quốc Khánh**, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ; **Thanh Hóa:** **Đỗ Cao Bách Tùng**, 8B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Hà Nội:** **Nguyễn Đặng Nhật Minh**, 8C2, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy; **Đồng Tháp:** **Nguyễn Phúc Tăng**, 9A10, THCS Kim Hồng, TP. Cao Lãnh.

**NGUYỄN HIỆP**

**Bài T6/475.** Cho  $f(x) = x^2 - 6x + 12$ . Giải phương trình  $f(f(f(f(x)))) = 65539$ .

**Lời giải.** (Của đa số các bạn)

Ta có:  $f(x) = x^2 - 6x + 12 = (x-3)^2 + 3$

$$\Leftrightarrow f(x) - 3 = (x-3)^2.$$

Do đó:  $f(f(x)) = (f(x) - 3)^2 + 3 = (x-3)^4 + 3$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) - 3 = (x-3)^4;$$

$f(f(f(x))) = (f(f(x)) - 3)^2 + 3 = (x-3)^8 + 3$

$$\Leftrightarrow f(f(f(x))) - 3 = (x-3)^8;$$

$f(f(f(f(x)))) = (f(f(f(x))) - 3)^2 + 3$

$$= (x-3)^{16} + 3 \quad (1).$$

Vì vậy:  $f(f(f(f(x)))) = 65539 \Leftrightarrow (x-3)^{16} + 3 = 65539$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{16} = 2^{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}.$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm là  $x = 5$  và  $x = 1$ .

► **Nhận xét.** 1) Đẳng thức (1) có thể được mở rộng và chứng minh bằng quy nạp như sau:

Đặt  $f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ lần } f}$ , khi đó

$$f_n(x) = (x-3)^{2^n} + 3 \quad (2)$$

Thật vậy, với  $n = 1$  thì:  $f_1(x) = f(x) = x^2 - 6x + 12$

$= (x-3)^2 + 3 \Rightarrow (2)$  đúng. Giả sử (2) đúng với  $n = k$ ,

ta sẽ chứng minh (2) đúng với  $n = k + 1$ .

Ta có:  $f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = f_k^2(x) - 6f_k(x) + 12$

$$= (f_k(x) - 3)^2 + 3 = (x-3)^{2^{k+1}} + 3.$$

Do đó (2) đúng với  $n = k + 1$ . Vậy (2) đúng với

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Khi đó PT đã cho trở thành:

$$f_4(x) = 65536 \Leftrightarrow (x-3)^{16} + 3 = 65539.$$

2) Nhiều bạn đã tham gia giải và giải đúng bài này, chỉ có 3 bạn giải sai. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

**Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Tình, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Dương Lâm Anh**, 10A6, THPT Yên Phong 1; **Nghiêm Chi**, 12A1-K10, THPT Yên Phong 2. **Lào Cai:** Bùi Thanh Trà, Phạm Ngọc Hiền, Trần Thu Nga, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai. **Phú Thọ:** Đào Thị Hằng Nga, 10A6, THPT Long Châu Sa; H. Lâm Thao; **Trần Anh Tú**, 7A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao. **Hà Nội:** Trần Đăng

Tâm, 11A1, THPT Phan Huy Chú, Q. Đống Đa; **Nguyễn Hương Giang**, 10A13, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ. **Hà Nam:** Lê Phương Nam, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa. **Nam Định:** Nguyễn Hùng Sơn, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, H. Trực Ninh. **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn. **Nghệ An:** Nguyễn Hữu Thắng, Võ Việt Anh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Trần Tiến Mạnh**, THPT chuyên Đại học Vinh. **Quảng Bình:** Hồ Anh, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Trị:** Nguyễn Thị Phương Linh, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Thừa Thiên Huế:** Trương Minh Tuệ, Nguyễn Thị Phương Nhi, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế. **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Nguyễn Thị Huỳnh Ngọc**, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre. **Tiền Giang:** Lê Hoàng Bảo, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang. **Quảng Nam:** Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Phạm Minh Trí, Nguyễn Huy Hải, 11/1, Nguyễn Lê Thanh Hằng, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Đoàn Quang Tiến, 10A1, THPT Phú Mỹ, H. Tân Thành. **Cà Mau:** Trần Quốc Việt, 12CT1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển. **Vĩnh Long:** Trần Linh, 10T1, Châu Minh Khánh, Lê Minh Quân, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thịnh, 12A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Lâm Đồng:** Nguyễn Đăng Khánh Vân, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long. **Kon Tum:** Nguyễn Ngọc Khánh Như, 10TO, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum. **Đắk Nông:** Nguyễn Tuấn Hải, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh. **Long An:** Lê Trí Phú, Nguyễn Thị Ngân Trúc, 11T1, THPT chuyên Long An.

TRẦN HỮU NAM

**Bài T7/475.** Giải hệ phương trình trên tập số

$$\text{thực: } \begin{cases} \sqrt{2^{2^x}} = 2(y+1) \\ 2^{2^y} = 2x \end{cases}.$$

**Lời giải.** Đặt  $z = y + 1$ . Từ hệ phương trình ta suy ra  $f(x) = f(z)$ , trong đó  $f(x) = 2^{2^{x-1}} + 2x$ .

Chú ý  $f(x)$  là hàm số đồng biến (tổng của hai hàm số đồng biến:  $f(x) = 2^{2^{x-1}} + 2x$ ).

Từ đó suy ra  $x = z$ . Bởi vậy  $2^{2^{x-1}} = 2x \quad (1)$

Đặt  $2^{x-1} = t$ . Từ phương trình (1) ta có  $2^t = 2x$ .

Suy ra  $2^{t-1} = x$ . Do đó  $g(x) = g(t)$ , trong đó  $g(x) = 2^{x-1} + x$ . Lại chú ý  $g(x)$  là hàm số đồng biến (tổng của hai hàm số đồng biến). Từ đó suy ra  $x = t$ , tức là  $2^{x-1} = x$ .

Xét hàm số  $h(x) = 2^{x-1} - x, x \in \mathbb{R}$ .

Ta có  $h'(x) = 2^{x-1} \ln 2 - 1$  là hàm số đồng biến. Do đó, theo định lý Rolle, phương trình  $h(x) = 0$  có không quá hai nghiệm. Mặt khác  $h(1) = h(2) = 0, x = 1 \Rightarrow y = x - 1 = 0, x = 2 \Rightarrow y = x - 1 = 1$ .

Bởi vậy hệ phương trình có hai nghiệm

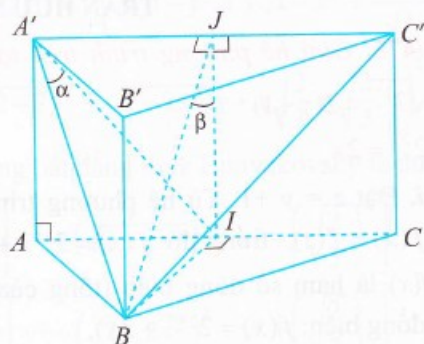
$$(x, y) = (1, 0) \text{ và } (x, y) = (2, 1). \quad \square$$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán về ứng dụng của đạo hàm trong giải hệ phương trình dạng cơ bản, hay và không quá khó. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Tĩnh, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Dũng, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Quảng Trị:** Nguyễn Thị Phương Linh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** Lê Cẩm Thanh Hà, 11T2, Nguyễn Thị Phương Nhi, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng:** Hồ Gia Quỳnh, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Long An:** Nguyễn Thị Ngân Trúc, 11T1, THPT chuyên Long An, TP. Tân An; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**Bài T8/475.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$ , đáy  $ABC$  là tam giác đều. Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi  $A'B$  với mặt phẳng  $(ACC'A')$ , và  $\beta$  là góc giữa mặt phẳng  $(A'BC')$  với mặt phẳng  $(ACC'A')$ .

Chứng minh rằng:  $\alpha < 60^\circ$  và  $\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{1}{3}$ .



**Lời giải.** Gọi  $I$  và  $J$  theo thứ tự là trung điểm của  $AC$  và  $A'C'$ . Khi đó  $BI \perp AC$ , mà  $AA' \perp (ABC)$  nên  $AA' \perp BI$ .

Từ đó  $BI \perp (AA'C'C) \Rightarrow \widehat{BA'I} = \alpha$ .

Lại thấy  $\triangle BA'C'$  cân tại  $B$  (vì  $BA' = BC'$ ) nên  $BJ \perp A'C'$ , kết hợp với  $IJ \perp A'C'$  suy ra

$$\widehat{B'JI} = \beta. \text{ Ta có } \cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \cot^2 \widehat{BA'I} - \cot^2 \widehat{B'JI} = \frac{A'I^2}{BI^2} - \frac{IJ^2}{BI^2} = \frac{A'J^2}{BI^2} = \frac{AI^2}{BI^2} = \frac{1}{3}.$$

Vậy  $\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{1}{3}$ . Từ đây ta suy ra

$$\cot^2 \alpha = \cot^2 \beta + \frac{1}{3} > \frac{1}{3}, \text{ hay } \cot \alpha > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha < 60^\circ$$

(do  $0 < \alpha < 90^\circ$ ) (đpcm).  $\square$

► **Nhận xét.** Nhiều bạn giải đúng bài này. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** Nguyễn Văn Dũng, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Trần Đăng Tâm, 11A1, THPT Phan Huy Chú, Q. Đống Đa; **Hà Nam:** Lê Phương Nam, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Hưng Yên:** Chu Minh Huy, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Võ Việt Anh, Nguyễn Hữu Thắng, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Trị:** Nguyễn Thị Phương Linh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** Trương Xuân Như Ngọc, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** Nguyễn Huy Hải, Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Phạm Minh Trí, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Tam Kỳ; **Long An:** Lê Trí Phú, Nguyễn Thị Ngân Trúc, 11T1, THPT chuyên Long An, TP. Tân An; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Vĩnh Long:** Huỳnh Lý Văn Anh, Châu Minh Khánh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HÒ QUANG VINH

**Bài T9/475.** Cho  $p, q$  là hai số nguyên tố cùng

nhau. Đặt  $T = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor$ .

a) Tính  $T$ .

b) Xác định giá trị  $p, q$  để  $T$  là số nguyên tố, trong đó kí hiệu  $[a]$  là phần nguyên lớn nhất không vượt quá  $a$ .

**Lời giải.** (Của bạn Phan Cảnh Minh Phước, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế).

a) Ta có :

$$\begin{aligned} T &= \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor \\ &= \frac{p}{q} - \left\{ \frac{p}{q} \right\} + \frac{2p}{q} - \left\{ \frac{2p}{q} \right\} + \dots + \frac{(q-1)p}{q} - \left\{ \frac{(q-1)p}{q} \right\} \\ &= \left( \sum_{m=1}^{q-1} m \right) \cdot \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\} = \frac{q(q-1)}{2} \cdot \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\} \\ &= \frac{p(q-1)}{2} - \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác,  $\forall k=1, q-1, \frac{pk}{q} + \frac{p(q-k)}{q} = \frac{pq}{q} = p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left\{ \frac{pk}{q} \right\} + \left\{ \frac{p(q-k)}{q} \right\} \\ &= \frac{pk}{q} + \frac{p(q-k)}{q} - \left[ \frac{pk}{q} \right] - \left[ \frac{p(q-k)}{q} \right] \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ta lại có  $\frac{pk}{q} \notin \mathbb{Z}, \frac{p(q-k)}{q} \notin \mathbb{Z}$  nên  $0 < \left\{ \frac{pk}{q} \right\} < 1$ ,

$0 < \left\{ \frac{p(q-k)}{q} \right\} < 1$ . Suy ra  $0 < \left\{ \frac{pk}{q} \right\} + \left\{ \frac{p(q-k)}{q} \right\} < 2$

$\Rightarrow \left\{ \frac{pk}{q} \right\} + \left\{ \frac{p(q-k)}{q} \right\} = 1$  với mọi  $k = 1, 2, \dots, q-1$ .

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\} + \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{p(q-k)}{q} \right\} &= q-1 \\ \Rightarrow 2 \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\} &= q-1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\} = \frac{q-1}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$T = \frac{p(q-1)}{2} - \frac{q-1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

b) Để  $T = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$  là một số nguyên tố thì một trong hai số  $p-1$  và  $q-1$  phải là 2 hoặc 1. Nếu  $p-1=2 \Leftrightarrow p=3$  thì  $T$  nguyên tố khi và chỉ khi  $q=r+1$  với  $r$  nguyên tố sao cho  $r+1$  không chia hết cho 3.

Nếu  $p-1=1 \Leftrightarrow p=2$  thì  $T$  nguyên tố khi và chỉ khi  $q=2r+1$  với  $r$  nguyên tố.

Do ở  $T$ , hai số  $p, q$  có vai trò bình đẳng nên các cặp số  $(p, q)$  để  $T$  nguyên tố là:

+)  $(p, q) = (3, r+1)$  hoặc  $(p, q) = (r+1, 3)$  với  $r$  nguyên tố sao cho  $r+1$  không chia hết cho 3.

+)  $(p, q) = (2, 2r+1)$  hoặc  $(p, q) = (2r+1, 2)$  với  $r$  nguyên tố.  $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Quảng Nam:** Nguyễn Phạm Minh Trí, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc:** Tạ Thủy Tiên, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Kon Tum:** Nguyễn Ngọc Khánh Như, 10TO, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Dũng, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ.

**ĐẶNG HÙNG THẮNG**

**Bài T10/475.** Gọi  $S$  là số các dãy nhị phân (là dãy chỉ gồm các số 0 và 1) có độ dài  $n$  (gồm  $n$  số) sao cho tổng ba số liên tiếp bất kì trong dãy là số dương. Chứng minh rằng:

$$2 \left( \frac{3}{2} \right)^n \leq S \leq \frac{13}{2} \cdot \left( \frac{20}{9} \right)^n, \forall n \geq 3.$$

**Lời giải.** Gọi  $x_n$  là số các dãy có độ dài  $n \geq 3$  thỏa mãn điều kiện đầu bài. Xét các dãy  $n+1$  phân tử thỏa mãn điều kiện bài toán. Ta phân chúng thành 3 loại:

1. Các dãy có tận cùng 1: Dễ thấy số lượng của chúng chính là  $x_n$ .
2. Các dãy tận cùng 00 sẽ phải có tận cùng là 100 để thỏa mãn điều kiện đầu bài, và số các dãy như vậy là  $x_{n-2}$ .
3. Các dãy tận cùng 10: Dễ thấy số lượng của chúng chính là  $x_{n-1}$ .

Như vậy  $x_{n+1} = x_n + x_{n-1} + x_{n-2}$ . Theo cách đếm trên, dễ thấy  $x_3 := 7, x_4 := 13$  và  $x_5 := 24$ . Bằng kiểm tra trực tiếp ta thấy bất đẳng thức của đầu bài đúng cho  $n=3, 4, 5$ . Bây giờ ta chứng minh kết luận bài toán bằng quy nạp. Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng tới  $n \geq 5$ .

$$2 \left( \frac{3}{2} \right)^n \leq x_n \leq \frac{13}{2} \cdot \left( \frac{20}{9} \right)^n \quad (*)$$

Ta có  $2 \left( \frac{3}{2} \right)^{n-2} \leq x_{n-2} \leq \frac{13}{2} \cdot \left( \frac{20}{9} \right)^{n-2}$

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq x_{n-1} \leq \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1}$$

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq x_n \leq \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức và áp dụng

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} + x_{n-2}$ , ta có

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\leq x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = x_{n+1} \leq \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^{n-2}$$

$$+ \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} + \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n.$$

Tổng vế trái là  $2 \cdot \frac{38}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} > 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ , còn tổng

vế phải là  $\frac{13}{2} \cdot \frac{5949}{8000} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^{n+1} < \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^{n+1}$ , từ đó

ta có  $2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \leq x_{n+1} \leq \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^{n+1}$ .  $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng bài toán này: **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nghệ An:** Võ Việt Anh, Nguyễn Hữu Thắng, 11 A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thừa Thiên Huế:** Lê Cẩm Thanh Hà, 11 Toán 2, Nguyễn Minh Hải, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế.

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T11/475.** Tìm tất cả các hàm  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

sao cho  $f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f(xf(y)) = f(xf(x))$  (1),

với mọi  $x > y > 0$ .

**Lời giải.** (Theo đa số các bạn). Nhận xét rằng, từ (1), ta thu được  $f$  là đơn ánh. Thật vậy, giả sử  $x > y > 0$  và  $f(x) = f(y)$ . Khi đó từ (1) suy

ra  $f\left(\frac{x}{x-y}\right) = 0$ , vô lý. Tiếp theo, ta chứng

minh  $f(x) \leq \frac{1}{x}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}^+$ . Giả sử

$\exists u \in \mathbb{R}^+$  để  $f(u) > \frac{1}{u}$ . Đặt  $u - \frac{1}{f(u)} = v \in \mathbb{R}^+$

thì  $0 < v < u$  và  $\frac{u}{u-v} = uf(u)$ . Từ (1) suy ra  $f(uf(v)) = 0$ , mâu thuẫn.

Giả sử  $y_2 > y_1 > 0$ . Đặt

$$x = y_2 + \frac{1}{f(y_1)} \Leftrightarrow \frac{x}{x-y_2} = xf(y_1) \quad (2)$$

Khi đó  $x > y_2 > y_1 > 0$  và  $f\left(\frac{x}{x-y_2}\right) + f(xf(y_2))$

$$= f(xf(x)) = f\left(\frac{x}{x-y_1}\right) + f(xf(y_1)) \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra  $f(xf(y_2)) = f\left(\frac{x}{x-y_1}\right)$ .

Do đó  $xf(y_2) = \frac{x}{x-y_1} \Leftrightarrow x = y_1 + \frac{1}{f(y_2)}$ . Kết

hợp với (2) ta được  $\frac{1}{f(y_2)} - y_2 = \frac{1}{f(y_1)} - y_1$  hay

$$f(x) = \frac{1}{x+c} \text{ với } c \geq 0.$$

Ta chứng minh  $c = 0$ . Giả sử  $c > 0$ , khi đó với  $x > y > 0$  ta có

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f(xf(y)) = \frac{x-y}{x+c(x-y)} + \frac{y+c}{x+c(y+c)}$$

$$> \frac{x-y}{x+c(x+c)} + \frac{y+c}{x+c(x+c)} = \frac{x+c}{x+c(x+c)} = f(xf(x)),$$

mâu thuẫn.

Vậy  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Thử lại, ta thấy hàm này thỏa

mãn điều kiện bài ra.  $\square$

► **Nhận xét.** Đây là dạng toán khó về phương trình hàm với cặp biến tự do trên  $\mathbb{R}^+$ .

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thịnh, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

**NGUYỄN VĂN MẬU**

**Bài T12/475.** Cho tam giác  $ABC$ . Đường tròn nội tiếp  $(I)$  của tam giác này tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$  tương ứng. Gọi  $B_1, C_1$  lần lượt là giao của các cặp đường thẳng  $(AB, DE)$  và  $(AC, DF)$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $ABC, AB_1C_1$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $HK$  đi qua điểm  $I$ .

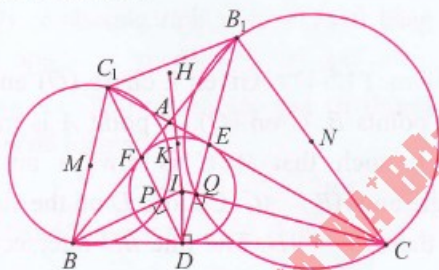
**Lời giải.** Ta cần có một bổ đề.

**Bổ đề.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ , không có ba điểm nào thẳng hàng.  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .  $H, K$  theo thứ tự là trực tâm của các tam giác  $ABO, CDO$ . Khi đó  $HK$  là trục đẳng phương của đường tròn đường kính  $AD$  và đường tròn đường kính  $BC$ .

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.

Trở lại giải bài toán trên.

Gọi  $(M), (N)$  theo thứ tự là đường tròn tâm  $M$  đường kính  $BC_1$  và đường tròn tâm  $N$  đường kính  $CB_1$ ;  $P, Q$  theo thứ tự là giao điểm của  $IB, IC$  với  $DC_1, DB_1$ .



Áp dụng bổ đề trên cho bốn điểm  $B, C, B_1, C_1$ , ta có  $HK$  là trục đẳng phương của hai đường tròn  $(M)$  và  $(N)$  (1).

Dễ thấy  $IB, IC, ID$  theo thứ tự vuông góc với  $DF, DE, BC$ .

Do đó  $\mathcal{P}_{I/(M)} = \overline{IB} \cdot \overline{IP} = \overline{ID}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{IQ} = \mathcal{P}_{I/(N)}$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $HK$  đi qua  $I$  (đpcm).  $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán này không khó nhưng số bạn tham gia giải không nhiều và lời giải của một vài bạn dài quá. Mặc dù vậy vẫn nêu tên tất cả các bạn:

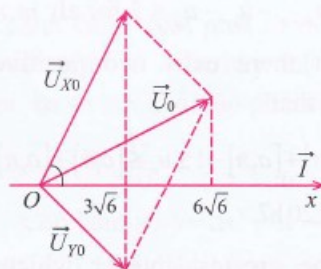
**Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP Vinh;

**Thừa Thiên – Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 11T2, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** *Lê Hà Khiêm*, 10T, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Kon Tum:** *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 10TO, TPHT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Đức Thịnh*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng.

**NGUYỄN MINH HÀ**

**Bài L1/475.** Cho đoạn mạch gồm hộp kín  $X$  và  $Y$ . Trong đó, hộp  $X$  chứa cuộn dây, hộp  $Y$  chứa tụ điện  $C$  và một trong hai phần tử điện trở thuần  $R$  hoặc cuộn cảm thuần mắc nối tiếp. Người ta nối hai đầu hộp  $X$  với một điện áp không đổi  $U = 12$  (V) thì dòng điện chạy qua có cường độ  $I_1 = 0,3$  (A); sau đó thay nguồn điện không đổi trên bằng điện áp  $u = 12\sqrt{2} \cos \omega t$  (V) vào hai đầu hộp  $X$  thì cường độ dòng điện hiệu dụng chạy qua đoạn mạch là  $I_2 = 0,15$  (A). Lấy  $X$  mắc nối tiếp với  $Y$  và đặt điện áp xoay chiều trên vào hai đầu đoạn mạch. Khi điện áp tức thời giữa hai đầu cuộn dây  $X$  bằng một nửa giá trị cực đại của nó và bằng  $3\sqrt{6}$  (V) đang giảm thì điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch là  $6\sqrt{6}$  (V) và đang giảm. Tính công suất tiêu thụ của mạch khi đó.

**Lời giải.** Biểu diễn giản đồ vectơ như hình dưới.



Cuộn dây  $X$  không thuần cảm, có điện trở

$$r = \frac{U_1}{I_1} = 40 \text{ } (\Omega), \quad Z_X = \sqrt{r^2 + Z_L^2} = \frac{U_2}{I_2} = 80 \text{ } (\Omega)$$

$\Rightarrow$  cảm kháng của cuộn dây  $X$  là  $Z_L = 40\sqrt{3} \text{ } (\Omega)$ .

Biểu diễn giản đồ vectơ cho hai đoạn mạch nối tiếp nhau, suy ra  $Y$  phải chứa  $R$  và  $C$ .

Do  $Z_L = \sqrt{3}r$  nên  $\vec{U}_X$  nhanh pha hơn  $i$  một góc  $60^\circ$ . Tại thời điểm  $t$ :  $U_{X0} = 6\sqrt{6}$  (V)  $\Rightarrow$  góc tạo bởi  $Ox$  và  $\vec{U}_{X0}$  bằng  $60^\circ$  nên trục  $Ox$  trùng với trục  $\vec{I} \Rightarrow$  trục  $\vec{U}_R$  và  $\vec{U}_r$  trùng nhau trên  $Ox$ .

Ta có:  $u_x + u_y = u \Rightarrow u_y = 3\sqrt{6}$  (V)  $\Rightarrow U_{R0} = U_{r0} = 3\sqrt{6}$  (V)  $\Rightarrow U_R = U_r = 3\sqrt{3}$  (V)  $\Rightarrow R = r = 40(\Omega)$ .

Công suất tiêu thụ của mạch là:

$$P = \frac{(U_R + U_r)^2}{R + r} = \frac{108}{80} = 1,35 \text{ (W)}. \square$$

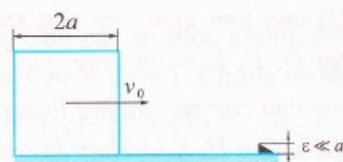
► **Nhận xét.** Rất tiếc bài khó nên không có bạn nào gửi lời giải cho bài Vật lý này.

### ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

**Bài L2/475.** Một khối lập phương đặc, đồng chất cạnh  $2a$ . Trượt đều không ma sát, vận tốc  $v_0$  trên mặt bàn nhẵn - nằm ngang, ở cạnh bàn có một gờ nhỏ. Với điều kiện nào của  $v_0$  để vật có thể rơi khỏi bàn? Giả sử kích thước gờ rất nhỏ không làm sai lệch đáng kể chuyển động quay của vật.

**Lời giải.** Bảo toàn mô men động lượng đối với

trục nằm ngang đi qua gờ:  $mv_0 \cdot a = I\omega$  (1)



trong đó  $\omega$  là tốc độ góc của vật ngay sau va chạm vào gờ. Để vật rơi khỏi bàn thì động năng ngay sau va chạm phải lớn hơn thế năng khi khối tâm của vật ở vị trí cao nhất:

$$I \frac{\omega^2}{2} > mga(\sqrt{2} - 1) \quad (2)$$

Theo định lý Steiner - Huygens ta có:

$$I = I_G + m(a\sqrt{2})^2 = \frac{2}{3}ma^2 + m(a\sqrt{2})^2 = \frac{8}{3}ma^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta tìm được:

$$v_0 > 4\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)ag}. \square$$

► **Nhận xét.** Rất tiếc bài này không có bạn nào gửi lời giải.

NGUYỄN XUÂN QUANG

## PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

### TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Problem T10/479.** Given a sequence  $(u_n)$  whose terms are positive integers satisfying

$$0 \leq u_{m+n} - u_m - u_n \leq 2 \text{ for all } m, n \geq 1.$$

Prove that there exist two positive numbers  $a_1, a_2$  such that

$$[a_1n] + [a_2n] - 1 \leq u_n \leq [a_1n] + [a_2n] + 1$$

for all  $n \leq 2017$ .

( $[x]$  is the greatest integer which does not exceed  $x$ ).

**Problem T11/479.** Find all continuous functions  $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  such that  $f(x+2016)$

$$= f\left(\frac{x+2017}{x+2018}\right) + \frac{x^2 + 4033x + 4066271}{x+2018}, \forall x > 0.$$

**Problem T12/479.** Given a circle  $(O)$  and two fixed points  $B, C$  on  $(O)$ . A point  $A$  is moving on  $(O)$  such that  $ABC$  is always an acute triangle and  $AB < AC$ . Choose  $D$  on the side  $AC$  such that  $AB = AD$ . The line  $BD$  intersects  $(O)$  at  $E$  which is different from  $B$ . The perpendicular projection of  $E$  (resp.  $D$ ) on  $AC$  (resp.  $AE$ ) is  $H$  (resp.  $M$ ). The circumcircle of  $AMH$  intersects  $(O)$  at  $K$ . Let  $N$  be perpendicular projection of  $K$  on  $AB$ .

a) Prove that  $MN$  goes through the midpoint  $I$  of  $BD$ .

b) The circumcircles of  $BCD$  and  $AMH$  intersect each other at  $P$  and  $Q$ . Prove that the midpoint of  $PQ$  always lies on a fixed line when  $A$  is moving on  $(O)$  in the given way.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN  
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)



# CÔNG THỨC TÍNH NHANH?

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN

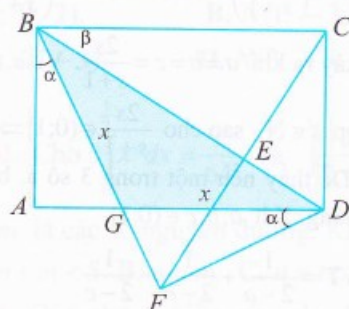
(GV Trường ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Có rất nhiều em học sinh với bài toán nào cũng muốn hỏi công thức tính nhanh. Theo tôi có hai vấn đề chính liên quan tới việc này. Thứ nhất, người ta chỉ cố gắng đưa ra công thức cho những ví dụ cơ bản, phổ biến—mà hiểu và làm được chúng thì có thể áp dụng cho nhiều bài khác. Đối với những trường hợp quá cụ thể, ngay việc nhớ điều kiện giả thiết để có thể áp dụng công thức “tính nhanh” (nếu có) đã là rất khó. Và bài nào cũng công thức thì có hàng nghìn công thức để nhớ. Bình thường ở nhà không áp lực gì đã không thể nhớ được, vào phòng thi áp lực như thế thì nhớ bằng cách nào? Thứ hai, hiện nay có không ít tài liệu trôi nổi viết theo kiểu: “Đây công thức cho ví dụ này đây. Cứ thế bấm máy là ra nhẽ”. Theo tôi, học sinh khó có thể học được gì từ những tài liệu đó vì chúng rất nửa vời. Đây không phải là làm một bài toán theo kiểu trắc nghiệm. Đây là tự luận nhưng lại giấu đi hoặc không nói được cách lập luận, dẫn dắt sao cho học sinh có thể tự lập công thức và qua đó hiểu được bản chất và thấy nó dễ nhớ, dễ áp dụng hơn.

Dưới đây tôi sẽ trình bày một bài toán bằng hai cách: tự luận và trắc nghiệm. Qua đó hy vọng rằng sẽ truyền tải được một phần quan điểm của tôi về việc nên làm một bài toán trắc nghiệm như thế nào. Đây là một bài toán trong đề thi Hanoi Open Mathematics Contest 2014 (HOMC 2014).

**Bài toán.** Cho một mẫu giấy hình chữ nhật với kích thước  $15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ . Gấp đôi mẫu giấy dọc theo một đường chéo. Tính diện tích phần chung bị phủ bởi hai nửa hình chữ nhật.

Ta vẽ hình như dưới. Trong đó  $F$  là điểm đối xứng của  $C$  qua  $BD$ . Ta cần tính diện tích tam giác  $BGD$ .



**Cách 1 (Tự luận).** Ta cần tính  $DG$ .

Đặt  $DG = x$ . Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAG} = \widehat{DFG} \quad (= 90^\circ) \\ AB = FD \quad (= 15 \text{ cm}) \\ \widehat{ABG} = \widehat{FDG} \end{cases}$$

Do đó  $\triangle BAG = \triangle DFG$  (g.c.g). Vậy  $BG = x$ .

Trong tam giác vuông  $BAG$  ta có

$$BG^2 = BA^2 + AG^2.$$

Chú ý rằng  $AG = 20 - x$ .

$$\text{Vậy } x^2 = 15^2 + (20 - x)^2 \Rightarrow x = \frac{625}{40}.$$

$$\text{Vậy } S_{BGD} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot GD = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{625}{40} = \frac{1875}{16} (\text{cm}^2).$$

**Chú ý.** Trong cách chứng minh này, ta phải có nhận xét đầu tiên về hai tam giác bằng nhau và tìm cách chứng minh nó một cách chặt chẽ. Sau đó phải thiết lập được một phương trình liên quan đến số đo của cạnh  $DG$  và giải phương trình đó. Các bước đều phải lập luận rõ ràng và lôgic.

**Cách 2 (Trắc nghiệm). Phân tích.** Ta cần tính  $GD$  hay một cách tương đương là ta cần tính  $AG$ . Việc tính  $AG$  được quy về tính góc  $\widehat{ABG} = \alpha$ . Nếu đặt  $\widehat{CBD} = \beta$ , thì ta có  $\widehat{FBD} = \beta$  theo cách gấp. Vậy  $\alpha = 90^\circ - 2\beta$  và  $\beta$  thì được xác định bởi  $\tan \beta = \frac{CD}{BC} = \frac{15}{20}$ .

## TÌM LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN ...

(Tiếp theo trang 3)

Áp dụng BĐT (\*) cho biểu thức  $a^s(2-a)$  với  $m=s, n=1, p=1, b=2$ :

$$a^s(2-a) \leq \left(\frac{s}{1}\right)^s \cdot 1^1 \cdot \left(\frac{2}{s+1}\right)^{s+1} = s^s \cdot \left(\frac{2}{s+1}\right)^{s+1}.$$

Tương tự:

$$b^s(2-b) \leq s^s \cdot \left(\frac{2}{s+1}\right)^{s+1}, c^s(2-c) \leq s^s \cdot \left(\frac{2}{s+1}\right)^{s+1}.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a=b=c=\frac{2s}{s+1}$ . Vì  $a, b, c \in (0; 1]$

nên ta chọn  $s \in \mathbb{N}^*$  sao cho  $\frac{2s}{s+1} \in (0; 1] \Rightarrow s=1$ .

**Lời giải.** Để thấy nếu một trong 3 số  $a, b, c$  bằng 0 thì BĐT đúng. Xét  $a, b, c \in (0; 1]$ .

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \\ &= \frac{a}{a(2-a)} + \frac{b}{b(2-b)} + \frac{c}{c(2-c)}. \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT(\*):  $a(2-a) \leq 1, b(2-b) \leq 1, c(2-c) \leq 1$

**Cách làm.** Phân tích dài như vậy, nhưng để ra đáp số, ta có thể bấm máy rất nhanh theo hướng như sau:

$$\alpha = 90^\circ - 2 \tan^{-1} \left( \frac{15}{20} \right).$$

$$AG = AB \cdot \tan \alpha = 15 \cdot \tan \alpha.$$

$$GD = 20 - AG = 20 - 15 \cdot \tan \alpha.$$

$$\text{Vậy } S_{BGD} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot GD = \frac{1875}{16} (\text{cm}^2).$$

**Thực hiện bấm máy tính như sau:**

1. Bật máy tính. Máy mặc định ở chế độ DEG.
2. Bấm  $90^\circ - 2 \times [\text{SHIFT}][\tan] \frac{15}{20}$ .
3. Bấm  $20 - 15 \times \tan(\text{Ans})$ .
4. Bấm  $\frac{1}{2} \times 15 \times \text{Ans}$ .

**Chú ý.** Ở hình thức trắc nghiệm này ta cũng phải phân tích là cần tính cái gì và quy về tính cái gì. Tuy nhiên, ở đây ta không phải chỉ ra cụ thể góc  $\alpha$  chính xác bằng bao nhiêu và  $\tan \alpha$  có biểu diễn chính xác là như thế nào. Với sự trợ giúp của máy tính, ta có thể bấm máy liên tiếp và tính được chính xác đáp số cuối cùng mà không phải quan tâm đến các bước trung gian. Nếu dùng tự luận và đi theo hướng của cách 2 thì việc có giá trị gần đúng của  $\alpha$  không dễ để chứng minh  $\tan \alpha = \frac{7}{24}$  và từ đó có thể dẫn đến đáp số cuối cùng. Cụ thể hơn ta có thể lại phải dùng

$$\begin{aligned} \Rightarrow VT &= \frac{a}{a(2-a)} + \frac{b}{b(2-b)} + \frac{c}{c(2-c)} \\ &\geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

Do  $a, b, c \in (0; 1] \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq abc \Rightarrow 3\sqrt[3]{abc} \geq 3abc$

$$\Rightarrow \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3abc \text{ (đpcm)}.$$

Bằng cách vận dụng bất đẳng thức (\*) giúp ta tìm được lời giải một số bài toán tìm cực trị tích. Mong bạn đọc tiếp tục tìm thêm các ứng dụng thú vị khác từ bất đẳng thức (\*).

## BÀI TẬP

1. Cho  $a, b, c$  là ba cạnh tam giác có chu vi bằng 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a(2-a)^3 + b(2-b)^3 + 2c - c^2.$$

2. Tìm  $m$  để phương trình:  $x^7 - 16x^3 + m = 0$  có nghiệm  $x$  thỏa mãn:  $0 \leq x < 2$ .

3. Cho  $x$  thỏa mãn  $x^2 + x < 0$ . Tìm GTNN của biểu thức:  $(x^2 + x)[(x+1)^2 + x + 2]$ .

thêm một số công thức lượng giác. Và những công thức này chỉ cho ra kết quả "đẹp" trong một số trường hợp đặc biệt. Ví dụ từ  $\alpha = 90^\circ - 2\beta$  và  $\tan \beta = \frac{15}{20}$  ta có thể chứng minh được  $\tan \alpha = \frac{7}{24}$ . Nếu thay đổi một chút, chẳng hạn như  $\alpha = 80^\circ - 5\beta$ , thì việc này không dễ như trước nữa. Tuy nhiên, điều đó không gây ra khó khăn gì đối với hình thức trắc nghiệm (trong trường hợp được sử dụng máy tính).

**Công thức "nhanh" trong trường hợp tổng quát:**

Nếu thay  $AB = 15$  và  $BC = 20$  bởi  $AB = a$  và  $BC = b$  thì ta có công thức tính "nhanh" cho diện tích phần bị phủ trong trường hợp tổng quát như sau

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left[ b - a \cdot \tan \left( 90^\circ - 2 \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) \right) \right].$$

Đây là công thức tính trong trường hợp tổng quát. Nhưng ai mà nhớ được nhỉ? Và nhớ để làm gì cho vô vàn những ví dụ riêng lẻ như thế này.

**Chú ý.** Bài này có thêm ít nhất 2 cách giải nữa. Một cách hoàn toàn hình học (kẻ thêm đường phụ, ...) và một cách sử dụng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Tôi đã viết và bình luận về hai cách giải này trên 2 số Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, mục Học tiếng Anh qua các bài toán.

# ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 8

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1B  | 2D  | 3B  | 4B  | 5C  | 6C  | 7D  | 8C  | 9D  | 10D | 11A | 12A | 13B | 14B | 15D | 16C | 17D |
| 18D | 19A | 20D | 21D | 22C | 23B | 24A | 25A | 26D | 27B | 28C | 29A | 30B | 31A | 32D | 33C | 34C |
| 35A | 36B | 37D | 38D | 39A | 40C | 41D | 42A | 43D | 44B | 45D | 46C | 47C | 48A | 49C | 50D |     |

**Câu 1.** Ta có  $y' = 2(x-1)^2(2x+1)$  nên hàm số có 1 điểm cực trị là  $x = -\frac{1}{2}$ . Chọn B.

**Câu 2.** Ta có  $\frac{b}{d} > 0, \frac{-b}{a} < 0, \frac{-d}{c} > 0, \frac{a}{c} < 0$ . Chọn D.

**Câu 3.** Ta có  $x^2(x^2-3) = 2x \Leftrightarrow x(x-2)(x+1)^2 = 0$  nên hai đường đã cho tiếp xúc với nhau tại 1 điểm là  $M(-1, -2)$ . Chọn B.

**Câu 4.** Ta có  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$  nên đồ thị có 2 tiệm cận đứng là các đường thẳng  $x = 1, x = -1$  và có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 0$ . Chọn B.

**Câu 5.** Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm  $M(2, 0)$  và  $N(1, n)$  với  $3 < n < 3,5$ . Chọn C.

**Câu 6.** Khi  $m = 1$  thì phương trình chỉ có 3 nghiệm là  $x_1 \in (-2, -1), x_2 = 0, x_3 \in (1, 2)$ . Chọn C.

**Câu 7.** Đồ thị hàm số có điểm cực đại  $(0, 0)$ , các điểm cực tiểu là  $(-1, -1), (1, -1)$  nên  $\Delta: mx - y = 0$  và tổng khoảng cách từ 2 điểm cực tiểu đến  $\Delta$  là

$$d_1 + d_2 = \frac{|m-1| + |m+1|}{\sqrt{m^2+1}} \geq \frac{\sqrt{(m-1)^2 + (m+1)^2}}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}.$$

Chọn D.

**Câu 8.** Ta có  $y' = 3x^2 + 2(2m-1)x + (m+1)$ . Do hàm số đã cho là hàm bậc ba có hệ số  $a = 1 > 0$  nên yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' = (2m-1)^2 - 3(m+1) > 0 \\ \frac{1-2m-\sqrt{\Delta'}}{3} \geq -1. \end{cases} \Rightarrow m < \frac{-1}{4}. \text{ Chọn C.}$$

**Câu 9.**  $y' = 1 - \frac{m^2}{(x+1)^2}, y'' = \frac{2m^2}{(x+1)^3}$  nên yêu cầu bài

toán  $\Leftrightarrow 1 - \frac{m^2}{4} = 0, \frac{2m^2}{8} < 0$ , vô nghiệm. Chọn D.

**Câu 10.** Ta xóa phần bên trái trục tung của (C):

$y = \frac{x-2}{x+1}$  rồi lấy đối xứng phần bên phải trục tung của (C) qua trục tung ta được đồ thị (C') của hàm số

$y = \frac{|x|-2}{|x|+1}$ . Lấy đối xứng (C') qua trục hoành rồi xóa phần phía dưới trục hoành ta được đồ thị (C'')

$y = \frac{||x|-2|}{|x|+1}$ . Xét số giao điểm của (C'') với  $d: y = m$

ta được kết quả. Chọn D.

**Câu 11.** Đặt  $XM = x$  (km) thì  $0 \leq x \leq 25$ . Thời gian đi từ A đến C là

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30} \\ &\geq \frac{\sqrt{(2x+10)^2 + (20+25-x)^2}}{30} \\ &= \frac{\sqrt{5(x-5)^2 + 2000}}{30} \geq \frac{2}{3}\sqrt{5}. \text{ Chọn A.} \end{aligned}$$

**Câu 12.** Ta có  $x \in D \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ . Chọn A.

**Câu 13.** Điều kiện:  $x > 0$ . Khi đó phương trình tương đương  $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$ . Chọn B.

**Câu 14.** Đặt  $2^x = t, t > 0$ , PT trở thành  $t^2 - 2mt + 2m = 0$ .

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0, S = P = 2m > 0$ ,

$P = 2m = t_1 t_2 = 2^{x_1+x_2} = 8 \Leftrightarrow m = 4$ . Chọn B.

$$\text{Câu 15. Ta có } x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - 2^x - 6 \cdot 2^{-x} \geq 0 \\ \frac{2x - x^2}{x-4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 2^x \leq 6 \\ x \leq 0 \vee 2 \leq x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 \leq x \leq \log_2 6 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

**Câu 16.** Ta có

$$\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{6} \log_2 (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = \frac{1}{6} (3 + 2a + b). \text{ Chọn C.}$$

**Câu 17.** BPT  $\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2} - 1\right)(2x^2 + x + 1 - 1 + x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(x^2 + x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 18. } f'(x) = \frac{\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{\cos^2 x} - 1)^2 (2\sqrt[3]{\cos^2 x} + 1)}{3 \cos x \sqrt[3]{\cos x}}. \text{ Chọn D.}$$

**Câu 19.**  $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{3^x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \ln 3 \right) < 0, \forall x \in \mathbb{R};$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, f(-1) \neq -f(1).$  Chọn A.

**Câu 20.** Gọi  $u_n$  là số tiền lãi phải trả ở tháng thứ  $n$  (lần trả sau  $n$  tháng kể từ khi vay).

Ta có  $u_1 = rA, u_2 = \left(1 - \frac{1}{t}\right)rA, u_3 = \left(1 - \frac{2}{t}\right)rA, \dots$

$\dots, u_t = \left(1 - \frac{t-1}{t}\right)rA.$  Tổng số lãi phải trả là

$T = \left(t - \frac{1+2+\dots+(t-1)}{t}\right)rA = \frac{(t+1)rA}{2}.$  Chọn D.

**Câu 21.** Đặt  $\log_a b = t$  thì  $t > \log_a a^2 = 2.$

Ta có  $b = a^t$ , do đó

$P = 4t^2 + 6 \left( \log_{a^{\frac{1}{2}}} a^{\frac{t-1}{2}} \right)^2 = 4t^2 + 6 \frac{(t-1)^2}{(t-2)^2} := f(t).$

Ta có  $f'(t) = \frac{4(t-3)(2t^3-6t^2+6t-1)}{(t-2)^3} = 0 \Leftrightarrow t = 3.$

Lập bảng biến thiên ta có  $\min_{(2;+\infty)} f(t) = 60.$  Chọn D.

**Câu 22.**  $\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C.$  Chọn C.

**Câu 23.** Ta có

$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 4.$

Chọn B.

**Câu 24.** Đặt  $x = \cos 2t$  thì

$dx = -2 \sin 2t dt = -4 \sin t \cos t dt.$

Do đó  $2 = \int_0^1 f(x) dx = -4 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 f(\cos 2t) \sin t \cos t dt$

$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2t) \sin t \cos t dt.$

Suy ra  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2t) \sin t \cos t dt = \frac{1}{2}$  hay

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}.$  Chọn A.

**Câu 25.** Ta có  $S = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \frac{8\pi}{15}.$  Chọn A.

**Câu 26.** Ta có  $S = 2\pi \int_1^e \frac{2x^2 - \ln x}{4} \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2} dx$   
 $= \frac{\pi}{2} \int_1^e (2x^2 - \ln x) \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx = \frac{4e^4 - 9}{16} \pi.$  Chọn D.

**Câu 27.**  $f'(x) = 2x^3 - 4m^2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}|m|.$

Điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu là  $m \neq 0.$   
 Khi đó đường thẳng cùng phương với trục hoành đi qua điểm cực đại là  $y = 2.$

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow 2 \int_0^{2|m|} \left(2m^2x^2 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{64}{15}$

$\Leftrightarrow \left(2m^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10}\right) \Big|_0^{2|m|} = \frac{32}{15} \Leftrightarrow |m| = 1.$  Chọn B.

**Câu 28.**  $S = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2+1} dx = \int_0^1 (x^3 + x) d(\sqrt{x^2+1})$

$= (x^3 + x) \sqrt{x^2+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} (3x^2 + 1) dx$

$= 2\sqrt{2} - 3S - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx.$

Tiếp tục sử dụng công thức đổi biến để tính

$T = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$  ta được  $a = 3, b = 2, c = 8.$  Chọn C.

**Câu 29.**  $\bar{z} = 2 + 3i.$  Điểm biểu diễn  $(2, 3).$  Chọn A.

**Câu 30.** Ta có  $z^{-1} = \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}.$  Chọn B.

**Câu 31.**  $z_{1,2} = 1 \pm \frac{i}{2}$  nên  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{5}{2}.$  Chọn A.

**Câu 32.** Với mỗi  $z \in \mathbb{C}$  ta có

$2|z-1| + 3|z-i| \geq 2(|z-1| + |z-i|)$   
 $\geq 2(|z-1+i-z|) = 2\sqrt{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $z = i.$

Khi đó  $|z| = 1$  nên  $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}.$  Chọn D.

**Câu 33.** Đặt  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}.$  Gọi  $M(a, b), A(-2, 0), B(2, 0).$  ycbt  $\Leftrightarrow MA + MB = 5.$  Suy ra tập hợp điểm  $M$  là một elip. Chọn C.

**Câu 34.** Áp dụng bất đẳng thức  $\|z_1| - |z_2|\| \leq |z_1 + z_2|$

ta có  $\left| |z| - \frac{1}{|z|} \right| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq |z| - \frac{1}{|z|} \leq 3.$

Từ đó suy ra  $\frac{\sqrt{13}-3}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{13}+3}{2}.$  Chọn C.

**Câu 36.** Gọi độ dài cạnh huyền của  $\Delta ABC$  là  $x$ . Ta có  $S_{ABC} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{x^2}{4} = a^3 \Leftrightarrow x = a\sqrt{6}$ . Chọn B.

**Câu 37.** Ta có  $V_{G.ABC'} = \frac{1}{3} V_{C.ABC'} = \frac{1}{3} V_{C.ABB'}$   
 $= \frac{1}{6} V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{18} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{18}$ . Chọn D.

**Câu 38.** Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Kẻ  $BK \perp AM$ ,  $K$  thuộc đoạn thẳng  $AC$ . Ta có  $BK \perp SA$  (do  $BK \perp (SAM)$  vì  $SM \perp (ABC)$ ) và  $AK = \frac{AB^2}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ . Kẻ  $BH \perp SA$ ,  $H$  thuộc đoạn thẳng  $SA$ . Ta có  $SA \perp (BHK)$  và  $BK^2 = AB^2 + AK^2 > HB^2 + HK^2$  nên ta có  $\widehat{BHK} = 120^\circ$ . Khi đó, theo định lý cosin ta có  $HB^2 + HK^2 + HB \cdot HK = BK^2$ . Suy ra  $HB^2 \cdot HK^2 = 4HA^4$ . Do vậy

$$(2a^2 - HA^2) \left( \frac{4a^2}{5} - HA^2 \right) = 4HA^4 \Leftrightarrow HA = a\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Khi đó  $SA\sqrt{AB^2 - HA^2} = AB\sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{4}} \Rightarrow SA = a\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

Do đó  $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Vậy  $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{30}}{12} a^3$ . Chọn D.

**Câu 39.**  $r = \frac{S_{xq}}{2\pi h} = \frac{80\pi}{20\pi} = 4$  nên  $V = \pi r^2 h = 160\pi$ . Chọn A.

**Câu 40.** Ta có

$$R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4}} \text{ nên}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi}{3} \left( h^2 + \frac{4a^2}{3} \right) \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}}. \text{ Chọn C.}$$

**Câu 41.** Gọi khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt đáy của hình nón là  $x$ ,  $0 < x < R$ . Ta có chiều cao của hình nón  $h \leq R + x$ . Do vậy

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2) h \leq \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2) (R + x) =: f(x).$$

Giải  $f'(x) = 0$  được  $x = \frac{R}{3} \Rightarrow V_{\text{nón}} = \frac{32}{81} \pi R^3$ . Chọn D.

**Câu 42.** Gọi cạnh hình vuông là  $x$ , ta có

$$\frac{1-x}{2} : x = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} - 3.$$

$$\text{Suy ra } V = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi \left( \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \right)^2 (2\sqrt{3}-3)$$

$$= \frac{810 - 467\sqrt{3}}{24} \pi. \text{ Chọn A.}$$

**Câu 43.**  $(S): (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 5^2$ . Chọn D.

**Câu 44.** Giả sử  $\vec{n}_{(P)}(a, b, c)$  thì  $(P): ax + b(y-1) + cz = 0$ . Ta có  $2a + 2b + c = 0, a + 2b - c = 0$  nên  $3a + 4b = 0$ . Chọn  $a = 4, b = -3$  thì  $c = -2$ . Chọn B.

**Câu 46.** Giả sử  $\vec{n}_{(P)}(a, b, c)$  thì  $(P): ax + by + c(z-1) = 0$ . Ta có  $b = 0, a - b + 4c = 0$  nên  $a + 4c = 0$ . Chọn C.

**Câu 47.** Ta có khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng bất kỳ chứa  $\Delta$  không vượt quá khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $\Delta$  và khoảng cách đó sẽ đạt giá trị lớn nhất khi mặt phẳng này chứa  $\Delta$  và nhận  $\overline{MH}$  làm vector pháp tuyến trong đó  $H$  là hình chiếu của  $M$  lên  $\Delta$ . Ta có  $H(3; 1; 4)$  và  $\overline{MH}(1; -4; 1)$ . Chọn C.

**Câu 48**

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \geq 2d^2(I; (P)) + \frac{AB^2}{2} = 60$$

với  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Chọn A.

**Câu 49.** Các điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Ba mặt phẳng  $(ABC), (ACD), (ADB)$  chia không gian thành 8 phần, mặt phẳng  $(BCD)$  cắt 3 mặt phẳng trên thành 3 giao tuyến, chúng chia mặt phẳng  $(BCD)$  thành 7 miền mặt phẳng, mỗi miền lại chia 1 phần của không gian thành 2 phần (có 7 phần không gian trong 8 phần không gian trên được chia như vậy). Vậy số phần là  $7 \cdot 2 + 1 = 15$  phần. Chọn C.

**Câu 50.** Mặt cầu nội tiếp tứ diện  $ABCD$  có thể tích

$$\text{lớn nhất} \Leftrightarrow r_{ABCD} \text{ max} \Leftrightarrow \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}} \text{ max}$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} + S_{ABD} \text{ min (do } V_{ABCD}, S_{ACD}, S_{BCD} \text{ không đổi)}$$

$$\Leftrightarrow h_{(C, AB)} + h_{(D, AB)} \text{ min.}$$

Gọi  $XY$  là đoạn vuông góc chung của các đường thẳng  $\Delta$  và  $AB$  ( $X \in \Delta$ ). Ta có  $X(2, 2, 3)$ . Gọi  $\Delta'$  là đường thẳng qua  $X$  và song song với  $AB$  và  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta$  và  $\Delta'$ . Ta có  $(\Delta, \Delta') = \gamma = \text{const}$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $C, D$  lên đường thẳng  $AB$  và  $H', K'$  lần lượt là hình chiếu của  $H, K$  lên mặt phẳng  $(\alpha)$ . Ta có

$$h_{(C, AB)} + h_{(D, AB)} = CH + DK$$

$$= \sqrt{CH'^2 + H'H^2} + \sqrt{DK'^2 + K'K^2}$$

$$= \sqrt{CH'^2 + XY^2} + \sqrt{DK'^2 + XY^2}$$

$$\geq \sqrt{(CH' + DK')^2 + (2XY)^2}$$

$$= \sqrt{(CD \sin \gamma)^2 + (2XY)^2} = \text{const.}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow X$  là trung điểm  $CD$ . Chọn D.

TRẦN QUỐC LUẬT

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh)



# ĐẲNG THỨC VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

NGUYỄN TUẤN ANH

(THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

**T**rong Toán học nói chung và Toán sơ cấp nói riêng, không ít lần bạn đọc đã bắt đầu một lời giải của một bài toán bằng một hằng đẳng thức (một công thức) nào đó. Đôi lúc nó khá tự nhiên vì hình dáng của bài toán nhưng cũng không thiếu các bài toán mà lời giải của nó các đẳng thức xuất hiện không hề dự báo trước. Bài viết một phần sẽ điểm qua các bài toán như vậy, một phần sẽ đưa ra một số định hướng sáng tác một bài toán từ một đẳng thức, và quan trọng nhất là khai thác một mảng nhỏ mà bình thường sẽ khó thấy đẳng thức có thể áp dụng được.

## I. ĐẲNG THỨC VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

### A. Đẳng thức trong chứng minh bất đẳng thức

Việc sử dụng đẳng thức để chứng minh bất đẳng thức thường thì không mấy hiệu quả, đơn giản vì lượng thời gian giới hạn rất khó để suy nghĩ ra đẳng thức xuất phát ban đầu, tuy nhiên với một người ra đề thì đây là một hướng khá thú vị. Bằng cách xuất phát từ một đẳng thức ta bỏ đi vài số hạng (hoặc biến đổi nó) để từ đó sinh ra một bất đẳng thức. Độ khó dễ của bất đẳng thức khi ấy được quyết định bởi đẳng thức được chọn ban đầu, đại lượng mà ta bớt đi thậm chí kể cả cách mà ta dấu đi lượng đã bỏ bớt.

**Thí dụ 1** (Bunyakovsky). Với bốn số thực tùy ý  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ta luôn có:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2.$$

**Phân tích và lời giải.** BĐT là hệ quả của đẳng thức Lagrange sau:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Khi đó chỉ việc bỏ đi  $(a_1b_2 - a_2b_1)^2$  và ta được một bài toán BĐT.

**Nhận xét.** Đẳng thức Lagrange tổng quát là:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_ib_j - a_jb_i)^2.$$

Tương tự như trên ta bỏ đi  $\sum_{0 \leq i < j \leq n} (a_ib_j - a_jb_i)^2$  và được một bài toán bất đẳng thức, đó là BĐT Bunyakovsky trong trường hợp tổng quát:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Thay vì bỏ đi một số hạng, ta sẽ biến đổi hoặc đánh giá số hạng đó (đánh giá càng khéo léo, BĐT thu được sẽ càng khó). Thí dụ sau cho ta thấy điều đó.

**Thí dụ 2** (TH&TT – T7/420). Với ba số thực không âm  $a, b, c$  có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq \left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

**Phân tích và lời giải.** Sử dụng hằng đẳng thức Lagrange và giả thiết ta được:  $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a^2 + 1)(1 + b^2)(c^2 + 1) = (a^2 + 1)(1 + b^2)(c^2 + 1) = [(a + b)^2 + (ab - 1)^2](c^2 + 1) = (ac + bc + ab - 1)^2 + (a + b + c - abc)^2 = (ab + bc + ca - 1)^2 + (1 - abc)^2.$

Rõ ràng nếu ta bỏ đi hạng tử  $(1 - abc)^2$  sẽ không đủ mạnh để chứng minh bài toán, nghĩa là thay vì bỏ đi một hạng tử, người sáng tác (giả sử đi theo hướng này) đã đánh giá các hạng tử với nhau để thu được giá trị nhỏ nhất (và nó sẽ là con số ở vế phải). Ta có:

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 3abc \Rightarrow (1 - abc)^2 \geq \left[1 - \frac{(ab + bc + ca)^2}{3}\right].$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\left[1 - \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}\right]^2 + (ab+bc+ca-1)^2 \geq \left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

Đến đây ta chỉ việc khảo sát hàm số với chú ý rằng

$$ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ngoài cách xử lý các hạng tử thay vì bỏ đi từ đẳng thức ta có thể “che giấu” đi bằng cách thay các biến trong đẳng thức bởi một biểu thức khác (biểu thức thay thế không nhất thiết phải quá phức tạp vì khi đó bài toán sẽ rất khó nhìn, chỉ cần đơn giản cũng đủ để ta “che giấu” đẳng thức xuất phát ban đầu). Vẫn là đẳng thức Lagrange ta xét thí dụ sau:

**Thí dụ 3.** Với ba số thực không âm  $a, b, c$  có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq 1.$$

**Phân tích và lời giải.** Đẳng thức ở đây là gì khi rõ ràng các biểu thức trong vế trái không gọi ta đến một đẳng thức. Tuy nhiên có một điểm đặc biệt là các biểu thức đó là các tam thức bậc hai và luôn dương:

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0, \dots$$

Do vậy BĐT được viết lại là:

$$\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \left[\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \left[\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \geq 1$$

Lúc này ta hướng đến đẳng thức Lagrange như sau:

$$\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \left[\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \left[\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - xy\right)^2\right] \left[z^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{3}{4}z - xyz\right)^2 + \left[\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx)\right]^2$$

$$= \left(\frac{9}{8} - xyz\right)^2 + \left[\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx)\right]^2$$

trong đó  $x = a - \frac{1}{2}; y = b - \frac{1}{2}; z = c - \frac{1}{2}$ . Rõ ràng

$$\left(\frac{9}{8} - xyz\right)^2 \geq 1; \left[\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx)\right]^2 \geq 1 \text{ đều không}$$

hoàn toàn đúng, có nghĩa để chứng minh được bài

toán ta phải tận dụng cùng lúc hai biểu thức (giống như thí dụ 2). Ta có:

$$(xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z) \Rightarrow (xy + yz + zx)^2 \geq \frac{9}{2}xyz.$$

Ta cần chứng minh:

$$\left[\frac{9}{8} - \frac{2}{9}(xy + yz + zx)^2\right]^2 + \left[\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx)\right]^2 \geq 1.$$

Vì  $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 = \frac{9}{4}$  nên bằng công

cụ hàm số ta dễ dàng chứng minh được BĐT trên.

Bài toán được giải quyết.

**Nhận xét**

• Thay vì bỏ đi một đại lượng nào đó, ta có thể “che giấu” ý tưởng ban đầu bằng cách phối hợp nó với các đại lượng khác, hoặc cũng có thể thay thế các biến trong đẳng thức bằng các biểu thức khác.

• Thực chất với thí dụ 2, ta có thể làm ngắn gọn đoạn cuối bằng bất đẳng thức Cauchy vì các biến là không âm, nhưng nó sẽ không còn đúng với thí dụ 3. Lựa chọn đánh giá và khảo sát hàm số là hợp lý nhất cho cả hai thí dụ.

• Một bài toán tương tự mà người viết chưa tìm được lời giải bằng đẳng thức:

Với  $n$  số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có tổng bằng 1 ta luôn có:

$$(a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1) \dots (a_n^2 + 1) \geq \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^n.$$

Với  $n = 3$  ta được đề toán T7/420 TH&TT.

Trên đây là ba ý tưởng khai thác đẳng thức Lagrange, ta có thể chọn ra một đẳng thức khác và xây dựng tương tự vậy. Tiếp theo ta đến với một đẳng thức, chính xác là một công thức khai triển mặc dù không quen thuộc với học sinh phổ thông, nhưng nếu bạn đọc yêu thích toán chắc hẳn hơn một lần được nghe và thấy: Công thức khai triển Taylor:

Nếu  $f$  có đạo hàm liên tục cấp  $n$  trên  $[a; b]$  và có đạo hàm cấp  $n+1$  trên  $(a; b)$  thì:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

với  $c$  nằm giữa  $x$  và  $x_0$ .

**Ý tưởng:** Ta có một ý tưởng là trong khai triển Taylor của một hàm số kết hợp với một số điều kiện nào đó (chẳng hạn đạo hàm cấp hai giữ dấu với mọi  $x, \dots$ ) ta sẽ bỏ đi một phần trong khai triển (phần bỏ đó phải luôn không âm hoặc luôn không dương) và ta được một bài toán BĐT.

**Thí dụ 4.** Với  $x$  là số thực không âm. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a)  $e^x \geq 1 + x$ .

b)  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .

c)  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ .

**Phân tích và lời giải.** Các bài toán trên hoàn toàn có thể giải quyết bằng công cụ đạo hàm, tuy nhiên nếu ta nhìn nhận dựa trên công thức khai triển Taylor thì các bài toán trên khá hiển nhiên thậm chí ta còn cho thêm vào chúng một hoặc hai biểu thức nào đó mà công cụ đạo hàm sẽ rất vất vả và mới xử lý được.

Đơn cử xét với câu a), ta xét hàm số  $y = f(x) = e^x$  rõ ràng đây là hàm có đạo hàm liên tục vô hạn lần nên ta có thể áp dụng được công thức khai triển Taylor:  $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Rõ ràng  $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$  là không âm nên khi ta bỏ ra thì BĐT trên hiển nhiên đúng.

Hai câu còn lại mời bạn đọc tự thử sức. Dựa trên công thức khai triển Taylor ta có thể lý giải cho một phương pháp rất thường dùng trong chứng minh BĐT: Phương pháp tiếp tuyến (đây chỉ là một cách lý giải cho khởi nguồn của phương pháp theo quan điểm của giải tích):

Nếu  $f''(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$  thì

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \forall x_0 \in [a; b].$$

Nếu  $f''(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$  thì

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \forall x_0 \in [a; b].$$

**Hướng dẫn chứng minh:** Khai triển hàm số đến cấp hai. Kết thúc phần này mời bạn đọc thử sức với ba bài toán sau:

**Bài toán 1 (JBMO TST 2015).** Với ba số thực dương  $a, b, c$ , chứng minh rằng:

$$(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 + 3 \sqrt{\frac{(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2}{a^2 b^2 c^2}}.$$

**Bài toán 2 (Olympic 30/4 năm 2001).** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta luôn có:

$$(1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C) < e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

**Bài toán 3 (O291, Olympiad problems - Mathematical reflections).** Với ba số thực dương  $a, b, c$  chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{4a^2 + ab + 4b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 + bc + 4c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{4c^2 + ca + 4a^2}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

## B. Đẳng thức trong tổ hợp

Trong phần này ta chỉ tập trung vào đẳng thức quen thuộc:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Từ đó có thể khai thác theo các hướng khác nhau.

• **Hướng 1.** Thay  $a, b$  bằng các giá trị cụ thể.

Nếu ta thay  $a = b = 1$  ta được bài toán sau:

**Thí dụ 5.** Với  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng:  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ .

Nếu thay  $a = -b = 1$  ta được:

**Thí dụ 6.** Với  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng:  $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$ .

Cứ như vậy ta cho  $a, b$  các giá trị khác và ta lại được một bài toán mới.

• **Hướng 2.** Thực hiện những phép biến đổi sơ cấp: Đạo hàm, tích phân, nhân các biểu thức...

Thay  $a = 1, b = x$  và lấy đạo hàm, tích phân ta được các bài toán sau:

**Thí dụ 7.** Với  $n$  là số nguyên dương, chứng minh rằng:

a)  $2^{n-1} \cdot n = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$ .

b)  $1.2.C_{2017}^2 + 2.3.C_{2017}^3 + \dots + 2016.2017.C_{2017}^{2017} = 2017.2016.2^{2015}$ .

c)  $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$ .

Nếu đan xen hai kỹ thuật biến đổi trên bài toán sẽ khó lên rất nhiều:

**Thí dụ 8.** Cho  $n$  là số nguyên dương.

a) (B – 2003). Tính tổng

$$S = C_n^0 + \frac{2^2 - 1}{2} C_n^1 + \frac{2^3 - 1}{2} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1} - 1}{2} C_n^n.$$

b) (A – 2007). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} C_{2n}^1 + \frac{1}{4} C_{2n}^3 + \dots + \frac{1}{2n} C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n + 1}.$$

Tích hai biểu thức  $(x+1)^n (x+1)^n = (x+1)^{2n}$  ta được:

**Thí dụ 9.** Với  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng:  $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Nếu ta chọn tích của các biểu thức phức tạp thì bài toán sẽ gây khó cho người làm:

$$(1-x^2)^{2n} = (1-x)^{2n} (1+x)^{2n}$$

$$\text{và } [2x + (1+x)]^m (1+x)^n = (3x+1)^m (1+x)^n.$$

**Thí dụ 10.** Với  $n$  là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a) } (C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 - \dots + (-1)^k (C_{2n}^k)^2 + \\ \dots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n. \end{aligned}$$

b) Với hai số  $m, n$ ,  $m \leq n$ , chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^m 3^k C_m^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^m 2^k C_m^k C_{m+n-k}^m.$$

Hoặc ta cũng có thể kết hợp vừa nhân biểu thức vừa lấy đạo hàm và có cả tích phân:

$$\int_0^1 x^3 \left( (x+1)^n \right)' dx = \left( \frac{x^4 C_n^1}{4} + \frac{2x^5 C_n^2}{5} + \dots + \frac{nx^{n+3} C_n^n}{n+3} \right) \Big|_0^1.$$

**Thí dụ 11.** Với  $n$  là số nguyên dương, chứng minh

$$\text{rằng: } \frac{C_n^1}{4} + \frac{2C_n^2}{5} + \dots + \frac{nC_n^n}{n+3} = \frac{2^n \cdot (n^3 + 5n - 6) + 6}{(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

Như vậy từ một đẳng thức ban đầu, không chỉ có thể biến đổi bằng các phép biến đổi sơ cấp mà còn có thể đan xen chúng với nhau để tạo nên một bài toán mới. Độ khó của bài toán phụ thuộc rất nhiều vào cách ta đan xen cũng như các biểu thức ta thêm bớt vào. Cuối cùng mời bạn đọc đến với các bài toán sau:

**Bài toán 4 (A – 2008).** Cho khai triển

$(1+2x)^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , trong đó  $n$  là số nguyên dương và các hệ số  $a_0, a_1, \dots, a_n$  thỏa mãn:

$$a_0 + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096.$$

Tìm số lớn nhất trong các số  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

**Bài toán 5.** Cho khai triển

$$(1-2017x)^{2018} = a_0 + a_1 x + \dots + a_{2018} x^{2018}.$$

Tính tổng:

$$S = |a_0| + 2|a_1| + 3|a_2| + \dots + 2018|a_{2017}| + 2019|a_{2018}|.$$

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^{252} (4^{252-k} \cdot C_{1008}^{504+2k} \cdot C_{504+2k}^k) = C_{2016}^{504}.$$

**C. Đẳng thức trong giải phương trình hàm**

Ta đã quen thuộc với kỹ thuật thêm biến trong giải phương trình hàm mà bản chất của kỹ thuật đó là tận dụng các đẳng thức:

$$x + (y+z) = (x+y) + z; x(yz) = (xy)z; \dots$$

Tuy nhiên để tránh lặp lại, bài viết sẽ khai thác đẳng thức để giải phương trình hàm theo một hướng khác. Ta xét bài toán sau:

**Thí dụ 12 (HSG lớp 10, Vĩnh Phúc, hệ THPT chuyên, năm 2010 – 2011).** Giả sử  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  thỏa

$$\text{mãn } f(1) > 0 \text{ và } f(m^2 + 2n^2) = (f(m))^2 + 2(f(n))^2$$

với mọi  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tính giá trị  $f(2); f(2011)$ .

**Phân tích và lời giải.** Ta thử tính vài giá trị đầu và nhận thấy  $f(n) = n$  với  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ . Vì yêu cầu khá đặc biệt là tính  $f(2011)$  nên ta có dự đoán  $f(n) = n$  với mọi  $n$ . Ta sẽ xử lý bài toán theo hai cách với hai ý tưởng sử dụng đẳng thức khác nhau.

**Cách 1.** Ta có đẳng thức:

$$k^2 + 2(k-3)^2 = (k-4)^2 + 2(k-1)^2.$$

• Ta dễ dàng có  $f(n) = n$  với  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

• Khi đó giả sử  $f(n) = n, \forall n \leq n_0; n_0 \geq 4$ .

$$\text{Ta có: } (f(n_0+1))^2 + 2(n_0-2)^2 = (f(n_0+1))^2 + 2(f(n_0-2))^2$$

$$= f((n_0+1)^2 + 2(n_0-2)^2) = f((n_0-3)^2 + 2n_0^2)$$

$$= (f(n_0-3))^2 + 2(f(n_0))^2 = (n_0-3)^2 + 2n_0^2$$

$$\Rightarrow (f(n_0+1))^2 = (n_0+1)^2 \Rightarrow f(n_0+1) = n_0+1.$$

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta được  $f(n) = n, \forall n$ .

**Cách 2.** Ta sẽ chứng minh  $f(n) = n$  với mọi  $n$  bằng phương pháp quy nạp kết hợp với hai đẳng thức sau:

$$\begin{cases} (2k+1)^2 + 2(k-1)^2 = (2k-1)^2 + 2(k+1)^2 \\ (2k+2)^2 + 2(k-2)^2 = (2k-2)^2 + 2(k+2)^2 \end{cases}$$

Giả sử  $f(n) = n$  với mọi  $n \leq n_0$  với  $n_0 \geq 4$  ta chứng minh nó cũng đúng với  $n = n_0 + 1$

• Nếu  $n_0$  là số chẵn thì  $n_0 + 1$  là số lẻ nên sẽ có dạng là  $n_0 + 1 = 2k + 1, k \geq 2$ . Ta có:

$$\begin{aligned} f\left[(2k+1)^2 + 2(k-1)^2\right] &= f\left[(2k-1)^2 + 2(k+1)^2\right] \\ \Leftrightarrow [f(2k+1)]^2 + 2(k-1)^2 &= (2k-1)^2 + 2(k+1)^2 \\ \Leftrightarrow f(2k+1) &= 2k+1. \end{aligned}$$

• Nếu  $n_0$  là số lẻ thì  $n_0 + 1$  là số chẵn nên sẽ có dạng là  $n_0 + 1 = 2k + 2, k \geq 2$ . Ta có:

$$\begin{aligned} f\left[(2k+2)^2 + 2(k-2)^2\right] &= f\left[(2k-2)^2 + 2(k+2)^2\right] \\ \Leftrightarrow [f(2k+2)]^2 + 2(k-2)^2 &= (2k-2)^2 + 2(k+2)^2 \\ \Leftrightarrow f(2k+2) &= 2k+2. \end{aligned}$$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có:  $f(n) = n$  với mọi  $n$ .

**Nhận xét.** Bài giải mở ra hai vấn đề:

• Cần tính bao nhiêu giá trị ban đầu để có thể quy nạp từ đẳng thức?

• Làm sao phát hiện được đẳng thức sử dụng?

Thay cho câu trả lời ta xét hai thí dụ tương tự sau, bạn đọc hãy chú ý đẳng thức trong cách 3:

**Thí dụ 13.** Giả sử  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  thỏa mãn  $f(1) > 0$  và

$$f(m^2 + 5n^2) = [f(m)]^2 + 5[f(n)]^2 \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}.$$

Tính giá trị  $f(2017)$ .

**Phân tích và lời giải.** Ta thử tính vài giá trị như sau:

$$\begin{aligned} \bullet f(0) &= 6[f(0)]^2 \Rightarrow f(0) = 0. \\ \bullet f(1) &= [f(1)]^2 + 5[f(0)]^2 \Rightarrow f(1) = 1. \\ \bullet f(5) &= f(0^2 + 5 \cdot 1^2) = 5. \\ \bullet f(6) &= f(1^2 + 5 \cdot 1^2) = 6. \\ \bullet [f(2)]^4 + 5 &= [f(4)]^2 + 5 = [f(4)]^2 + 5[f(1)]^2 \\ &= f(4^2 + 5 \cdot 1^2) = f(21). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } f(21) &= f(1^2 + 5 \cdot 2^2) = [f(1)]^2 + 5[f(2)]^2 \\ &= 1 + 5[f(2)]^2. \text{ Do vậy:} \end{aligned}$$

$$[f(2)]^4 + 4 = 5[f(2)]^2 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 1 \\ f(2) = 2 \end{cases}.$$

Nếu  $f(2) = 1$  ta được:

$$[f(3)]^2 = f(9) = f(2^2 + 5 \cdot 1^2) = [f(2)]^2 + 5[f(1)]^2 = 6$$

Điều này không thể xảy ra vì  $f(3)$  là số tự nhiên.

Vậy nên  $f(2) = 2$ .

$$\bullet \text{ Khi đó } f(4) = [f(2)]^2 = 4; [f(3)]^2 = f(9)$$

$$= [f(2)]^2 + 5[f(1)]^2 = 9 \Rightarrow f(3) = 3.$$

$$\bullet [f(7)]^2 = f(49) = f(2^2 + 5 \cdot 3^2) = 49 \Rightarrow f(7) = 7.$$

$$\bullet [f(8)]^2 + 5[f(5)]^2 = f(8^2 + 5 \cdot 5^2)$$

$$= f(3^2 + 5 \cdot 6^2) = 189 \Rightarrow f(8) = 8.$$

$$\bullet f(9) = [f(3)]^2 = 9.$$

Tóm lại:  $f(n) = n; n = 0, 1, 2, \dots, 9$ .

**Cách 1.** Xét đẳng thức sau:

$$x^2 + 5(x-6)^2 = (x-10)^2 + 5(x-4)^2$$

Bằng phương pháp quy nạp ta được  $f(n) = n; \forall n$ .

Từ đó có được câu trả lời cho bài toán.

**Cách 2.** Sử dụng phương pháp quy nạp kết hợp với 5 đẳng thức:

$$\begin{cases} (5k+1)^2 + 5(k-1)^2 = (5k-1)^2 + 5(k+1)^2 \\ (5k+2)^2 + 5(k-2)^2 = (5k-2)^2 + 5(k+2)^2 \\ (5k+3)^2 + 5(k-3)^2 = (5k-3)^2 + 5(k+3)^2 \\ (5k+4)^2 + 5(k-4)^2 = (5k-4)^2 + 5(k+4)^2 \\ (5k+5)^2 + 5(k-5)^2 = (5k-5)^2 + 5(k+5)^2 \end{cases}$$

ta được  $f(n) = n; \forall n$ .

**Nhận xét.**

• Rõ ràng cần tính bao nhiêu giá trị ban đầu mới dùng được đẳng thức thực chất xuất phát từ đẳng thức ta dùng mà có.

• Đẳng thức trong cả hai ví dụ trên xuất phát từ đẳng thức tổng quát:

$$x^2 + k(x - k - 1)^2 = (x - 2k)^2 + k(x + 1 - k)^2.$$

Vậy ứng với mỗi giá trị của  $k$  ta có một bài toán mới, hiển nhiên  $k$  càng lớn giá trị cần tính ban đầu càng nhiều nó quyết định độ khó cho bài toán. Một điều thú vị với bài toán này là ngoài đẳng thức trong cách 1, ta còn đẳng thức sau với yêu cầu tính các giá trị ban đầu ít hơn.

**Cách 3.** Ta sử dụng đẳng thức sau:

$$x^2 + 5(x - 3)^2 = (x - 5)^2 + 5(x - 2)^2.$$

Với đẳng thức này ta chỉ cần tính 5 giá trị ban đầu. Bằng phương pháp quy nạp ta được  $f(n) = n; \forall n$ . Từ đó có được câu trả lời cho bài toán. Nếu hai bài toán đầu là bậc hai ta có thể dễ dàng tìm được đẳng thức, nhưng nếu bậc tăng lên thì như thế nào, ta xét thí dụ tiếp theo.

**Thí dụ 14.** Giả sử  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  thỏa mãn  $f(1) > 0$ ,

$$f(3) = 3, f(5) = 5, f(7) = 7 \text{ và}$$

$$\begin{aligned} & f(a^8 + 36b^8 + 126c^8 + 84d^8 + 9e^8) \\ &= [f(a)]^8 + 36[f(b)]^8 + 126[f(c)]^8 + \\ & \quad + 84[f(d)]^8 + 9[f(e)]^8 \end{aligned}$$

với mọi  $a, b, c, d, e$  là các số tự nhiên. Tính  $f(2017)$ .

**Phân tích và lời giải.** Ta sẽ sử dụng đẳng thức:

$$\begin{aligned} & x^8 + 36(x+2)^8 + 126(x+4)^8 + 84(x+6)^8 + 9(x+8)^8 \\ &= 9(x+1)^8 + 84(x+3)^8 + 126(x+5)^8 + 36(x+7)^8 + (x+9)^8 \end{aligned}$$

kết hợp với phương pháp quy nạp. Vấn đề còn lại đơn giản chỉ là tính 9 giá trị đầu tiên. Ta có:

$$\bullet a = b = c = d = e = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$\bullet a = 1, b = c = d = e = 0 \Rightarrow f(1) = 1.$$

$$\bullet [f(2)]^8 = f(2^8) = f(256) = 256[f(1)]^8 \Rightarrow f(2) = 2.$$

$$\begin{aligned} \bullet f(4^8) &= f(2^8 + 36 \cdot 2^8 + 126 \cdot 2^8 + 84 \cdot 2^8 + 9 \cdot 2^8) \\ &= 256[f(2)]^8 \Rightarrow f(4) = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(6^8) &= f(3^8 + 36 \cdot 3^8 + 126 \cdot 3^8 + 84 \cdot 3^8 + 9 \cdot 3^8) \\ &= 256[f(3)]^8 \Rightarrow f(6) = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(8^8) &= f(4^8 + 36 \cdot 4^8 + 126 \cdot 4^8 + 84 \cdot 4^8 + 9 \cdot 4^8) \\ &= 256[f(4)]^8 \Rightarrow f(8) = 8. \end{aligned}$$

$$\bullet f(9 \cdot 1^8) = 9[f(1)]^8 \Rightarrow f(9) = 9. \text{ Do vậy ta dễ dàng có được } f(n) = n, \forall n \text{ nên } f(2017) = 2017.$$

**Nhận xét.** Sử dụng đẳng để giải một bài phương trình hàm bản chất là tính các giá trị đặc biệt kết hợp thêm tính chất của phương trình hàm, cuối cùng là sử dụng phương pháp quy nạp quen thuộc “lan rộng” các giá trị tính được. Việc phát hiện đẳng thức là tương đối khó và không mẫu mực (đa phần dựa vào đặc điểm của bài toán), nhưng nếu nắm được một số kỹ năng nhất định trong sáng tác các đẳng thức thì việc đó không còn quá phức tạp. Người viết hy vọng được trao đổi nhiều hơn về phần này với bạn đọc.

Cuối cùng mời bạn đọc hãy thử sức với các bài toán sau:

**Bài toán 7.** Tìm tất cả các hàm  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  thỏa mãn  $f(1) > 0$  và  $f(m^2 + 3n^2) = [f(m)]^2 + 3[f(n)]^2$  với mọi  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán 8.** Giả sử  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  thỏa mãn  $f(1) > 0$  và  $f(m^2 + 4n^2) = [f(m)]^2 + 4[f(n)]^2$  với mọi  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tính giá trị  $f(2017)$ .

**Bài toán 9 (Vietnam TST – 2005).** Tìm tất cả các hàm  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  sao cho

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = [f(x)]^3 + [f(y)]^3 + [f(z)]^3$$

với mọi số nguyên  $x, y, z$ .

## II. KẾT LUẬN

Rõ ràng các bài toán được sáng tác trên quan điểm đẳng thức thường là rất khó và không nhiều cách giải, nhưng lại là mảnh đất hứa hẹn để người học Toán có thể thỏa sức sáng tạo.

Bài viết chưa đề cập đến cách để nhận dạng bài toán nên hay không nên đi theo hướng đẳng thức (điều này là rất quan trọng nhất là trong thi cử), cách phát hiện ra đẳng thức đã bị giấu đi, ... Hy vọng sẽ nhận được nhiều trao đổi hơn từ bạn đọc.

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 20

**Problem.** Construct a function which is determined on  $(0,1)$  but is discontinuous at any point on that interval.

**Solution.** Consider the following function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

If  $x_0 = q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$  then  $f(x_0) = 1$ . We choose an irrational sequence  $\{x_n\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  where

$$x_n = x_0 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$x_n$  is irrational for every  $n$  and  $x_n \rightarrow x_0$ . Also for all  $n$  is large enough  $x_n \in (0,1)$ . But by the above construction  $f(x_n) = 0$  and the sequence  $\{f(x_n)\}$  does not tend to  $f(x_0) = 1$ .

If  $x_0 \in (0,1)$  and  $x_0$  is irrational then  $f(x_0) = 0$ . Suppose that  $x_0 = 0.a_1 a_2 \dots a_n \dots$  is

the decimal expansion of  $x_0$ . We choose a rational sequence  $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$  as follows  $x_1 = 0.a_1$ ,

$$x_2 = 0.a_1 a_2, x_3 = 0.a_1 a_2 a_3, \dots, x_n = 0.a_1 a_2 \dots a_n, \dots$$

By the above construction  $f(x_n) = 1$  and the sequence  $\{f(x_n)\}$  does not tend to  $f(x_0) = 0$ .

Therefore, we have shown that  $f(x)$  is discontinuous at any point  $x_0 \in (0,1)$ .

**Question:** Can we construct a function  $f(x)$  with the above requirements but  $|f(x)|$  is continuous on  $(0,1)$ ?

## TỪ VỰNG

discontinuous  
rational  
irrational

: không liên tục  
: hữu tỉ  
: vô tỉ

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

**Bài toán.** Không sử dụng máy tính cầm tay, so sánh hai số  $e^\pi$  và  $\pi^e$ .

**Lời giải.** Đặt  $a = e^\pi$  và  $b = \pi^e$ . Việc lấy lôgarit tự nhiên giữ nguyên chiều bất đẳng thức, do đó  $a > b$  khi và chỉ khi  $\ln a > \ln b$  (1)

Nhưng bất đẳng thức (1) tương đương với  $\pi \ln e > e \ln \pi$  hay tương

$$\text{đương với } \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}.$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Ta có  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  luôn nhỏ hơn 0, khi  $x > e$ . Do đó hàm  $f(x)$

nghiệch biến với  $x > e$ . Từ đó bất đẳng thức  $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$  đúng. Vì vậy  $e^\pi > \pi^e$ .

**Nhận xét.** Các bạn sau có lời dịch tốt, gửi bài sớm đến Tòa soạn: **Hà Nội:** Nguyễn Hương Giang, 10A13, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Nam Định:** Lê Tiến Đạt, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thừa Thiên Huế:** Trương Minh Tuệ, 11T1, Phan Cảnh Minh Phước, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Vĩnh Long:** Huỳnh Lý Văn Anh, Châu Minh Khánh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (Hà Nội)



## GIẢI ĐÁP: SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ !

(Đề đăng trên TH&TT số 475, tháng 1 năm 2017)

### Phân tích sai lầm.

1) Đề bài toán đã xác định không đúng về phương pháp truy hồi khi cho dãy số. Rõ ràng  $u_2$  không được xác định bởi  $u_1$  là số hạng cho trước,  $u_3$  không được xác định bởi  $u_1$  và  $u_2$ , ....

Hơn nữa từ  $u_n = \frac{u_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2)u_n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow u_n + (\sqrt{3} - 2)u_n^2 = u_n + 2 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 2)u_n^2 = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow u_n^2 = -1 : \text{ vô lý.}$$

Vậy đề bài toán không chính xác.

2) Giả sử đề bài đúng là:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ u_n = \frac{u_{n-1} + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2)u_{n-1}}, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}; u_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 1;$$

$$u_3 = \frac{1 + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2) \cdot 1} = \sqrt{3};$$

$$u_4 = \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2) \cdot \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3};$$

$$u_5 = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2) \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{0} !$$

Như vậy mẫu số của  $u_5$  bằng 0 nên  $u_5$  không xác định. Do đó không tồn tại  $u_6, u_7, u_8, \dots$ . Vậy dãy số

chỉ có 4 số hạng và công thức số hạng tổng quát trong lời giải chỉ áp dụng cho 4 số hạng.

**Nhận xét.** Một số bạn không tìm được sai lầm, một số bạn khác phát hiện được sai lầm ở đề bài nhưng không đưa ra phương án sửa. Còn một số bạn đưa ra phương án sửa đề bài nhưng không tìm được sai lầm trong lời giải. Chỉ có bạn **Hồ Thị Hải Yến**, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế đã có những phân tích và đưa ra lời giải chính xác, xác định được dãy số đã cho chỉ có 4 số hạng như đã trình bày ở trên.

KIHI VI



### BÀI TOÁN CỰC TRỊ !

Trong giờ môn Hình học, thầy giáo đưa ra một bài toán để cả lớp cùng suy nghĩ giải quyết.

“Trong không gian Oxyz cho điểm  $H(1;1;-1)$  và hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}, \Delta_2 : \begin{cases} x = -3 - 2t' \\ y = -1 - t' \\ z = 2 \end{cases} \quad (t, t' \in \mathbb{R}).$$

Tìm điểm  $A$  thuộc  $\Delta_1$  và điểm  $B$  thuộc  $\Delta_2$  sao cho tổng  $HA + HB$  đạt giá trị nhỏ nhất”.

Toàn là học sinh đề xuất hướng giải quyết đầu tiên. Lời giải của Toàn như sau:

Gọi  $A(1 + a; 1 + 2a; 0) \in \Delta_1$ ,  $B(-3 - 2b; -1 - b; 2) \in \Delta_2$ .

Ta thấy  $HA + HB \geq AB$  (1). Tổng  $HA + HB$  đạt giá trị nhỏ nhất khi đẳng thức ở (1) xảy ra, tức là ba điểm  $H, A, B$  thẳng hàng, hay  $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$  cùng phương.

Dễ thấy  $\overrightarrow{HA} = (a; 2a; 1)$ ,  $\overrightarrow{HB} = (-4 - 2b; -2 - b; 3)$ ,

nên  $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$  cùng phương khi

$$\begin{cases} -4 - 2b = 3a \\ -2 - b = 6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Vậy  $A(1;1;0), B(1;1;2)$  là những điểm cần tìm.

Các bạn có đồng ý với lời giải của bạn Toàn không, nếu không bạn làm thế nào?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)



**BAN CỐ VẤN KHOA HỌC**

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

**CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN**

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

TS. PHAN XUÂN THÀNH

**HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**

**Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM**

**Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

**TRONG SỐ NÀY**

**1 Dành cho Trung học Cơ sở**

*For Lower Secondary School*

Phạm Văn Sơn – Tìm lời giải của bài toán tìm cực trị tích thông qua một bất đẳng thức thông dụng.

**4 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Hưng Yên, năm học 2016 – 2017.**

**6 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Hà Tĩnh, năm học 2016 – 2017.**

**7 Nguyễn Văn Mậu - Nguyễn Minh Tuấn**  
Kỳ thi Toán Hà Nội mở rộng năm 2017 lần thứ 14 (Senior Section).

**10 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 Thành phố Hà Nội, năm học 2016 – 2017.**

**11 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 9.**

**16 Đề ra kỳ này**

*Problems in This Issue*

**T1/479, ..., T12/479, L1/479, L2/479.**

**18 Giải bài kỳ trước**

*Solutions to Previous Problems*

**27 Diễn đàn dạy học toán**

Nguyễn Phú Hoàng Lâm – Công thức tính nhanh.

**29 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 8.**

**32 Phương pháp giải toán**

Nguyễn Tuấn Anh – Đẳng thức và một số ứng dụng.

**38 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 20.**

Bài dịch số 17 - Tiếng Anh qua các bài toán.

**39 Sai lầm ở đâu?**

Giải đáp: Số hạng tổng quát của dãy số!

Nguyễn Văn Xá – Bài toán cực trị!

Ảnh bìa 1. Nhà Toán học, Thiên văn học người Pháp Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813).

**Biên tập:** LÊ MAI - NGUYỄN HIỆP

**Trĩ sự, phát hành:** NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

**Mĩ thuật:** QUỐC HIỆP, THANH LONG

**Thiết kế, chế bản:** MAI ANH



# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

*Cuốn sách*

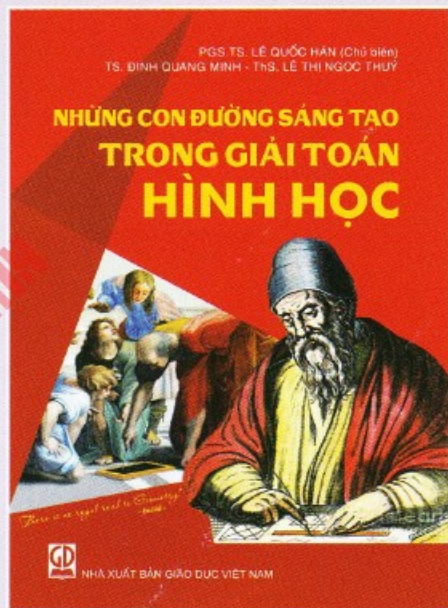
## NHỮNG CON ĐƯỜNG SÁNG TẠO TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

(của các tác giả: PGS.TS. NGUYỄN Lê Quốc Hán (chủ biên), TS. Đinh Quang Minh, Th.S. Lê Thị Ngọc Thúy)

Sách dày 472 trang, khổ  $17 \times 24$ cm, giá bìa 80.000 đồng. Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải những loại toán hình học phổ thông điển hình với gần 1000 bài toán hình học từ lớp 7 đến lớp 12 theo chương trình Bộ Giáo dục & Đào tạo hiện ban hành. Ngoài ra sách còn trình bày nguồn gốc những bài toán ấy và cách thức sáng tác các bài toán mới từ chúng. Có lẽ đây là nét khác biệt của cuốn sách này với phần lớn các sách tham khảo toán cùng loại.

Sách gồm ba phần chính. Phần *Hình học phẳng* dành cho các học sinh khá giỏi về toán; trong đó có nhiều bài toán không dễ, được chọn trong các đề thi Olympic Toán Quốc tế và Khu vực. Một số định lý và khái niệm quen thuộc và ít quen thuộc được đề cập khá chi tiết như: Định lý Thales, Định lý Pythagore, Định lý Ptolemy, Công thức Leibniz, Công thức Euler, Bài toán Torricelli, Bài toán Napoléon, Đường thẳng và đường tròn chín điểm Euler, Đường thẳng Simson, Điểm Lemoine, ... Phần *Hình học không gian* chủ yếu dành cho học sinh đại trà. Vì vậy bên cạnh các bài toán khó đánh dấu \* là những bài toán chọn trong các đề thi Tuyển sinh Đại học hay Tốt nghiệp THPT mấy năm gần đây. Ngoài phương pháp chính là suy luận logic, thỉnh thoảng các tác giả sử dụng công cụ vectơ nếu thấy thật cần thiết. Phần *Mối liên hệ giữa hình học với các phân môn khác* như Lượng giác, Đại số; các tác giả tập trung vào phần *Tam giác lượng* với nhiều bài toán hay, và trong phần *Phương pháp hình học trong đại số* đề cập đến một số dạng toán hình học giải tích phẳng thường gặp trong các kỳ thi Tuyển sinh đại học hay Tốt nghiệp THPT.

Sách cố gắng trình bày dựa trên sự kết hợp hài hòa của văn phong tươi mát, độc đáo và sắc sảo của Polya với sự giản dị dễ hiểu mà thâm trầm sâu sắc của Hứa Thuần Phông. Có thể



xem đây là những suy nghiệm sâu sắc nhất của nhóm tác giả, đặc biệt là của NGUYỄN Lê Quốc Hán, chủ biên cuốn sách với 50 năm học và giải toán.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn Hình học vốn được xem là khó nhưng hấp dẫn này.

Mọi chi tiết xin liên hệ: **TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

**Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội**

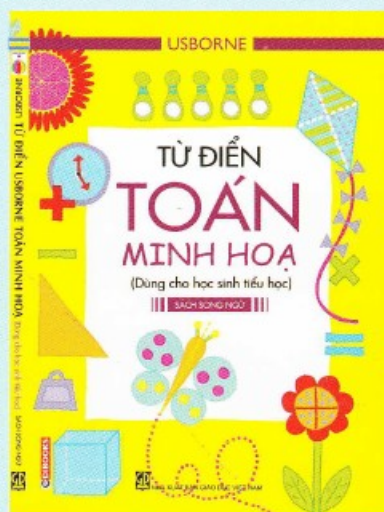
- ĐT Biên tập: (04) 35121607
- ĐT/Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhocvatuoi trẻ@gmail.com
- Website: [www.nxbgd.vn/toanhocvatuoi trẻ](http://www.nxbgd.vn/toanhocvatuoi trẻ)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

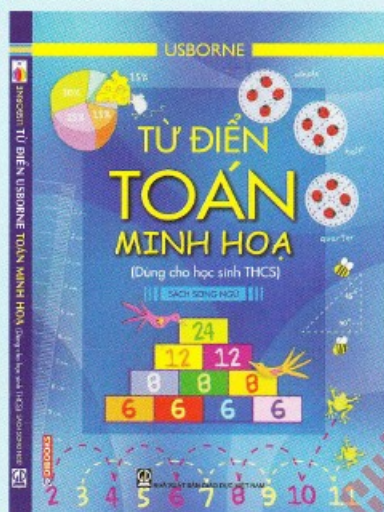
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU

# BỘ TỪ ĐIỂN USBORNE MINH HOẠ

SÁCH SONG NGỮ  
ANH-VIỆT



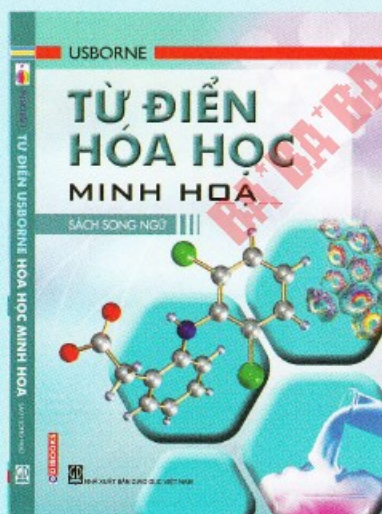
Từ điển Toán minh họa  
(dùng cho học sinh Tiểu học)  
Nguyễn Chí Thành... (dịch)  
17x24 cm, 272 trang  
160.000đ



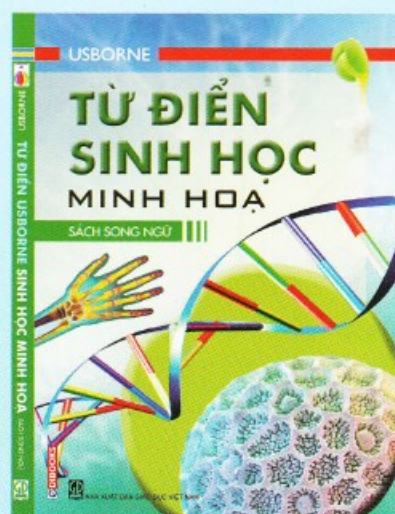
Từ điển Toán minh họa  
(dùng cho học sinh THCS)  
Nguyễn Chí Thành... (dịch)  
17x24 cm, 272 trang  
160.000đ



Từ điển Vật lý minh họa  
Đặng Văn Sửu (dịch)  
17x24 cm, 272 trang  
160.000đ



Từ điển Hóa học minh họa  
Ngô Tuấn Cường... (dịch)  
17x24 cm, 258 trang  
160.000đ



Từ điển Sinh học minh họa  
Nguyễn Việt Linh (dịch)  
17x24 cm, 272 trang  
160.000đ



CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI  
HANOI EDUCATION INVESTMENT AND DEVELOPMENT, JSC

Toà nhà Văn phòng HEID, ngõ 12, Láng Hạ - Thành Công - Ba Đình - Hà Nội  
Tel : (04) 35123939 - Phòng Kinh doanh - Tel : (04) 35122636, Fax : (04) 35122504

ISSN: 0866-8035  
Chỉ số: 12884  
Mã số: 8BT5M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010  
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP  
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2017

Giá: 12.500 đồng  
Mười hai nghìn năm trăm đồng