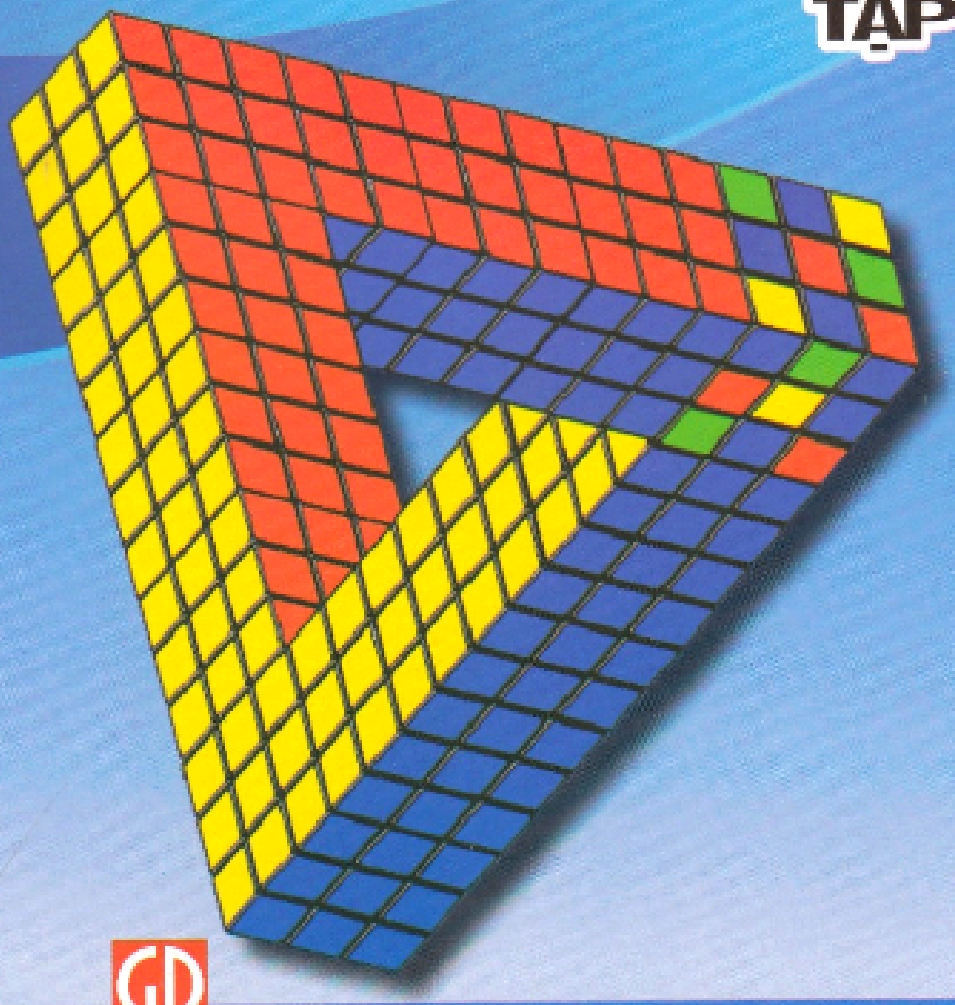
TÔN THÂN (Chủ biên)
BÙI VĂN TUYÊN - NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 8

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TÔN THÂN (Chủ biên)
BÙI VĂN TUYÊN - NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 8

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Để giúp các em học sinh học tập tốt môn Toán ở Trung học cơ sở (THCS) hiện nay và ở Trung học phổ thông (THPT) sau này, chúng tôi biên soạn bộ sách gồm 8 cuốn : "*Các chuyên đề chọn lọc Toán 6, 7, 8, 9 tập một và tập hai* ".

Mỗi cuốn trong bộ sách có các chương tương ứng với các chương trong sách giáo khoa Toán. Các chương đều được viết theo những chuyên đề (cơ bản và nâng cao) mà các tác giả cho rằng đó là những chuyên đề cần thiết cho việc học và hiểu sâu kiến thức của chương.

Mỗi chuyên đề gồm ba phần :

A. Kiến thức cần nhớ: Phần này đưa ra những kiến thức cơ bản, những kiến thức bổ sung cần thiết để có thể giải được các bài tập, các dạng toán của chuyên đề.

B. Một số ví dụ : Phần này trình bày những ví dụ chọn lọc minh họa cho những dạng toán điển hình của chuyên đề với cách trình bày lời giải chuẩn mực kèm theo những *nhận xét, lưu ý, bình luận,...* về phương pháp giải, về các sai lầm học sinh có thể mắc, về việc tìm tòi thêm các cách giải khác, ... Nhiều ví dụ ở phần này được trích trong các đề thi học sinh giỏi Toán ở THCS, trong các đề thi vào lớp 10 THPT chuyên.

C. Bài tập: Phần này đưa ra hệ thống các bài tập được phân loại theo các dạng toán để học sinh dễ sử dụng. Hệ thống các bài tập này khá đa dạng, bao gồm các bài tập cơ bản và các bài tập nâng cao cho học sinh khá, giỏi. Nhiều bài được trích từ các đề thi học sinh giỏi Toán ở trong và ngoài nước. Mỗi cuốn sách đều cung cấp một số lượng lớn các bài tập với hướng dẫn giải khá chi tiết, minh họa cho phương pháp giải các dạng toán, các chuyên đề đã đề cập.

Cuối sách là phần *Hướng dẫn giải – Đáp số* cho các bài tập ở các chuyên đề. Qua những hướng dẫn giải cụ thể, học sinh sẽ nắm rõ hơn cách giải cho mỗi dạng toán.

Các kiến thức trong mỗi cuốn sách được sắp xếp từ dễ đến khó, được trình bày đơn giản, dễ hiểu, đáp ứng cho nhiều đối tượng học sinh.

Các tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã có nhiều kinh nghiệm trong việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở THCS, đó là các thầy cô giáo: PGS.TS NGND Tôn Thân (Chủ biên bộ sách), NGƯT Bùi Văn Tuyên, NGƯT Nguyễn Ngọc Đạm, Ths. Nguyễn Đức Trường, Ths. Nguyễn Đức Tấn, Ths. Nguyễn Anh Hoàng, Ths. Đặng Văn Quản, Ths. Phạm Thị Lệ Hằng.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song bộ sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được thư góp ý của các em học sinh, các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh. Mọi ý kiến xin gửi về theo địa chỉ : *Ban Toán – Tin, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam – 187B Giảng Võ – Hà Nội.*

Hi vọng rằng, bộ sách sẽ là tài liệu tham khảo thiết thực, hữu ích đối với các em học sinh THCS, các thầy cô giáo dạy Toán và bạn đọc yêu thích Toán.

Hà Nội, tháng 3 năm 2013

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 1
PHÉP NHÂN CÁC ĐA THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Muốn nhân một đơn thức với một đa thức ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.
2. Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho bốn số, số sau hơn số trước là 2. Chứng minh rằng hiệu của tích hai số ở giữa và tích của số đầu với số cuối luôn không đổi.

Giải. Gọi bốn số đã cho là x, x + 2, x + 4 và x + 6. Hiệu của tích hai số ở giữa và tích của số đầu với số cuối là :

$$(x + 2)(x + 4) - x(x + 6) = x^2 + 4x + 2x + 8 - x^2 - 6x = 8 \text{ (không đổi).}$$

Ví dụ 2. Cho m số, mỗi số bằng 3n + 1 và n số, mỗi số bằng 9 – 3m. Biết tổng tất cả các số đó bằng 5 lần tổng m + n. Chứng minh rằng m = n.

Giải. Tổng của m số (3n + 1) với n số (9 – 3m) là

$$m(3n + 1) + n(9 - 3m).$$

Theo đề bài ta có

$$m(3n + 1) + n(9 - 3m) = 5(m + n)$$

$\Leftrightarrow 3mn + m + 9n - 3mn = 5m + 5n$

$\Leftrightarrow 9n - 5n = 5m - m$

$\Leftrightarrow 4n = 4m \Leftrightarrow n = m.$

Ví dụ 3. Tính tổng các hệ số của luỹ thừa bậc ba, luỹ thừa bậc hai và luỹ thừa bậc nhất trong kết quả của phép nhân $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$.

Giải

Ta có $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$

$= x^5 - x^3 + x^2 + x^4 - x^2 + x + x^3 - x + 1$

$= x^5 + x^4 + 1.$

Hệ số của luỹ thừa bậc ba là 0, hệ số của luỹ thừa bậc 2 là 0, hệ số của luỹ thừa bậc nhất là 0 nên tổng các hệ số này bằng 0.

Ví dụ 4. Cho $M = (x + a)(x^2 + bx + 16)$ và $N = x^3 - 64$.

a) Viết biểu thức M dưới dạng một đa thức thu gọn theo luỹ thừa giảm dần của x.

b) Với giá trị nào của a và b thì hai đa thức M và N luôn có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của x ?

Giải

a) Ta có $M = (x + a)(x^2 + bx + 16)$

$= x^3 + bx^2 + 16x + ax^2 + abx + 16a = x^3 + (a + b)x^2 + (ab + 16)x + 16a.$

b) M = N với mọi giá trị của x

$$\Leftrightarrow x^3 + (a + b)x^2 + (ab + 16)x + 16a = x^3 - 64, \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ ab + 16 = 0 \\ 16a = -64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4. \end{cases}$$

Nhận xét : Hai đa thức viết dưới dạng thu gọn có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến khi và chỉ khi các hệ số của các luỹ thừa cùng bậc bằng nhau.

Ví dụ 5. Cho biểu thức $A = (4m - 1)(n - 4) - (m - 4)(4n - 1)$. Chứng minh rằng $A \vdots 15$ với mọi giá trị nguyên của m và n.

Giải

$A = (4m - 1)(n - 4) - (m - 4)(4n - 1)$

$= 4mn - 16m - n + 4 - (4mn - m - 16n + 4)$

$= 4mn - 16m - n + 4 - 4mn + m + 16n - 4$

$= -15m + 15n = -15(m - n) \vdots 15.$

Ví dụ 6. Cho bốn số nguyên liên tiếp không chia hết cho 5, khi chia cho 5 được những số dư khác nhau. Chứng minh rằng hiệu của tích hai số cuối với tích của hai số đầu là một số có tận cùng đúng một chữ số 0.

Giải. Gọi bốn số nguyên liên tiếp không chia hết cho 5, khi chia cho 5 được những số dư khác nhau lần lượt là $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ta có $(5k + 3)(5k + 4) - (5k + 1)(5k + 2)$

$= (25k^2 + 20k + 15k + 12) - (25k^2 + 10k + 5k + 2)$

$= 25k^2 + 35k + 12 - 25k^2 - 15k - 2 = 20k + 10 = 10(2k + 1)$.

Vì $2k + 1$ là một số lẻ nên $10(2k + 1)$ có tận cùng bởi đúng một chữ số 0.

C. BÀI TẬP

1.1. Viết các biểu thức sau dưới dạng đa thức sắp xếp theo luỹ thừa giảm của biến x

a) $(3x + a)(2x - 5a) - 6a(2x - a)$;

b) $(9x - 5y)(2x + 7y) - (4x + 3y)(8x - y)$.

1.2. Chứng minh đẳng thức $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

Áp dụng tính nhanh :

a) $(x + 5)(x + 2)$; b) $(x - 7)(x - 4)$;

c) $(x + 8)(x - 3)$; d) $(x - 9)(x + 1)$.

1.3. Cho đa thức $A = x^2 + 11x + m$ trong đó m là một số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của m, giá trị lớn nhất của m để đa thức A là tích của hai đa thức với hệ số nguyên.

1.4. Xác định các hệ số a, b, c biết rằng với mọi giá trị của x thì :

a) $(5x - 3)(2x - c) = ax^2 + bx + 21$;

b) $(ax + 4)(x^2 + bx - 1) = 9x^3 + 58x^2 + 15x + c$.

1.5. Cho biểu thức $A = 3x^{n+1}(x^{n-1} - y^n) + y^n(3x^{n+1} - y^n)$ trong đó $n \in \mathbb{N}^*$. Hãy thu gọn biểu thức A để chứng tỏ rằng khi thay các giá trị của x và y bởi các số đối của chúng thì giá trị của biểu thức A vẫn không đổi.

1.6. Một khu đất hình chữ nhật có chu vi là 100 m. Nếu chiều dài và chiều rộng cùng giảm đi a (mét) trong đó $a < 50$ thì diện tích khu đất này giảm đi bao nhiêu mét vuông ?

1.7. Cho $x^2 + y^2 = 2$, chứng minh đẳng thức :

$$2(x + 1)(y + 1) = (x + y)(x + y + 2).$$

1.8. Cho biết $(x + y)(x + z) + (y + z)(y + x) = 2(z + x)(z + y)$. Chứng minh rằng $z^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

1.9. Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lí :

a) $A = x^5 - 70x^4 - 70x^3 - 70x^2 - 70x + 29$ tại $x = 71$;

b) $B = x^5 - 36x^4 + 37x^3 - 69x^2 - 34x + 15$ tại $x = 35$.

1.10. Cho biểu thức $A = 3(x^2 + x + 2)(x^3 - x^2 - x + 1)$

Hãy thực hiện phép nhân rồi viết kết quả theo luỹ thừa giảm dần của x. Cho biết hệ số của luỹ thừa bậc 4, của luỹ thừa bậc 3, của luỹ thừa bậc 2 trong kết quả.

1.11. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x :

a) $A = (4x - 5)(2x + 3) - 4(x + 2)(2x - 1) + (10x + 7)$;

b) $B = (7x - 6y)(4x + 3y) - 2(14x + y)(x - 9y) - 19(13xy - 1)$.

1.12. Tìm x, biết :

a) $4x(5x + 2) - (10x - 3)(2x + 7) = 133$;

b) $3(6x - 5)(4x + 1) - (8x + 3)(9x - 2) = 203$.

1.13. Cho biểu thức $B = (n - 1)(n + 6) - (n + 1)(n - 6)$. Chứng minh rằng với mọi giá trị nguyên của n thì $B \vdots 10$.

1.14. Cho ba số nguyên liên tiếp. Lập các tích của hai trong ba số đó. Biết tổng của ba tích này là 242. Tìm ba số nguyên đó.

Gợi ý : Gọi số nguyên ở giữa là a.

1.15. Cho biểu thức $P = (x - a)(x - b)(x - c)$, trong đó :

$$a + b + c = 12 \text{ ; } ab + bc + ca = 47 \text{ và } abc = 60.$$

a) Hãy viết P dưới dạng một đa thức thu gọn, sắp xếp theo luỹ thừa giảm của biến x.

b) Tính giá trị của P khi $|x| = 3$.

1.16. Chứng minh đẳng thức

$$(a - 1)(a - 2)(a + 3) - (a + 1)(a + 2)(a - 3) = 12.$$

Áp dụng kết quả trên để chứng minh rằng :

$$149.148.153 - 151.152.147 = 99.98.103 - 101.102.97.$$

1.17. Cho các số x, y, z tỉ lệ với các số a, b, c. Chứng minh rằng :

$$(x^2 + 2y^2 + 3z^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2) = (ax + 2by + 3cz)^2.$$

Chuyên đề 2
NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (1)
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (2)
- $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ (3)
- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (4)
  $= A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ (5)
  $= A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$
- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ (6)
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ (7)

B. KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Bình phương của đa thức

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + ... + 2a_1a_n$$
$$+ 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + ... + 2a_2a_n + ... + 2a_{n-1}a_n.$$

Đặc biệt, với n = 3 ta có :

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

2. Luỹ thừa bậc n của một nhị thức (nhị thức Niu–tơn)

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + ... + b^n.$$

Cho n các giá trị từ 0 đến 5 ta được :

Với n = 0 thì $(a + b)^0 = 1$

Với n = 1 thì $(a + b)^1 = a + b$

Với n = 2 thì $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Với n = 3 thì $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Với n = 4 thì $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Với n = 5 thì $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Ta nhận thấy khi khai triển $(a + b)^n$ ta được một đa thức có n + 1 hạng tử, hạng tử đầu là a^n, hạng tử cuối là b^n, các hạng tử còn lại đều chứa các nhân tử a và b.

Vì vậy $(a + b)^n = B(a) + b^n = B(b) + a^n$.

3. Bảng các hệ số khi khai triển $(a + b)^n$

Với n = 0 : 1

Với n = 1 : 1 1

Với n = 2 : 1 2 1

Với n = 3 : 1 3 3 1

Với n = 4 : 1 4 6 4 1

Với n = 5 : 1 5 10 10 5 1

.....

– Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 1

– Mỗi số ở một dòng kể từ dòng thứ hai đều bằng số liền trên cộng với số bên trái của số liền trên.

Bảng trên đây được gọi là tam giác Pa-xcan.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 7. Chứng minh rằng nếu một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c thoả mãn :

$$(5a - 3b + 4c)(5a - 3b - 4c) = (3a - 5b)^2$$

thì tam giác đó là tam giác vuông.

Giải.

Ta có $(5a - 3b + 4c)(5a - 3b - 4c) = (3a - 5b)^2$

$\Leftrightarrow [(5a - 3b) + 4c][(5a - 3b) - 4c] = (3a - 5b)^2$

$\Leftrightarrow (5a - 3b)^2 - (4c)^2 = (3a - 5b)^2$

$\Leftrightarrow 25a^2 - 30ab + 9b^2 - 16c^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$

$\Leftrightarrow 25a^2 - 9a^2 + 9b^2 - 25b^2 - 16c^2 = 0$

$\Leftrightarrow 16a^2 - 16b^2 - 16c^2 = 0 \Leftrightarrow 16a^2 = 16b^2 + 16c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

Do đó tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c chính là một tam giác vuông.

Ví dụ 8. Cho $x + y = -9$; $xy = 18$. Không tính các giá trị của x và y, hãy tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $M = x^2 + y^2$; b) $N = x^4 + y^4$; c) $P = x^2 - y^2$.

Giải. Đề bài cho giá trị của tổng x + y và tích xy nên muốn tính được giá trị của các biểu thức M, N, P ta phải biểu diễn các biểu thức này dưới dạng các biểu thức có (x + y) và xy.

a) $M = x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2xy$

$= (-9)^2 - 2.18 = 45.$

b) $N = x^4 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$

$= 45^2 - 2.18^2 = 1377.$

c) Ta có $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy$

$= (x + y)^2 - 4xy = (-9)^2 - 4.18 = 9.$

Suy ra $x - y = \pm 3$.

- Nếu $x - y = 3$ thì $P = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 3.(-9) = -27.$
- Nếu $x - y = -3$ thì $P = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = (-3).(-9) = 27.$

Ví dụ 9. Tìm x, y, z biết :

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y + 34 = -(4z - 1)^2.$$

Giải.

Ta có $\quad x^2 - 6x + y^2 + 10y + 34 = -(4z - 1)^2$

Suy ra $\quad (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = -(4z - 1)^2$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (4z - 1)^2 = 0$

Ta thấy $(x - 3)^2 \geq 0$; $(y + 5)^2 \geq 0$; $(4z - 1)^2 \geq 0$

mà $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (4z - 1)^2 = 0.$

nên $\begin{cases} (x - 3)^2 = 0 \\ (y + 5)^2 = 0 \\ (4z - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Nhận xét : Ta gọi phương pháp giải trong ví dụ trên là phương pháp "Tổng các bình phương". Nội dung của phương pháp này dựa vào nhận xét :

$$A^2 \geq 0 ; B^2 \geq 0 ; C^2 \geq 0.$$

Nếu có $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ thì $A^2 = B^2 = C^2 = 0.$

Ví dụ 10. Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Giải. Từ $a + b + c = 0$, suy ra $a + b = -c$.

Lập phương hai vế ta được $(a + b)^3 = (-c)^3$.

Suy ra $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$.

Thay $a + b = -c$ vào đẳng thức trên ta được $a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3$.

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Lưu ý.

• Nên nhớ kết quả của ví dụ này để vận dụng giải nhiều bài toán khác.

• Trong quá trình giải ví dụ trên ta đã khai triển $(a + b)^3$ thành $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ (1) tiện lợi hơn là khai triển thành $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (2) vì trong khai triển (1) có sẵn $(a + b)$ để thay bằng $-c$ ra kết quả được nhanh chóng.

Ví dụ 11. Số $a = 8^{3^{1000}} - 1$ là số nguyên tố hay hợp số ?

Giải. Ta có $3^{1000} \vdots 3$ nên ta đặt $3^{1000} = 3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Do đó $a = 8^{3n} - 1 = (8^n)^3 - 1^3$

$= (8^n - 1)(8^{2n} + 8^n + 1)$.

Số a là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên a là hợp số.

Ví dụ 12. Chứng minh đẳng thức

$$a^5 - b^5 - (a - b)^5 = 5ab(a - b)(a^2 - ab + b^2)$$

Giải

• Xét vế trái T : $T = a^5 - b^5 - (a - b)^5$.

$= a^5 - b^5 - (a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5)$

$= a^5 - b^5 - a^5 + 5a^4b - 10a^3b^2 + 10a^2b^3 - 5ab^4 + b^5$

$= 5a^4b - 10a^3b^2 + 10a^2b^3 - 5ab^4$.

• Xét vế phải P :

$P = 5ab(a - b)(a^2 - ab + b^2) = 5ab(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$

$= 5a^4b - 10a^3b^2 + 10a^2b^3 - 5ab^4$.

Vậy $T = P$.

Ví dụ 13. Cho $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

Giải. Ta có $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 3(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 = (b - c)^2 = (c - a)^2 = 0$ (vì $(a - b)^2 \geq 0$; $(b - c)^2 \geq 0$; $(c - a)^2 \geq 0$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

C. BÀI TẬP

• Các hằng đẳng thức (1), (2), (3)

1.18. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến :

a) $5(x + 4)^2 + 4(x - 5)^2 - 9(4 + x)(x - 4)$;

b) $(x + 2y)^2 + (2x - y)^2 - 5(x + y)(x - y) - 10(y + 3)(y - 3)$.

1.19. Tính giá trị của biểu thức bằng cách hợp lí :

a) $413(413 - 26) + 169$; b) $(625^2 + 3)(25^4 - 3) - 5^{16} + 10$;

c) $\dfrac{41^2 + 39^2 + 82.39}{41^2 - 39^2}$.

1.20. Không tính giá trị cụ thể của mỗi biểu thức, hãy so sánh giá trị các biểu thức sau :

a) $A = 2014 . 2016$ và $B = 2015^2$;

b) $C = 1 + 8(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)$ và $D = (3^3)^5 + (3^5)^3$;

c) $E = 501^2 + 503^2 + 496^2$ và $F = 499^2 + 497^2 + 504^2$;

d) $M = 5x^2 + 10y^2 - 2xy + 4x - 6y + 2$ và $N = -1$.

1.21. Cho $M = 77^2 + 75^2 + 73^2 + ... + 3^2 + 1^2$; $N = 76^2 + 74^2 + 72^2 + ... + 2^2$.

Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{M - N - 3}{3000}$.

1.22. Rút gọn rồi tính giá trị các biểu thức sau :

a) $A = (3x - 2)^2 + (3x + 2)^2 + 2(9x^2 - 4)$ tại $x = -\frac{1}{3}$;

b) $B = (x + y - 7)^2 - 2(x + y - 7)(y - 6) + (y - 6)^2$ tại $x = 101$;

c) $C = 4x^2 - 20x + 27$ tại $x = 52,5$.

1.23. Cho $x + y = -9$, tính giá trị của biểu thức : $D = x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y - 5$.

1.24. Tìm x biết :

a) $(5x - 1)^2 - (5x - 4)(5x + 4) = 7$;

b) $(4x - 1)^2 - (2x + 3)^2 + 5(x + 2)^2 + 3(x - 2)(x + 2) = 500$.

1.25. Cho biểu thức $A = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

Chứng minh rằng biểu thức A luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến.

1.26. Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của các biến :

a) $M = 25x^2 - 20x + 7$; b) $N = 9x^2 - 6xy + 2y^2 + 1$.

1.27. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau luôn luôn âm với mọi giá trị của các biến :

a) $P = 2x - x^2 - 2$; b) $Q = -x^2 - y^2 + 8x + 4y - 21$.

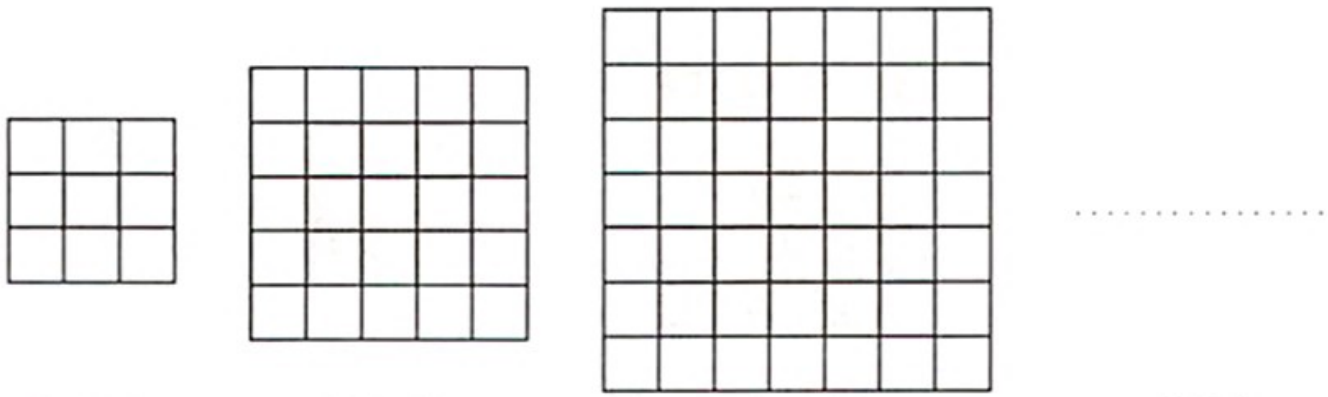
1.28. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $A = x^2 + 12x + 39$; b) $B = 9x^2 - 12x$.

1.29. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau :

a) $C = 4x - x^2 + 1$; b) $D = 3 - 10x^2 - 4xy - 4y^2$.

1.30. Cho dãy hình vuông (h.1) dưới đây :



Hình 1.1 *Hình 1.2* *Hình 1.3* *Hình 1.n*

Hình 1

Hỏi ở hình 1.75 có bao nhiêu hình vuông không được tô đậm ?

1.31. Chứng minh rằng nếu $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2$ thì $a = b$.

1.32. Cho $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

1.33. Tìm các số x, y, z biết rằng : $x + y + z = 1,5$ (1) và $x^2 + y^2 + z^2 = 0,75$ (2).

1.34. Cho biết $(a + b + c + 1)(a - b - c + 1) = (a - b + c - 1)(a + b - c - 1)$

Chứng minh rằng $a = bc$.

1.35. Cho hai số nguyên x và y, mỗi số là tổng các bình phương của hai số nguyên nào đó. Chứng minh rằng tích xy có thể viết dưới dạng tổng của hai bình phương.

1.36. Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là một số chính phương.

1.37. Tìm ba số nguyên liên tiếp biết tổng các bình phương của hai số đầu bằng bình phương của số cuối.

• Các hằng đẳng thức (4), (5), (6), (7)

1.38. Tìm x biết :

a) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - x(x - 5)(x + 5) = 264$;

b) $(x - 2)^3 - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 6(x - 2)(x + 2) = 60$.

1.39. Tìm giá trị của biểu thức :

a) $A = x^3 - 15x^2 + 75x - 124$ tại $x = 35$;

b) $B = x^3 + 18x^2 + 108x + 16$ tại $x = -26$;

c) $C = (x^2 - 4y^2)(x^2 - 2xy + 4y^2)(x^2 + 2xy + 4y^2)$.

1.40. Tìm giá trị của các biểu thức sau :

a) $M = 3(x^2 + y^2) - (x^3 + y^3) + 1$ biết $x + y = 2$.

b) $N = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 + 12x^2 - 12xy + 3y^2 + 6x - 3y + 11$ với $2x - y = 9$.

1.41. Chứng minh rằng :

a) $P = 369^3 - 219^3$ chia hết cho 1350 ;

b) $Q = 372^3 - 128^3$ chia hết cho 8000.

1.42. Cho a, b, c là các số thoả mãn điều kiện $a = b + c$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c}.$$

1.43. Chứng minh đẳng thức :

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

Áp dụng : Thu gọn biểu thức

$$A = (a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (a - b + c)^3 - (-a + b + c)^3.$$

• Bình phương của đa thức và luỹ thừa của nhị thức

1.44. Thu gọn rồi tính giá trị các biểu thức sau :

a) $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 2(a + b)^2$ với $c = -10$.

b) $(a + b + c)^2 + (-a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2$ với $a^2 + b^2 + c^2 = 10$.

1.45. Cho các số a, b, c khác 0, thoả mãn $a + b + c = abc$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$.

1.46. Chứng minh đẳng thức :

$$(x + 4)^4 + x^4 + y^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

1.47. Xác định các hệ số a, b để đa thức sau là bình phương của một đa thức

$$A = x^4 - 2x^3 - x^2 + ax + b.$$

1.48. Tìm x, biết :

a) $(x + 3)^4 - (x - 3)^4 - 24x^3 = 108$;

b) $(x + 2)^5 - (x - 2)^5 = 64$.

1.49. Cho $(a + b + c)^2 + 12 = 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca)$. Chứng minh rằng $a = b = c = 2$.

1.50. Cho biểu thức

$$M = (a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (3c + 1)^2 + 2(2ab + 3ac + 6bc) + 2(a + 2b + 3c)$$

và $N = (a + 2b + 3c + 1)^2$. Tính hiệu $M - N$.

1.51. Tính :

a) $(x + 1)^5$; b) $(x + 1)^6$; c) $(x - 1)^4$.

1.52. Tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển các nhị thức sau :

a) $(4x - 5)^8$; b) $(5x - 3y)^{10}$.

1.53. Tìm số dư trong phép chia :

a) 44^{20} cho 15 ; b) 44^{21} cho 15.

1.54. Tìm số dư khi chia 3^{123} cho 80.

Chuyên đề 3
PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức khác.

2. Các phương pháp thường dùng :

– Đặt nhân tử chung

– Dùng hằng đẳng thức

– Nhóm các hạng tử

– Phối hợp nhiều phương pháp. Có khi ta phải dùng những phương pháp đặc biệt khác (xem chuyên đề 1).

KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Dạng tổng quát của các hằng đẳng thức

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ là :

$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1})$.

2. Dạng tổng quát của hằng đẳng thức

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ là :

$A^n + B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - ... - AB^{n-2} + B^{n-1})$ với n lẻ.

3. Áp dụng vào tính chất chia hết

$A^n - B^n \vdots A - B$ với $n \in \mathbb{N}$ và $A \neq B$.

$A^n + B^n \vdots A + B$ với n lẻ và $A \neq -B$.

$A^{2k} - B^{2k} \vdots A^2 - B^2$ với $k \in \mathbb{N}$ và $A \neq \pm B$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 14. Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lí :

$$A = (x - 3)^2 - (8x + 3)(3 - x) + x(x - 3) \text{ tại } x = 103$$

Giải. Ta có $A = (x - 3)^2 - (8x + 3)(3 - x) + x(x - 3)$

$= (x - 3)^2 + (8x + 3)(x - 3) + x(x - 3)$

$= (x - 3)(x - 3 + 8x + 3 + x) = 10x(x - 3).$

Với $x = 103$ thì $A = 10.103.(103 - 3) = 103000$.

Nhận xét : Phân tích đa thức thành nhân tử có nhiều ứng dụng. Một trong các ứng dụng đó là tính giá trị của biểu thức. Phương pháp phân tích trong ví dụ này là phương pháp đặt nhân tử chung.

Ví dụ 15. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$B = (x^2 + 9)^2 - 36x^2$$

Giải. Ta có $B = (x^2 + 9)^2 - 36x^2 = (x^2 + 9)^2 - (6x)^2$

$= (x^2 + 9 - 6x)(x^2 + 9 + 6x) = (x - 3)^2(x + 3)^2.$

Ví dụ 16. Tìm các cặp số nguyên tố $(x ; y)$ sao cho $x^2 - 1 = 2y^2$

Giải. Ta có $x^2 - 1 = 2y^2$

Suy ra $x^2 - 1$ là số chẵn, do đó x^2 là số lẻ và x là số lẻ.

Từ đề bài, suy ra $(x - 1)(x + 1) = 2y^2$.

Vì x là số lẻ nên $x - 1$ và $x + 1$ là hai số chẵn liên tiếp. Do đó tích $(x - 1)(x + 1) \vdots 4$, suy ra $2y^2 \vdots 4$.

Vậy $y^2 \vdots 2$ và y là số chẵn, suy ra $y = 2$.

Thay $y = 2$ vào đề bài ta được $x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9$ mà x là số nguyên tố nên $x = 3$.

Vậy cặp số nguyên tố cần tìm là $x = 3 ; y = 2$.

Nhận xét : Phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử trong ví dụ 15 và 16 là phương pháp dùng hằng đẳng thức. Phân tích đa thức thành nhân tử còn giúp ta vận dụng được các tính chất chia hết từ đó tìm được các số thoả mãn điều kiện cho trước.

Ví dụ 17. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$C = ax - ay - bx + by + (y - x)^2.$$

Giải. Ta có $C = ax - ay - bx + by + (y - x)^2$

$= a(x - y) - b(x - y) + (x - y)^2 = (x - y)(a - b + x - y).$

Cảnh báo : Viết $(y - x)^2 = -(x - y)^2$ là sai vì $(y - x)^2 = (x - y)^2$.

Ví dụ 18. Cho x, y, z là các số hữu tỉ thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng số $m = (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Giải

Ta có $x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = x(x + y) + z(x + y) = (x + y)(x + z)$

$y^2 + 1 = y^2 + xy + yz + zx = y(y + x) + z(y + x) = (y + z)(y + x)$

$z^2 + 1 = z^2 + xy + yz + zx = y(x + z) + z(z + x) = (z + x)(z + y)$.

Do đó $m = (x + y)(x + z)(y + z)(y + x)(z + x)(z + y) = [(x + y)(y + z)(z + x)]^2$.

Vì x, y, z là các số hữu tỉ nên x + y, y + z và z + x là những số hữu tỉ, tích của chúng là số hữu tỉ. Do đó m là bình phương của một số hữu tỉ.

Ví dụ 19. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$M = (5x - 10)(x^2 - 1) - (3x - 6)(x^2 - 2x + 1)$$

Giải. $M = (5x - 10)(x^2 - 1) - (3x - 6)(x^2 - 2x + 1)$

$= 5(x - 2)(x - 1)(x + 1) - 3(x - 2)(x - 1)^2$

$= (x - 2)(x - 1)[5(x + 1) - 3(x - 1)] = (x - 2)(x - 1)(2x + 8)$

$= 2(x - 2)(x - 1)(x + 4)$

Ví dụ 20. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$N = 5x^4 + 3x^3y - 20x^2y^2 - 12xy^3$$

Giải . $N = 5x^4 + 3x^3y - 20x^2y^2 - 12xy^3 = x^3(5x + 3y) - 4xy^2(5x + 3y)$

$= x(5x + 3y)(x^2 - 4y^2) = x(5x + 3y)(x - 2y)(x + 2y)$.

Ví dụ 21. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$P = 6x^2 - 150y^2 + 60y - 6$$

Giải. $P = 6x^2 - 150y^2 + 60y - 6$

$= 6(x^2 - 25y^2 + 10y - 1) = 6[x^2 - (25y^2 - 10y + 1)$

$= 6[x^2 - (5y - 1)^2] = 6(x - 5y + 1)(x + 5y - 1)$.

Nhận xét : Khi phải phối hợp nhiều phương pháp để phân tích đa thức thành nhân tử được triệt để ta thường dùng phương pháp đặt nhân tử chung trước (nếu có thể), các phương pháp khác sau. Mỗi phương pháp có thể dùng nhiều lần.

C. BÀI TẬP

• Phương pháp đặt nhân tử chung

1.55. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $8x^{n+2}y^3 - 12x^ny^5$;

b) $(a - b)^2 - (b - a)(a - 3b)$;

c) $a(a - b)^2 (a + b) - (b - a)^2(a^2 - 5ab + b^2)$.

1.56. Chứng minh rằng :

a) $79^2 - 79.29 \vdots 50$; b) $216^5 + 4.6^{13} \vdots 40$.

1.57. Tìm một số biết rằng bình phương của nó bằng 4 lần lập phương của số ấy.

1.58. Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lí :

$$A = 217^2 - 217.143 - 174.217.$$

1.59. Chứng minh rằng số $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{22...2}_{n}$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

1.60. Cho biết $x^3 = 2p + 1$ trong đó x là số tự nhiên, p là số nguyên tố. Hãy tìm x.

• Phương pháp dùng hằng đẳng thức

1.61. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x - 9)(x - 7) + 1$; b) $x^6 - y^6$; c) $(x^2 + x - 1)^2 + 4x^2 + 4x$.

1.62. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x + 2y - 3)^2 - 4(x + 2y - 3) + 4$; b) $(x - y)^3 - 1 - 3(x - y)(x - y - 1)$.

1.63. Phân tích đa thức thành nhân tử

$(x^2 + y^2 - 17)^2 - 4(xy - 4)^2$.

1.64. Tìm x, biết :

a) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125 = 0$; b) $(x + 2)^3 + (x - 3)^3 = 0$.

1.65. Tìm các cặp số nguyên (x ; y) sao cho $x^2 + 102 = y^2$.

1.66. Cho $x + y = a + b$; $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $x^n + y^n = a^n + b^n$.

• Phương pháp nhóm các hạng tử

1.67. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6$; b) $2a^2c^2 - 2abc + bd - acd$; c) $12x^2 - 3xy - 8xz + 2yz$.

1.68. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $ab(x^2 - y^2) - xy(a^2 - b^2)$; b) $x^2 + (a - b)xy - aby^2$.

1.69. Phân tích đa thức thành nhân tử : $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$.

1.70. Phân tích đa thức thành nhân tử : $A = x^{35} + x^{34} + x^{33} + ... + x^2 + x + 1$.

1.71. Chứng minh rằng : $x(x + 1)^4 + x(x + 1)^3 + x(x + 1)^2 + (x + 1)^2 = (x + 1)^5$.

1.72. Tính giá trị của biểu thức : $A = 2^{10} - 2^9 - 2^8 - 2^7 - ... - 2^2 - 2 - 1$.

1.73. Cho $x + y + z = 0$, chứng minh rằng : $x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3 = 0$.

1.74. Tìm cặp số nguyên (x ; y) sao cho :

a) $x + 2y = xy + 2$; b) $xy = x + y$.

1.75. Tìm cặp số nguyên (x ; y) trong đó $x > y$, sao cho $xy = 2(x + y)$.

1.76. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2.$$

• Phối hợp nhiều phương pháp

1.77. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a) $5x^2(x - 1) + 10xy(x - 1) - 5y^2(1 - x)$;

b) $x^5 - x^4y - xy^4 + y^5$; c) $x^{m+1} - x^m - x + 1$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

1.78. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a) $2a^{n+2}b^n - 18a^nb^{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ;

b) $x^6y - x^4y^3 - x^3y^4 + xy^6$; c) $x^3y^3z^3 + x^2y^2z^2 - xyz - 1$.

1.79. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a) $x^3(x^2 + 1)^2 - 49x$;

b) $(x^2 - 9)^2 + 12x(x - 3)^2$; c) $(x - z)(x + z) - y(2x - y)$.

1.80. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 9$;

b) $25x^2 - y^2 + 4y - 4$; c) $a^2 + b^2 - x^2 - y^2 + 2ab - 2xy$.

1.81. Cho biểu thức $A = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x$ trong đó x là một số chẵn. Chứng minh rằng A có thể viết dưới dạng tích của 4 số chẵn liên tiếp.

1.82. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$a(b^2 + c^2) - b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 2abc.$$

1.83. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

b) $4ab(a^2 - b^2) - 6(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3) + 9(a^2 - b^2)$.

Chuyên đề 4
PHÉP CHIA ĐA THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Chia đơn thức A cho đơn thức B :

– Chia hệ số của A cho hệ số của B ;

– Chia luỹ thừa của từng biến trong A cho luỹ thừa của cùng biến đó trong B ;

– Nhân các kết quả với nhau.

2. Chia đa thức cho đơn thức : $(A + B) : C = A : C + B : C$

3. Chia đa thức A cho đa thức B.

Cho A và B là hai đa thức tuỳ ý của cùng một biến ($B \neq 0$), khi đó tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B.Q + R$, trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B.

Q gọi là đa thức thương và R gọi là dư trong phép chia A cho B.

Nếu $R = 0$ thì phép chia A cho B là phép chia hết.

KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Có thể dùng hằng đẳng thức để rút gọn phép chia :

Ví dụ : • $(A^3 + B^3) : (A + B) = A^2 - AB + B^2$

• $(A^3 - B^3) : (A - B) = A^2 + AB + B^2$

• $(A^2 - B^2) : (A + B) = A - B$.

2. Định lí Bê-du* :

Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho $(x - a)$ đúng bằng f(a).

Ví dụ : Nếu $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2$ thì :

– Số dư trong phép chia f(x) cho $(x - 2)$ là $f(2) = 10$.

– Số dư trong phép chia f(x) cho $(x - 1)$ là $f(1) = 0$, nghĩa là f(x) chia hết cho $(x - 1)$.

3. Hệ quả của định lí Bê-du :

Nếu a là nghiệm của đa thức f(x) thì f(x) chia hết cho $(x - a)$.

---

* Bézout – nhà toán học Pháp.

Người ta cũng chứng minh được rằng :

Nếu đa thức f(x) nhận n số nguyên khác nhau $a_1, a_2, ..., a_n$ làm nghiệm thì f(x) chia hết cho $(x - a_1)(x - a_2) ... (x - a_n)$.

4. Áp dụng hệ quả của định lí Bê–du vào việc phân tích đa thức thành nhân tử.

Nếu đa thức f(x) có nghiệm x = a thì khi phân tích f(x) thành nhân tử, tích sẽ chứa nhân tử (x – a), nghĩa là f(x) = (x – a).q(x).

Mở rộng : Nếu f(x) nhận n số nguyên khác nhau $a_1, a_2, ..., a_n$ làm nghiệm thì khi phân tích f(x) thành nhân tử, tích sẽ chứa các nhân tử $(x - a_1)$, $(x - a_2)$, ..., $(x - a_n)$ nghĩa là $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) ... (x - a_n) . q(x)$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 22. Cho $A = 8x^5y^n - 12x^{n+1}y^4$; $B = 24x^{n-1}y^3$.

Xác định giá trị của $n \in \mathbb{N}^*$ để A ⋮ B.

Giải . $A \vdots B \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq n - 1 \\ n + 1 \geq n - 1 \\ n \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 6 \\ n \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{3, 4, 5, 6\}$.

Ví dụ 23. Xác định giá trị của a để đa thức

$A = 2x^3 - 54x + a$ chia hết cho đa thức $B = (x + 3)^2$.

Giải

• *Cách 1:* Thực hiện phép chia rồi buộc đa thức dư bằng đa thức 0

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3 \qquad\quad - 54x + a & x^2 + 6x + 9 \\ \cline{3-3} - & 2x^3 + 12x^2 + 18x & 2x - 12 \\ \cline{1-2} & - 12x^2 - 72x + a & \\ - & -12x^2 - 72x - 108 & \\ \cline{1-2} & a + 108 & \end{array}$$

$A \vdots B \Leftrightarrow a + 108 = 0 \Leftrightarrow a = -108$.

• *Cách 2:* Phương pháp đồng nhất hệ số :

Vì $2x^3 : x^2 = 2x$ nên thương là đa thức bậc nhất có dạng 2x + b.

Ta có $2x^3 - 54x + a = (x^2 + 6x + 9)(2x + b)$ với mọi x

$\Leftrightarrow 2x^3 - 54x + a = 2x^3 + bx^2 + 12x^2 + 18x + 6bx + 9b$ với mọi x

$\Leftrightarrow 2x^3 - 54x + a = 2x^3 + (b + 12)x^2 + (6b + 18)x + 9b$ với mọi x.

Suy ra : $\begin{cases} b + 12 = 0 \\ 6b + 18 = -54 \\ a = 9b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12 \\ a = -108 \end{cases}$. Vậy $a = -108$.

• *Cách 3 :* Phương pháp xét giá trị riêng của biến

vì $2x^3 - 54x + a$ chia hết cho $(x + 3)^2$

nên $2x^3 - 54x + a = (x + 3)^2.Q$ với mọi x

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên ta cho $x = -3$, được $-54 + 162 + a = 0$

$\Leftrightarrow a = 54 - 162 = -108$.

Khi đó $2x^3 - 54x - 108 = (x + 3)^2(2x - 12)$ nên $A \vdots B$.

Vậy với $a = -108$ thì $A \vdots B$.

Nhận xét. Trong cách giải thứ ba tại sao ta cho $x = -3$ mà không cho x lấy các giá trị khác ? Đó là vì khi $x = -3$ thì vế phải bằng 0, vế trái tính được dễ dàng, từ đó tìm được a.

Vì thế phương pháp này gọi là phương pháp xét giá trị riêng của biến.

Ví dụ 24. Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = 12x^3 - 7x^2 - 14x + 14$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 4x - 5$.

Giải

$$\begin{array}{r|l}
12x^3 - 7x^2 - 14x + 14 & 4x - 5 \\ \cline{2-2}
-\ 12x^3 - 15x^2 \qquad\qquad\qquad & 3x^2 + 2x - 1 \\ \cline{1-1}
8x^2 - 14x + 14 & \\
-\ 8x^2 - 10x \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-4x + 14 & \\
-\ -4x + 5 & \\ \cline{1-1}
9 &
\end{array}$$

Vậy đa thức A không chia hết cho đa thức B. Muốn cho giá trị của đa thức A chia hết cho giá trị của đa thức B thì 9 phải chia hết cho giá trị của $4x - 5$. Suy ra $4x - 5 \in Ư(9)$

Suy ra $4x - 5 \in \{1 ; -1 ; 3 ; -3 ; 9 ; -9\}$

$4x - 5$	1	-1	3	-3	9	-9
$4x$	6	4	8	2	14	-4
x	1,5	1	2	0,5	3,5	-1

Các giá trị 1,5 ; 0,5 ; 3,5 bị loại vì không phải là số nguyên.

Do đó $x \in \{1 ; 2 ; -1\}$.

Ví dụ 25. Xác định các hệ số a và b để đa thức

$$A = x^3 + 5x^2 + ax + b \text{ chia cho } x - 2 \text{ dư } 3 \text{ ; chia cho } x + 2 \text{ dư } -5.$$

Giải

Vì A chia cho x – 2 dư 3 nên $x^3 + 5x^2 + ax + b = (x - 2).Q_1 + 3$ (1)

Vì A chia cho x + 2 dư –5 nên $x^3 + 5x^2 + ax + b = (x + 2).Q_2 - 5$ (2)

Thay x = 2 vào (1) rồi thay x = –2 vào (2), ta được :

$$\begin{cases} 8 + 20 + 2a + b = 3 \\ -8 + 20 - 2a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2a = -25 \\ b - 2a = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -21. \end{cases}$$

Ví dụ 26. Tìm đa thức dư trong phép chia sau :

$$(x^{105} + x^{90} + x^{75} + ... + x^{15} + 1) : (x^2 - 1)$$

Giải. Đa thức chia có bậc hai nên đa thức dư có bậc không quá 1. Vậy đa thức dư có bậc nhất dạng ax + b.

Ta có $(x^{105} + x^{90} + x^{75} + ... + x^{15} + 1) = (x^2 - 1).Q + ax + b$

Cho x = 1 rồi x = –1 ta được : $\begin{cases} 8 = a + b \\ 0 = -a + b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 4.$

Vậy dư trong phép chia nói trên là 4x + 4.

Ví dụ 27. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24.$$

Giải. Ta có $f(2) = 16 - 40 + 40 - 40 + 24 = 0.$

$f(3) = 81 - 135 + 90 - 60 + 24 = 0.$

Vậy x = 2, x = 3 là nghiệm của f(x).

Do đó f(x) = (x – 2)(x – 3).q(x), suy ra $q(x) = f(x) : (x^2 - 5x + 6)$.

Làm tính chia ta được

$$(x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24) : (x^2 - 5x + 6) = x^2 + 4.$$

Do đó $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24 = (x - 2)(x - 3)(x^2 + 4)$.

C. BÀI TẬP

1.84. Làm tính chia :

a) $\frac{5}{4}x^4y^3 : \frac{1}{3}x^3y^3$; b) $(21x^my^3 - 14x^{m+2}y^2) : (-7x^my^2)$, với $m \in \mathbb{N}$

c) $\left[20(x - y)^{n+2} + 15(x - y)^{n+1} - 10(x - y)^n\right] : \left[\frac{5}{6}(x - y)^{n-1}\right]$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

1.85. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để :

a) Đơn thức $C = \frac{1}{2}x^{2n}y^5$ chia hết cho đơn thức $D = -3x^{n+2}y^{n+1}$.

b) Đa thức $M = 9x^8y^{n+3} - 15x^{n+1}y^n$ chia hết cho đơn thức $N = 6x^ny^6$.

1.86. Cho biểu thức $P = (3x^3y^2 - 6x^2y^3) : 3xy^2 + 10x^2y^5 : 5x^2y^3$. Chứng minh rằng P luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị $x \neq 0$, $y \neq 0$.

1.87. Cho biểu thức

$$Q = \left(x^4y^{n+1} - \frac{1}{2}x^3y^{n+2}\right) : \frac{1}{2}x^3y^n - 20x^4y : 5x^2y, \text{ trong đó } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng Q luôn luôn có giá trị âm với mọi giá trị $x \neq 0$; $y \neq 0$.

1.88. Tìm dư trong các phép chia :

a) $(6x^3 + 7x^2 - 18x + 5) : (2x + 5)$; b) $(8x^3 - 12x^2 + 1) : (4x^2 + 3)$.

1.89. Không làm tính chia, hãy tìm dư trong phép chia đa thức $f(x) = x^4 - 6x^3 + 2x + 28$ cho các đa thức sau :

a) $g_1(x) = x - 1$; b) $g_2(x) = x + 1$; c) $g_3(x) = x - 2$.

1.90. Làm tính chia bằng cách dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ :

a) $(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) : (x^2 - 8x + 16)$;

b) $(x^3 - 27) : (x^2 + 3x + 9)$; c) $(x^3 + 125) : (x + 5)$.

1.91. Tìm các giá trị của a để :

a) Đa thức $6x^2 + 5ax - 4$ chia cho đa thức $(x - 2)$ còn dư 10.

b) Đa thức $f(x) = x^4 + 5x^3 - 2x^2 + ax + 40$ chia hết cho đa thức $x^2 - 3x + 2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của thương là bao nhiêu ?

1.92. Tìm các giá trị của a và b để đa thức $A = 4x^3 + ax^2 + bx + 5$ chia hết cho đa thức $B = x^2 - x + 1$.

1.93. Xác định các hệ số a, b để :

a) Đa thức $x^4 + 3x^3 - 17x^2 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + 5x - 3$.

b) Đa thức $x^5 + 7x^4 + ax^2 + bx + 72$ chia hết cho đa thức $(x^3 - 2x^2 + 4)$.

1.94. Xác định các hệ số a và b để :

a) Đa thức $4x^3 + ax + b$ chia cho đa thức $x^2 - 1$ dư $2x - 3$.

b) Đa thức $5x^3 + 2x^2 + ax + b$ chia cho đa thức $x^2 + 5$ dư 1.

1.95. Chứng minh rằng :

a) Đa thức $f(x) = (x^3 - 2x + 3)^{100} + (x^2 + 5x + 7)^{99} - 2$ chia hết cho đa thức $(x + 2)$.

b) Đa thức $f(x) = (x + 1)^{2n} + (x + 2)^n - 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + 3x + 2$.

1.96. Tìm a và b để đa thức $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + 1$ chia hết cho đa thức $(x - 1)^2$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

1.97. Cho đa thức hai biến x và y : $f(x, y) = x(y + 1)^n - y(x + 1)^n - x + y$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $f(x, y) \vdots xy(x - y)$.

1.98. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 9x - 2$; b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1.99. Đa thức f(x) chia cho $(x - 2)$ dư 5, chia cho $(x + 1)$ dư 2. Hỏi khi chia f(x) cho $(x - 2)(x + 1)$ thì dư bao nhiêu ?

1.100. Tìm các giá trị nguyên của x để :

a) Giá trị của đa thức $A = 10x^3 - 23x^2 + 14x - 5$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x - 3$.

b) Giá trị của đa thức $A = 3x^4 + 17x^3 + 4x^2 - 4x + 7$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 3x + 2$.

Chuyên đề nâng cao 1
PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Chúng ta đã biết ba phương pháp để phân tích một đa thức thành nhân tử là đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử và phối hợp ba phương pháp đó. Tuy nhiên có những đa thức mặc dù rất đơn giản, nếu chỉ biết dùng ba phương pháp đó thôi thì không thể phân tích thành nhân tử được. Chẳng hạn đa thức $x^4 + 4y^4$. Nếu là $x^4 - 4y^4$ thì dùng phương pháp hằng đẳng thức phân tích được dễ dàng nhưng ở đây giữa x^4 và $4y^4$ là dấu +. Một đa thức khác như $x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2$ cũng vậy. Phương pháp đặt nhân tử chung không dùng được vì cả ba hạng tử không có nhân tử chung. Phương pháp dùng hằng đẳng

thức thì không thích hợp vì không thuộc một dạng hằng đẳng thức nào. Còn phương pháp nhóm các hạng tử cũng không dùng được, vì muốn dùng phương pháp này thì đa thức phải có từ bốn hạng tử trở lên.

Do đó trong chuyên đề này chúng ta sẽ xét thêm một số phương pháp khác để phân tích đa thức thành nhân tử.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

1. Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.

Ví dụ 28. Phân tích đa thức A thành nhân tử

$$A = 4x^2 - 4x - 15$$

Giải

• *Cách 1 :*

Tách hạng tử cuối thành hai hạng tử rồi nhóm lại và dùng phương pháp hằng đẳng thức để phân tích :

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 - 4x - 15 \\ &= (4x^2 - 4x + 1) - 16 = (2x - 1)^2 - 4^2 \\ &= (2x - 1 - 4)(2x - 1 + 4) = (2x - 5)(2x + 3). \end{aligned}$$

• *Cách 2 :*

Tách hạng tử –4x thành hai hạng tử rồi nhóm lại và dùng phương pháp đặt nhân tử chung để phân tích.

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 - 4x - 15 = 4x^2 - 10x + 6x - 15 \\ &= 2x(2x - 5) + 3(2x - 5) = (2x - 5)(2x + 3). \end{aligned}$$

Cơ sở của phương pháp tách các hạng tử là tách một hạng tử thành nhiều hạng tử để có thể đặt nhân tử chung theo từng nhóm hoặc dùng hằng đẳng thức :

Nhận xét : Trong cách tách thứ hai ta đã tách –4x thành –10x + 6x và được $A = 4x^2 - 10x + 6x - 15$. Ta nhận thấy các hệ số của chúng tỉ lệ với nhau :

$$\frac{4}{-10} = \frac{6}{-15} \text{ hay } 4.(-15) = (-10).6$$

Nếu tách hạng tử bậc nhất thành hai hạng tử thoả mãn điều kiện trên, thì sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm, kết quả lại xuất hiện nhân tử chung và ta tiếp tục phân tích đến kết quả cuối cùng.

Tổng quát : Đối với tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ ta có thể tách hạng tử bậc nhất bx thành hai hạng tử b_1x và b_2x sao cho :

$$b_1 + b_2 = b$$

$$b_1.b_2 = ac.$$

Khi đó đa thức $ax^2 + bx + c$ có thể phân tích được thành nhân tử bằng cách đặt nhân tử chung theo từng nhóm.

Điều kiện để đa thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành tích của hai nhị thức bậc nhất là biểu thức $b^2 - 4ac$ là một số chính phương.

Trong ví dụ 28 thì $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.4(-15) = 256 = 16^2$.

Ví dụ 29. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 - 13x + 36$; b) $x^2 - 5x - 14$; c) $3x^2 - 5xy - 2y^2$.

Giải

a) $x^2 - 13x + 36 = x^2 - 4x - 9x + 36 = x(x - 4) - 9(x - 4) = (x - 4)(x - 9)$.

b) $x^2 - 5x - 14 = x^2 + 2x - 7x - 14 = x(x + 2) - 7(x + 2) = (x + 2)(x - 7)$.

c) $3x^2 - 5xy - 2y^2 = 3x^2 - 6xy + xy - 2y^2$

$= 3x(x - 2y) + y(x - 2y) = (x - 2y)(3x + y)$.

Trên đây ta đã xét đối với các tam thức bậc hai. Còn đối với đa thức có bậc lớn hơn hai thì tuỳ theo đặc điểm của các hệ số mà lựa chọn cách tách cho phù hợp.

Ví dụ 30. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$A = x^3 - 4x^2 + 3$$

Giải : Ta tách hệ số 3 thành $-1 + 4$:

$$A = x^3 - 1 - 4x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 4(x + 1)(x - 1)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 4x - 4) = (x - 1)(x^2 - 3x - 3).$$

Cách khác : Nhẩm nghiệm rồi dùng hệ quả của định lí Bê-du : Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của đa thức A nên theo hệ quả của định lí Bê-du ta có

$$x^3 - 4x^2 + 3 = (x - 1) . q(x)$$

Ta sẽ tách các hạng tử với định hướng là sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng xuất hiện nhân tử $x - 1$. Vì thế ta sẽ tách như sau :

$$A = x^3 - 4x^2 + 3 = x^3 - x^2 - 3x^2 + 3$$
$$= x^2(x - 1) - 3(x + 1)(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 3x - 3).$$

Ví dụ 31. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$B = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

Giải. Ta tách hạng tử $3x^2$ thành $x^2 + 2x^2$:

$$B = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^2 + 4x + 2 = x^2(x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + 2x + 1)$$
$$= x^2(x+1)^2 + 2(x+1)^2 = (x+1)^2(x^2 + 2).$$

Cách khác : Nhẩm nghiệm rồi dùng hệ quả của định lí Bê-du : Dễ thấy $x = -1$ là nghiệm của đa thức B nên theo hệ quả của định lí Bê-du ta có :

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x + 1) . q(x)$$

Ta sẽ tách các hạng tử với định hướng là sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng xuất hiện nhân tử $x + 1$. Vì thế ta sẽ tách như sau :

$$B = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 2x + 2$$
$$= x^3(x + 1) + x^2(x + 1) + 2x(x + 1) + 2(x + 1)$$
$$= (x + 1)(x^3 + x^2 + 2x + 2)$$
$$= (x + 1)[x^2(x + 1) + 2(x + 1)] = (x + 1)(x + 1)(x^2 + 2) = (x + 1)^2(x + 2).$$

Như vậy nếu một đa thức có nghiệm $x = a$ thì ta có thể phân tích đa thức ấy thành nhân tử bằng phương pháp tách các hạng tử sao cho khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng có nhân tử $x - a$.

Dựa vào các nhận xét sau ta có thể nhẩm được nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỉ của đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên.

1. Nếu đa thức có nghiệm nguyên thì nghiệm nguyên đó phải là ước của hệ số tự do.

Đặc biệt :

- Nếu tổng các hệ số của đa thức bằng 0 thì $x = 1$ là nghiệm của đa thức.
- Nếu tổng các hệ số bậc lẻ bằng tổng các hệ số bậc chẵn thì $x = -1$ là nghiệm của đa thức.

Chẳng hạn đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ có :

$x = 1$ là nghiệm vì tổng các hệ số $1 - 3 - 1 + 3 = 0$;

$x = -1$ là nghiệm vì tổng các hệ số bậc lẻ bằng các hệ số bậc chẵn :

$1 + (-1) = (-3) + 3$;

$x = 3$ là nghiệm vì $3^3 - 3.3^2 - 3 + 3 = 0$.

Hệ số tự do còn có ước là -3, nhưng ta không cần thử với -3 vì một đa thức bậc ba không quá ba nghiệm.

2. Nếu đa thức có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó có dạng $\frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ trong đó p là ước của hạng tử tự do ; q là ước dương của hệ số cao nhất.

Chẳng hạn đa thức $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$. Ta thấy các giá trị nguyên $x = \pm 1$; $x = \pm 2$ đều không phải là nghiệm.

Thử lại các giá trị hữu tỉ $x = \pm\frac{1}{2}$ (± 1 là ước của hạng tử tự do ; 2 là ước dương của hệ số cao nhất) ta thấy $x = -\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm còn $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của đa thức vì

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2.\frac{1}{2} - 2 = 0.$$

Do đó $\quad f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right).q(x)$ hay $f(x) = (2x - 1) . g(x)$

Ví dụ 32. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$C = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$$

Giải. Ta sẽ tách các hạng tử với định hướng là sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng xuất hiện nhân tử $2x - 1$. Vì thế ta sẽ tách như sau :

$$C = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 2x^3 - x^2 + 4x^2 - 2x + 4x - 2$$
$$= x^2(2x - 1) + 2x(2x - 1) + 2(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 + 2x + 2).$$

2. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Ví dụ 33. Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $A = x^4 + 4y^4$.

Giải

Ta thấy $x^4 + 4y^4$ có dạng $a^2 + b^2$. Vì vậy có thể thêm bớt hạng tử 2ab để xuất hiện hằng đẳng thức.

Ta có $\quad A = x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2$

$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

Ví dụ 34. Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $B = x^5 + x + 1$

Giải

Ta thấy đa thức đã cho là đa thức bậc 5. Đa thức này khuyết các hạng tử bậc 4, bậc 3, bậc 2. Vì vậy có thể chọn thêm bớt hạng tử có bậc bị khuyết. Hợp lí hơn cả là thêm bớt hạng tử bậc 2.

Ta có $B = x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$

$$= x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

Nhận xét : Có hai cơ sở để thêm bớt cùng một hạng tử :

– Thêm bớt để có thể dùng hằng đẳng thức.

– Thêm bớt các hạng tử bị khuyết trong đa thức để có thể đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

3. Phương pháp đổi biến

Ví dụ 35. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (x^2 - x - 3)(x^2 - x - 4) - 12$

b) $B = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

Giải

a) Ta đặt $x^2 - x - 3 = a$ thì $x^2 - x - 4 = a - 1$.

Khi đó $A = a(a - b) - 12 = a^2 - a - 12 = (a - 4)(a + 3)$.

Thay trở lại $a = x^2 - x - 3$ ta được $A = (x^2 - x - 3 - 4)(x^2 - x - 3 + 3)$

$= (x^2 - x - 7)(x^2 - x) = x(x - 1)(x^2 - x - 7)$.

b) Ta đặt $x - y = a$; $y - z = b$; $z - x = c$

thì $a + b + c = (x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$.

Ta được $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (xem ví dụ 10).

Do đó $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

Nhận xét : Trong ví dụ trên nếu ta khai triển đa thức, thu gọn rồi phân tích thì sẽ được một đa thức bậc cao khó phân tích. Phương pháp đổi biến như trên đưa một biểu thức phức tạp thành một biểu thức đơn giản dễ phân tích.

4. Phương pháp đồng nhất hệ số

Ví dụ 36. Phân tích đa thức A thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên : $A = x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 3x + 2$.

Giải

Sau khi phân tích thì A có dạng

$$(x^2 + ax + 2)(x^2 + bx + 1) \text{ hoặc } (x^2 + ax - 2)(x^2 + bx - 1)$$

(trường hợp hai hạng tử đầu của mỗi tam thức là $-x^2$ và $-x^2$ thì ta chỉ cần đổi dấu của hai tam thức).

• Xét trường hợp $A = (x^2 + ax + 2)(x^2 + bx + 1)$.

Khai triển rồi thu gọn ta được

$$A = x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 3)x^2 + (a + 2b)x + 2$$

Vậy $x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 3)x^2 + (a + 2b)x + 2$ với mọi x.

Suy ra $\begin{cases} a + b = -4 & (1) \\ ab + 3 = -2 & (2) \\ a + 2b = -3 & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (3) ta suy ra $a = -5$; $b = 1$. Đẳng thức (2) cũng được thoả mãn.

Vậy $x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x + 1)$.

• Xét trường hợp thứ hai : cũng giải như trên ta thấy không có a và b nào thoả mãn. Vậy bài toán chỉ có một đáp số như trên.

5. Phương pháp xét giá trị riêng của các biến

Ví dụ 37. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$P = xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x)$$

Giải. Nếu thay x bởi y thì $P = 0 + yz(y - z) + zy(z - y) = 0$

Do đó P chứa nhân tử $(x - y)$.

Tương tự, P cũng chứa các nhân tử $(y - z)$ và $(z - x)$.

Vậy $P = k.(x - y)(y - z)(z - x)$.

Ta thấy P là một đa thức bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z.

Tích $(x - y)(y - z)(z - x)$ cũng có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z nên k phải là hằng số.

Đẳng thức $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = k(x - y)(y - z)(z - x)$ đúng với mọi x, y, z nên ta gán cho x, y, z các giá trị riêng chẳng hạn $x = 1$; $y = -1$; $z = 0$ ta được

$$1.(-1)(1 + 1) = k(2).(-1)(-1) \text{ hay } 2k = -2, \text{ do đó } k = -1.$$

Vậy $P = (-1).(x - y)(y - z)(z - x)$ hay $P = (x - y)(y - z)(x - z)$.

Đến đây ta đã có 5 phương pháp khác để phân tích đa thức thành nhân tử trong đó ba phương pháp đầu (tách các hạng tử, thêm bớt một hạng tử và đổi biến) là những phương pháp hay dùng. Các bạn cố gắng nắm thật vững để vận dụng cho tốt.

C. BÀI TẬP

• Phương pháp tách các hạng tử

1.101. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 + 7x + 12$; b) $x^2 + 8x - 33$;

c) $x^2 - 9x + 18$; d) $x^2 - 3x - 54$.

1.102. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $20x^2 + 7x - 6$; b) $18x^2 + 21x - 4$;

c) $12x^2 - 23xy + 10y^2$; d) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$.

1.103. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $(x^2 - 8)^2 + 36$; b) $x^8 + x^4 + 1$.

1.104. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để giá trị của biểu thức

$P = (n^2 - 3)^2 + 16$ là một số nguyên tố.

1.105. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $6x^3 - 11x^2 - x - 2$; b) $4x^3 + 5x^2 + 5x + 1$.

1.106. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $A = 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$; b) $B = x^4 - 5x^3 + 10x + 4$;

c) $C = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

1.107. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $4x^2 - 12x - y^2 + 8y - 7$; b) $2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$.

1.108. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$(x + y)^4 + x^4 + y^4.$$

1.109. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = x^{10} + x^9 + x^8 + \ldots x^2 + x - 10.$$

1.110. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$;

b) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$;

c) $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$.

1.111. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$A = ab(a - b)(c + 1) + bc(b - c)(a + 1) + ca(c - a)(b + 1)$.

1.112. Cho biểu thức $B = a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$ trong đó $a > b > c$. Chứng minh rằng $B > 0$.

1.113. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $M = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc$;

b) $N = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$.

• **Phương pháp thêm bớt một hạng tử**

1.114. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^{12} + 4$; b) $4x^8 + 1$.

1.115. Tìm tất cả các giá trị tự nhiên của x để biểu thức $A = x^4 + 4$ có giá trị là một số nguyên tố.

1.116. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

1.117. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^7 + x^5 - 1$; b) $x^7 + x^5 + 1$.

1.118. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^5 + x - 1$; b) $x^{11} + x + 1$.

1.119. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^8 + x^7 + 1$; b) $x^5 + x^4 + 2x^2 - 1$.

1.120. Chứng minh rằng đa thức $M = x^{3n+1} + x^{3n-1} + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$ trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.

• **Phương pháp đổi biến**

1.121. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $A = (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8$;

b) $B = (x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7$.

1.122. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $C = (x^2 - 3x + 5)^2 - 7x(x^2 - 3x + 5) + 12x^2$;

b) $D = 2(x^2 + 5x - 2)^2 - 7(x^2 + 5x - 2)(x^2 + 3) + 5(x^2 + 3)^2$.

1.123. Chứng minh rằng tích của 4 số nguyên liên tiếp cộng thêm 1 là một số chính phương.

1.124. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau luôn có giá trị không âm.

$$M = (x - y)(x - 2y)(x - 3y)(x - 4y) + y^4.$$

1.125. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$N = 4(x^2 - 15x + 50)(x^2 - 18x + 72) - 3x^2.$$

• **Phương pháp đồng nhất hệ số**

1.126. Cho đa thức $A = x^4 - 7x^3 + 12x^2 - x - 3$.

Hãy phân tích A thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên và các hệ số cao nhất đều dương.

1.127. Cho đa thức $B = x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2 + 13x + 5$. Hãy phân tích B thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên : Một đa thức bậc hai và một đa thức bậc ba biết các hệ số cao nhất và thấp nhất đều dương và đa thức bậc ba khuyết hạng tử bậc hai.

• **Phương pháp xét các giá trị riêng**

1.128. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$A = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3.$$

1.129. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$Q = bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b).$$

Chuyên đề nâng cao 2
TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

Các bài toán về chia hết và chia còn dư trên tập hợp số nguyên là loại toán cơ bản, trọng tâm của phần số học. Các đề thi học sinh giỏi, thi tuyển vào các lớp chuyên, lớp chọn không thể thiếu loại toán này. Chúng ta sẽ nhắc lại định nghĩa, tính chất và hệ thống các phương pháp chứng minh chia hết trên tập hợp các số nguyên.

I. ĐỊNH NGHĨA

• Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b, kí hiệu $a \vdots b$. Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a.

• Người ta đã chứng minh được rằng : Với hai số nguyên tuỳ ý a và b ($b \neq 0$) tồn tại duy nhất một cặp số nguyên q và r sao cho $a = bq + r$ trong đó $0 \leq r < |b|$.

Số r gọi là số dư trong phép chia a cho b. Nếu $r = 0$ thì $a \vdots b$.

Một số tính chất về chia hết suy từ định nghĩa

Với $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$.

1. Nếu $a \neq 0$ thì $a \vdots a$.
2. Nếu $a \vdots b$, $b \vdots c$ thì $a \vdots c$.

3. Số 0 chia hết cho mọi số nguyên khác 0.
4. Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots a$ thì $a = \pm b$.
5. Nếu $a \vdots b$ thì $ka \vdots b$.

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ TÍNH CHẤT CHIA HẾT

1. Nếu $a \vdots m$, $b \vdots m$ thì $a \pm b \vdots m$.
2. Nếu $a \vdots m$, $b \not\vdots m$ thì $a \pm b \not\vdots m$.
3. Nếu $a \vdots m$, $b \vdots n$ thì $ab \vdots mn$.

   Đặc biệt : nếu $a \vdots b$ thì $a^n \vdots b^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
4. Nếu $a \vdots m$, $a \vdots n$ mà $(m, n) = 1$ thì $a \vdots mn$

   Nếu $a \vdots m$, $a \vdots n$ mà $(m, n) \neq 1$ thì $a \vdots$ BCNN(m, n).
5. Nếu $ab \vdots m$ mà $(a, m) = 1$, thì $b \vdots m$.

   Đặc biệt : Nếu $ab \vdots p$ thì $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$ (với p là số nguyên tố).

   Nếu $a^n \vdots p$ thì $a \vdots p$ (với p là số nguyên tố).

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP CÁC SỐ NGUYÊN

• ***Phương pháp 1 : Phân tích biểu thức bị chia thành tích***

Để chứng minh biểu thức A(n) với n là số nguyên chia hết cho một số nguyên $a \neq 0$, ta phân tích A(n) thành nhân tử và chứng minh ít nhất có một nhân tử chia hết cho a.

Lưu ý : Tích của hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 ; Tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3.

Tổng quát : Tích của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n.

Ví dụ 38. Chứng minh rằng :

a) Hiệu của một số có ba chữ số với tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

b) Hiệu của một số có ba chữ số với số đó viết theo thứ tự ngược lại thì chia hết cho 99.

Giải

a) Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$.

Ta có $\overline{abc} - (a + b + c) = 100a + 10b + c - (a + b + c)$

$= 99a + 9b = 9.(11a + b) \vdots 9.$

b) Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$.

Ta có $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

$= 99a - 99c = 99.(a - c) \vdots 99.$

Ví dụ 39. Chứng minh rằng :

a) Bình phương của một số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 2.

b) Lập phương của một số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 6.

Giải. Gọi số nguyên là n

a) Ta có $n^2 - n = n(n - 1) \vdots 2$ (vì là tích của hai số nguyên liên tiếp).

b) Ta có $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$.

Tích $(n - 1).n.(n + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, cho 3. Mặt khác $(2, 3) = 1$ nên tích trên chia hết cho 2.3 tức là chia hết cho 6.

Ví dụ 40. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $8^n - 1$ và $8^n + 1$ không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Giải. Xét tích $(8^n - 1).8^n.(8^n + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3.

Dễ thấy $8^n - 1$; 8^n ; $8^n + 1 > 3$ (vì $n \in \mathbb{N}^*$).

Ta có $(8^n, 3) = 1$ nên $8^n - 1 \vdots 3$ hoặc $8^n + 1 \vdots 3$.

Do đó $8^n - 1$ hoặc $8^n + 1$ là hợp số.

Suy ra $8^n - 1$ và $8^n + 1$ không thể đồng thời là các số nguyên tố.

• ***Phương pháp 2 : Biểu diễn biểu thức bị chia dưới dạng tổng***

Để chứng minh biểu thức $A(n) \vdots a$ $(n, a \in \mathbb{Z})$ ta biểu diễn A(n) dưới dạng tổng của nhiều hạng tử rồi chứng minh mỗi hạng tử đều chia hết cho a.

Ví dụ 41. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ thì $A = n^5 - n \vdots 30$.

Giải

Ta có $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

$= n(n - 1)(n + 1)[(n^2 - 4) + 5]$

$= n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1).$

Hạng tử thứ nhất là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, cho 3, cho 5. Mặt khác 2, 3, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên hạng tử này chia hết cho 2.3.5 tức là chia hết cho 30.

Hạng tử thứ hai $5n(n-1)(n+1)$ có tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, cho 3. Ngoài ra còn chia hết cho 5 (vì có chứa thừa số 5) nên hạng tử thứ hai chia hết cho 30. Từ đó suy ra $A \vdots 30$.

Lưu ý : Qua ví dụ 39 và ví dụ 41 ta thấy :

$$n^2 - n \vdots 2 ; n^3 - n \vdots 3 ; n^5 - n \vdots 5$$

Tổng quát : Nếu p là số nguyên tố thì $a^p - a$ chia hết cho p với mọi số nguyên a. Đây là định lí nhỏ Fec-ma(*).

Ví dụ 42. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$, chứng minh rằng :

a) $A = a^3b - ab^3 \vdots 6$; b) $B = a^5b - ab^5 \vdots 30$.

Giải

a) Ta có $a^3b - ab^3 = a^3b - ab - ab^3 + ab$

$= b(a^3 - a) - a(b^3 - b)$

Theo ví dụ 39 thì $a^3 - a \vdots 6$; $b^3 - b \vdots 6$. Do đó $A \vdots 6$

b) $a^5b - ab^5 = a^5b - ab - ab^5 + ab$

$= b(a^5 - a) - a(b^5 - b)$.

Theo ví dụ 41 thì $a^5 - a \vdots 30$; $b^5 - b \vdots 30$ nên $B \vdots 30$.

Ví dụ 43. Chứng minh rằng nếu x là một số lẻ thì giá trị của biểu thức $A = x^2 + 4x - 5$ luôn chia hết cho 8.

Giải. Vì x là số lẻ nên $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Do đó $A = (2k+1)^2 + 4(2k+1) - 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 4 - 5$

$= 4k^2 + 4k + 8k = 4k(k+1) + 8k$.

Ta có $k(k+1) \vdots 2$ vì là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Do đó $4k(k+1) \vdots 8$; $8k \vdots 8$ nên $A \vdots 8$.

Ví dụ 44. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của biểu thức

$$B = n^3 - 7n + 19 \not\vdots\ 6.$$

Giải

$$B = n^3 - 7n + 19 = (n^3 - n) - 6n + 19$$

Ta có $n^3 - n \vdots 6$ (theo ví dụ 39) ; $6n \vdots 6$; $19 \not\vdots\ 6$ nên $B \not\vdots\ 6$.

(*) Fermat : nhà toán học Pháp.

• ***Phương pháp 3 : Sử dụng các hằng đẳng thức mở rộng***

Ta có thể sử dụng các hằng đẳng thức mở rộng để chứng minh tính chia hết của các số.

Với a, b $\in \mathbb{N}$ ta có :

• $a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ với $a \neq b$.

• $a^{2n} - b^{2n}$ chia hết cho $a^2 - b^2$ với $a \neq \pm b$.

• $a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$ với n lẻ và $a \neq -b$.

• $(a + b)^n = B(a) + b^n = a^n + B(b)$.

Ví dụ 45. Chứng minh rằng :

a) $A = 2^n - 1 \vdots 15$ với n là số tự nhiên chia hết cho 4 ;

b) $B = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} \vdots 25$ với n là số tự nhiên lẻ.

Giải

a) Vì $n \vdots 4$ nên $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Do đó $A = 2^{4k} - 1 = 16^k - 1$

Ta có $16^k - 1 \vdots 16 - 1$ nên $A \vdots 15$.

b) $B = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 27.3^{2n} + 2.2^{4n} = 25.3^{2n} + 2.3^{2n} + 2.2^{4n}$

$= 25.3^{2n} + 2(3^{2n} + 4^{2n}) = 25.3^{2n} + 2(9^n + 16^n)$

Vì n lẻ nên $9^n + 16^n \vdots 9 + 16$. Do đó $B \vdots 25$.

Ví dụ 46. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $A = 2^n + 1 \vdots 3$.

Giải. Ta có $A = 2^n + 1 = (3 - 1)^n + 1 = B(3) + (-1)^n + 1$

$A \vdots 3 \Leftrightarrow (-1)^n + 1 = 0 \Leftrightarrow$ n là số tự nhiên lẻ.

Ví dụ 47. Tìm số dư khi chia 2^{100} cho 7.

Giải

Ta thấy 100 chia cho 3 dư 1 nên ta đặt $100 = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Ta có $2^{100} = 2^{3k+1} = 2.2^{3k} = 2.8^k = 2.(7 + 1)^k = 2.[B(7) + 1^k] = 2B(7) + 2$.

Vậy số dư trong phép chia 2^{100} cho 7 là 2.

• ***Phương pháp 4 : Xét số dư***

Để chứng minh biểu thức A(n) chia hết cho a hay không chia hết cho a ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho a.

Chẳng hạn khi chia một số n cho 5 thì số dư có thể là 0, 1, 2, 3, 4 khi đó n được biểu diễn lần lượt là :

$$n = 5k ; n = 5k + 1 ; n = 5k + 2 ; n = 5k + 3 ; n = 5k + 4.$$

Để cho gọn ta có thể ghép các trường hợp $n = 5k + 1$ và $n = 5k + 4$ thành $5k \pm 1$; các trường hợp $n = 5k + 2$ và $n = 5k + 3$ thành $5k \pm 2$.

Lưu ý : Nếu a và b chia cho m có cùng số dư thì $a - b \vdots m$.

Ví dụ 48. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì $A = 2^n + 1 \not\vdots\ 7$;

Giải

• Nếu $n = 3k$ thì $A = 2^{3k} + 1 = 8^k - 1 + 2$

Ta có $8^k - 1 \vdots 8 - 1$ hay $8^k - 1 \vdots 7$; $2 \not\vdots\ 7$ nên $A \not\vdots\ 7$.

• Nếu $n = 3k + 1$ thì $A = 2^{3k+1} + 1 = 2.2^{3k} + 1 = 2.8^k - 2 + 3 = 2(8^k - 1) + 3$

Vì $8^k - 1 \vdots 7$; $3 \not\vdots\ 7$ nên $A \not\vdots 7$.

• Nếu $n = 3k + 2$ thì $A = 2^{3k+2} + 1 = 4.8^k - 4 + 5 = 4(8^k - 1) + 5$.

Vì $8^k - 1 \vdots 7$; $5 \not\vdots\ 7$ nên $A \not\vdots\ 7$. Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta luôn có $A \not\vdots\ 7$.

Ví dụ 49. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của biểu thức $B = n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$ luôn chia hết cho 5.

Giải

• Nếu $n = 5k$ thì $B \vdots 5$

• Nếu $n = 5k \pm 1$ thì nhân tử cuối

$$n^2 + 4 = (5k \pm 1)^2 + 4 = 25k^2 \pm 10k + 5 = 5(5k^2 \pm 2k + 1) \vdots 5.$$

• Nếu $n = 5k \pm 2$ thì nhân tử thứ hai

$$n^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5$$
$$= 5(5k^2 \pm 4k + 1) \vdots 5.$$

Vậy trong mọi trường hợp thì $B \vdots 5$.

• Trường hợp đặc biệt khi xét các số dư trong phép chia là trường hợp chia một số cho 2. Số dư chỉ có thể là 0 hoặc 1 tuỳ theo số bị chia là chẵn hay lẻ.

Ta có nhận xét với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thì :

– Nếu tổng $a + b + c$ là một số chẵn thì trong ba số a, b, c ít nhất cũng có một số chẵn.

– Nếu tổng $a + b + c$ là một số lẻ thì trong ba số a, b, c ít nhất cũng là một số lẻ.

Ví dụ 50. Cho a, b, c $\in \mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện $a + b + c \vdots 4$. Chứng minh rằng :

$$A = (a+ b)(b + c)(c + a) - abc \vdots 4.$$

Giải

Để vận dụng được điều kiện $a + b + c \vdots 4$ ta biến đổi biểu thức A về dạng có biểu thức a + b + c.

$$\begin{aligned} A &= (a + b)(b + c)(c + a) - abc = (ab + ac + b^2 + bc)(c + a) - abc \\ &= abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + ab^2 + bc^2 + abc - abc \\ &= (a^2b + abc + a^2c) + (ab^2 + b^2c + abc) + (abc + bc^2 + ac^2) - 2abc \\ &= a(ab + bc + ca) + b(ab + bc + ca) + c(ab + bc + ca) - 2abc \\ &= (a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc. \end{aligned}$$

Do $a + b + c \vdots 4$ nên trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Suy ra $2abc \vdots 4$.

Mặt khác $(a + b + c)(ab + bc + ca) \vdots 4$ nên $A \vdots 4$.

• ***Phương pháp 5 : Dùng nguyên lí Đi-rich-lê***(*)

Có một nguyên lí toán học được phát biểu rất đơn giản nhưng được vận dụng rất linh hoạt và phong phú. Đó là nguyên lí Đi-rich-lê :

"Nếu ta nhốt n con thỏ vào n – 1 chiếc lồng thì tồn tại một lồng có ít nhất hai con thỏ". Sau đây ta sẽ vận dụng nguyên lí để giải bài toán chia hết. Trong các bài toán này cần nắm vững đâu là "thỏ" và cách tạo ra một số "lồng".

Ví dụ 51. Chứng minh rằng trong 101 số nguyên bất kì bao giờ cũng tồn tại hai số mà hiệu của chúng ít nhất cũng tận cùng bằng hai chữ số 0.

Giải

Chia 101 số nguyên này cho 100 (coi 100 này như 100 lồng) ta được 101 số dư (101 số dư này coi là 101 thỏ).

Theo nguyên lí Đi-rich-lê thì ít nhất có hai số dư trùng nhau. Hiệu của hai số có cùng số dư này là một số chia hết cho 100. Do đó hiệu này ít nhất cũng tận cùng bằng hai chữ số 0.

Ví dụ 52. Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng tồn tại hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 12.

Giải

Một số nguyên tố lớn hơn 3 phải là một số lẻ không chia hết cho 3. Khi chia số đó cho 12 thì số dư chỉ có thể là một trong bốn số : 1, 5, 7, 11.

(*) Dirichlet : Nhà toán học Đức.

Chia 4 loại số dư này thành hai nhóm (hai lồng) : nhóm dư 1 hoặc dư 11 và nhóm dư 5 hoặc dư 7. Đem ba số nguyên tố chia cho 12 ta được ba số dư (coi như là ba thỏ). Có ba số dư mà chỉ chứa trong hai nhóm nên theo nguyên lí Đi-rich-lê tồn tại hai số dư thuộc cùng một nhóm.

– Nếu hai số dư bằng nhau thì hiệu của chúng chia hết cho 12.

– Nếu hai số dư khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 12.

• ***Phương pháp 6 : Phương pháp quy nạp toán học***

Với những mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n ta có thể dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh. Phương pháp này gồm ba bước :

– Chứng minh mệnh đề đúng với một số tự nhiên n_0 nào đó (chẳng hạn $n_0 = 1$).

– Giả sử mệnh đề đúng với n = k (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

– Kết luận : Mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Ví dụ 53. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì

$$A = 7^n + 3n - 1 \vdots 9 \ (1).$$

Giải

• Với n = 0 thì $A(0) = 1 + 0 - 1 = 0 \vdots 9$. Vậy (1) đúng với n = 0.

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $7^k + 3k - 1 \vdots 9$ (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1, nghĩa là phải chứng minh $7^{k+1} + 3(k + 1) - 1 \vdots 9$

Ta có $7^{k+1} + 3(k + 1) - 1 = 7.7^k + 3k + 2$

$$= 7.7^k + 21k - 7 - 18k + 9 = 7(7^k + 3k - 1) - 9(2k - 1).$$

Vì $7^k + 3k - 1 \vdots 9$, nên $7(7^k + 3k - 1) - 9(2k - 1) \vdots 9$.

• Do đó $A \vdots 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 54. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì $B = 12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$ (1)

Giải

• Với n = 0 thì $B(0) = 12 + 121 = 133 \vdots 133$.

Vậy (1) đúng với n = 0.

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $12^{2k+1} + 11^{k+2} \vdots 133$ (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh $12^{2(k+1)+1} + 11^{k+3} \vdots 133$.

Ta có $12^{2k+3} + 11^{k+3} = 144.12^{2k+1} + 11.11^{k+2} = 11.12^{2k+1} + 11.11^{k+2} + 133.12^{2k+1}$

$$= 11(12^{2k+1} + 11^{k+2}) + 133.12^{2k+1}$$

Vì $12^{2k+1} + 11^{k+2} \vdots 133$ và $133 \vdots 133$ nên

$$11.(12^{2k+1} + 11^{k+2}) + 133.12^{2k+1} \vdots 133.$$

• Do đó $B \vdots 133$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

C. BÀI TẬP

• Phương pháp phân tích thành tích

1.130. Chứng minh rằng :

a) Tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8 ;

b) Tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 120.

1.131. Cho $n \in \mathbb{Z}$, chứng minh rằng :

a) $A = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ chia hết cho 24 ;

b) $B = n^5 - 5n^3 + 4n$ chia hết cho 120.

1.132. Cho $C = n^4 + 4n^3 - 4n^2 - 16n$ với n là số chẵn. Chứng minh rằng $A \vdots 2^7$.

1.133. Cho $A = 25.(6^{99} + 6^{98} + 6^{97} + ... + 6^2 + 6 + 1) + 5$. Chứng minh rằng $A \vdots 6^{100}$.

1.134. Cho $B = 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{4n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng $B \vdots 400$.

1.135. Cho x, y, z là các số nguyên khác nhau. Chứng minh rằng nếu $a = x^2 - yz$; $b = y^2 - zx$; $c = z^2 - xy$ thì tổng $ax + by + cz$ chia hết cho tổng $(a + b + c)$.

(Thi HSG toàn quốc năm 1993)

1.136. Cho $A = n^3 + 3n^2 + 2n$ với n nguyên dương.

a) Chứng minh rằng $A \vdots 3$;

b) Tìm giá trị của n với $n < 10$ để $A \vdots 15$.

(Thi HSG toàn quốc năm 1987)

1.137. Tìm tất cả các số tự nhiên m và n sao cho

$$2^m - 2^n = 448$$

• Phương pháp biểu diễn dưới dạng tổng

1.138. Cho $A = n^3 + (6k - 1)n$ trong đó $n, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $A \vdots 6$.

1.139. Cho $B = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$ trong đó $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $B \vdots 6$.

1.140. Cho a, b, c $\in \mathbb{Z}$ sao cho $a + b + c \vdots 30$. Chứng minh rằng $B = a^5 + b^5 + c^5 \vdots 30$.

1.141. Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ có tổng bằng 999. Chứng minh rằng $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3 \vdots 3$.

1.142. Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d sao cho $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Chứng minh rằng tổng a + b + c + d là hợp số.

1.143. Cho a và b là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng :

a) $a^2 - 1 \vdots 24$; b) $a^2 - b^2 \vdots 24$.

1.144. Chứng minh rằng :

a) Một số chính phương lẻ chia cho 8 luôn dư 1 ;

b) Cho 6 số nguyên $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ thoả mãn điều kiện

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = a_6^2.$$

Chứng minh rằng cả 6 số $a_1, a_2, ..., a_6$ không thể cùng lẻ.

1.145. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì :

a) $A = n^2 + 3n + 18 \not\vdots 49$; b) $B = n^2 + 3n - 6 \not\vdots 121$.

• Phương pháp dùng hằng đẳng thức mở rộng

1.146. Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng :

a) $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ chia hết cho 17 ;

b) $6^{2n+1} + 5^{n+2}$ chia hết cho 31 ;

c) $9^{2n} + 39$ chia hết cho 40.

1.147. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng:

a) $S_1 = 3^n + 5^n + 7^n + 9^n$ chia hết cho 12 ;

b) $S_2 = 1^n + 2^n + 3^n + ... + 8^n$ không chia hết cho 5.

1.148. Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng : $A = 400^n + 256^n - 9^n - 1$ chia hết cho 323.

1.149. Chứng minh rằng :

a) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 20^3) \vdots (1 + 2 + 3 + ... + 20)$;

b) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 21^3) \vdots (1 + 2 + 3 + ... + 21)$.

1.150. Chứng minh rằng $3^{99} + 5^{98}$ chia hết cho 13.

1.151. Tìm số dư trong phép chia 3^{199} cho 7.

1.152. Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng :

a) $5.7^{2(n+1)} + 2^{3n}$ chia hết cho 41 ;

b) $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$ chia hết cho 91.

• Phương pháp xét số dư

1.153. Cho $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $A = n(n^2 + 1)(n^2 + 2)$ chia hết cho 3.

1.154. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ thì :

a) $A = 2n^3 + 3n^2 + n \vdots 6$; b) $B = 14n^3 + 51n^2 + 7n \vdots 6$.

1.155. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 = c^2$ thì $abc \vdots 3$.

1.156. Tìm n nguyên dương để :

a) $5^n - 1$ chia hết cho 24 ; b) $7^n - 1$ chia hết cho 342.

1.157. Cho a là một số nguyên không chia hết cho 7. Chứng minh rằng

$$a^3 + 1 \vdots 7 \text{ hoặc } a^3 - 1 \vdots 7.$$

1.158. Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng :

a) $A = n^2 + n + 2 \not\vdots 6$; b) $B = 9^n + 1 \not\vdots 8$.

1.159. Cho a, b, $\in \mathbb{Z}$ và a, b không chia hết cho 5. Chứng minh rằng

a) $A = a^4 - 1 \vdots 5$; b) $B = a^4 - b^4 \vdots 5$.

1.160. Chứng minh rằng :

a) $n^2 + 2 \not\vdots 5$ với $n \in \mathbb{Z}$;

b) Tổng các bình phương của 5 số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.

1.161. Cho a, b, $\in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $a^2 + b^2 \vdots 3$ thì a và b cùng chia hết cho 3 ;

b) Nếu $a^2 + b^2 \vdots 7$ thì a và b cùng chia hết cho 7.

1.162. a) Tìm số nguyên tố p để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ đều là số nguyên tố.

b) Tìm số tự nhiên n để $n + 2$; $2n^2 + 8n + 9$; $4n^2 + 16n + 17$ đồng thời là các số nguyên tố.

• **Phương pháp dùng nguyên lí Đi-rich-lê**

1.163. Cho ba số nguyên a, b, c. Chứng minh rằng tích $P = (a - b)(b - c)(c - a) \vdots 2$.

1.164. Chứng minh rằng tồn tại một số gồm toàn chữ số 1 và chữ số 0 chia hết cho 23.

1.165. Có tồn tại một luỹ thừa của 3 mà tận cùng bằng 001 không ?

1.166. Có số nào dạng 123 123 ... 123 000 000 ... 000 chia hết cho 122 không ?

1.167. Chứng minh rằng trong 32 số nguyên bất kì luôn tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 60.

1.168. Chứng minh rằng trong 92 số tự nhiên, mỗi số có 3 chữ số bao giờ cũng chọn ra được hai số sao cho khi viết kề nhau ta được một số có 6 chữ số. Chứng minh rằng số có 6 chữ số này chia hết cho 91.

1.169. Viết 7 số tự nhiên bất kì, mỗi số vào một tấm bìa. Chứng minh rằng có thể chọn ra một hay nhiều tấm bìa để tổng các số trên đó chia hết cho 7.

• **Phương pháp quy nạp toán học**

1.170. Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 9.

1.171. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì $A = 7^{n+2} + 8^{2n+1} \vdots 57$. (1)

1.172. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì :

a) $A = 2^{2n} + 5 \vdots 3$; b) $B = 2^{2n} + 15n - 1 \vdots 3$.

1.173. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì :

a) $A = 10^n - 9n - 1 \vdots 81$; b) $B = 10^n + 18n - 1 \vdots 27$.

1.174. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ thì :

a) $A = 16^n - 15n - 1 \vdots 75$; b) $B = a^{4n+1} - a \vdots 30$.

1.175. Chứng minh rằng số được thành lập bởi 3^n chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với n nguyên dương.

(Thi HSG toàn quốc năm 1979)

Chương II PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 1
TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$ trong đó A, B là những đa thức và B là đa thức khác 0.
2. Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu A.D = B.C.
3. Tính chất cơ bản của phân thức :

   $\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$ (M là một đa thức khác đa thức 0).

   $\frac{A}{B} = \frac{A : N}{B : N}$ (N là một nhân tử chung).
4. Quy tắc đổi dấu : $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.
5. Quy tắc rút gọn phân thức :

   – Phân tích tử và mẫu thành nhân tử ;

   – Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.
6. Quy tắc quy đồng mẫu thức :

   – Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung ;

   – Tìm nhân tử phụ của mỗi phân thức ;

   – Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hai phân thức sau có bằng nhau không ? Vì sao ?

$$\frac{a+3}{a-4} \text{ và } \frac{a+6}{a-8}.$$

Giải. Ta có $(a + 3)(a - 8) = a^2 - 5a - 24$; $(a - 4)(a + 6) = a^2 + 2a - 24$.

Vì $a^2 - 5a - 24 \neq a^2 + 2a - 24$ nên hai phân thức đã cho không bằng nhau.

Ví dụ 2. Cho $ad = bc$ trong đó $b \neq 0$, $3b \neq d$. Chứng minh rằng : $\dfrac{3a - c}{3b - d} = \dfrac{a}{b}$.

Giải. Ta có $(3a - c)b = 3ab - bc = 3ab - ad$. (1)

$(3b - d)a = 3ab - ad$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(3a - c)b = (3b - d)a$.

Do đó $\dfrac{3a - c}{3b - d} = \dfrac{a}{b}$.

Ví dụ 3. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{(a + b)^2}{a^2 - b^2} < \dfrac{a^2 + b^2}{(a - b)^2}$.

Giải. Vì $a > b > 0$ nên $a + b > 0$; $a - b > 0$.

Vận dụng tính chất cơ bản của phân thức ta có

$$\frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{(a - b)(a - b)} = \frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2} < \frac{a^2 + b^2}{(a - b)^2}.$$

(vì $0 < a^2 - b^2 < a^2 + b^2$).

Ví dụ 4. Cho phân thức $P = \dfrac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2}$

Rút gọn rồi chứng tỏ rằng phân thức P luôn có giá trị không âm với mọi giá trị của x.

Giải. $P = \dfrac{x^3(x - 1) - (x - 1)}{x^2(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + x + 1)} = \dfrac{(x - 1)(x^3 - 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)}$

$= \dfrac{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 2} \geq 0$, với mọi x.

Ví dụ 5. Cho phân thức $Q = \dfrac{x^7 + x^2 + 1}{x^8 + x + 1}$.

Chứng minh rằng phân thức Q là phân thức chưa tối giản.

Giải

* Ta có $x^7 + x^2 + 1 = x^7 - x + x^2 + x + 1 = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$$= x(x^3 + 1)(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^4 + x)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1).$$

* Ta có $Q = x^8 + x + 1 = x^8 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$$= x^2(x^3 + 1)(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^5 + x^2)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1).$$

Tử và mẫu có nhân tử chung là đa thức $x^2 + x + 1$ khác đa thức ± 1 do đó phân thức Q chưa tối giản.

Ví dụ 6. Cho $a > b > 0$ và $a^2 + 3b^2 = 4ab$. Tính giá trị của phân thức $A = \dfrac{a + 11b}{2a + b}$.

Giải. Từ điều kiện $a^2 + 3b^2 = 4ab$ suy ra $a^2 + 3b^2 - 4ab = 0$ hay $(a - b)(a - 3b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \text{ (loại)} \\ a = 3b. \end{array}\right.$$

Thay $a = 3b$ vào phân thức A ta được

$$A = \frac{a + 11b}{2a + b} = \frac{3b + 11b}{6b + b} = \frac{14b}{7b} = 2.$$

C. BÀI TẬP

• Hai phân thức bằng nhau. Tính chất cơ bản

2.1. Tìm đa thức M trong các trường hợp sau :

a) $\dfrac{x^3 + 27}{x^2 - 3x + 9} = \dfrac{x + 3}{M}$; b) $\dfrac{M}{x + 4} = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{16 - x^2}$;

c) $\dfrac{x - 2y}{M} = \dfrac{3x^2 - 7xy + 2y^2}{3x^2 + 5xy - 2y^2}$.

2.2. Hai phân thức sau có bằng nhau không ? Vì sao ?

$$\frac{a^2 - a + 1}{a - 2} \text{ và } \frac{a^2 + 3a - 1}{a + 2}.$$

2.3. Cho $ad = bc$ trong đó $cd \neq 0$ và $c^2 \neq 2d^2$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2 - 2b^2}{c^2 - 2d^2} = \dfrac{ab}{cd}$.

2.4. Chứng minh rằng

$$\frac{(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)}{x^{16}+x^8+1}=\frac{1}{x^2-x+1}.$$

2.5. Tìm các số tự nhiên a và b sao cho (a, b) = 1 và $\frac{5a+7b}{6a+5b}=\frac{29}{28}$.

2.6. Viết các đa thức sau dưới dạng một phân thức đại số với tử và mẫu là những đa thức có hai hạng tử :

a) $A = x^{35} + x^{34} + x^{33} + \ldots + x + 1$;

b) $B = (x-1)(x^2+1)(x^4+1)\ldots(x^{64}+1)$.

2.7. Cho $a > b > 0$, chứng minh rằng : $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

• Rút gọn phân thức

2.8. Rút gọn các phân thức :

a) $\frac{2x-6}{x^2-x-6}$; b) $\frac{6x^2-x-2}{4x^2-1}$.

2.9. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^3+2x^2+3x+6}=\frac{x-1}{x+2}$; b) $\frac{x^3-25x}{x^4+125x}=\frac{x-5}{x^2-5x+25}$.

2.10. Rút gọn các phân thức :

a) $A=\frac{x|x-3|}{5x^2-45}$ với $x \neq \pm 3$; b) $B=\frac{|x^3-3x^2+3x-1|}{x^3-2x^2+x}$ với $x \neq 1, x \neq 0$.

2.11. Cho phân thức $C=\frac{8-12x+6x^2-x^3}{x^3-2x^2+x-2}$ với $x \neq 2$.

Chứng minh rằng C không dương.

2.12. Rút gọn các phân thức sau :

a) $P=\frac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a^2+b^2-c^2+2ab}$; b) $Q=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}$.

2.13. Cho phân thức $A=\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$.

Chứng minh rằng giá trị của A luôn luôn dương với mọi giá trị của x và a.

2.14. Cho phân thức $B = \dfrac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 2}{x^2y^4 + y^4 + 2x^2 + 2}$

a) Chứng minh rằng $B > 0$ với mọi x, y ;

b) Tìm các giá trị của biến để B đạt giá trị lớn nhất.

2.15. Cho phân thức $C = \dfrac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}$ với $x \neq -2$, $x \neq 1$ và $x \neq 4$.

Chứng minh rằng khi $x = -1002$ thì $C > 1$.

2.16. Kí hiệu $n! = 1.2.3 \ldots n$. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\dfrac{n!}{n! + (n+1)!}$; b) $\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)! - (n+2)!}$.

2.17. Tính giá trị của phân thức :

a) $A = \dfrac{x^2 - 25y^2}{3x + 15y}$ với $x \neq -5y$ và $x - 5y = 99$;

b) $B = \dfrac{3x - 9y}{2x^2 - 18y^2}$ với $x \neq \pm 3y$ và $x + 3y = \dfrac{1}{4}$.

2.18. Cho $P = \dfrac{3x^2 + 15x - 6}{9x^2 - 1}$ với $x \neq \pm\dfrac{1}{3}$.

Tính giá trị của P khi $10x^2 + 5x - 3 = 0$.

2.19. Cho $a > b > 0$ và $a^2 - 6b^2 = ab$. Tính giá trị của phân thức $A = \dfrac{2ab}{a^2 - 7b^2}$.

2.20. Cho $abc \neq 0$ và $a + b = c$, tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{4a^2b^2c^2}.$$

2.21. Cho a, b, c, d thoả mãn các điều kiện $a + b + c + d = 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Hãy rút gọn phân thức

$$P = \frac{(ab - cd)(bc - ad)(ca - bd)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}.$$

2.22. Rút gọn các phân thức :

a) $\dfrac{x^{80} + x^{40} + 1}{x^{20} + x^{10} + 1}$; b) $\dfrac{x^{80} + x^{76} + x^{72} + \ldots + x^8 + x^4 + 1}{x^{40} + x^{38} + x^{36} + \ldots + x^4 + x^2 + 1}$.

2.23. Rút gọn các phân thức :

a) $\dfrac{a^{2n} - b^{2n}}{(a-b)(a^n + b^n)}$; b) $\dfrac{x^{3n} - y^{3n}}{x^n - y^n}$;

c) $\dfrac{x^{4m} - y^{4n}}{x^{3m} + x^{2m}y^n + x^m y^{2n} + y^{3n}}$.

2.24. Rút gọn các phân thức :

a) $A = \dfrac{(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$;

b) $B = \dfrac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$.

2.25. Cho $ax + by + cz = 0$; $a + b + c = 0{,}01$ và $ax^2 + by^2 + cz^2 \neq 0$.

Tính giá trị của phân thức $P = \dfrac{ax^2 + by^2 + cz^2}{ab(x-y)^2 + bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2}$.

2.26. Cho $2xy - 2x - 2y + 1 = 0$ trong đó $y \neq 1$, $x + y \neq 1$.

Hãy rút gọn phân thức $P = \dfrac{x^2 + (x-1)^2}{y^2 + (y-1)^2}$.

2.27. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì các phân số sau đều tối giản :

a) $\dfrac{4n+1}{5n+1}$; b) $\dfrac{12n+1}{30n+1}$.

Chuyên đề 2

PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

2. Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

3. Phép cộng các phân thức có các tính chất giao hoán, kết hợp.

4. Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right).$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 7. Thực hiện phép tính $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2-3}{x^3-x}$.

Giải. $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2-3}{x^3-x}$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{x^2-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x-(x-1)+x^2-3}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+x-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x(x+1)}.$$

Ví dụ 8. Cho biểu thức $P = \frac{2}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} - \frac{x^2+6x+2}{1-x^3}$.

a) Rút gọn P ; b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên.

Giải

a) ĐKXĐ : $x \neq 1$.

$$P = \frac{2}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{x^2+6x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{2(x^2+x+1)+(2x-1)(x-1)+x^2+6x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2x+2+2x^2-2x-x+1+x^2+6x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{5x^2+5x+5}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{5(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{5}{x-1}.$$

b) P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{5}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow (x-1) \in Ư(5) = \{\pm 1 ; \pm 5\}$

$x-1$	1	-1	5	-5
x	2	0	6	-4

Vậy khi $x \in \{-4 ; 0 ; 2 ; 6\}$ thì P có giá trị nguyên.

Ví dụ 9. Cho $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng biểu thức

$$A = \frac{125n^3}{6} + \frac{25n^2}{2} + \frac{5n}{3} \text{ có giá trị nguyên.}$$

Giải. Ta có $A = \dfrac{125n^3 + 75n^2 + 10n}{6} = \dfrac{5n(25n^2 + 15n + 2)}{6}$

$$= \frac{5n(5n+1)(5n+2)}{6}.$$

Ta thấy tích $5n(5n + 1)(5n + 2)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6. Do đó $A = \dfrac{6.k}{6} = k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 10. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-z)(y-z)} + \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$;

b) $B = \dfrac{yz}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{zx}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}$.

Giải

a) $A = \dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$

$$= \frac{(z-y) + (x-z) + (y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0.$$

b) $B = \dfrac{yz}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{zx}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}$

$$= \frac{yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{yz(z-y) + zx(x-z) - xy[(z-y) + (x-z)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{y(z-y)(z-x) + x(x-z)(z-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(z-y)(z-x)(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1.$$

Lưu ý. Nên ghi nhớ kết quả các bài toán ở ví dụ này để áp dụng vào giải một số bài toán khác được nhanh chóng.

Ví dụ 11. Cho a, b, c và x, y, z là các số khác 0 thoả mãn điều kiện $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$ và $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = k$. Tính tổng $S = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$.

Giải

• Từ điều kiện $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, suy ra $\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0$ hay $ayz+bxz+cxy=0$.

• Từ điều kiện $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=k$, suy ra $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)=k^2$

hay $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{cxy+ayz+bzx}{abc}=k^2$.

Nhưng $cxy+ayz+bzx=0$ nên $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k^2$.

Ví dụ 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{10x^2-6x+2}{x^2+1}$.

Giải

Ta có $P=\frac{10x^2-6x+2}{x^2+1}=\frac{9x^2-6x+1+(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{(3x-1)^2}{x^2+1}+1$.

Ta có $\frac{(3x-1)^2}{x^2+1}\geq 0$ (dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{3}$) nên $P\geq 1$.

Do đó min $P=1$ khi $x=\frac{1}{3}$.

C. BÀI TẬP

Cộng, trừ các phân thức không có điều kiện ràng buộc giữa các biến

2.28. Làm các phép tính :

a) $\frac{x}{xy-y^2}-\frac{y}{x^2-xy}$; b) $\frac{x-y}{2x+2y}+\frac{x^2+3y^2}{2y^2-2x^2}$.

2.29. Tính bằng cách hợp lí :

a) $\frac{x^2-xy}{x^2-2xy+y^2}+\frac{y^2+xy}{y^2+2xy+y^2}+\frac{2xy}{y^2-x^2}$;

b) $\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1^2}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

2.30. Cho $n\in\mathbb{Z}$, chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị nguyên :

a) $A=\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$; b) $B=\frac{n^4}{12}-\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{12}+\frac{n}{6}$.

2.31. Tính tổng

$$P = \frac{1}{(y-z)(x^2+xz-y^2-yz)} + \frac{1}{(z-x)(y^2+xy-z^2-xz)} + \frac{1}{(x-y)(z^2+yz-x^2-xy)}.$$

2.32. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để các biểu thức sau có giá trị nguyên :

a) $A = \dfrac{2x^2-5x+3}{2x-5}$; b) $B = \dfrac{3x^3+9x^2-x-5}{x+3}$.

2.33. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2(2x+1)}{x^2+2}$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \dfrac{2x^2-4x+17}{x^2-2x+4}$

2.34. Tìm m và n sao cho $\dfrac{x^2+5}{x^3-3x+2} = \dfrac{m}{x+2} + \dfrac{n}{(x-1)^2}$

2.35. Tính tổng :

a) $\dfrac{y+z}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{z+x}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{x+y}{(z-x)(z-y)}$;

b) $\dfrac{1}{x(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{y(y-z)(y-x)} + \dfrac{1}{z(z-x)(z-y)}$

2.36. Tính các tổng sau :

a) $A = \dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$;

b) $B = \dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$;

c) $C = \dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$.

Cộng, trừ các phân thức có điều kiện ràng buộc giữa các biến

2.37. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{5a-b}{3a+7} + \dfrac{3b-2a}{2b-7}$ với $a \neq -\dfrac{7}{3}$; $b \neq \dfrac{7}{2}$ và $2a - b = 7$.

b) $B = \dfrac{8a+5b}{5a-1} + \dfrac{3a+b}{4b+1}$ với $a \neq \dfrac{1}{5}$; $b \neq -\dfrac{1}{4}$ và $3a + 5b = -1$.

2.38. Tính tổng :

a) $P = \dfrac{x}{-xy + x + 1} - \dfrac{y}{yz - y + 1} + \dfrac{z}{xz + z - 1}$

với $xyz = 1$ và các mẫu thức đều khác 0.

b) $Q = \dfrac{x}{xy + x + 2} + \dfrac{y}{yz + y + 1} + \dfrac{2z}{xz + 2z + 2}$

với $xyz = 2$ và các mẫu thức đều khác 0.

2.39. Cho x, y, z đôi một khác nhau và khác 0 thoả mãn điều kiệu $xy + yz + zx = 0$.

Tìm giá trị của tổng $A = \dfrac{x^2}{x^2 + 2yz} + \dfrac{y^2}{y^2 + 2zx} + \dfrac{z^2}{z^2 + 2xy}$

2.40. Cho x, y, z khác ± 1 và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2} + \frac{z}{1 - z^2} = \frac{4xyz}{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)}.$$

2.41. Cho $xyz \neq 0$ và $x + y + z = 0$. Tính

$$A = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}.$$

2.42. Cho ba số a, b, c $\neq 0$ và $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}.$$

2.43. Cho x, y, z $\neq 0$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức :

a) $P = \dfrac{xy}{z^2} + \dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2}$; b) $Q = \dfrac{x + y}{z} + \dfrac{y + z}{x} + \dfrac{z + x}{y}$.

2.44. Cho $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh rằng : $\dfrac{b}{a^3 - 1} - \dfrac{a}{b^3 - 1} = \dfrac{2(a - b)}{a^2b^2 + 3}$.

2.45. Cho $x = by + cz$; $y = ax + cz$; $z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{1}{a + 1} + \dfrac{1}{b + 1} + \dfrac{1}{c + 1}$.

2.46. Cho $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a + b + c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3}.$$

2.47. Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k$ và $a+b+c=abc$. Tìm giá trị của k để $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=k$.

2.48. Cho các số a, b, c khác 0 thoả mãn điều kiện

$$\frac{a+b-c}{ab}-\frac{b+c-a}{bc}-\frac{c+a-b}{ca}=0.$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có một số bằng tổng của hai số kia.

2.49. Cho $a, b, c \neq 0$ và $x, y, z \neq 0$ thoả mãn điều kiện $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ và $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=10$.

Tính tổng $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

2.50. Cho : $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$ và $x+y+z\neq 0$.

Chứng minh rằng : $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$.

Chuyên đề 3

PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau.
2. Phép nhân các phân thức có các tính chất : giao hoán, kết hợp, phân phối đối với phép cộng.
3. Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}\neq 0$ ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.\frac{D}{C} \text{ với } \frac{C}{D}\neq 0.$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 13. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{a-3}{a^4+2a^2+1}.\frac{a^6+3a^4+3a^2+1}{a^3+a-3a^2-3}$; b) $\frac{a+b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}:\frac{a^2-ab-2b^2}{a^4-b^4}$.

Giải

a) $\dfrac{a-3}{a^4+2a^2+1}.\dfrac{a^6+3a^4+3a^2+1}{a^3+a-3a^2-3}=\dfrac{a-3}{(a^2+1)^2}.\dfrac{(a^2+1)^3}{(a^2+1)(a-3)}=1.$

b) $\dfrac{a+b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}:\dfrac{a^2-ab-2b^2}{a^4-b^4}$

$=\dfrac{a+b}{(a-b)(a^2+b^2)}.\dfrac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-2b)}=\dfrac{a+b}{a-2b}.$

Ví dụ 14. Tính bằng cách hợp lí :

$$A=\frac{5x+1}{2x-3}.\frac{x+2}{25x^2-1}-\frac{8-3x}{25x^2-1}.\frac{5x+1}{2x-3}$$

Giải. $A=\dfrac{5x+1}{2x-3}.\left(\dfrac{x+2}{25x^2-1}-\dfrac{8-3x}{25x^2-1}\right)=\dfrac{5x+1}{2x-3}.\dfrac{4x-6}{25x^2-1}$

$=\dfrac{(5x+1).2(2x-3)}{(2x-3)(5x-1)(5x+1)}=\dfrac{2}{5x-1}.$

Ví dụ 15. Làm tính nhân

$$B=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(m-n)+3(m-n)^2}.\frac{(x+y)^2-9(m-n)^2}{(x+y)^2-3(x+y)(m-n)}$$

Giải. Đặt $x+y=a$; $m-n=b$, ta được

$$B=\frac{a^2}{ab+3b^2}.\frac{a^2-9b^2}{a^2-3ab}=\frac{a^2.(a+3b)(a-3b)}{b(a+3b).a(a-3b)}=\frac{a}{b}=\frac{x+y}{m-n}.$$

Nhận xét. Việc đổi biến $x+y=a$; $m-n=b$ làm cho biểu thức B trở nên đơn giản, dễ tính toán.

Ví dụ 16. Cho $a+b+c\neq 0$ thoả mãn các điều kiện $abc=4$ và $a^3+b^3+c^3=12$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a+b}{ab}.\dfrac{b+c}{bc}.\dfrac{c+a}{ca}.$

Giải. Vì $a^3+b^3+c^3=12=3.4=3abc$ nên $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

Suy ra $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$ (Bài 1.116)

vì $a+b+c\neq 0$ nên $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftrightarrow a=b=c.$

Do đó $P=\dfrac{2a}{ab}.\dfrac{2b}{bc}.\dfrac{2c}{ca}=\dfrac{8abc}{(abc)^2}=\dfrac{8}{abc}=\dfrac{8}{4}=2.$

C. BÀI TẬP

Nhân, chia các phân thức đại số không có điều kiện ràng buộc giữa các biến

2.51. Thực hiện các phép nhân :

a) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} \cdot \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 6x + 5}$; b) $\dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 2x + 1} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 4x - 21}$.

2.52. Thực hiện các phép chia :

a) $\dfrac{x^3 + y^3}{x^2y^2 + 2xy^3 + y^4} : \dfrac{x^2 - xy}{x^2 - y^2}$; b) $\dfrac{3x^2 - 3xy + 3y^2}{4x^3 - 4xy^2} : \dfrac{9x^3 + 9y^3}{2x^2 - 2xy}$.

2.53. Tìm phân thức X biết :

a) $X : \dfrac{ax^3 - ay^3}{bx + by} = \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{ax^2 - ay^2}$; b) $X.\dfrac{a^2 - x^2 - y^2 - 2xy}{a^2 - x^2 - ay - xy} = \dfrac{a + x + y}{a + x - y}$.

2.54. Tính bằng cách hợp lí nhất

$$\frac{(x - y)^2}{2x - y} \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^2} - \frac{x^2}{2x - y} \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^2};$$

2.55. Thực hiện các phép tính :

a) $\dfrac{3x + 1}{x - 5} : \dfrac{2x - 3}{5 - x} : \dfrac{6x + 2}{2x - 3}$; b) $\dfrac{3}{x + 7y} : \dfrac{3x + 4y}{3x - 4y} : \dfrac{9x - 12y}{x + 7y}$;

c) $\dfrac{ax + ay + bx + by}{2ax + 2bx + ay + by} : \dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2} : (x - y)$.

2.56. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$; $a, b \neq 0$; $a \neq 3b$; $a \neq -5b$.

a) Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A là một số nguyên lẻ

$$A = \frac{b(2a^2 + 10ab + a + 5b)}{a - 3b} : \frac{a^2b + 5ab^2}{a^2 - 3ab};$$

b) Chứng minh rằng giá trị của biểu thức B là một số nguyên chẵn

$$B = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{a - 3b} : \frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{3ab - a^2}.$$

2.57. Rút gọn biểu thức :

a) $A = \dfrac{(x + 1)(x + 2) - 2[(x + 1)^2 - x]}{(x + 2)[(x + 1)^2 - x]} : \dfrac{(x + 1)^4 + 2 - (x + 1)[(x + 1)^3 + 1]}{(x + 1)^3 + 1}$;

b) $B = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)} \cdot \dfrac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$.

2.58. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\dfrac{|x-3|}{x^2-9}.(x^2+6x+9) = -(x+3)$ với $x < -3$;

b) $\dfrac{x^3+y^3-xy(x+y)}{x-y}.\left(\dfrac{x-y}{x^2-y^2}\right)^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$.

2.59. Cho $x, y \neq 0$, $x \neq \pm y$. Tìm điều kiện của x và y để các biểu thức sau có giá trị dương :

a) $P = \dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2}.\left(\dfrac{x^3+y^3}{x-y} : xy\right)$;

b) $Q = \left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}.\dfrac{x-y}{x+y}\right).\dfrac{x^2+y^2}{x^3-y^3-3xy(x-y)}$.

2.60. Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn có giá trị là một hằng số :

a) $A = \dfrac{x^2+(2+a)x+2a}{x^2+(2-a)x-2a} : \dfrac{2x^2-2a^2}{x^2-2ax+a^2}$ với $x \neq \pm a$; $x \neq -2$; $x \neq 5$.

b) $B = \left[\dfrac{x^2+(a-b)x-ab}{x^2-(a-b)x-ab}.\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(a+b)x+ab}\right] : \left[\dfrac{x^2-(b-1)x-b}{x^2+(b+1)x+b}.\dfrac{x^2-(b+1)x+b}{x^2-(1-b)x-b}\right]$

với $x \neq \pm a$; $x \neq \pm b$ và $x \neq \pm 1$.

Nhân, chia các phân thức đại số có điều kiện ràng buộc giữa các biến

2.61. Cho $x+y+z \neq 0$ và $x = y+z$. Chứng minh rằng

$$\frac{(xy+yz+zx)^2-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{x^2+y^2+z^2} : \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2} = yz.$$

2.62. Cho $xy+yz+zx = 1$, tính giá trị của tích

$$P = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+1}.\frac{y^2+2yz+z^2}{2(y^2+1)}.\frac{z^2+2zx+x^2}{3(z^2+1)}.$$

2.63. Cho $x+y+z = 1$ và $x \neq -y$; $y \neq -z$; $z \neq -x$. Tính giá trị của tích

$$Q = \frac{xy+z}{(x+y)^2}.\frac{yz+x}{(y+z)^2}.\frac{zx+y}{(z+x)^2}.$$

2.64. Cho $abc \neq 0$ và $abc \neq \pm 1$ thoả mãn các điều kiện sau :

$$\frac{a-b}{ab} = c-a\ ;\ \frac{b-c}{bc} = a-b\ ;\ \frac{c-a}{ca} = b-c.$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c phải có hai số bằng nhau.

2.65. Cho xyz = 4 và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, tính giá trị của tích A.B.C, biết :

$$A=\frac{x^2(y^2+z^2)-y^2z^2}{x^2y^2z^2};\ B=\frac{y^2(z^2+x^2)-z^2x^2}{x^2y^2z^2};\ C=\frac{z^2(x^2+y^2)-x^2y^2}{x^2y^2z^2}.$$

Chuyên đề 4
BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.
2. Khi làm tính trên các phân thức ta chỉ việc thực hiện theo các quy tắc của các phép toán, không cần quan tâm đến giá trị của biến. Nhưng khi giải những bài toán liên quan đến giá trị của phân thức ta phải tìm điều kiện để giá trị của phân thức được xác định, đó là điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 17. Rút gọn biểu thức : $\frac{2}{y}-\left(\frac{x^2}{x^2-xy}+\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{y^2}{xy-y^2}\right).\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$.

Giải. $\frac{2}{y}-\left(\frac{x^2}{x^2-xy}+\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{y^2}{xy-y^2}\right).\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$

$$=\frac{2}{y}-\left[\frac{x^2}{x(x-y)}+\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{y^2}{y(x-y)}\right].\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$$

$$=\frac{2}{y}-\frac{x^2y+(x^2-y^2)(x-y)+xy^2}{xy(x-y)}.\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$$

$$=\frac{2}{y}-\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}.\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{2}{y}-\frac{x+y}{xy}=\frac{2x-x-y}{xy}=\frac{x-y}{xy}.$$

Ví dụ 18. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức A với $x=-\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$.

$$A=\left(\frac{4}{x-y}-\frac{x-y}{y^2}\right).\frac{y^2-xy}{x-3y}+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2-xy}{x-2y}\right):\frac{xy+y^2}{2x-4y}.$$

Giải. ĐKXĐ : $y \neq 0$; $x \neq \pm y$; $x \neq 2y$; $x \neq 3y$.

$$A = \frac{4y^2 - (x-y)^2}{y^2(x-y)} \cdot \frac{y(y-x)}{x-3y} + \frac{x(x-2y) - 2(x^2 - xy)}{2(x-2y)} : \frac{y(x+y)}{2(x-2y)}$$

$$= \frac{(2y+x-y)(2y-x+y)}{y^2(x-y)} \cdot \frac{y(y-x)}{x-3y} + \frac{x^2 - 2xy - 2x^2 + 2xy}{2(x-2y)} \cdot \frac{2(x-2y)}{y(x+y)}$$

$$= \frac{(x+y)(3y-x).y(x-y)}{y^2(x-y).(3y-x)} + \frac{-x^2.2(x-2y)}{2(x-2y).y(x+y)}$$

$$= \frac{x+y}{y} - \frac{x^2}{y(x+y)} = \frac{(x+y)^2 - x^2}{y(x+y)} = \frac{2xy + y^2}{y(x+y)} = \frac{y(2x+y)}{y(x+y)} = \frac{2x+y}{x+y}.$$

Vì $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ thoả mãn ĐKXĐ, khi đó giá trị của biểu thức A là

$$A = \frac{2.\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{-1 + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 4.$$

Ví dụ 19. Cho biểu thức : $B = \frac{1}{x+1} - \frac{x^3 - x}{x^2+1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1}\right)$

a) Rút gọn B ;

b) Với giá trị nào của x thì B = 1 ?

Giải. ĐKXĐ : $x \neq \pm 1$.

a) $$B = \frac{1}{x+1} - \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{-2x}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + 1 + 2x}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

b) $B = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x - x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy khi x = 0 thì B = 1.

Ví dụ 20. Cho biểu thức $P = \left[(x^3 - 8) : \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} - \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 4} . \dfrac{x^3 - 8}{x + 2}\right] : (x - 1)$

a) Rút gọn P ;

b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên.

Giải. a) ĐKXĐ : $x \neq -2$; $x \neq 1$.

$$P = \left[\frac{(x-2)(x^2+2x+4).(x+2)}{x^2+2x+4} - \frac{(x-2)(x+2)}{x^2+2x+4} . \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x+2}\right] . \frac{1}{x-1}$$

$$= [(x^2 - 4) - (x - 2)^2] . \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - 4 - x^2 + 4x - 4}{x - 1} = \frac{4x - 8}{x - 1}.$$

b) $P = \dfrac{4x - 4 - 4}{x - 1} = \dfrac{4(x - 1)}{x - 1} - \dfrac{4}{x - 1} = 4 - \dfrac{4}{x - 1}$.

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{4}{x - 1}$ có giá trị nguyên

$\Leftrightarrow x - 1 \in Ư(4) = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4\}$

$x - 1$	-1	1	2	-2	4	-4
x	0	2	3	-1	5	-3

Vậy khi $x \in \{-3 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3 ; 5\}$ thì P có giá trị nguyên.

Ví dụ 21. Cho biểu thức $Q = \left[\dfrac{1 - (x^2 + y^2)}{2xy} + 1\right]\left(1 + \dfrac{1}{x - y}\right) : \left(1 - \dfrac{1}{x - y}\right)$

a) Rút gọn Q ;

b) Chứng minh rằng khi x và y trái dấu thoả mãn điều kiện $x \neq y + 1$ thì giá trị của biểu thức Q luôn luôn không âm.

Giải

a) $Q = \dfrac{1 - x^2 - y^2 + 2xy}{2xy} . \dfrac{x - y + 1}{x - y} : \dfrac{x - y - 1}{x - y} = \dfrac{1 - (x - y)^2}{2xy} . \dfrac{x - y + 1}{x - y} . \dfrac{x - y}{x - y - 1}$

$$= \frac{(1 - x + y)(1 + x - y)}{2xy} . \frac{x - y + 1}{x - y - 1} = -\frac{(x - y + 1)^2}{2xy}.$$

b) Vì x và y là hai số trái dấu nên các giá trị các mẫu thức 2xy, x – y đều khác 0.

Mặt khác do $x \neq y + 1$ nên giá trị mẫu thức $x - y - 1 \neq 0$.

Ta có $-(x - y + 1)^2 \leq 0$; $2xy < 0$ nên $Q \geq 0$.

C. BÀI TẬP

2.66. Cho biểu thức

$$A = \frac{1}{(x-y)^3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right) + \frac{3}{(x-y)^4}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{6}{(x-y)^5}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right).$$

Chứng minh rằng A là lập phương của một biểu thức hữu tỉ.

2.67. Chứng minh rằng với những giá trị thích hợp của biến thì các biểu thức sau có giá trị là hằng số :

a) $A = \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right) : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$;

b) $B = \frac{(x+y)^2}{x} . \left[\frac{x}{(x+y)^2} - \frac{x}{x^2-y^2}\right] - \frac{5x-3y}{y-x}$.

2.68. Chứng minh rằng với những giá trị thích hợp của biến thì các biểu thức sau có giá trị bằng nhau :

$$M = \frac{\left(\frac{x}{y}+1\right)^2}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} . \frac{1 - \frac{x^3}{y^3}}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1} : \frac{\frac{x^3}{y^3} + 1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1};$$

$$N = \left(\frac{x}{x^2-36} - \frac{x+6}{x^2-6x}\right) : \frac{2x+6}{x^2-6x} - \frac{x}{x+6}.$$

2.69. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x+y} + \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right) : \left(x + y + \frac{y^2}{x-y}\right) = \frac{2x}{x+y}$;

b) $\left[\frac{x+2}{x+1} - \frac{4(y+1)}{y+2}\right] : \left[\frac{x^2(y+1)}{x+1} - \frac{y^2(x+2)}{y+2}\right] = \frac{1}{y-x}$.

2.70. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{y^2 - yz + z^2}{x} + \frac{x^2}{y+z} - \frac{3yz}{y+z}\right).\frac{2xy + 2xz}{x+y+z} + (x+y+z)^2,$$

trong đó $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$; $y + z \neq 0$ và $x + y + z \neq 0$.

Chứng minh rằng $A \vdots 3$.

2.71. Cho biểu thức $B = \dfrac{x^2 - yz}{1 + \dfrac{y+z}{x}} + \dfrac{y^2 - zx}{1 + \dfrac{z+x}{y}} + \dfrac{z^2 - xy}{1 + \dfrac{x+y}{z}}$

trong đó $xyz \neq 0$ và $x + y + z \neq 0$.

Chứng minh rằng biểu thức B có giá trị không âm.

2.72. Cho biểu thức

$$M = \left[\frac{1}{1 + 2x - 2y} + 2(x - y) - 1\right] : \left(2x - 2y - \frac{4x^2 - 8xy + 4y^2}{2x - 2y + 1}\right)$$

trong đó $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng giá trị của M là một số chẵn với mọi x, y làm cho M có nghĩa.

2.73. Cho biểu thức

$$N = \left(\frac{x-1}{(x-1)^2 + x} - \frac{2}{x-2}\right) : \left(\frac{(x-1)^4 + 2}{(x-1)^3 - 1} - x + 1\right),$$ trong đó x là số nguyên.

Chứng minh rằng với mọi giá trị thích hợp của x thì giá trị của N luôn là một số nguyên.

2.74. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{x+4}.\left(\dfrac{x^2 + 16}{x} + 8\right) + 9.$

2.75. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \left(\frac{x^3 + 8}{x^3 - 8}.\frac{4x^2 + 8x + 16}{x^2 - 4} - \frac{4x}{x-2}\right) : \frac{-16}{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x}.$$

2.76. Cho biểu thức $A = \left[\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2 - 3x} - \dfrac{2x^2 + 4x - 1}{x^3 + 1} - \dfrac{1}{x+1}\right] : \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 + 6x}$

a) Rút gọn A ;

b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

2.77. Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} - \frac{10}{5x + 10} - \frac{1}{2 - x}\right) : \left(x + 2 + \frac{6 - x^2}{x - 2}\right)$$

a) Rút gọn B ;

b) Tính giá trị của B biết $|x| = \frac{1}{2}$;

c) Tìm x biết $B = -1$.

d) Tìm x để $B > 0$.

e) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

2.78. Cho biểu thức

$$M = \frac{1}{(x-y)^3}.\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}\right) + \frac{2}{(x-y)^4}.\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right) + \frac{2}{(x-y)^5}.\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

a) Rút gọn M ;

b) Tính giá trị của M với $x = \frac{1}{3}$; $y = -1$.

2.79. Cho biểu thức $N = \left(\frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{y}{x-y}\right) : \frac{x^3 - y^3}{x^5 - x^4y - xy^4 + y^5}$

a) Rút gọn N ;

b) Tính giá trị của N, biết $x + y = \frac{1}{40}$; $xy = -\frac{1}{80}$.

2.80. Cho $xyz = 1$, tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

2.81. Cho $x + y + z = a$, tính giá trị của biểu thức

$$Q = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x^2 + y^2 - z^2) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(y^2 + z^2 - x^2) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)(z^2 + x^2 - y^2)$$

2.82. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} - \frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{y^2 + z^2}{y^2z^2} - \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{z^2 + x^2}{z^2x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$,

trong đó $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Chứng minh rằng biểu thức A luôn có giá trị âm với mọi x, y, z khác 0.

2.83. Cho $x = \frac{a}{b+c}$; $y = \frac{b}{c+a}$; $z = \frac{c}{a+b}$.

Tính giá trị của biểu thức $B = xy + yz + zx + 2xyz$.

2.84. Cho $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $y = \dfrac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2}$.

Tính giá trị của biểu thức $C = x + y + xy$.

2.85. Cho $x + y + z = 0$, tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{x - y}{z} + \frac{y - z}{x} + \frac{z - x}{y}\right)\left(\frac{z}{x - y} + \frac{x}{y - z} + \frac{y}{z - x}\right).$$

Chuyên đề nâng cao
RÚT GỌN BIỂU THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ LIÊN TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Thông thường, muốn rút gọn một biểu thức hữu tỉ ta dựa vào quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia phân thức. Nhưng có những biểu thức hữu tỉ ta không thể vận dụng trực tiếp quy tắc các phép toán về phân thức được vì nhiều lí do khác nhau.

Chẳng hạn, không thể quy đồng mẫu thức của hàng trăm phân thức có mẫu thức khác nhau để cộng, trừ chúng. Không thể tìm tích của hàng chục phân thức bằng cách nhân trực tiếp tử với tử, mẫu với mẫu mà không tìm ra quy luật để rút gọn tích.

Gặp những trường hợp như vậy, người ta thường tách mỗi hạng tử thành tổng hay hiệu của các phân thức hoặc tách mỗi nhân tử thành tích của hai hay nhiều phân thức để sau đó *khử liên tiếp*, hoặc nhóm lại thành từng nhóm có thể tính ra kết quả dễ dàng.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 22. Tính tổng

$$S = \frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{1}{(x + 2)(x + 3)} + \ldots + \frac{1}{(x + 99)(x + 100)}.$$

Giải. Trước hết ta chứng minh công thức

$$\frac{1}{(x + k)(x + k + 1)} = \frac{1}{x + k} - \frac{1}{x + k + 1}$$

Ta có $\dfrac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \dfrac{(x+k+1)-(x+k)}{(x+k)(x+k+1)} = \dfrac{1}{x+k} - \dfrac{1}{(x+k+1)}$.

Cho k lần lượt lấy các giá trị từ 0 đến 99 ta được

$$S = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x+99} - \frac{1}{x+100}\right).$$

Vì số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ của nhóm sau nên sau khi *khử liên tiếp* ta được : $S = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+100} = \dfrac{x+100-x}{x(x+100)} = \dfrac{100}{x(x+100)}$.

Ví dụ 23. Tính tổng $S = \dfrac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \dfrac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} + \dfrac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}$.

Giải. Ta có : $\dfrac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} = \dfrac{x^2 + xy - xy - yz}{(x+y)(x+z)}$

$$= \frac{x(x+y) - y(x+z)}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y}.$$

Tương tự : $\dfrac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} = \dfrac{y}{y+x} - \dfrac{z}{y+z}$; $\dfrac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)} = \dfrac{z}{z+y} - \dfrac{x}{z+x}$.

Do đó $S = \left(\dfrac{x}{x+z} - \dfrac{y}{x+y}\right) + \left(\dfrac{y}{y+x} - \dfrac{z}{y+z}\right) + \left(\dfrac{z}{z+y} - \dfrac{x}{z+x}\right) = 0.$

Ví dụ 24. Tính tích $P = \left(1 + \dfrac{1}{3}\right).\left(1 + \dfrac{1}{8}\right).\left(1 + \dfrac{1}{15}\right)\ldots\left(1 + \dfrac{1}{n^2 + 2n}\right)$.

Giải. Dạng tổng quát của mỗi thừa số là

$$1 + \frac{1}{k^2 + 2k} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

Cho k các giá trị 1, 2, 3,..., n ta được :

$$P = \frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}\ldots\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2.3.4\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.\frac{2.3.4\ldots(n+1)}{3.4.5\ldots(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{1}.\frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Ví dụ 25. Tính tổng $S = \dfrac{x+1}{x(x-y)(x-z)} + \dfrac{y+1}{y(y-z)(y-x)} + \dfrac{z+1}{z(z-x)(z-y)}$.

Giải. Ta có $\dfrac{x+1}{x(x-y)(x-z)} = \dfrac{x}{x(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{x(x-y)(x-z)}$

$$= \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{x(x-y)(x-z)}$$

Tương tự $\dfrac{y+1}{y(y-z)(y-x)} = \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{1}{y(y-z)(y-x)}$

$$\frac{z+1}{z(z-x)(z-y)} = \frac{1}{(z-x)(z-y)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}$$

Do đó $S = \left[\dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}\right]$

$$+\left[\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-z)(y-x)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}\right]$$

Theo Ví dụ 10 thì tổng thứ nhất bằng 0.

Theo Bài 2.35b thì tổng thứ hai bằng $\dfrac{1}{xyz}$.

Do đó $S = \dfrac{1}{xyz}$.

Nhận xét. Trong ví dụ trên sau khi tách các hạng tử ta không khử liên tiếp được mà phải nhóm các phân thức thành hai nhóm, mỗi nhóm có kết quả đã biết trước.

Ví dụ 26. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2-y^2}{(z+x)(z+y)} + \frac{y^2-z^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{z^2-x^2}{(y+z)(y+x)} = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}$$

Giải. Ta có : $\dfrac{x^2-y^2}{(z+x)(z+y)} = \dfrac{x^2-z^2+z^2-y^2}{(z+x)(z+y)} = \dfrac{x-z}{z+y} + \dfrac{z-y}{z+x}$

Tương tự : $\dfrac{y^2-z^2}{(x+y)(x+z)} = \dfrac{y-x}{x+z} + \dfrac{x-z}{x+y}$; $\dfrac{z^2-x^2}{(y+z)(y+x)} = \dfrac{z-y}{y+x} + \dfrac{y-x}{y+z}$.

Khi đó vế trái

$$VT = \left(\frac{x-z}{x+y} + \frac{z-y}{y+x}\right) + \left(\frac{y-x}{y+z} + \frac{x-z}{z+y}\right) + \left(\frac{z-y}{z+x} + \frac{y-x}{x+z}\right)$$

$$= \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = VP.$$

C. BÀI TẬP

Tính tổng

2.86. Tính tổng : a) $S_1 = \dfrac{1}{x(x+a)} + \dfrac{1}{(x+a)(x+2a)} + \dfrac{1}{(x+2a)(x+3a)} + \ldots$

$$+\frac{1}{(x+9a)(x+10a)} + \frac{1}{a(x+10a)};$$

b) $S_2 = \dfrac{b}{x(x+a)} + \dfrac{b}{(x+a)(x+2a)} + \dfrac{b}{(x+2a)(x+3a)} + ...$

$+ \dfrac{b}{(x+99a)(x+100a)} + \dfrac{b}{a(x+100a)}$.

2.87. Tính tổng : a) $A = \dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{y-z}{yz} + \dfrac{z-x}{zx}$;

b) $B = \dfrac{7}{(1.2)^3} + \dfrac{19}{(2.3)^3} + \dfrac{37}{(3.4)^3} + ... + \dfrac{3n^2+3n+1}{[n(n+1)]^3}$.

2.88. Cho $a_k = \dfrac{2k+1}{[k(k+1)]^2}$ với $k \geq 1$. Chứng minh rằng tổng $S = a_1 + a_2 + ... + a_{99} < 1$.

2.89. Cho $a_k = 1 - \dfrac{4}{(2k+1)^2}$ với $k \geq 1$. Chứng minh rằng tích $P = a_1 . a_2 . ... . a_{50} > \dfrac{1}{3}$.

2.90. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{xy+2x+1}{xy+x+y+1} + \dfrac{yz+2y+1}{yz+y+z+1} + \dfrac{zx+2z+1}{zx+z+x+1}$.

2.91. Tính các tổng sau : a) $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n$;

b) $N = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{3^n}$.

2.92. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, $n < 100$ thì

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n}{(n+2)!} + \frac{n}{(n+3)!} + ... + \frac{n}{100!} < \frac{1}{n!}.$$

2.93. Tính các tổng sau :

a) $P = \dfrac{ax^2+1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{ay^2+1}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{az^2+1}{(z-x)(z-y)}$;

b) $Q = \dfrac{a+x}{x(x-y)(x-z)} + \dfrac{a+y}{y(y-z)(y-x)} + \dfrac{a+z}{z(z-x)(z-y)}$.

2.94. Cho $A = \dfrac{2}{x^2-1} + \dfrac{4}{x^2-4} + \dfrac{6}{x^2-9} + ... + \dfrac{20}{x^2-100}$.

$B = \dfrac{1}{(x-10)(x+1)} + \dfrac{1}{(x-9)(x+2)} + ... + \dfrac{1}{(x-1)(x+10)}$.

Chứng minh rằng $A = 11B$.

2.95. Cho $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ trong đó $abc \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức : $M = x^{1000} + y^{1000} + z^{1000}$.

2.96. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a^2yz - b^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{a^2zx - b^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{a^2xy - b^2}{(z-x)(z-y)}$.

2.97. Cho x, y, z là các số khác nhau đôi một sao cho $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$. Tính các tổng sau :

a) $A = \dfrac{yz-3}{x^2+2yz} + \dfrac{zx-3}{y^2+2zx} + \dfrac{xy-3}{z^2+2xy}$;

b) $B = \dfrac{x^2-2yz}{x^2+2yz} + \dfrac{y^2-2zx}{y^2+2zx} + \dfrac{x^2-2xy}{z^2+2xy}$.

2.98. Chứng minh rằng

$$\frac{x-y}{(z-x)(z-y)} + \frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}.$$

Tính tích

2.99. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng :

a) $P_1 = \left(1 + \dfrac{1}{1.3}\right).\left(1 + \dfrac{1}{2.4}\right).\left(1 + \dfrac{1}{3.5}\right)...\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$ có giá trị nhỏ hơn 2.

b) $P_2 = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right).\left(1 + \dfrac{1}{5}\right).\left(1 + \dfrac{1}{9}\right)...\left(1 + \dfrac{2}{n^2+3n}\right)$ có giá trị nhỏ hơn 3.

2.100. Rút gọn biểu thức với $n \geq 2$

$$A = \frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.\frac{4^3-1}{4^3+1}.\frac{5^3-1}{5^3+1}...\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

2.101. Cho $A = \left(2^4 + \dfrac{1}{4}\right)\left(4^4 + \dfrac{1}{4}\right)\left(6^4 + \dfrac{1}{4}\right)...\left(20^4 + \dfrac{1}{4}\right)$

$B = \left(1^4 + \dfrac{1}{4}\right)\left(3^4 + \dfrac{1}{4}\right)\left(5^4 + \dfrac{1}{4}\right)...\left(19^4 + \dfrac{1}{4}\right)$

Chứng minh rằng thương A : B là một số nguyên.

2.102. Cho $x = \dfrac{a+b}{a-b}$; $y = \dfrac{b+c}{b-c}$; $z = \dfrac{c+a}{c-a}$,

trong đó a, b, c là các số khác nhau đôi một. Tính tích $\dfrac{x+1}{x-1}.\dfrac{y+1}{y-1}.\dfrac{z+1}{z-1}$.

2.103. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a, b, c \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{b}{c} + 1\right)\left(\frac{c}{a} + 1\right).$$

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I TỨ GIÁC

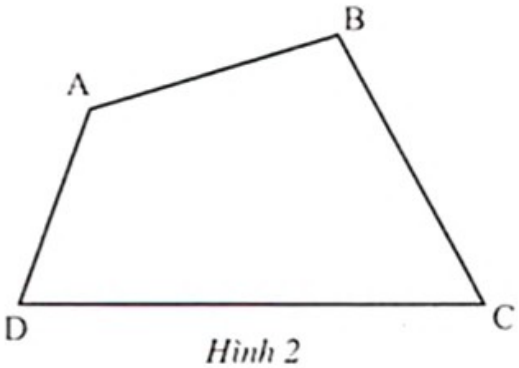
Chuyên đề 1
TỨ GIÁC. HÌNH THANG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa và tính chất của tứ giác lồi

• Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng (h.2).

• Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác (h.2).

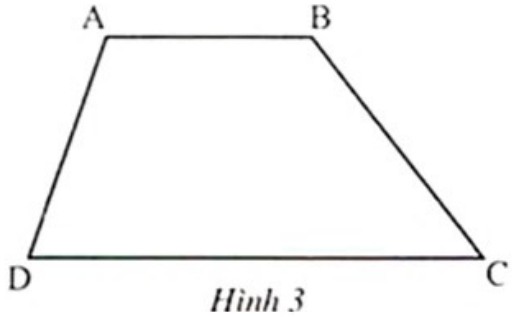


Hình 2

Tổng các góc của một tứ giác bằng 360°.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^o.$$

• *Bổ sung.* Tổng bốn góc ngoài ở bốn đỉnh của một tứ giác bằng 360°



Hình 3

2. Định nghĩa hình thang

Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song. Hai cạnh song song gọi là hai cạnh đáy, hai cạnh còn lại gọi là hai cạnh bên (h.3).

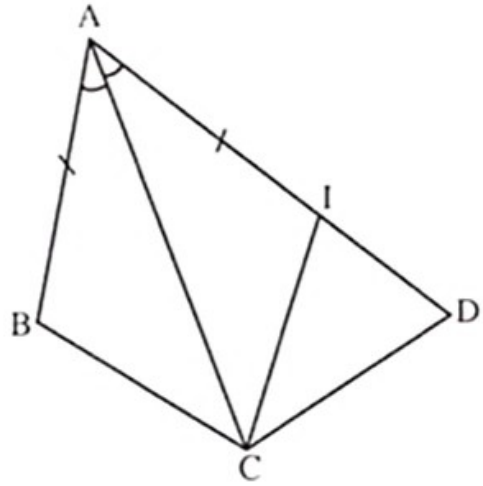
3. Nhận xét

• Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.

• Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

4. Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông

B. MỘT SỐ VÍ DỤ



Hình 4

Ví dụ 1. Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^o$, AB < AD, AC là tia phân giác của $\widehat{BAD}$. Chứng minh rằng BC = DC.

Giải (h.4)

Trên tia AD lấy I sao cho AI = AB thì I thuộc cạnh AD.

$\Delta ABC = \Delta AIC$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = CI$; $\widehat{ABC} = \widehat{AIC}$

Mặt khác : Tứ giác ABCD có $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^o \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} = 180^o$

mà $\widehat{DIC} + \widehat{AIC} = 180^o$ (kề bù)

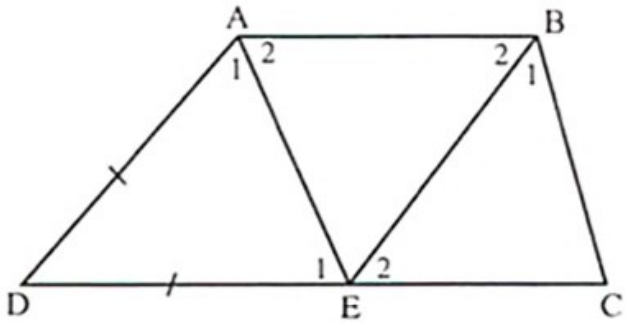
Suy ra : $\widehat{B} + \widehat{DIC} = 180^o \Rightarrow \Delta DIC$ cân tại C $\Rightarrow CI = CD \Rightarrow CB = CD$.

Nhận xét

- Bài toán trên không cần giả thiết AB < AD. Giả thiết này chỉ nhằm mục đích bài toán chỉ có một trường hợp (I thuộc cạnh AD) khi chứng minh.
- Có thể giải bài toán trên bằng cách khác : Gọi H, K là chân đường vuông góc của C xuống đường thẳng AB, AD từ đó suy ra $\Delta CHB = \Delta CKD$, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có CD = AD + BC. Chứng minh rằng đường phân giác của góc A và góc B cắt nhau tại một điểm thuộc CD.

Giải (h.5)



Hình 5

Trên cạnh DC lấy E sao cho DE = DA

$\Rightarrow CE = BC$. Ta có ΔADE cân tại D

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$.

Mà AB // CD $\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{E_1}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow$ AE là phân giác của $\widehat{A}$

Tương tự BE là phân giác của $\widehat{B}$. Vậy phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ cắt nhau tại một điểm thuộc CD.

Nhận xét.

- Kĩ thuật chứng minh bài toán là dự đoán và chứng minh phân giác góc A, B cùng đi qua điểm đặc biệt E.
- Ngoài ra, có thể trình bày theo cách khác : Gọi phân giác góc A cắt CD tại E, rồi chứng minh BE là phân giác góc B.

C. BÀI TẬP

1.1. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{C} - \widehat{D} = 10^o$. Các tia phân giác góc A và góc B cắt nhau tại I. Biết góc $\widehat{AIB} = 65^o$. Tính số đo $\widehat{C}$; $\widehat{D}$

1.2. Cho tứ giác ABCD. Các tia phân giác $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ cắt nhau tạo thành một tứ giác. Chứng minh tứ giác đó có tổng hai góc đối bằng 180°.

1.3. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^o$. Chứng minh rằng tia phân giác góc $\widehat{B}$; $\widehat{D}$ song song với nhau hoặc trùng nhau.

1.4. Chứng minh rằng một tứ giác lồi có bốn đỉnh thuộc các cạnh của tam giác đều cạnh bằng 2020 thì không thể có cả bốn cạnh đều lớn hơn 1010.

1.5. Cho năm điểm trên mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng bao giờ cũng có thể chọn ra được bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

1.6. Cho tứ giác ABCD. Biết rằng $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 1 : 2 : 3 : 4$

a) Chứng minh ABCD là hình thang

b) Gọi giao điểm của AD và BC là E. Tính các góc của tam giác CDE.

1.7. Cho tứ giác ABCD có các góc đối bù nhau. Biết rằng các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, các đường thẳng AB và DC cắt nhau tại F. Tia phân giác của hai góc CED và AFD cắt nhau tại M. Chứng minh FM vuông góc EM.

1.8. Cho ABCD là hình thang (AB // CD). Biết rằng tia phân giác góc C đi qua trung điểm M của AD. Chứng minh rằng :

a) Tam giác BMC vuông.

b) BC = AB + CD.

1.9. Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$; DC = BC = 2.AB.

Tính số đo $\widehat{ABC}$.

1.10. Cho ABCD là hình thang có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$. Tia phân giác góc C đi qua trung điểm M của AD. Gọi E là hình chiếu của M trên BC. Tính số đo $\widehat{AED}$.

1.11. Cho hình thang ABCD (AD// BC) có $\widehat{A} - \widehat{B} = 20^o$; $\widehat{D} = 2.\widehat{C}$. Tính số đo các góc của hình thang.

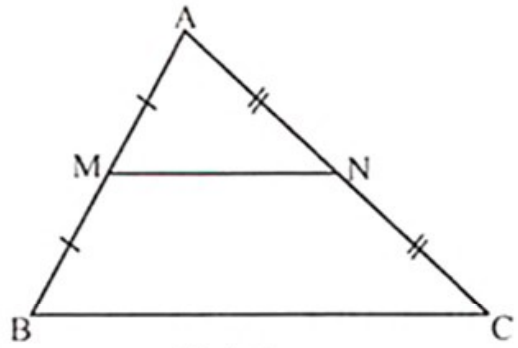
Chuyên đề 2
ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

a) Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác (h.6).

b) Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang (h.7).

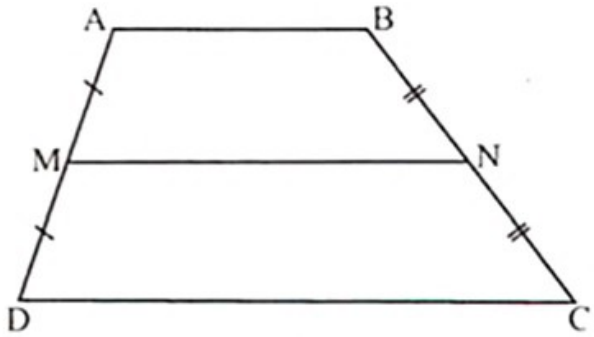


Hình 6

2. Định lí

a) Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

b) Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai cạnh đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.



Hình 7

3. Tính chất

a) Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

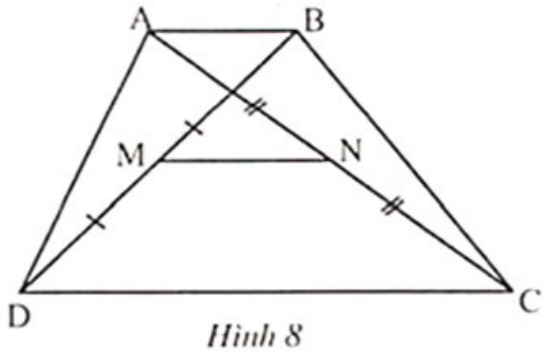
b) Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

4. Bổ sung

Trong hình thang có hai cạnh bên không song song, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo thì song song với hai đáy và bằng một nửa hiệu hai đáy.

Trong hình 8 :

$MN \parallel AB \parallel CD$; $MN = \dfrac{CD - AB}{2}$.



Hình 8

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 80^o$ (AB > AC). Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho BD = AC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính số đo góc BEF.

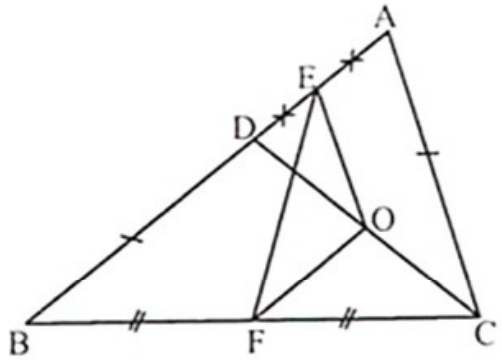
Giải (h.9)

Gọi O là trung điểm của CD.

Suy ra EO là đường trung bình của tam giác ACD ; FO là đường trung bình của tam giác BCD, suy ra EO//AC ; $EO = \frac{1}{2}AC$;

$FO//BD$; $FO = \frac{1}{2}BD$ mà $AC = BD \Rightarrow EO = FO$

$\Rightarrow \Delta OEF$ cân $\Rightarrow \widehat{OEF} = \widehat{OFE}$



Hình 9

$FO//AB \Rightarrow \widehat{OFE} = \widehat{BEF}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{OEF}$

$EO//AC \Rightarrow \widehat{BEO} = \widehat{BAC} = 80^o \Rightarrow \widehat{BEF} = \frac{1}{2}\widehat{BEO} = 40^o$.

Nhận xét

- Khó khăn của bài toán là việc vận dụng giả thiết BD = AC và các trung điểm E, F. Vì vậy việc tạo nên điểm phụ là yếu tố tất yếu để liên kết các giả thiết với nhau.
- Bài toán này có thể giải theo các cách khác :

Cách 2. Gọi I là trung điểm của AB, ta chứng minh ΔEFI cân tại I và $\widehat{BIF} = 80^o$. Từ đó suy ra góc BEF.

Cách 3. Trên tia CE lấy điểm H sao cho E là trung điểm của HC. Ta chứng minh được ΔBDH cân tại D và $\widehat{DBH} = 40^o$. Từ đó suy ra góc BEF.

Cách 4. Trên tia DF lấy điểm K sao cho F là trung điểm của DK. Ta chứng minh được ΔACK cân tại C và $\widehat{BAK} = 40^o$. Từ đó suy ra góc BEF.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi O là trung điểm của AM. Qua O kẻ đường thẳng d cắt các cạnh AB, AC. Vẽ AA_1 ; BB_1 ; CC_1 vuông góc với đường thẳng d. Chứng minh rằng $AA_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1)$.

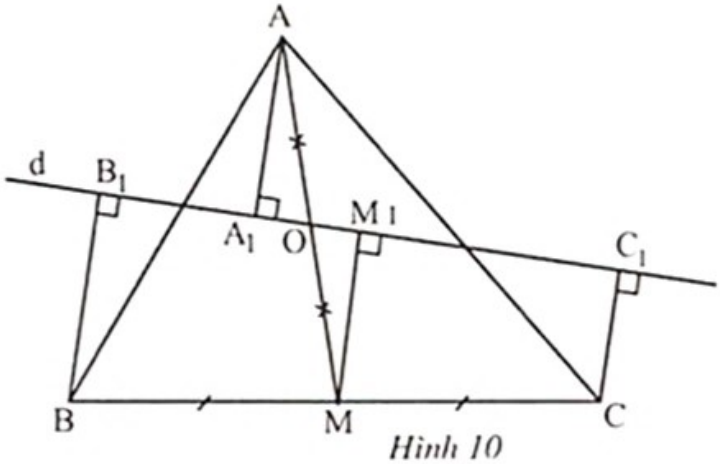
Giải (h.10)

Kẻ MM_1 vuông góc với d, suy ra MM_1 là đường trung bình của hình thang $BCC_1B_1 \Rightarrow MM_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1)$.

Mặt khác $\Delta AA_1O = \Delta MM_1O$ (cạnh huyền – góc nhọn)

suy ra $AA_1 = MM_1$

nên $AA_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1)$.

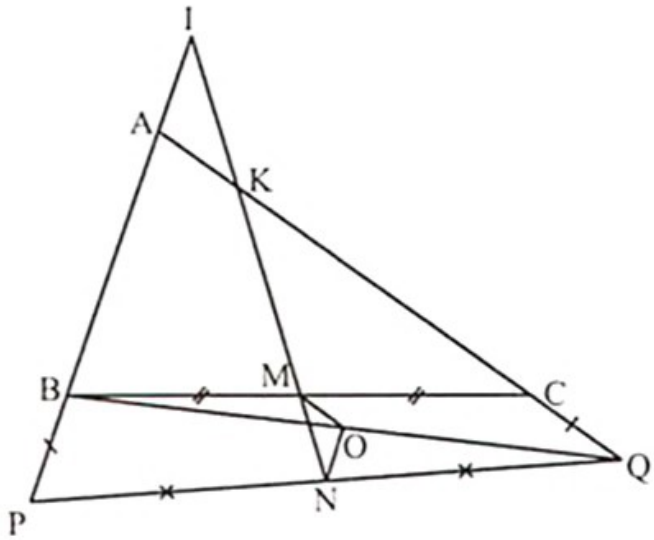


Hình 10

Nhận xét. Dựa vào kĩ thuật trên, có thể chứng minh được bài toán sau :

Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Qua G kẻ đường thẳng d cắt các cạnh AB ; AC. Vẽ AA_1 ; BB_1 ; CC_1 vuông góc với đường thẳng d. Chứng minh rằng : $AA_1 = BB_1 + CC_1$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia BA, CA lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho BP = CQ. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, PQ. Đường thẳng MN cắt các đường thẳng AB và AC thứ tự tại I và K. Chứng minh rằng tam giác AIK cân.



Hình 11

Giải (h.11)

Gọi O là trung điểm của đoạn BQ. Khi đó OM là đường trung bình của tam giác BCQ

$\Rightarrow OM // CQ$ và $OM = \frac{1}{2}CQ$. (1)

NO là đường trung bình của tam giác BPQ $\Rightarrow NO // BP$ và $NO = \frac{1}{2}BP$. (2)

Mà BP = CQ nên từ (1) và (2) suy ra MO = NO $\Rightarrow \Delta NOM$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{ONM}$ (3)

Từ (1) ta có $OM//AQ \Rightarrow \widehat{NMO} = \widehat{NKQ} \Rightarrow \widehat{NMO} = \widehat{AKI}$. (4)

Từ (2) ta có $ON//AP \Rightarrow \widehat{MNO} = \widehat{AIK}$. (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $\widehat{AKI} = \widehat{AIK}$. Vậy tam giác AIK cân tại A.

Nhận xét. Dễ nhận thấy từ kết quả ta có MN song song với phân giác của góc A. Từ đó ta thay đổi kết luận được bài khó hơn : Cho P và Q thay đổi. Chứng minh rằng MN luôn song song với một đường thẳng cố định.

C. BÀI TẬP

1.12. Cho tứ giác ABCD có AC và BD vuông góc với nhau. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Kẻ EH vuông góc với CD tại H ; kẻ FK vuông góc với BC tại K. Chứng minh rằng AC ; EH và FK đồng quy.

1.13. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy các điểm D ; E sao cho $AD = CE < \frac{AB}{2}$.

Qua D và E kẻ các đường thẳng song song với BC, chúng cắt AC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng BC = DM + EN.

1.14. Cho hình thang ABCD (AB// CD), trung điểm E của BD và trung điểm F của AC. Gọi G là giao điểm của đường thẳng qua E vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC. So sánh độ dài các đoạn thẳng GD và GC.

1.15. Cho hình thang ABCD (AB//CD) có AB < CD. Gọi M ; N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $MN = \frac{1}{2}(CD - AB)$.

1.16. Cho tam giác ABC có BC = 6cm. Trên cạnh BC lấy M, N sao cho BM = MN = NC. Gọi D, E là trung điểm của AC, AB. Gọi P là giao điểm của AM và BD, Q là giao điểm AN và CE. Tính PQ.

1.17. Cho hình thang ABCD (AD // BC) có đường chéo AC và BC vuông góc với nhau. Biết rằng AD = 5cm, BC = 3cm. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho AM = 4cm. Tính MC.

1.18. Cho tam giác ABC cân tại A, có CM là đường trung tuyến. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = BA. Chứng minh $CM = \frac{1}{2}CD$.

1.19. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 60^o$. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABC' ; AB'C ; A'BC. Gọi M, N, Q, R, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng A'C, AB', AC, BC, AC'. Chứng minh rằng :

a) $\Delta APN = \Delta QRN$.

b) PC = MN.

1.20. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ ba đỉnh của một tam giác đến một đường thẳng nằm ngoài tam giác bằng ba lần khoảng cách từ trọng tâm tam giác đến đường thẳng đó.

1.21. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên AB, AC lần lượt lấy D và E sao cho AD = AE. Từ A và E kẻ đường vuông góc với CD, chúng cắt BC tại I và K. Chứng minh rằng IB = IK.

1.22. Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh AB. Gọi E thuộc AC sao cho $AE = \frac{1}{4}AC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng ME cắt đường thẳng BC.

b) Gọi N là giao điểm của đường thẳng ME và BC. Chứng minh rằng $BN = \frac{1}{2}BC$.

1.23. Cho đoạn thẳng BC cố định. Trên nửa mặt phẳng bờ BC lấy điểm A bất kì không thuộc BC. Dựng tam giác ABD và tam giác ACE vuông cân tại B và C ra phía ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Chuyên đề 3
DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA. DỰNG HÌNH THANG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm

Giải bài toán dựng hình bằng thước và compa là chỉ ra một số hữu hạn lần các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản rồi chứng tỏ rằng hình dựng được có đầy đủ các điều kiện mà bài toán đòi hỏi.

2. Các phép dựng hình cơ bản

- Dựng đường thẳng đi qua hai điểm cho trước
- Dựng đường tròn (cung tròn) biết tâm và bán kính qua nó.
- Dựng giao điểm của hai đường (hai đường thẳng ; hai đường tròn ; đường thẳng với đường tròn).

3. Các bài toán dựng hình cơ bản

Các bài toán sau đây được gọi là các bài toán dựng hình cơ bản, trong khi làm bài ta không cần phải nhắc lại thứ tự các bước của phép dựng nữa.

a) Dựng một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước.

b) Dựng một góc bằng một góc cho trước.

c) Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước, dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước.

d) Dựng tia phân giác của một góc cho trước.

e) Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

f) Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

g) Dựng tam giác biết ba cạnh hoặc hai cạnh và góc xen giữa hoặc biết một cạnh và hai góc kề.

h) Dựng một tam giác đều hoặc hình vuông khi biết một cạnh của nó.

i) Dựng hình chữ nhật khi biết hai cạnh kề.

4. Các bước giải bài toán dựng hình

Bài toán dựng hình đầy đủ gồm bốn bước.

- *Phân tích :* Giả sử hình đó đã dựng được, trước hết vẽ phác một hình gần giống hình cần dựng trên những nét lớn, khi cần thiết phải vẽ thêm những đường liên quan, nghiên cứu tỉ mỉ mối quan hệ phụ thuộc giữa các điều kiện trong hình, dựa vào đó quyết định dùng phương pháp nào để dựng hình cần tìm.
- *Cách dựng* : Nêu thứ tự từng bước dựng hình dựa vào các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản. Đồng thời thể hiện các bước dựng đó trên hình vẽ.
- *Chứng minh* : Dùng lập luận để chứng minh hình dựng được bằng phương pháp đã trình bày là hoàn toàn phù hợp với các điều kiện đã cho của bài toán.
- *Biện luận* : Phân tích mối quan hệ giữa các điều kiện đã cho và hình đã dựng được. Chỉ rõ trong trường hợp nào bài toán dựng được và dựng được bao nhiêu hình thoả mãn điều kiện của đề bài.

5. Bổ sung

- Trong bước phân tích ta giả sử đã dựng được hình thoả mãn đề bài. Trên cơ sở đó xét xem bộ phận nào (đoạn thẳng, tam giác,...) dựng được ngay, bộ phận nào còn phải xác định thường được quy về việc xác định một điểm thoả mãn hai điều kiện. ứng với mỗi điều kiện, điểm phải tìm nằm trên một đường nào đó. Giao điểm của hai đường ấy là điểm cần tìm.
- Trong bước biện luận ta phải xét xem với điều kiện nào của các yếu tố đã cho thì dựng được hình và khi đó dựng được bao nhiêu hình.
- Nếu bài toán cho dựng hình về kích thước, không yêu cầu chỉ ra vị trí của hình phải dựng thì hai hình bằng nhau chỉ coi là một nghiệm hình.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 6. Dựng tam giác ABC biết AC = 7cm, đường cao AH = 5cm và trung tuyến AM = 6cm.

Giải (h.12)

Phân tích :

Giả sử tam giác ABC đã dựng được thoả mãn yêu cầu đề bài, có AC = 7cm, AH = 5cm, AM = 6cm.

Ta thấy

– AHM dựng được vì biết ba yếu tố.

– Điểm C là giao điểm của đường thẳng HM với đường tròn tâm A, bán kính 7cm.

– Đỉnh B thuộc tia đối của tia MC sao cho MB = MC.

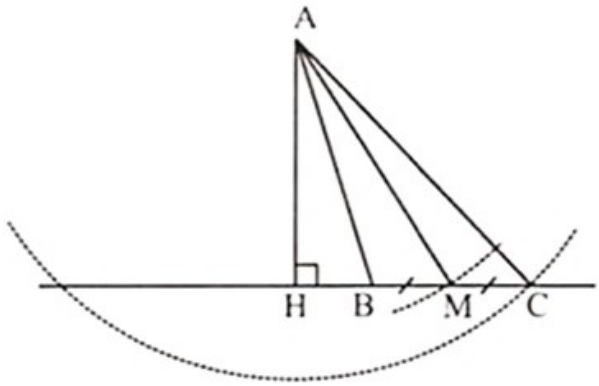
Cách dựng :

– Dựng tam giác AHM có $\widehat{H} = 90^o$; AH = 5cm, AM = 6cm.

– Vẽ cung tròn tâm A, bán kính 7cm cắt đường thẳng HM tại điểm C.

Trên tia đối của tia MC lấy điểm B sao cho MB = MC.

Nối AB, AC ta được tam giác ABC cần dựng.



Hình 12

Chứng minh :

– Theo cách dựng, ta có AH vuông góc với BC, AH = 5cm, AM = 6cm, AC = 7cm.

– Mặt khác M là trung điểm của BC nên AM là đường trung tuyến.

Vậy tam giác ABC thoả mãn các yêu cầu đề bài.

Biện luận :

– Do AM > AH nên tam giác AHM luôn dựng được.

– Do (A ; 7cm) cắt đường thẳng MH tại hai điểm nên bài toán có hai nghiệm hình.

Ví dụ 7. Dựng hình thang ABCD biết đáy AB = 2cm, đáy CD = 5cm, cạnh bên AD = 2cm, BC = 4cm.

Giải (h.13)

Phân tích :

Giả sử ABCD là hình thang phải dựng thoả mãn điều kiện.

Kẻ AE//BC suy ra AE = BC = 4cm, AB = CE = 2cm ⇒ DE = 5 – 2 = 3 (cm).

– Tam giác ADE dựng được vì biết độ dài ba cạnh.

– Điểm C nằm trên tia DE và cách D một khoảng 5cm nên dựng được.

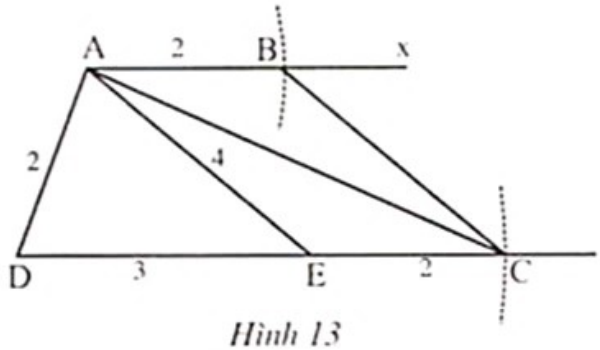
– Điểm B nằm trên tia Ax song song với CD và cách A một khoảng 2cm nên dựng được.

Cách dựng :

– Dựng tam giác ADE có AD = 2cm, AE = 4cm, DE = 3cm.

– Trên tia DE lấy điểm C sao cho DC = 5cm.

– Dựng tia Ax song song với DC (tia Ax và điểm C nằm trong cùng nửa mặt phẳng bờ AD).



Hình 13

– Dựng điểm B trên tia Ax sao cho AB = 2cm. Kẻ đoạn thẳng BC, ta được ABCD là hình thang cần dựng.

Chứng minh :

AB//CD nên ABCD là hình thang.

– Theo cách dựng AB = 2cm, AD = 2cm, CD = 5cm nên thoả mãn yêu cầu đề bài.

– Ta có EC = AB (= 2cm), EC//AB nên ΔABC = ΔCEA (c.g.c) nên BC = EA = 4cm.

Vậy ABCD là hình thang thoả mãn điều kiện đề bài.

Biện luận : Ta luôn dựng được một hình thang thoả mãn điều kiện của đề bài.

C. BÀI TẬP

1.24. Dựng tam giác cân ABC biết AB = AC, AB + BC = 8cm, $\widehat{B} = 70^o$

1.25. Dựng tam giác vuông ABC biết $\widehat{A} = 90^o$, BC = 10cm, AB – AC = 2cm.

1.26. Dựng một tam giác cho biết một góc, đường cao thuộc một cạnh của góc đó và chu vi tam giác đó.

1.27. Dựng hình thang ABCD biết đáy AB = 3cm, đáy CD = 7cm, đường cao AH = 4cm và đường chéo BD = 6cm.

1.28. Dựng tứ giác ABCD biết AB = a, BC = b, CD = c, DA = d và góc A = α.

1.29. Dựng hình thang ABCD biết đáy AB = a, cạnh bên BC = d, đường chéo AC = m và đường trung bình MN = n.

1.30. Dựng tứ giác ABCD biết AB = 2cm, AD = 3cm, $\widehat{A} = 80^o$; $\widehat{B} = 120^o$, $\widehat{D} = 100^o$.

1.31. Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết AB = 2 cm, CD = 6 cm, $\widehat{C} = 60^o$; $\widehat{D} = 45^o$.

1.32. Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết AB = 2cm, AC = 5 cm, BD = 3cm và $\widehat{AOB} = 120^o$ (O là giao điểm hai đường chéo AC và BD).

1.33. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết :

a) BC = 2,5cm, CD = 4,5cm, AD = 3cm, $\widehat{D} = 55^o$.

b) AB = 2cm, CD = 4cm, AC = 3cm, BD = 3,5cm.

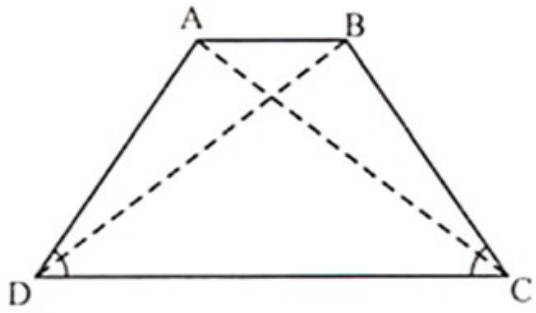
Chuyên đề 4

HÌNH THANG CÂN. ĐỐI XỨNG TRỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa hình thang cân

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau (h.14).



Hình 14

2. Tính chất của hình thang cân

Trong hình thang cân :

– Hai cạnh bên bằng nhau ;

– Hai đường chéo bằng nhau.

3. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân

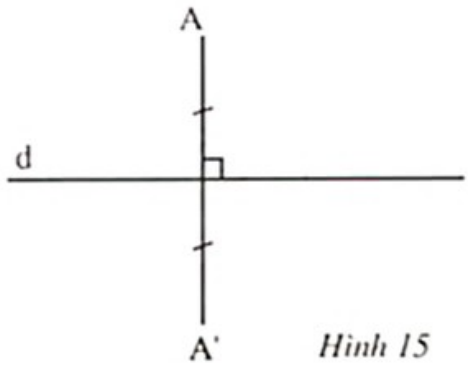
– Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.

– Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

4. Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng

Hai điểm A và A' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng AA' (h.15).

Quy ước : Nếu B ∈ d thì điểm đối xứng với B qua d chính là B.



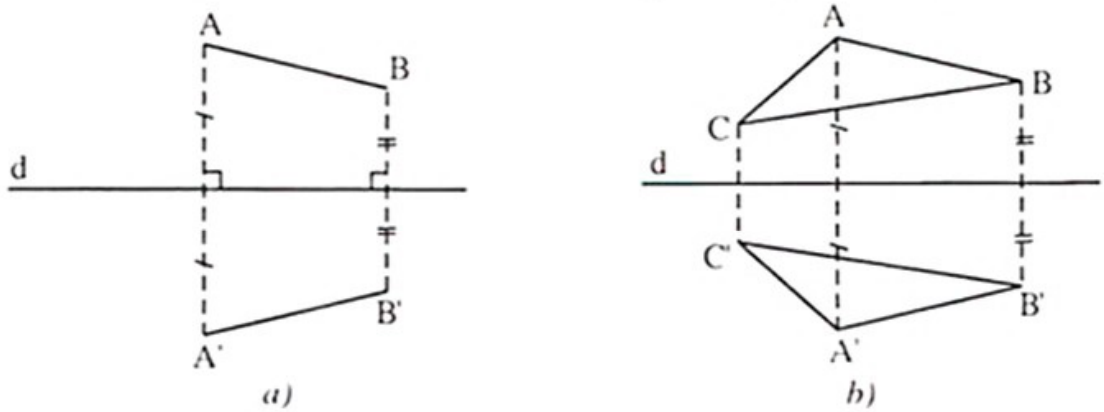
Hình 15

5. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng

• Hai hình F và F' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua d với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.

– Hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu A đối xứng với A' ; B đối xứng với B' qua d (h.16a).

– Hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu A đối xứng với A' ; B đối xứng với B' ; C đối xứng với C' qua đường thẳng d (h.16b).



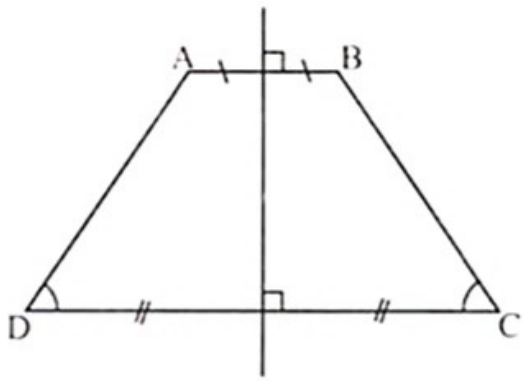
Hình 16

• Định lí : Nếu hai đoạn thẳng (hai góc, hai tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

6. Hình có trục đối xứng

Đường thẳng d là trục đối xứng của hình F nếu điểm đối xứng qua d của mỗi điểm thuộc hình F cũng thuộc hình F.

Đặc biệt : Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của một hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân (h.17).

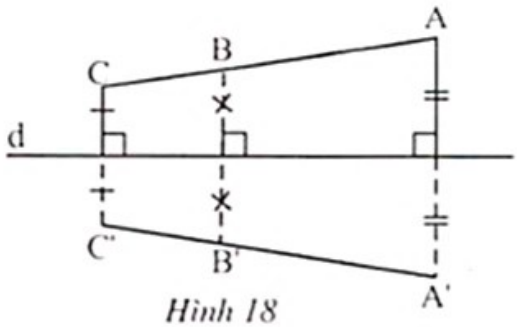


Hình 17

7. Bổ sung

– Hai đường thẳng a và a' đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu hai điểm của đường thẳng này đối xứng với hai điểm của đường thẳng kia qua đường thẳng d.

– Một hình có thể không có, có một, có nhiều hoặc vô số trục đối xứng.



Hình 18

– Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C) và A', B', C' lần lượt là ba điểm đối xứng của chúng qua đường thẳng d thì ba điểm A', B', C' thẳng hàng (B' nằm giữa A' và C') (h.18).

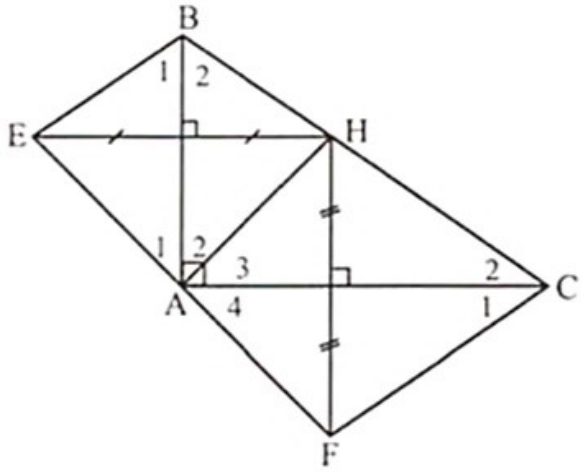
B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 8. Cho ABC vuông tại A có điểm H chuyển động trên BC. Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB ; AC.

a) Chứng minh E, A, F thẳng hàng.

b) Chứng minh BEFC là hình thang.

c) Tìm vị trí của H trên BC để BEFC là hình thang vuông.



Hình 19

Giải (h.19)

a) Theo tính chất đối xứng trục, ta có :

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$

Mà $\widehat{EAF} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = 2.\left(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}\right) = 180^o \Rightarrow$ E, A, F thẳng hàng.

b) Theo tính chất đối xứng trục, ta có :

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}; \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

Nên $\widehat{EBC} + \widehat{FCB} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 2.\left(\widehat{B_2} + \widehat{C_2}\right) = 180^o$. Mà hai góc ở vị trí trong cùng phía nên BE // CF hay BCFE là hình thang.

c) Theo tính chất đối xứng : $\widehat{BEA} = \widehat{BHA}$

BEFC là hình thang vuông $\Leftrightarrow \widehat{BEA} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{BHA} = 90^o$ hay AH là đường cao.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác. Điểm M nằm trong tam giác. Các điểm N, X, Y theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua AD, AB, AC. Chứng minh rằng AN là đường trung trực của đoạn XY.

Giải

Trường hợp 1. Xét $\widehat{MAB} \le \widehat{MAC}$ (h.20)

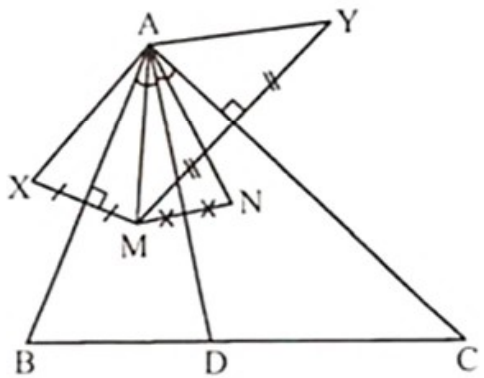
• Đặt $\widehat{MAB} = \alpha$; $\widehat{MAD} = \beta$. Ta có :

$\widehat{XAB} = \widehat{NAC} = \alpha$; $\widehat{NAD} = \beta$

$\widehat{YAC} = \alpha + 2.\beta$, suy ra

$\widehat{NAY} = 2.\alpha + 2.\beta = \widehat{NAX}$ (1)

Mặt khác : AX = AY = AN (2)



Hình 20

Từ (1) và (2) suy ra AN là đường trung trực của đoạn XY.

Trường hợp 2. Xét $\widehat{MAB} > \widehat{MAC}$. Tương tự trường hợp 1.

Nhận xét : Dựa vào bài trên, có thể chứng minh được bài sau :

Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trong tam giác. Điểm Y đối xứng với M qua AC ; điểm X đối xứng với M qua AB. Điểm N nằm trong tam giác sao cho AN là đường trung trực của đoạn XY. Chứng minh rằng : $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

C. BÀI TẬP

1.34. Bạn Việt nói "trong các đỉnh của hai tam giác đối xứng trục luôn có bốn đỉnh tạo thành các đỉnh của một hình thang cân". Bạn Nam nói "chưa chắc !"

Ai đúng, ai sai, tại sao ?

1.35. Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tia Ax và Ay sao cho $\widehat{xAB} = \widehat{yAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Trên tia Ax và Ay lấy hai điểm M và N thoả mãn AM = AN và $\widehat{ABM} < \widehat{ABC}$. Trong tam giác dựng ΔPBC sao cho $\widehat{PBC} = \widehat{ABM}$; $\widehat{PCB} = \widehat{ACN}$. Chứng minh rằng P luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

1.36. Cho tam giác ABC vuông tại A, lấy điểm M bất kì thuộc cạnh BC. Gọi E là điểm đối xứng của M qua AB, F là điểm đối xứng của N qua AC.

a) Chứng minh rằng A là trung điểm của EF.

b) Xác định vị trí của M để EF có độ dài ngắn nhất.

1.37. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Trên AB, AC lấy M và N sao cho AM + AN = AB. Chứng minh rằng trung điểm của AB, AC, MN thẳng hàng.

1.38. Trên tia phân giác ngoài của góc tại đỉnh C tam giác ABC, ta lấy điểm M (M khác C). Chứng minh rằng AC + CB < AM + MB.

1.39. Cho điểm A nằm trong góc xOy. Dựng ABC có điểm B ∈ Ox, C ∈ Oy sao cho ABC có chu vi nhỏ nhất.

1.40. Cho tứ giác ABCD có góc ngoài của tứ giác tại đỉnh C bằng góc ACB. Chứng minh rằng : AB + DB > AC + DC.

1.41. Cho ABC nhọn có $\widehat{A} = 70^o$. AH là đường cao. Gọi M, N là điểm đối xứng của H qua AB và AC. Gọi I, K là giao điểm của MN với AB, AC.

a) Tính $\widehat{IHK}$.

b) Chứng minh CI ⊥ AB ; BK ⊥ AC.

1.42. Chứng minh rằng, trong tam giác ABC, đường cao h_a không lớn hơn $\sqrt{p.(p-a)}$ trong đó BC = a, p là nửa chu vi tam giác.

1.43. Cho ABC, các điểm E, F thuộc đường phân giác AD sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{DBF}$. Vẽ điểm I đối xứng với E qua AB, điểm H đối xứng với E qua AC, điểm K đối xứng với F qua BC. Chứng minh :

a) FH = FI, FI = KE.

b) $\widehat{ACE} = \widehat{DCF}$.

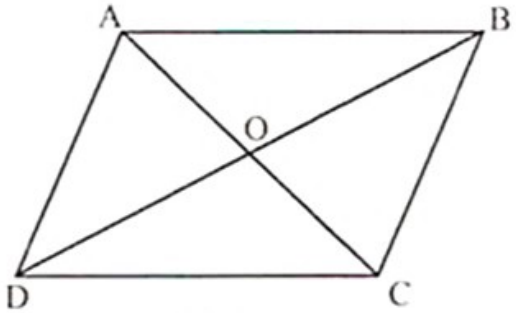
Chuyên đề 5

HÌNH BÌNH HÀNH. ĐỐI XỨNG TÂM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa hình bình hành

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases}$



Hình 21

2. Tính chất hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành (h.21) thì :

a) Các cạnh đối bằng nhau : AB = CD, AD = BC ;

b) Các góc đối bằng nhau : $\widehat{A} = \widehat{C}$; $\widehat{B} = \widehat{D}$;

c) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường : OA = OC,OB = OD.

3. Dấu hiệu nhận biết hình bình hành

Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu có một trong các điều kiện sau :

a) Các cạnh đối song song (định nghĩa)

b) Các cạnh đối bằng nhau (đảo của tính chất 1)

c) Các góc đối bằng nhau (đảo của tính chất 2)

d) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (đảo của tính chất 3)

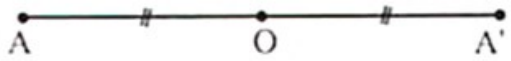
e) Hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

4. Bổ sung

Hai hình bình hành có một đường chéo chung thì các đường chéo của chúng đồng quy tại trung điểm của đường chéo chung.

5. Hai điểm đối xứng qua một điểm

Hai điểm A và A' gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng AA' (h.22).

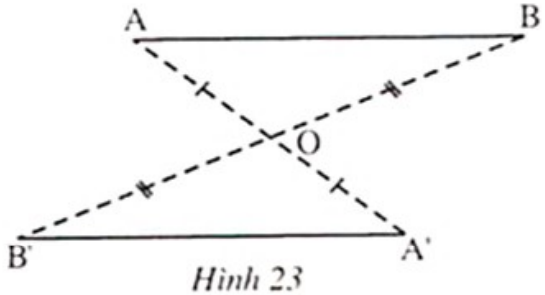


Hình 22

Quy ước : Điểm đối xứng của O qua O cũng là O.

6. Hai hình đối xứng nhau qua một điểm

• Hai hình F và F' gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua O với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.

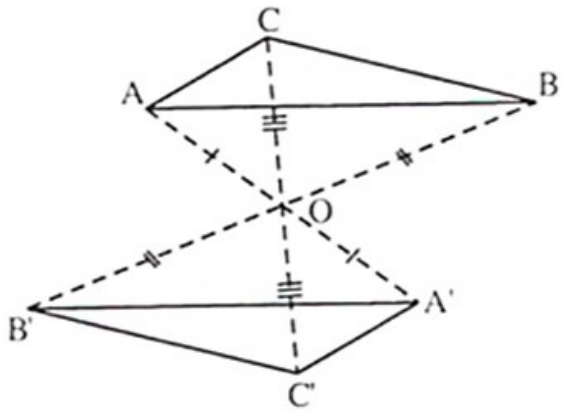


Hình 23

• Định lí

a) Hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng với nhau qua tâm O nếu A đối xứng với A' ; B đối xứng với B' qua O (h.23).

b) Hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng với nhau qua tâm O nếu A đối xứng với A' ; B đối xứng với B' ; C đối xứng với C' qua O (h.24).

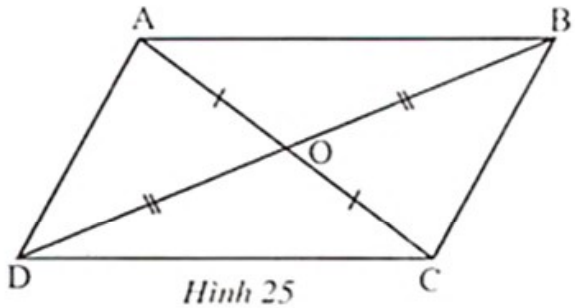


Hình 24

7. Hình có tâm đối xứng

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình F nếu điểm đối xứng qua O của mỗi điểm thuộc hình F cũng thuộc hình F.

Đặc biệt : Hình bình hành nhận giao điểm hai đường chéo làm tâm đối xứng của hình (h.25).



Hình 25

8. Bổ sung

a) Nếu hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng qua tâm O (O nằm ngoài đường thẳng AB, A'B') thì AB // A'B' và AB = A'B' (h.23).

b) Hai đường thẳng a và a' đối xứng với nhau qua tâm O nếu hai điểm của đường thẳng này đối xứng với hai điểm của đường thẳng kia qua O.

c) Một hình có thể không có, có một hoặc vô số tâm đối xứng.

d) Nếu ba điểm A, M, B thẳng hàng (M nằm giữa A và B) và A', M', B' lần lượt là ba điểm đối xứng của chúng qua O thì ba điểm A', M', B' thẳng hàng (M' nằm giữa A' và B').

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 10. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều ABE, ADF.

a) Chứng minh rằng ΔEFC đều.

b) Gọi M, N, K thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng BD, AF, AE. Tính số đo $\widehat{NMK}$.

Giải (h.26)

a) Đặt $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \alpha \Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{FDC} = \alpha + 60^o$

• $\widehat{EAF} = 360^o - (60^o + 60^o + \widehat{DAB})$

$= 360^o - (120^o + 180^o - \alpha)$

$= \alpha + 60^o$

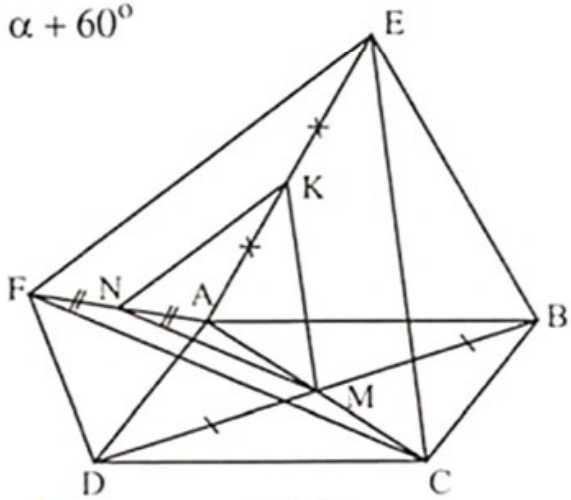
$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{FDC} = \widehat{CBE}$.

Mà FA = FD = BC ; AE = EB = CD

$\Rightarrow$ ΔFAE = ΔFDC = ΔCBE (c.g.c)

$\Rightarrow$ CE = CF = EF

$\Rightarrow$ ΔCEF đều.



Hình 26

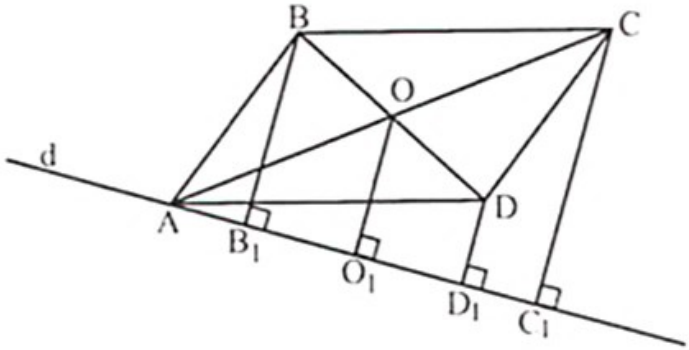
b) Ta có : MN ; MK ; NK lần lượt là đường trung bình của tam giác ACF ; ACE ; AEF nên $MN = \frac{1}{2}CF$; $MK = \frac{1}{2}CE$; $NK = \frac{1}{2}EF$.

Suy ra MN = MK = NK $\Rightarrow$ ΔMNK đều $\Rightarrow \widehat{NMK} = 60^o$.

Nhận xét

- Câu a, có thể chứng minh ΔCEF đều bằng cách chứng minh CE = CF và $\widehat{ECF} = 60^o$.
- Có thể làm được bài tương tự sau : Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác vuông cân ABE tại B, ADF tại D. Chứng minh rằng ΔCEF vuông cân.
- Với kỹ thuật trên, có thể làm được bài toán đảo sau : Cho ΔCEF đều có điểm A nằm trong tam giác. Trên nửa mặt phẳng bờ EF có chứa điểm A, dựng các tam giác đều ADF, AEB. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành.

Ví dụ 11. Cho hình bình hành ABCD. Gọi d là đường thẳng đi qua A và không cắt đoạn thẳng BD. Gọi BB_1 ; CC_1 ; DD_1 là khoảng cách từ B ; C ; D đến đường thẳng d. Chứng minh rằng : $BB_1 + DD_1 = CC_1$.



Hình 27

Giải (h.27)

Gọi AC cắt BD tại O ; kẻ $OO_1 \perp d$

Áp dụng tính chất đường trung bình trong hình thang BB_1D_1D và ΔACC_1 ta có :

$$BB_1 + DD_1 = 2.OO_1$$

$$CC_1 = 2.OO_1.$$

Suy ra $BB_1 + DD_1 = CC_1$.

Nhận xét. Vận dụng kĩ thuật trên, có thể giải được bài toán sau : Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng d không có điểm chung với hình bình hành. Gọi AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C, D đến đường thẳng d. Chứng minh rằng : $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

Ví dụ 12. Hai hình bình hành ABCD ; A'B'C'D có chung đỉnh D. Chứng minh rằng hai tam giác AB'C và A'BC' có cùng trọng tâm.

Giải (h.28)

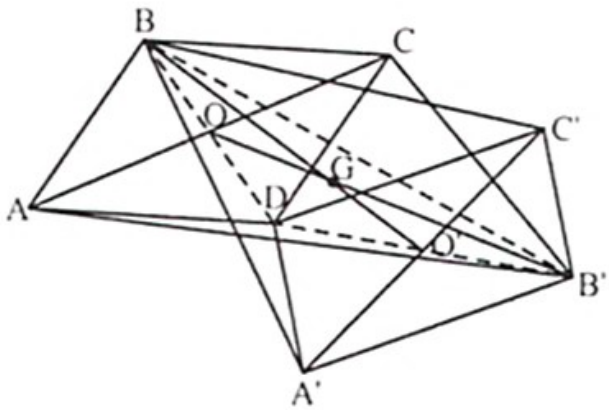
• *Trường hợp 1.* B, D, B' thẳng hàng

Dễ thấy, bạn đọc tự chứng minh.

• *Trường hợp 2.* B, D, B' không thẳng hàng

Gọi O, O' lần lượt là tâm hình bình hành ABCD ; A'B'C'D.

Xét tam giác BDB' ta có BO', B'O là các đường trung tuyến, suy ra nếu G là trọng tâm tam giác thì $GO' = \frac{1}{3}BO'$; $GO = \frac{1}{3}B'O$.



Hình 28

✓ Xét tam giác AB'C có B'O là đường trung tuyến, $GO = \frac{1}{3}B'O$ nên G là trọng tâm tam giác AB'C. (1)

✓ Xét tam giác A'BC' có BO' là đường trung tuyến, $GO' = \frac{1}{3}BO'$ nên G là trọng tâm tam giác AB'C. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác AB'C và A'BC' có cùng trọng tâm G.

Nhận xét

- Bài này khi làm dễ sót trường hợp 1.
- Trường hợp 2, ta còn có ba tam giác AB'C, A'BC' và BDB' có cùng trọng tâm.
- Như vậy hai tam giác có chung một đỉnh và chung một đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh ấy thì có cùng trọng tâm.

C. BÀI TẬP

1.44. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E ; F ; G ; H theo thứ tự nằm trên cạnh AB, BC, CD, DA sao cho BE = DG ; BF = DH. Chứng minh rằng :

a) EFGH là hình bình hành.

b) Bốn đoạn AC, BD, EG và FH đồng quy.

1.45. Cho tứ giác ABCD, E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn AF, CE, BF và DE. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

1.46. Giả sử P là điểm bất kì nằm trong mặt phẳng của tam giác đều ABC cho trước. Trên các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm A', B' ; C' ; sao cho PA', PB' và PC' theo thứ tự song song với AB, BC và CA.

a) Tìm mối liên hệ giữa độ dài các cạnh của tam giác A'B'C' với các khoảng cách từ P đến các đỉnh của tam giác đều ABC. Chứng minh rằng có một điểm P duy nhất sao cho tam giác A'B'C' đều.

b) Chứng minh với mọi điểm P nằm trong tam giác ABC có : $\widehat{BPC} - \widehat{B'A'C'} = \widehat{CPA} - \widehat{C'B'A'} = \widehat{APB} - \widehat{A'C'B'} = \alpha$ và giá trị của α không phụ thuộc vào vị trí của P.

1.47. Cho ΔABC, M là một điểm nằm trong tam giác. Lần lượt vẽ các hình bình hành MBDC, MAED. Chứng minh rằng khi điểm M di động thì đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định

1.48. Cho hai điểm cố định B và C. Một điểm A thay đổi trên một trong hai nửa mặt phẳng bờ BC sao cho A, B, C không thẳng hàng. Dựng hai tam giác vuông cân ADB và ACE với DA = DB ; EA = EC sao cho điểm D nằm khác phía điểm C đối với đường thẳng AB và điểm E nằm khác phía điểm B đối với đường thẳng AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường thẳng AM luôn đi qua một điểm cố định.

1.49. Cho ABC cân (AC = BC). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC và AB. Lấy các điểm A_2, B_2 tương ứng đối xứng qua AB của A_1 và B_1. CA_2 và A_1C_1 cắt nhau tại M, CB_2 và B_1C_1 cắt nhau tại N. Gọi P là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng AP = BP.

1.50. Gọi M là trung điểm cạnh BC của hình bình hành ABCD, N là giao điểm của AM và BD, P là giao điểm của AD và CN. Chứng minh rằng :

a) AP = AD.

b) CP = BD khi và chỉ khi AB = AC.

1.51. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của cạnh AD, BC. Đường chéo AC cắt đoạn BE, DF tại P, Q.

a) Chứng minh rằng : AP = PQ = QC.

b) Lấy M bất kì thuộc đoạn DC. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua tâm E, F. Chứng minh rằng I, K thuộc đường thẳng AB.

c) Chứng minh : AI + AK không đổi khi M di chuyển trên cạnh CD.

1.52. Chứng minh rằng : Nếu trên cạnh đáy AD của hình thang ABCD tìm được điểm E sao cho chu vi ΔABE, ΔBCE, ΔCDE bằng nhau thì $BC = \frac{1}{2}AD$.

1.53. Tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D}$ và đường chéo BD đi qua trung điểm O của AC. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

1.54. Cho điểm P nằm trong ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Từ A vẽ đường thẳng song song với PD cắt đường thẳng kẻ từ B song song với PE tại S. Chứng minh rằng nếu BS = 2.EP thì CS // PF.

1.55. Cho hình bình hành ABCD ($\widehat{A} > 90^o$). Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho BCH cân tại C. Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho AKB cân tại A. Chứng minh rằng DKH cân.

1.56. Dựng hình bình hành ABCD biết đỉnh A và các trung điểm E, F của các cạnh BC ; CD.

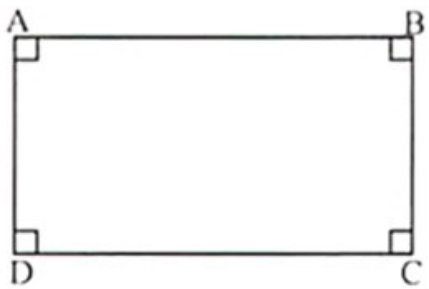
Chuyên đề 6
HÌNH CHỮ NHẬT. TÍNH CHẤT VỀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hình chữ nhật là tứ giác có 4 góc vuông (h.29).

Như vậy hình chữ nhật cũng là hình bình hành, hình thang cân.



Hình 29

2. Tính chất

Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành, hình thang cân.

Như vậy : Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

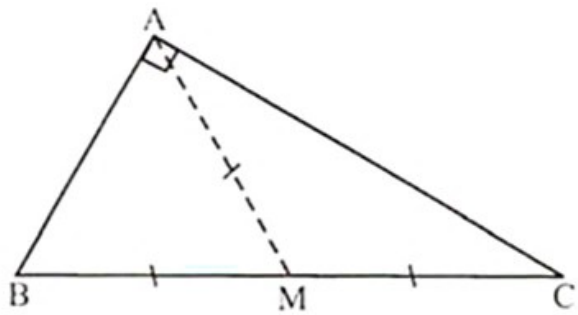
- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Áp dụng vào tam giác vuông

- Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền (h.30).
- Đảo lại, nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng một nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

ΔABC ; $MB = MC$

$\widehat{A} = 90^o \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2} BC.$



Hình 30

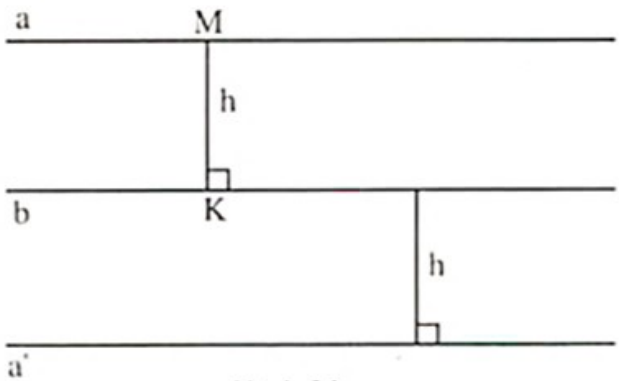
5. Bổ sung

- Hình chữ nhật có một tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.
- Hình chữ nhật có hai trục đối xứng là hai đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối.

6. Đường thẳng song song với đường thẳng cho trước

6.1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

6.2. • *Tính chất* : Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h (h.31).



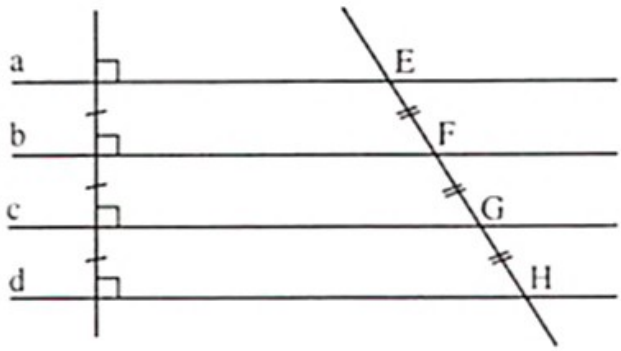
Hình 31

• *Nhận xét* : Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.

6.3. *Đường thẳng song song cách đều*

• Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau (h.32).

• Đảo lại, nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.



Hình 32

6.4. *Bổ sung*

Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau và cách nhau một khoảng h. Các điểm cách đều a và b thì nằm trên đường thẳng m song song với a và b và cách hai đường thẳng đó một khoảng $\frac{h}{2}$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 13. Cho hình thang cân ABCD (AB//CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo và M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AO, DO, BC. Nếu $\widehat{AOB} = 60^o$ thì tam giác MNP là tam giác gì ?

Giải (h.33)

ABCD là hình thang cân $\Rightarrow \Delta ABD = \Delta BAC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$; mà $\widehat{AOB} = 60^o \Rightarrow \Delta OAB$ đều.

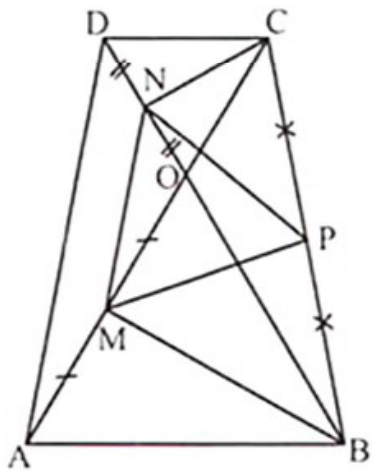
BM là đường trung tuyến $\Rightarrow$ BM là đường cao

$\Rightarrow BM \perp AO$

ΔBMC có $\widehat{BMC} = 90^o$, MP là đường trung tuyến

$\Rightarrow MP = \frac{1}{2}BC$.

Tương tự ta có $NP = \frac{1}{2}BC$.



Hình 33

Mặt khác MN là đường trung bình của $\Delta OAD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AD$. Mà AD = BC

$\Rightarrow MP = NP = MN \Rightarrow \Delta MNP$ đều.

Ví dụ 14. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Gọi I và N là trung điểm của AD và HC. Chứng minh rằng $BN \perp IN$.

Giải (h.34)

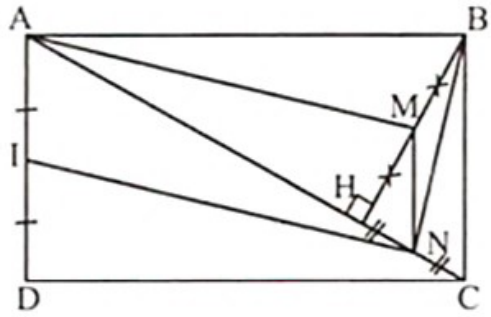
Gọi M là trung điểm của BH

$\Rightarrow MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}BC$

Do đó AINM là hình bình hành

$\Rightarrow AM \parallel IN$ (1)

Mặt khác ΔABN có BH là đường cao, MN là đường cao (vì $MN \parallel BC$, $BC \perp AB$) nên M là trực tâm $\Rightarrow AM \perp BN$ (2)



Hình 34

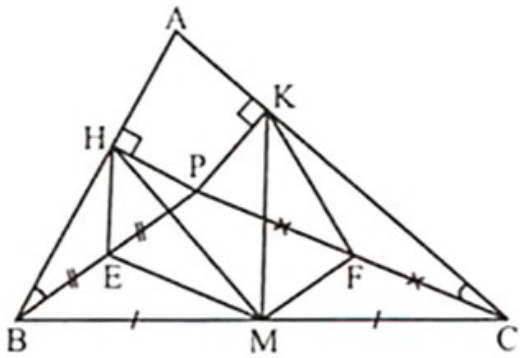
Từ (1) và (2) suy ra $BN \perp IN$.

Nhận xét. Với kỹ thuật trên, có thể giải được bài toán hay và khó hơn sau : Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Gọi E, F, M lần lượt là trung điểm AB, DH, BH. Chứng minh rằng $AM \perp EF$.

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC (AB < AC) và P là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống AB và AC ; M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

a) MH = MK ;

b) $\widehat{HMB} < \widehat{KMC}$.



Hình 35

Giải (h.35)

a) Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của PB và PC.

Suy ra $\widehat{HEP} = 2.\widehat{PBH}$; $\widehat{KFP} = 2.\widehat{KCP} \Rightarrow \widehat{HEP} = \widehat{KFP}$. (1)

Mặt khác, dễ có PEMF là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{PEM} = \widehat{PFM}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\widehat{HEM} = \widehat{KFM}$

Sử dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông và đường trung bình của tam giác, ta có : $EM = KF (= \frac{1}{2} PC)$; $HE = MF (= \frac{1}{2} BP)$.

Do đó : $\Delta HEM = \Delta MFK$ (c.g.c) $\Rightarrow MH = MK$.

b) $\Delta HEM = \Delta MFK \Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{MKF}$ (3)

Vì $AB < AC \Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{PBC} > \widehat{PCB}$ (vì $\widehat{PBH} = \widehat{PCK}$).

Suy ra $\widehat{FMC} > \widehat{FCM} \Rightarrow MF < FC$ và $\widehat{FMC} > \widehat{EMB}$. (4)

Từ $MF < FC \Rightarrow MF < FK \Rightarrow \widehat{KMF} > \widehat{MKF}$. (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $\widehat{HME} + \widehat{EMB} < \widehat{KMF} + \widehat{FMC}$.

Vậy $\widehat{HMB} < \widehat{KMC}$.

Nhận xét

- Việc tạo ra trung điểm E, F đã tạo ra mối liên kết giữa giả thiết với nhau và khai thác triệt để các giả thiết ấy.
- Với kỹ thuật trên, có thể giải được bài toán sau : Cho tam giác ABC, về phía ngoài tam giác vẽ $\widehat{BAx} = \widehat{CAy} = 21^o$. Hạ BE vuông góc với Ax, CF vuông góc với Ay. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tam giác MEF cân và tính các góc của tam giác ấy.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội, năm học 1989 – 1990).

C. BÀI TẬP

1.57. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O, điểm M nằm trên đoạn OB, điểm E đối xứng với A qua M, điểm H là chân đường vuông góc kẻ từ E tới BC. Vẽ hình chữ nhật EHCF. Chứng minh rằng M, H, F thẳng hàng.

1.58. Cho ΔABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh AE = AB.

b) Gọi M là trung điểm của BE. Tính số đo $\widehat{AHM}$.

1.59. Cho tam giác ABC vuông tại A có AM là đường trung tuyến. Gọi D là một điểm thuộc AM. Kẻ DI vuông góc với AB, DK vuông góc với AC.

a) Chứng minh rằng IK // BC.

b) Xác định vị trí điểm D trên AM sao cho $IK = \frac{1}{3}BC$.

1.60. Cho ΔABC vuông tại A có AH, AM tương ứng là đường cao, đường trung tuyến. Kẻ HE, HD lần lượt vuông góc với AB, AC. Kẻ MK vuông góc với AB. Gọi N là giao điểm của AM và HE. Chứng minh rằng :

a) $AM \perp DE$;

b) $BN \parallel DE$;

c) MK, BN, AH đồng quy.

1.61. Cho hình chữ nhật ABCD (AB > BC). Lấy điểm E trên cạnh AD. Lấy F, K trên cạnh CD sao cho $DF = CK < \frac{1}{2}CD$. Vẽ đường thẳng vuông góc với EK tại K cắt BC tại M. Chứng minh rằng ΔMEF vuông.

1.62. Cho ΔABC nhọn có BD ; CE là đường cao. Gọi I, K là hình chiếu của B và C trên đường thẳng DE. Chứng minh rằng DK = EI.

1.63. Cho hình chữ nhật ABCD, điểm E thuộc cạnh AB. Trên tia đối của tia CB lấy điểm I sao cho $\widehat{EDI} = 90^o$. Vẽ hình chữ nhật EDIK. Chứng minh rằng $\widehat{DBK} = 90^o$.

1.64. Cho ΔABC cân tại A. Lấy điểm D thuộc cạnh BC. Kẻ Dx vuông góc với BC, cắt AB, AC tại E và F. Vẽ hình chữ nhật BDEH và DCKF. Gọi I và O là tâm của hình chữ nhật BDEH, DCKF.

a) Chứng minh rằng AIDO là hình bình hành.

b) Chứng minh A là trung điểm của HK.

c) Gọi M là trung điểm của OI. Khi D di động trên BC, chứng minh rằng M nằm trên đoạn thẳng I_1O_1, trong đó I_1, O_1 lần lượt là trung điểm của AB, AC.

1.65. Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh là $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = 2\sqrt{3}$, $DA = 3\sqrt{3}$ và $\widehat{A} = 60^o$. Tính các góc còn lại của tứ giác ABCD.

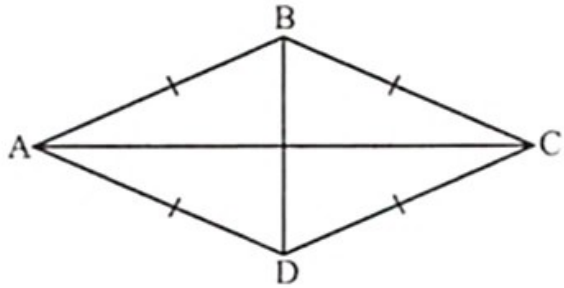
1.66. ***Đố.*** Bạn Toán và bạn Học chơi một trò chơi sau : Bạn Toán xếp một đồng tiền xu lên mặt bàn hình chữ nhật. Sau đó, bạn Học lại xếp một đồng tiền xu lên mặt bàn, cứ tiếp tục như vậy, hai bạn thay nhau xếp... sao cho không có hai đồng xu nào chồng lên nhau. Bạn nào xếp được đồng xu cuối cùng lên mặt bàn thì bạn đó thắng cuộc. Bạn Toán đi trước, hỏi có cách nào để luôn thắng cuộc hay không ? Bạn hãy chỉ giúp.

Chuyên đề 7
HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau (h.36).
- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau (h.37).



Hình 36

Từ đó suy ra :

- Hình thoi cũng là một hình bình hành.
- Hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.

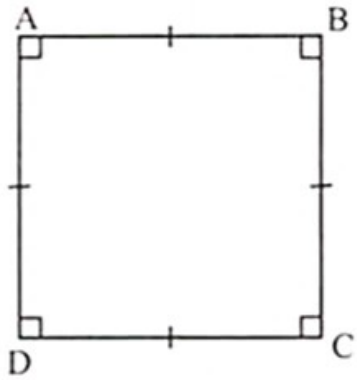
2. Tính chất

a) Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành, ngoài ra còn có :

– Hai đường chéo vuông góc với nhau.

– Hai đường chéo là đường phân giác các góc của hình thoi.

b) Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.



Hình 37

3. Dấu hiệu nhận biết

a) Nhận biết hình thoi

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

b) Nhận biết hình vuông

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

4. Bổ sung

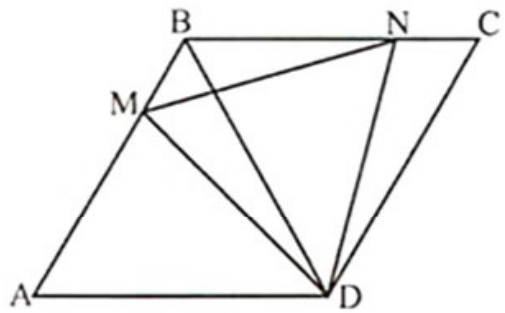
a) Trong hình thoi :

- Hai đường chéo là hai trục đối xứng.
- Giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng.

b) Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 16. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^o$. Trên các cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho BM + BN bằng độ dài cạnh của hình thoi. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 38

Giải (h.38)

Từ đề bài suy ra ΔABD và ΔCBD đều ; AD = BD, AM = BN, $\widehat{CBD} = \widehat{BDA} = \widehat{BAD} = 60^o$.

Suy ra ΔMAD = ΔNBD (c.g.c) ⇒ DM = DN và $\widehat{MDA} = \widehat{NDB}$.

Vậy ΔMDN có MD = ND, $\widehat{MDN} = 60^o$ nên ΔMDN đều.

Suy ra đường trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua điểm D cố định

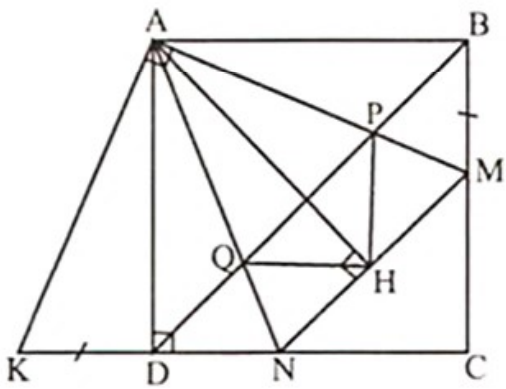
Ví dụ 17. Trên các cạnh BC, CD của hình vuông ABCD với AB = 1, ta lấy các điểm M, N tương ứng sao cho chu vi tam giác MCN bằng 2.

a) Chứng minh $\widehat{MAN} = 45^o$.

b) Gọi P và Q là giao điểm của đường chéo BD với các đoạn thẳng AM và AN. Chứng minh rằng các đoạn thẳng BP, PQ, QD lập thành ba cạnh của một tam giác vuông.

Giải (h.39)

a) Trên cạnh DC kéo dài về phía D lấy điểm K sao cho DK = BM



Hình 39

Ta có :

MN + MC + CN = MB + MC + CN + DN (= 2)

⇔ MN = BM + DN

hay MN = DK + DN = KN (1)

Mặt khác ΔADK = ΔABM (c.g.c)

⇒ AM = AK (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔKAN = ΔMAN (c.c.c) ⇒ $\widehat{MAN} = \widehat{KAN} = 45^o$.

b) $\Delta AKN = \Delta AMN \Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{AMN} = \widehat{AMB}$; $\widehat{ANK} = \widehat{ANM}$. Kẻ $AH \perp MN$.

Dễ có $\Delta AHM = \Delta ABM \Rightarrow HM = BM$, $AH = AB$.

Suy ra AM là trung trực của đoạn HB từ đó $PH = PB$, $\Delta APH = \Delta APB$

$\Rightarrow \widehat{AHP} = \widehat{ABP} = 45^o$.

Chứng minh tương tự : $QH = QD$, $\widehat{AHQ} = 45^o$. Vậy $\widehat{QHP} = 90^o$.

Suy ra $QP^2 = HQ^2 + HP^2 = DQ^2 + BP^2$ hay các đoạn thẳng BP, PQ, QD lập thành ba cạnh của một tam giác vuông.

Nhận xét

- Ta có thể giải được câu sau : Chứng minh rằng khi M thay đổi thì MN luôn cách điểm A một khoảng cách không đổi.
- Ta cũng có thể thay giả thiết "chu vi tam giác MCN bằng 2" bằng "$\widehat{MAN} = 45^o$" và kết luận câu a là : Chứng minh chu vi tam giác MCN bằng 2.

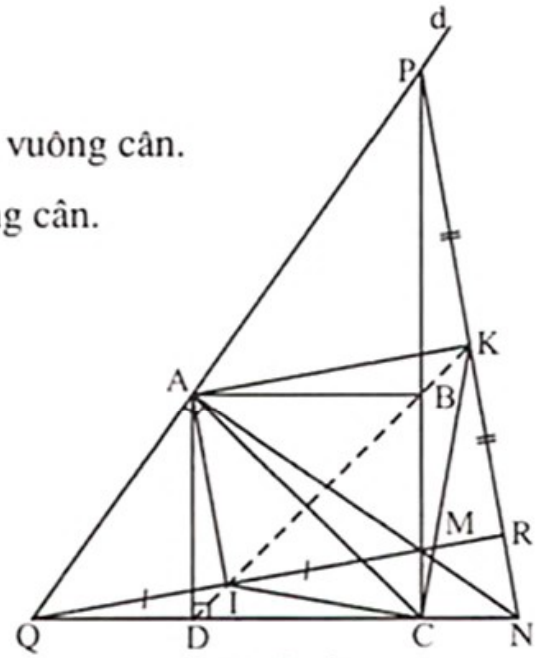
Ví dụ 18. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M thuộc cạnh BC, tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AM cắt đường thẳng CB, CD lần lượt tại P và Q

a) Chứng minh rằng các tam giác AMQ, ANP vuông cân.

b) Gọi giao điểm của QM và NP là R. Gọi I ; K là trung điểm của đoạn thẳng MQ, PN. Hỏi tứ giác AIRK là hình gì ?

c) Chứng minh 4 điểm K, B, I, D thẳng hàng.

Giải (h.40)



Hình 40

a) $\Delta ADQ = \Delta ABM \Rightarrow AQ = AM \Rightarrow \Delta AMQ$ vuông cân.

$\Delta ABP = \Delta ADN \Rightarrow AN = AP \Rightarrow \Delta ANP$ vuông cân.

b) ΔAMQ vuông cân, $IM = IQ \Rightarrow AI$ là đường trung tuyến $\Rightarrow AI$ là đường cao $\Rightarrow AI \perp RQ$

hay $\widehat{AIR} = 90^o$ (1)

– Tương tự ta có $\widehat{AKR} = 90^o$ (2)

– ΔPQN có NA, PC là các đường cao nên M là trực tâm, suy ra $QR \perp NP$ hay $\widehat{IRK} = 90^o$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra AKRI là hình chữ nhật.

c) Ta có $AK = CK\left(= \frac{1}{2}PN\right)$; $AI = CI\left(= \frac{1}{2}QM\right)$; $AD = CD$; $AB = CB$

$\Rightarrow$ K ; B ; I ; D cùng thuộc đường trung trực của AC. Vậy K, B, I, D thẳng hàng.

C. BÀI TẬP

1.67. Cho tam giác ABC có AB < AC. Trên cạnh AC của tam giác lấy điểm D sao cho CD = AB. Gọi Q là trung điểm của AC, N là trung điểm của BD. Vẽ đường phân giác AK của góc BAC. Chứng minh AK $\perp$ NQ.

1.68. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Chứng minh rằng nếu các tam giác AOB, BOC, COD và DOA có chu vi bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.

1.69. Cho tam giác đều ABC có AD là đường cao, H là trực tâm. Từ một điểm M bất kì trên cạnh BC kẻ ME, MF theo thứ tự vuông góc với AB, AC. Gọi I là trung điểm của AM. Chứng minh rằng :

a) DEIP là hình thoi ;

b) Ba đường thẳng MH, ID, EP đồng quy.

1.70. Cho hình thoi ABCD. Kẻ BM $\perp$ AD và BN $\perp$ CD. Biết rằng MN = $\frac{1}{2}$BD. Tính số đo các góc của hình thoi.

1.71. Trên cạnh AB và CD của hình thoi ABCD lấy các điểm P và Q sao cho AP = $\frac{1}{3}$AB, và CQ = $\frac{1}{3}$CD. Gọi I là giao điểm của PQ và AD, K là giao điểm của DP và BI. Chứng minh rằng :

a) ΔBID vuông ; b) BK = IK.

1.72. Cho hình thoi ABCD có AC cắt BD tại O. Gọi E là điểm đối xứng của A qua B. Gọi I, F là giao điểm của ED với AC và BC, gọi G và H thứ tự là giao điểm của OE và BC, OF và CE. Chứng minh rằng : A, G, H thẳng hàng.

1.73. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AE cắt đường thẳng CD tại F. Gọi I là trung điểm của EF. Gọi M là giao điểm AI và CD. Qua E dựng đường thẳng song song với CD cắt AI tại N. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác MENF là hình thoi.

b) Chu vi tam giác CME không đổi khi E chuyển động trên BC.

1.74. Cho hình vuông ABCD. Điểm E nằm trong hình vuông sao cho tam giác ABE đều. Gọi F là giao điểm của AE và BD. O là giao điểm của DE và FC. Chứng minh OC = OF.

1.75. Mọi điểm trên mặt phẳng được đánh dấu bởi một trong hai dấu (+) hoặc (–). Chứng minh rằng luôn chỉ ra được 3 điểm trên mặt phẳng làm thành một tam giác vuông cân mà ba đỉnh của nó được đánh cùng dấu.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2010–2011)

1.76. Cho hình vuông ABCD và điểm M nằm trong hình vuông. Tìm tất cả các vị trí của điểm M sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCD} = \widehat{MDA}$.

1.77. Cho tứ giác lồi ABCD thoả mãn bốn điều kiện sau :

- AB // CD
- AB < CD
- AB = BC = DA
- BD ⊥ BC

a) Tứ giác ABCD là hình gì ? Tại sao ?

b) Tính các góc trong của tứ giác ABCD.

1.78. Trên cạnh BC và CD của hình vuông ABCD lấy các điểm E và F sao cho EC = 2. EB và FC = FD. Chứng minh $\widehat{AEB} = \widehat{AEF}$.

1.79. Cho ΔABC vuông cân tại A. Với mỗi điểm M nằm trên đường thẳng BC (M khác B, C), gọi hình chiếu của M lên các đường thẳng AB và AC là H và K tương ứng. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng CH và BK.Chứng minh rằng đường thẳng MI luôn đi qua điểm cố định khi M di động trên đường thẳng BC.

1.80. Cho hình vuông ABCD. Gọi E là trung điểm của AD. Qua E vẽ đường thẳng vuông góc với BE cắt CD tại F. Tính tỉ số $\frac{EF}{EB}$.

1.81. Cho hình thang ABCD (AB//CD) có $AB = \frac{1}{2}CD$. Gọi H là trung điểm của CD. Ở ngoài hình thang dựng đoạn thẳng HM sao cho MH vuông góc với CD ; $MH = \frac{1}{4}CD$. Bên ngoài hình thang ta dựng các tam giác ADE, BCF vuông cân tại E, F. Chứng minh rằng tam giác MEF vuông cân tại M.

1.82. Xét tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH, người ta dựng về phía ngoài tam giác này hai hình vuông ABDE và ACGF.

a) Chứng minh A, D, G thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác BCFE là hình thang cân.

c) Chứng minh đường thẳng AH, BG, CD đồng quy.

1.83. Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AH có chứa điểm C ta vẽ hình vuông AHKE.

a) Chứng minh rằng : $\widehat{ABC} > 45^o$.

b) Gọi giao điểm AC và KE là P. Chứng minh rằng AB = AP.

c) Vẽ hình bình hành BAPQ. Gọi giao điểm PB và AQ là I. Chứng minh H, I, E thẳng hàng.

d) Chứng minh HE // QK.

Chuyên đề nâng cao 1

BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC, CỰC TRỊ VỚI TỨ GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa góc và cạnh của một tam giác

- Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

$$\Delta ABC,\ AC > AB \Leftrightarrow \widehat{B} > \widehat{C}.$$

2. Quan hệ đường xiên và hình chiếu

- Trong các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.
- Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó :

a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

3. Bất đẳng thức tam giác

Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh kia.

$|b - c| < a < b + c$; $|a - b| < c < a + b$; $|a - c| < b < a + c$.

4. Bất đẳng thức đại số

Với mọi a, b ta có : $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$; $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 19. Cho tứ giác lồi ABCD có $AC + AD \leq BC + BD$. Chứng minh $AD < BD$.

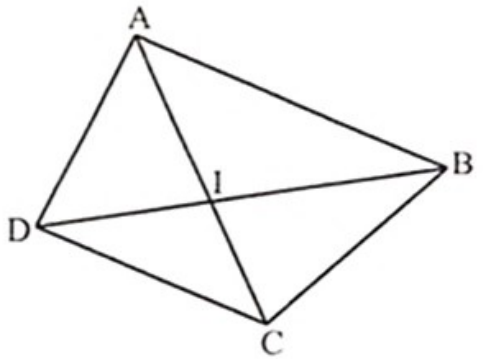
Giải (h.41). Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Trong tam giác IAD có : $AD < IA + ID$

Tương tự : $BC < IB + IC$

Từ đó $AD + BC < AC + BD$. (1)

Theo giả thiết : $AC + AD \leq BC + BD$. (2)



Hình 41

Cộng (1) và (2) vế với vế ta được :

$$AD + BC + AC + AD < AC + BC + BD + BD \Rightarrow AD < BD.$$

Ví dụ 20. Cho tứ giác ABCD có độ dài cạnh AB, BC, CD, DE lần lượt là a, b, c, d. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng :

$$MP + NQ \le \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Giải (h.42). Trên tia đối của tia PB lấy điểm E sao cho PE = PB.

Ta có $\Delta BCP = \Delta EDP$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = BC = b$.

Ta có MP là đường trung bình của ΔABE nên $MP = \frac{AE}{2}$.

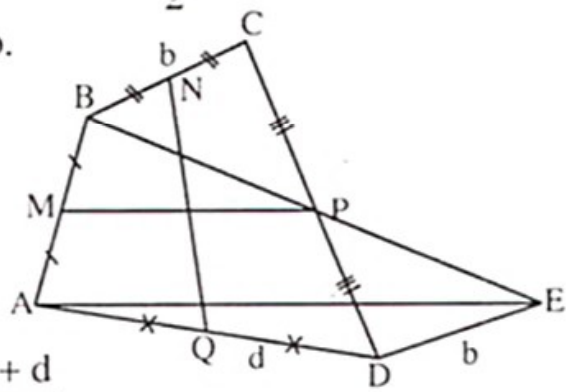
Xét ΔADE có $AE \le AD + DE \Rightarrow AE \le d + b$.

Suy ra $MP \le \frac{d + b}{2}$. (1)

Chứng minh tương tự, ta có :

$$NQ \le \frac{a + c}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $MP + NQ \le \frac{a + b + c + d}{2}$.



Hình 42

Dấu bằng xảy ra khi ABCD là hình bình hành.

Nhận xét. Từ bài trên, bạn đọc có thể giải được bài toán sau : Cho tứ giác ABCD có độ dài cạnh là a, b, c, d. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng : điều kiện cần và đủ để ABCD là hình bình hành là

$$MP + NQ = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Ví dụ 21. Cho hình chữ nhật ABCD có chu vi không nhỏ hơn $2\sqrt{2}$. Lấy M, N, P, Q thứ tự thuộc đoạn thẳng AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng chu vi tứ giác MNPQ không nhỏ hơn 2.

Giải (h.43)

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức :

$2(a^2 + b^2) \ge (a + b)^2$, ta có :

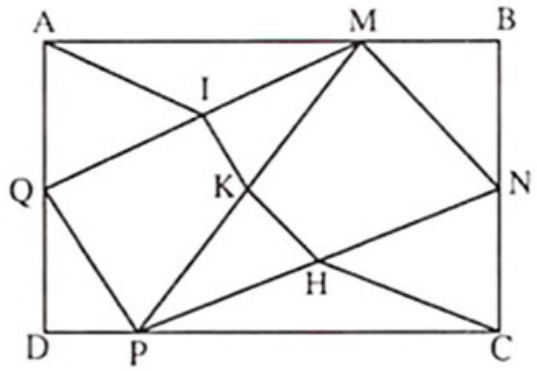
$2.MN^2 = 2(BM^2 + BN^2) \ge (BM + BN)^2$

$\Rightarrow \sqrt{2}\ MN \ge BM + BN.$ (1)

Tương tự ta có : $\sqrt{2}\ NP \ge CN + CP.$ (2)

$\sqrt{2}\ PQ \ge PD + DQ.$ (3)

$\sqrt{2}\ QM \ge AQ + AM.$ (4)



Hình 43

Từ (1) (2) (3) (4) cộng vế với vế ta được :

$$\sqrt{2}\,(MN + NP + PQ + QM) \geq AB + BC + CD + DA \geq 2\sqrt{2}$$

hay chu vi tứ giác MNPQ không nhỏ hơn 2.

Cách 2. Gọi I, K, H lần lượt là trung điểm MQ, MP, PN. Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông và đường trung bình trong tam giác ta được :

$$MN + NP + NQ + QM = 2\,(AI + IK + KH + HC) \geq 2AC$$

Mà $\quad 2.AC = 2\sqrt{AB^2 + BC^2} \geq 2\sqrt{\dfrac{(AB + BC)^2}{2}} \geq 2$.

Vậy chu vi tứ giác MNPQ không nhỏ hơn 2.

C. BÀI TẬP

1.84. Cho tam giác ABC nhọn có H là trực tâm. Chứng minh rằng

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}\,(AB + BC + CA).$$

1.85. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M thuộc cạnh CD. Tia phân giác góc ABM cắt AD tại N. Chứng minh $\dfrac{BN}{MN} \leq 2$.

1.86. Trong tất cả các tứ giác lồi với hai đường chéo có độ dài đã cho và góc giữa hai đường chéo có độ lớn đã cho, xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

1.87. Cho đoạn thẳng AB = a. M là một điểm trên đoạn thẳng AB, vẽ các hình vuông AMCD và BMEF. Xác định vị trí điểm M để tổng $S_{AMCD} + S_{BMEF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.88. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là một điểm nằm trên cạnh huyền BC. Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC. Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

1.89. Cho tứ giác ABCD và điểm M thuộc cạnh AD. Chứng minh rằng

$$MB + MC \leq \max\{AB + AC\,;\,DB + DC\}$$

1.90. Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy điểm M bất kỳ thuộc miền trong của hình chữ nhật, chứng minh rằng : MA + MB + MC + MD < AB + AC + AD.

1.91. Cho hình thang ABCD (AB// CD) có AB < CD. Chứng minh rằng :

$$\widehat{A} + \widehat{B} > \widehat{C} + \widehat{D}.$$

1.92. Cho hình thang ABCD (AB// CD) có $\widehat{D} > \widehat{C}$. Chứng minh rằng AC > BD.

1.93. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm AC, BD. Chứng minh rằng : AC + BD + 2 IJ < AB + BC + CD + AD.

Chuyên đề nâng cao 2
VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khi giải bài toán hình học, nhiều bài không thể giải trực tiếp được mà phải vẽ thêm hình phụ. Việc vẽ thêm hình phụ để tạo "cầu nối" giữa giả thiết và kết luận là công việc phổ biến. Tùy thuộc vào mỗi bài toán, dạng toán mà chúng ta chọn những cách vẽ hình phụ khác nhau. Có nhiều cách tạo ra yếu tố phụ, song chúng ta có thể vẽ hình phụ dựa vào một số định hướng sau :

1. Nếu giả thiết có yếu tố trung điểm mà không vận dụng trực tiếp được, ta có thể tạo thêm trung điểm của đoạn thẳng để sử dụng được các tính chất về đường trung bình của tam giác, hình thang hay tính chất đường trung tuyến tam giác, tính chất đường chéo của hình bình hành.
2. Nếu giả thiết có số đo góc là 60° hoặc 30°, ta vẽ thêm tam giác đều hoặc kẻ đường vuông góc để sử dụng tính chất của tam giác đều hoặc tam giác nửa đều.
3. Nếu giả thiết có số đo góc là 45° hoặc 135°, ta vẽ thêm tam giác vuông cân hoặc kẻ đường vuông góc hoặc hình vuông để sử dụng tính chất của tam giác vuông cân hoặc hình vuông.
4. Nếu giả thiết có nhiều đường vuông góc, ta có thể kẻ thêm đường vuông góc từ những vị trí đặc biệt của hình vẽ.

   Ngoài ra nhiều bài có thể dựng thêm những đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho nhằm tạo ra những cặp tam giác bằng nhau.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 22. Cho tứ giác ABCD. Gọi M và N tương ứng là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng nếu $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$ thì ABCD là hình thang.

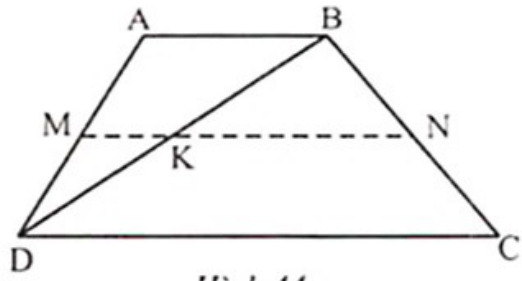
Giải (h.44). Gọi K là trung điểm của đường chéo BD. Ta có :

$MK \,//\, AB$ và $MK = \frac{1}{2}AB$;

$NK \,//\, CD$ và $NK = \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow MK + NK = \frac{1}{2}(AB + CD)$

$\Rightarrow MK + NK = MN$



Hình 44

Suy ra M, K, N thẳng hàng $\Rightarrow AB \,//\, MN$ và $CD \,//\, MN \Rightarrow AB \,//\, CD$.

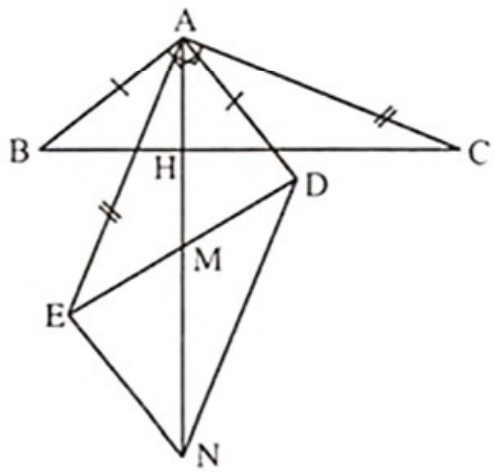
Vậy ABCD là hình thang.

Nhận xét

- Yếu tố lấy trung điểm của đường chéo là kết hợp khéo léo các yếu tố của giả thiết với nhau.
- Với kĩ thuật trên, có thể giải được bài toán sau : Cho tứ giác lồi ABCD (AB < CD). Gọi P, Q tương ứng là trung điểm các đường chéo BD và AC. Chứng minh rằng nếu $PQ = \frac{1}{2}(CD - AB)$ thì ABCD là hình thang.

Ví dụ 23. Cho ΔABC có góc A tù. Bên trong góc A vẽ đoạn AD vuông góc và bằng đoạn thẳng AB, vẽ AE vuông góc và bằng AC. Gọi M là trung điểm DE. Chứng minh rằng $AM \perp BC$.

Giải. *Cách 1* (h.45). Gọi H là giao điểm của AM và BC. Vẽ hình bình hành ADNE. Khi đó M là trung điểm của DE nên A, M, N thẳng hàng. AE // DN suy ra $DN \perp AC$, mặt khác $AB \perp AD$, suy ra $\widehat{ADN} = \widehat{BAC}$.



Hình 45

Mặt khác DN = AE = AC nên

ΔBAC = ΔADN (c.g.c) ⇒ $\widehat{DAN} = \widehat{ABC}$.

Ta lại có $\widehat{DAN} + \widehat{NAB} = \widehat{BAD} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{NAB} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{AHB} = 90^o$ hay $AM \perp BC$.

Cách 2. (h.46) Trên tia đối của tia AE lấy AI = AE ; ID cắt AC tại K. Ta có :

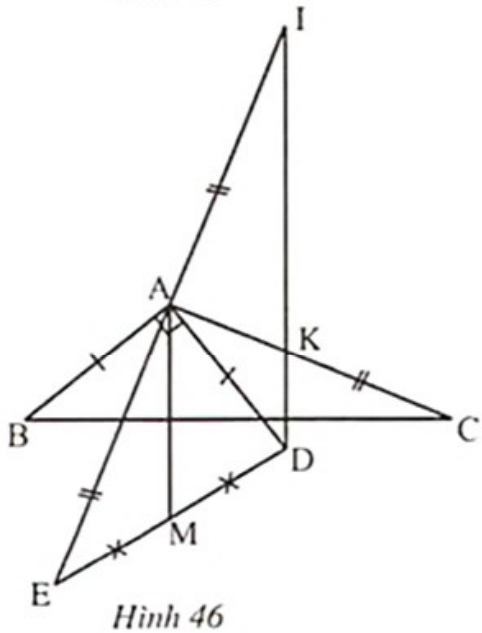
$\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} + \widehat{DAE} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DAI}$, suy ra ΔBAC = ΔDAI (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{I} = \hat{C}$. Mà $\hat{I} + \widehat{AKI} = 90^o$,

suy ra $\hat{C} + \widehat{CKD} = 90^o$ hay $ID \perp BC$.

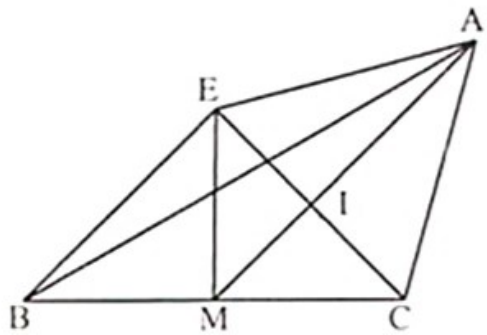
Mặt khác dễ có AM là đường trung bình của ΔEDI nên AM // ID, vậy $AM \perp BC$.



Hình 46

Nhận xét. Bài toán có yếu tố trung điểm M, song không thể trực tiếp giải được. Vì vậy phải vẽ thêm hình hình bình hành hoặc tạo thêm trung điểm như hai cách trên.

Ví dụ 24. Tam giác ABC có M là trung điểm cạnh BC thoả mãn $\widehat{MAB} = 15^o$, $\widehat{MAC} = 30^o$. Tính số đo góc C.



Hình 47

Giải (h.47)

Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A dựng tam giác ACE đều. Suy ra AM là đường phân giác góc BAC, nên AM cũng là đường cao $\Rightarrow AM \perp CE$.

Gọi I là giao điểm của AM và BC.

ΔBEC có MI là đường trung bình nên IM // BE mà $IM \perp CE$ nên $BE \perp EC$, mặt khác $\widehat{EBA} = \widehat{BAI} = \widehat{EAB} = 15^o$, suy ra ΔBAE cân tại E $\Rightarrow \Delta BEC$ vuông cân tại E nên $\widehat{ECB} = 45^o$.

Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{ACE} + \widehat{ECB} = 105^o$.

Nhận xét. Bài toán có số đo góc 30° nên tất yếu định hướng tạo thêm tam giác đều.

C. BÀI TẬP

1.94. Cho hình vuông ABCD. Gọi M ; N lần lượt là trung điểm của AB ; BC. Các đường thẳng DN và CM cắt nhau tại I.

a) Chứng minh ΔCIN vuông ;

b) Chứng minh AI = AD.

1.95. Trong hình vuông ABCD lấy điểm O sao cho OA : OB : OC = 1 : 2 : 3. Tính số đo góc AOB.

1.96. Cho hình vuông ABCD và điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BPC} = 135^o$. Chứng minh rằng : $2.PB^2 + PC^2 = PA^2$.

1.97. Cho hình thang ABCD có AB // CD, $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^o$, CD > AB. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của cạnh AB, CB. Chứng minh rằng : $EF = \dfrac{CD - AB}{2}$.

1.98. Cho tứ giác ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy.

1.99. Về phía ngoài của ΔABC nhọn, dựng các tam giác ABD và ACE tương ứng vuông cân tại B và C. Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng ΔIBC vuông cân tại I.

1.100. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{C} = 50^o$; $\widehat{D} = 70^o$ và AD = BC. Gọi E ; F lần lượt là trung điểm của cạnh AB ; CD. Tính số đo góc EFD.

1.101. Cho hình vuông ABCD có tâm O, Gọi K, E lần lượt là trung điểm của AB, OC. Chứng minh rằng $KE \perp DE$.

1.102. Cho ΔABC vuông tại B. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D thoả mãn AD = 3.AB. Đường thẳng vuông góc với CD tại D cắt đường thẳng vuông góc với AC tại A ở E. Chứng minh ΔBDE cân.

1.103. Cho tứ giác ABCD có AD = DC = CB, $\widehat{ADC} = 110^o$; $\widehat{DCB} = 130^o$. Tính góc ABC.

(Olympic Toán, châu Á – Thái Bình Dương, năm 2010)

1.104. Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm cạnh AB. Trên cạnh BC lấy các điểm E, F sao cho BE = EF = FC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm S sao cho BS = BD. Chứng minh rằng các đường thẳng AF, CD, SE đồng quy.

1.105. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Giả sử trong tam giác có điểm M thoả mãn điều kiện $\widehat{MBA} = \widehat{MAC} = \widehat{MCB}$. Tính MA : MB : MC.

1.106. Cho điểm M nằm trong tam giác đều ABC sao cho MA : MB : MC = 3 : 4 : 5. Tính $\widehat{AMB}$.

Chương II ĐA GIÁC – DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Chuyên đề 1
ĐA GIÁC. ĐA GIÁC ĐỀU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.
2. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.
3. *Bổ sung*

   • Tổng các góc trong của đa giác n cạnh (n > 2) là $(n-2).180^o$

   • Số đường chéo của một đa giác n cạnh (n > 2) là $\frac{(n-3).n}{2}$.

   • Tổng các góc ngoài của đa giác n cạnh (n > 2) là 360° (tại mỗi đỉnh chỉ chọn một góc ngoài).

   • Trong một đa giác đều, giao điểm O của hai đường phân giác của hai góc là tâm của đa giác đều. Tâm O cách đều các đỉnh, cách đều các cạnh của đa giác đều. Có một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh của đa giác đều gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho ngũ giác đều ABCDE và một điểm P sao cho DPE đều. Tính $\widehat{APC}$.

Giải. Ta xét hai trường hợp :

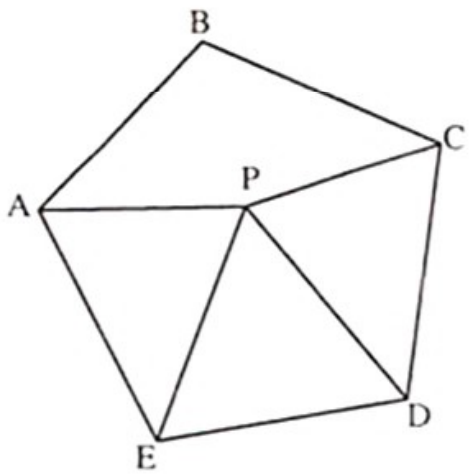
• Nếu P ở trong ngũ giác (h.48) thì :

$\widehat{AEP} = \widehat{CDP} = 108^o - 60^o = 48^o$.

Từ ΔAEP ; ΔCDP cân ta có

$\widehat{APE} = \widehat{CPD} = \left(180^o - 48^o\right) : 2 = 66^o$.

Vậy $\widehat{APC} = 360^o - 60^o - 2.66^o = 168^o$.



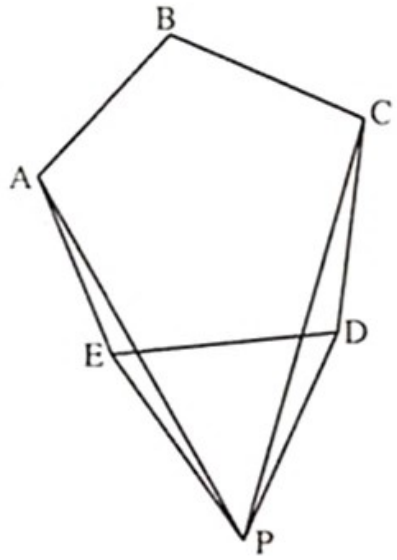
Hình 48

• Nếu P ở phía ngoài ngũ giác (h.49) thì :

$\widehat{AEP} = \widehat{CDP} = 108^o + 60^o = 168^o$

$\Rightarrow \widehat{APE} = \widehat{CPD} = \left(180^o - 168^o\right) : 2 = 6^o.$

Vậy $\widehat{APC} = 60^o - 2.6^o = 48^o$.



Hình 49

Ví dụ 2. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M là trung điểm EF và N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Giải. (h.50) Gọi I, K là trung điểm của AB,CD. Ta có BCNI là hình bình hành.

$\Rightarrow$ BI // CN, BI = CN $\Rightarrow$ AI // CN ; AI = CN

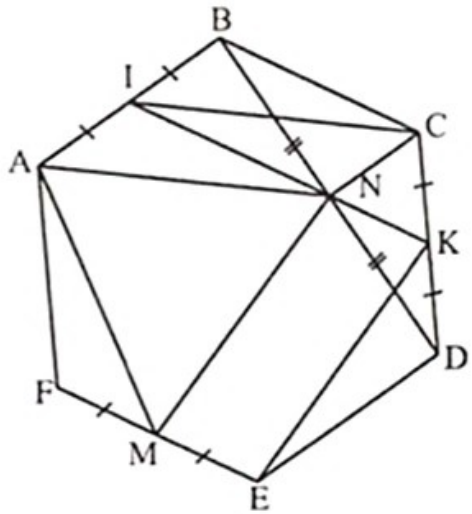
$\Rightarrow$ AICN là hình bình hành $\Rightarrow$ CI = AN

• Ta có MNKE là hình bình hành, suy ra MN = KE.

• Mặt khác : $\Delta BCI = \Delta DEK = \Delta FAM$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ CI = EK = MA

$\Rightarrow$ AN = MN = AM hay ΔAMN đều.



Hình 50

Ví dụ 3. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

Giải (h.51). Áp dụng tính chất về quan hệ các cạnh của tam giác, ta có :

AB+BC+CD+DE+EA<(AN+NB)+(BP+PC)+(CQ+QD)+(DK+KE)+(EM+MA).

Mặt khác : AN + PC < AC

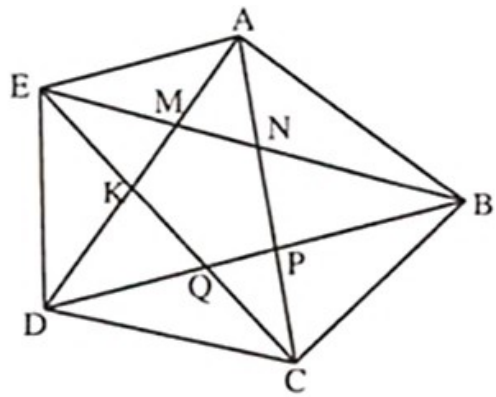
BP + DQ < BD

CQ + KE < CE

DK + MA < DA

EM + NB < EB.

Suy ra điều phải chứng minh.



Hình 51

Nhận xét. Những bài toán về bất đẳng thức về độ dài, ta nên đưa về bất đẳng thức tam giác.

C. BÀI TẬP

2.1. Cho ngũ giác lồi ABCDE. Gọi M, N, P, R H và K lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DE, MP và NR. Chứng minh rằng HK song song với AE và $HK = \frac{1}{4}AE$.

2.2. Cho ngũ giác lồi ABCDE, gọi M, P, N, Q lần lượt là các trung điểm AB, BC, DE, EA. Chứng minh MN đi qua trung điểm PQ khi và chỉ khi MN // CD.

2.3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và điểm M bất kì nằm trong tam giác. Gọi A_1 ; B_1 ; C_1 là các điểm đối xứng với M lần lượt qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh AA_1 ; BB_1 ; CC_1 đồng quy ;

b) Xác định vị trí của M để hình lục giác $AB_1CA_1BC_1$ có các cạnh bằng nhau.

2.4. Cho lục giác lồi ABCDEF. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF và R, S, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AF, BC, DE. Chứng minh rằng hai tam giác MNP và RSQ trọng tâm trùng nhau.

2.5. Một đa giác lồi có tất cả các đường chéo bằng nhau. Hỏi đa giác có thể có nhiều nhất bao nhiêu cạnh ?

2.6. Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi luôn có thể chọn được ba đường chéo để từ đó dựng được một tam giác.

2.7. Cho lục giác lồi ABCDEF có độ dài các cạnh đều bằng 1. Chứng minh rằng trong ba đoạn AD, BE, CF tồn tại một đoạn có độ dài không lớn hơn 2.

2.8. Một lục giác lồi có tất cả các góc trong bằng nhau. Chứng minh hiệu giữa các cặp cạnh đối diện thì bằng nhau.

2.9. Cho ngũ giác lồi ABCDE có các cạnh bằng nhau và các góc trong đều bé hơn 120°. Chứng minh rằng các góc của ngũ giác lồi này đều là góc tù.

2.10. Cho đa giác đều 9 cạnh. Người ta đánh dấu mỗi đỉnh của đa giác bằng màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh tồn tại 3 đỉnh của tam giác cân được đánh cùng màu.

2.11. Một ngũ giác đều có 5 đường chéo và nhóm 5 đường chéo này chỉ có một loại độ dài (ta gọi một loại độ dài là một nhóm các đường chéo có độ dài bằng nhau). Một lục giác đều có 9 đường chéo và nhóm 9 đường chéo này có hai loại độ dài khác nhau. Xét một đa giác (lồi) đều có 50 cạnh. Hỏi khi đó nhóm các đường chéo có bao nhiêu loại độ dài khác nhau ?

2.12. Cho đa giác đều 2015 cạnh. Hỏi có bao nhiêu đa giác đều có các đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho ?

Chuyên đề 2
DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một số dương có các tính chất sau :

- Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
- Hình vuông cạnh có độ dài bằng 1 thì có diện tích là 1.

2. Các công thức tính diện tích đa giác

- Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó

  $S = ab$ (a, b là kích thước hình chữ nhật)

- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó

  $S = a^2$ (a là độ dài cạnh hình vuông)

- Diện tích hình vuông có đường chéo bằng d là $\frac{1}{2}d^2$.
- Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông

  $S = \frac{1}{2}ab$ (a, b là độ dài hai cạnh góc vuông)

- Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó

  $S = \frac{1}{2}ah$ (a, h là độ dài cạnh và đường cao tương ứng)

- Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao :

  $S = \frac{1}{2}(a + b)h$ (a, b là độ dài hai đáy, h là độ dài đường cao)

- Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó :

  $S = ah$ (a, h là độ dài một cạnh và đường cao tương ứng)

Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo :

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$ (d_1 ; d_2 là độ dài hai đường chéo tương ứng).

• Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \text{ (} d_1 \text{ ; } d_2 \text{ là độ dài hai đường chéo tương ứng).}$$

3. Bổ sung

• Hai tam giác có chung một cạnh (hoặc một cặp cạnh bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao ứng với cạnh đó.

• Hai tam giác có chung một đường cao (hoặc một cặp đường cao bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai cạnh ứng với đường cao đó.

• ABCD là hình thang (AB // CD). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O thì $S_{AOD} = S_{BOC}$.

• Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

• Hai hình chữ nhật có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.

• Tam giác đều cạnh a có diện tích là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có diện tích là S. Trên cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho AM = 2.BM, BN = 2.NC, CP = 2.PA. Tính diện tích tam giác MNP theo S.

Giải (h.52) Áp dụng tỉ số diện tích của hai tam giác có chung đường cao, ta có :

$$BN = \frac{2}{3}BC \Rightarrow S_{ABN} = \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3}S$$

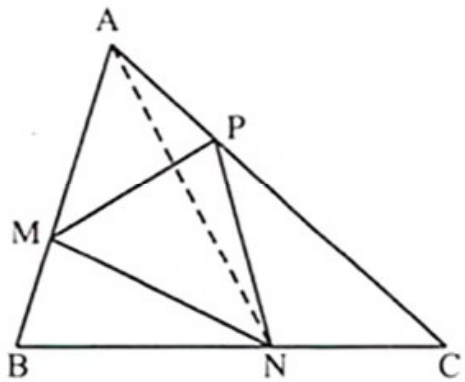
$$BM = \frac{1}{3}AB \Rightarrow S_{BMN} = \frac{1}{3}S_{ABN} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S = \frac{2}{9}S$$

Tương tự như vậy ta có :

$$S_{AMP} = \frac{2}{9}S \text{ ; } S_{CNP} = \frac{2}{9}S.$$

Suy ra

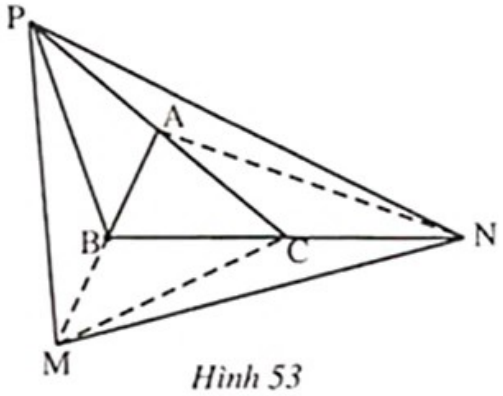
$$S_{MNP} = S_{ABC} - S_{AMP} - S_{BNM} - S_{CNP} = \frac{1}{3}S$$



Hình 52

Ví dụ 5. Cho ΔABC, trên tia đối của các tia BA, CB, AC lấy M, N, P sao cho BM = BA, CN = CB, AP = AC. Chứng minh $S_{MNP} = 7S_{ABC}$.

Giải (h.53) ΔABC và ΔANC có chung đường cao kẻ từ A và BC = CN nên $S_{ABC} = S_{ACN}$.



Hình 53

Tương tự, ta có :

$S_{APN} = S_{ACN} \Rightarrow S_{APN} = S_{ABC}$

$S_{PMB} = S_{PAB} = S_{ABC}$;

$S_{MNC} = S_{MBC} = S_{ABC}$

Mà $S_{MNP} = S_{ABC} + S_{ACN} + S_{ANP} + S_{APB} + S_{BPM} + S_{BCM} + S_{CNM}$.

Do đó : $S_{MNP} = 7.S_{ABC}$.

Nhận xét

• Nên nhớ tính chất : Đường trung tuyến của tam giác chia tam giác đó thành hai phần có diện tích bằng nhau.

• Vận dụng kĩ thuật trên, có thể làm được bài toán sau : Cho tứ giác ABCD, trên tia đối của các tia AD, BA, CB, DC lấy M, N, P, Q sao cho AM = AD, BN = BA, CP = CB, DQ = CD. Chứng minh $S_{MNPQ} = 5S_{ABCD}$.

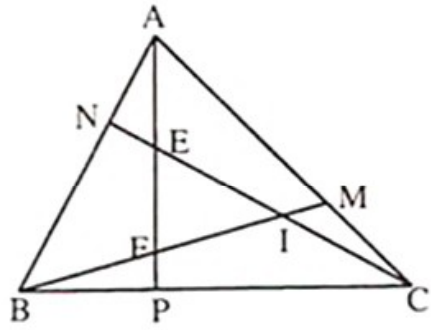
Ví dụ 6. Cho ΔABC. Lấy điểm M, N, P lần lượt thuộc cạnh AC, AB, BC sao cho $\frac{CM}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$. Gọi I là giao điểm của BM, CN. Gọi E là giao điểm của CN, AP. Gọi F là giao điểm của AP, BM. Chứng minh : $S_{EIF} = S_{IMC} + S_{FBP} + S_{NEA}$

Giải (h.54) Áp dụng tính chất hai tam giác có chung đường cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy ứng với đường cao đó, ta có :

Ta có : $BP = \frac{1}{3}BC \Rightarrow S_{ABP} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Tương tự, ta có : $S_{BMC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$;

$S_{CAN} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.



Hình 54

Suy ra : $S_{ABP} + S_{BMC} + S_{CNA} = S_{ABC}$

hay $S_{ANE} + S_{BNEF} + S_{BFP} + S_{BFP} + S_{CPFI} + S_{CMI} + S_{CMI} + S_{MIEA} + S_{ANE}$

$= S_{ANE} + S_{BNEF} + S_{BFP} + S_{CPFI} + S_{CMI} + S_{MIEA} + S_{EFI}$

Vậy : $S_{ANE} + S_{BFP} + S_{CMI} = S_{EFI}$.

Nhận xét. Kĩ thuật của bài là vận dụng tính chất hai tam giác có chung đường cao thì số diện tích bằng tỉ số hai đáy ứng với đường cao đó, và lưu ý : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$. Dựa vào kĩ thuật đó, có thể giải được bài sau : Cho ΔABC. Lấy điểm M, N, P lần lượt thuộc cạnh AC, AB, BC sao cho $\frac{CM}{AC}=\frac{1}{3}$; $\frac{AN}{AB}=\frac{1}{6}$ và BP = CP. Gọi I là giao điểm của BM, CN. Gọi E là giao điểm của CN, AP. Gọi F là giao điểm của AP, BM. Chứng minh : $S_{EIF}=S_{IMC}+S_{FBP}+S_{NEA}$.

Ví dụ 7. Cho ΔABC vuông cân tại A có BC = 36cm. Vẽ hình chữ nhật MNPQ sao cho $M\in AB$, $Q\in AC$, $P, N\in BC$. Xác định vị trí của N và P để diện tích hình chữ nhật MNPQ lớn nhất.

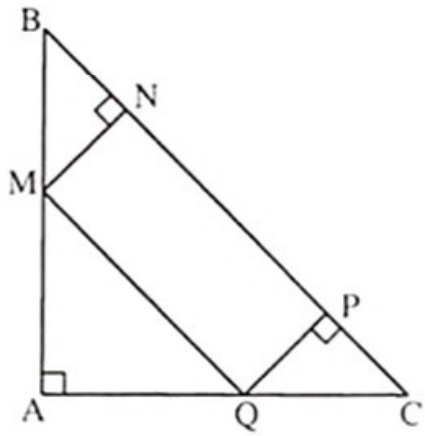
Giải (h.55). Đặt MN = NB = x thì PQ = CP = x và PN = 36 – 2x. Suy ra diện tích MNPQ là :

$$S = NP.QP = x.(36-2x)$$

$$S = 36x - 2x^2$$

hay $S = 162 - 2.(9-x)^2 \le 162$ (dấu bằng xảy ra khi x = 9).

Vậy diện tích của hình chữ nhật MNPQ lớn nhất là $162cm^2$ khi BN = CP = 9(cm).



Hình 55

C. BÀI TẬP

2.13. Cho hình thang ABCD (BC là đáy nhỏ). Gọi I là trung điểm của CD. Qua I kẻ đường thẳng d song song với AB. Kẻ AH và BE vuông góc với d. Chứng minh $S_{ABCD}=S_{ABEH}$.

2.14. Cho hình thang cân ABCD (AB// CD) có AC = 8cm, $\widehat{BDC}=45^o$. Tính diện tích hình thang ABCD.

2.15. Cho hình thang ABCD có hai đáy AB = 5cm, CD = 15cm và hai đường chéo là AC = 16cm, BD = 12cm. Tính diện tích hình thang ABCD.

2.16. Lấy 4 điểm ở miền trong của một tứ giác để cùng với bốn đỉnh ta được 8 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích tứ giác là 1. Chứng minh rằng : tồn tại một tam giác có ba đỉnh lấy từ 8 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{10}$. Tổng quát hóa bài toán cho n–giác lồi với n điểm nằm trong đa giác đó.

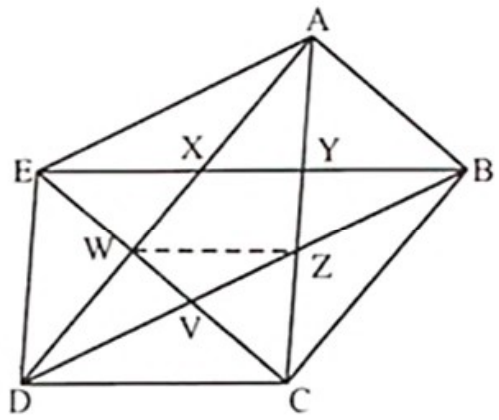
(Tuyển sinh lớp 10 chuyên THPT Chu Văn An, Hà Nội – Amsterdam năm học 2003– 2004)

2.17. Cho tam giác ABC. M, N tương ứng là trung điểm của các đoạn CA ; CB. I là điểm bất kì trên đường thẳng MN ($I \neq M$; $I \neq N$). Chứng minh rằng trong ba tam giác IBC, ICA, IAB có một tam giác mà diện tích của nó bằng tổng các diện tích của hai tam giác còn lại.

2.18. Cho hình bình hành ABCD có diện tích là S. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi N là giao điểm AM và BD. Tính diện tích tứ giác MNDC theo S.

2.19. Cho hình thang có độ dài hai đường chéo là 3cm và 5cm. Độ dài đoạn nối trung điểm hai đáy là 2cm. Tính diện tích hình thang.

2.20. Ta nói ABCDE là ngũ giác đặc biệt nếu mỗi đường chéo song song với một cạnh tương ứng (h.56). Nói cách khác BD // EA, EB// DC, AC// ED, CE// BA và DA// CB. Gọi X, Y, Z, V, W là giao điểm các đường chéo như hình vẽ. Chứng minh rằng nếu ABCDE là ngũ giác đặc biệt thì 5 tam giác AXY, BYZ, CZV, DVW và EWX có diện tích bằng nhau và bản thân ngũ giác XYZVW cũng là ngũ giác đặc biệt.



Hình 56

2.21. Cho tam giác ABC nhọn. Xác định vị trí điểm M nằm trong tam giác sao cho AM. BC + BM. CA + CM. AB đạt giá trị nhỏ nhất.

2.22. Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA tương ứng là a, b, c, d. Chứng minh rằng :

a) $S_{ABCD} \leq \frac{1}{4}(a + c).(b + d)$;

b) $S_{ABCD} \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

2.23. Cho hình bình hành ABCD. Lấy M thuộc cạnh AB ; N thuộc cạnh CD. Gọi P là giao điểm của AN và DM ; Q là giao điểm của BN và CM. Chứng minh :

a) $S_{APM} + S_{MBQ} = S_{DPN} + S_{CQN}$.

b) $S_{MNPQ} = S_{ADP} + S_{BCQ}$.

2.24. Cho M, N, P lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CA của ΔABC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{AC} = m$. Xác định m để ΔMNP có diện tích nhỏ nhất.

2.25. Cho tam giác ABCD có M và N lần lượt là trung điểm AB và CD. Gọi P là giao điểm AN và DM, Q là giao điểm của BN và CM. Chứng minh :

$$S_{APD} + S_{BQC} = S_{MPNQ}.$$

2.26. Chứng minh rằng hai hình chữ nhật bằng nhau kích thước a × b được xếp sao cho chúng cắt nhau tại 8 điểm thì diện tích phần chung lớn hơn nửa diện tích một hình chữ nhật.

2.27. Tam giác ABC có BC = 6cm. Lấy điểm M trên cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AC$.

Xác định vị trí điểm N trên cạnh BC sao cho MN chia tam giác ABC thành hai phần : AMNB có diện tích gấp ba lần diện tích CMN.

2.28. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên cạnh AB lấy hai điểm E, G sao cho $EG = \frac{1}{5}AB$ (E nằm giữa B và G). Trên cạnh CD lấy hai điểm F, H sao cho $FH = \frac{1}{3}CD$ (F nằm giữa H và C). Gọi P là giao điểm của EH và FG. Biết rằng diện tích tam giác PEG nhỏ hơn diện tích tam giác PHF là $2cm^2$. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

Chuyên đề 3
PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Ta đã biết một số công thức tính diện tích của đa giác như công thức tính diện tích hình tam giác, hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi,... Khi biết độ dài của một số yếu tố, ta có thể tính được diện tích của những hình ấy. Ngược lại nếu biết quan hệ diện tích của hai hình chẳng hạn biết hai tam giác có diện tích bằng nhau và có hai đáy bằng nhau thì suy ra được các chiều cao tương ứng bằng nhau. Như vậy các công thức tính diện tích cho ta các quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng.

2. Để so sánh hai độ dài nào đó bằng phương pháp diện tích, ta có thể làm theo các bước sau :

- Xác định quan hệ diện tích giữa các hình.
- Sử dụng các công thức diện tích để biểu diễn mối quan hệ đó bằng một đẳng thức có chứa các độ dài.
- Biến đổi đẳng thức vừa tìm được ta có quan hệ về độ dài giữa hai đoạn thẳng cần so sánh.

3. Một số biện pháp thực hiện :

• Sử dụng trực tiếp công thức tính diện tích tam giác.

• Sử dụng tính chất : Nếu hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số hai đáy tương ứng bằng tỉ số hai diện tích. Ngược lại, nếu hai tam giác có cùng đáy thì tỉ số hai chiều cao tương ứng bằng tỉ số hai diện tích.

• Sử dụng tính chất : Nếu một tam giác và một hình bình hành có cùng đáy và cùng chiều cao (ứng với đáy đó) thì diện tích tam giác bằng nửa diện tích hình bình hành.

4. Ngoài ra có thể chứng minh hai bài toán cơ bản sau bằng tỉ số diện tích để vận dụng.

• Cho tam giác ABC. Trên AB, AC lấy M, N. Chứng minh rằng : $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM.AN}{AB.AC}$

• Cho tam giác ABC và MNP có $\widehat{A} = \widehat{M}$. Chứng minh rằng : $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{MN.MP}{AB.AC}$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC thoả mãn $a \geq b$. Chứng minh rằng : $a + h_a \geq b + h_b$.

Giải. Ta có $h_a \leq b$ nên $2S = ah_a \leq ab$.

Xét $a + h_a - (b + h_b) = a + 2\frac{S}{a} - 2\frac{S}{b} = (a - b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right)$.

Mà $a \geq b$ và $2S \leq ab$ nên $(a - b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) \geq 0$.

Vậy $a + h_a \geq b + h_b$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b$ hoặc $2S = ab$

Nhận xét. Từ bài toán trên, ta có thể làm được bài toán sau :

• Nếu $a + h_a = b + h_b$ thì tam giác ABC là cân hoặc vuông.

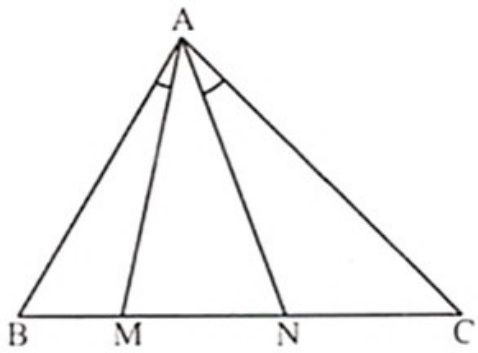
• Nếu $a + h_a = b + h_b = c + h_c$ thì tam giác ABC là đều.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. Chứng minh rằng $\frac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Giải (h.57) $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ (gt)

$\Rightarrow \dfrac{S_{MAB}}{S_{NAC}} = \dfrac{AB.AM}{AC.AN}$.

Mà $\dfrac{S_{MAB}}{S_{NAC}} = \dfrac{BM}{NC}$ (hai tam giác có chung đường cao hạ từ A) nên $\dfrac{AB.AM}{AC.AN} = \dfrac{BM}{NC}$.



Hình 57

Tương tự : Từ $\widehat{NAB} = \widehat{MAC}$, ta cũng có $\dfrac{AB.AN}{AC.AM} = \dfrac{BN}{MC}$ (2)

Từ (1) và (2) nhân vế với vế ta được : $\dfrac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

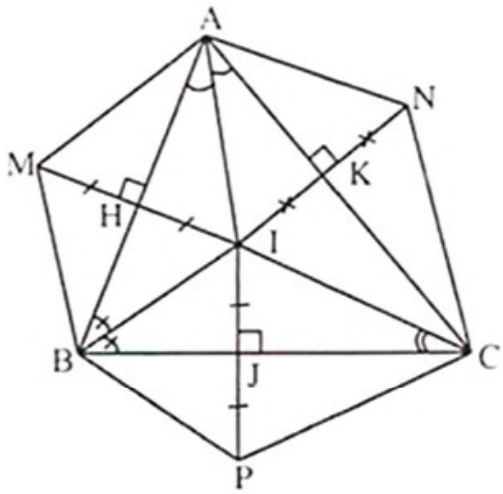
Nhận xét. Có thể chứng minh được bài toán đảo của bài toán trên bằng ý tưởng tương tự : Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $\dfrac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$. Chứng minh rằng $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng :

$$\frac{AI^2}{AB.AC} + \frac{BI^2}{BA.BC} + \frac{CI^2}{CA.CB} = 1.$$

Giải (h.58). Gọi M ; N ; P là điểm đối xứng của I qua AB, AC, BC.

Gọi IM giao AB tại H ; IN giao AC tại K ; IP giao BC tại J.



Hình 58

Ta có $\widehat{MAI} = \widehat{BAC}\left(= 2.\widehat{BAI}\right)$ nên :

$$\frac{S_{AMI}}{S_{ABC}} = \frac{AM.AI}{AB.AC} \text{ hay } \frac{AI^2}{AB.AC} = \frac{S_{AHIK}}{S_{ABC}} \quad (1)$$

Tương tự, ta có : $\dfrac{BI^2}{BA.BC} = \dfrac{S_{BJIH}}{S_{ABC}}$ (2)

$$\dfrac{CI^2}{CB.CA} = \dfrac{S_{CKIJ}}{S_{ABC}} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

C. BÀI TẬP

2.29. Cho tam giác ABC. Trên AB lấy điểm D sao cho BD = 3.DA. Trên CB lấy điểm E sao cho BE = 4.EC. Gọi F là giao điểm của AE và CD. Chứng minh rằng FD = FC.

2.30. Cho tam giác ABC đều, điểm O tùy ý nằm trong tam giác. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ O tới các cạnh của tam giác không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

2.31. Cho ΔABC có ba cạnh là a, b, c và độ dài ba đường cao tương ứng là h_a ; h_b; h_c. Từ điểm O bất kì trong tam giác vẽ các đoạn thẳng có độ dài x, y, z vuông góc với a, b, c. Chứng minh : $\dfrac{x}{h_a} + \dfrac{y}{h_b} + \dfrac{z}{h_c} = 1$.

2.32. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tính giá trị biểu thức : $P = \dfrac{AH}{AD} + \dfrac{BH}{BE} + \dfrac{CH}{CF}$.

2.33. Cho ΔABC và điểm M nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt cạnh đối diện của ΔABC tại D, E, F. Chứng minh $\dfrac{AM}{AD} + \dfrac{BM}{BE} + \dfrac{CM}{CF} = 2$.

2.34. Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối không song song. AB cắt CD tại E ; AD cắt BC tại F. Gọi I ; J ; K lần lượt là trung điểm AC ; BD ; EF. Chứng minh rằng I ; J ; K thẳng hàng.

2.35. Một đường thẳng d chia tam giác ABC cho trước thành hai phần có diện tích bằng nhau và chu vi bằng nhau. Chứng minh rằng đường thẳng d đi qua giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC.

2.36. Cho $\widehat{xOy} = 90^o$ có tia Oz là tia phân giác. Lấy điểm P cố định thuộc Oz ($P \neq O$). Qua P kẻ đường thẳng d bất kì cắt Ox, Oy tại M ; N. Chứng minh rằng, khi d thay đổi thì $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{ON}$ không đổi.

2.37. Qua đỉnh A của tam giác ABC vẽ một đường thẳng d sao cho tổng khoảng cách từ các đỉnh B và C đến đó là nhỏ nhất.

2.38. Cho hình bình hành ABCD. Trên BC lấy điểm I và trên AB lấy điểm K sao cho AI = CK. Gọi O là giao điểm của AI và CK.Chứng minh OD là tia phân giác của góc AOC.

2.39. Trong tam giác ABC nhọn, gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao ứng với cạnh BC, CA, AB. Gọi x, y, z là khoảng cách từ điểm M thuộc miền trong tam giác đến BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$\min\{h_a, h_b, h_c\} \le x + y + z \le \max\{h_a, h_b, h_c\}.$$

2.40. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác trong. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

2.41. Cho ΔABC và điểm M nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt cạnh đối diện của ΔABC tại D, E, F. Chứng minh rằng

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA} = 1 \text{ (Định lý Xê-va).}$$

2.42. Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy E, F, G, H sao cho EG không song song với AD. Biết diện tích EFGH bằng nửa diện tích hình bình hành ABDC. Chứng minh HF song song với CD.

2.43. Cho ΔABC, trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với BC, cắt cạnh AB, AC và AM lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng FD = FE.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I

1.1. a) $6x^2 - 25ax + a^2$; b) $-14x^2 + 33xy - 32y^2$.

1.2. $(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + bx = x^2 + (a + b)x + ab$.

a) $x^2 + 7x + 10$; b) $x^2 - 11x + 28$;

c) $x^2 + 5x - 24$; d) $x^2 - 8x - 9$.

1.3. Gọi a, b là hai số nguyên.

Ta có $(x + a)(x + b) = x^2 + 11x + m$ với mọi x.

$$\Leftrightarrow x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 11x + m \text{ với mọi } x \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ ab = m. \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên a, b cùng dấu. Mặt khác $a + b = 11 > 0$ nên a, b là các số nguyên dương.

Giả sử $a \le b$, ta có :

a	1	2	3	4	5
b	10	9	8	7	6
m	10	18	24	28	30

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là 10 ; giá trị lớn nhất của m là 30.

1.4. a) $(5x - 3)(2x - c) = ax^2 + bx + 21$ với mọi x

$\Leftrightarrow 10x^2 - (5c + 6)x + 3c = ax^2 + bx + 21$ với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ -(5c + 6) = b \\ 3c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = -41 \\ c = 7. \end{cases}$$

b) $(ax + 4)(x^2 + bx - 1) = 9x^3 + 58x^2 + 15x + c$ với mọi x

$\Leftrightarrow ax^3 + (ab + 4)x^2 + (4b - a)x - 4 = 9x^3 + 58x^2 + 15x + c$ với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ ab + 4 = 58 \\ 4b - a = 15 \\ c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 6 \\ c = -4. \end{cases}$$

1.5. $A = 3x^{2n} - 3x^{n+1}y^n + 3x^{n+1}y^n - y^{2n} = 3x^{2n} - y^{2n}$.

Các biến x và y được nâng lên *luỹ thừa chẵn* nên khi thay các giá trị của x và y bởi số đối của chúng thì giá trị của biểu thức A vẫn không đổi.

1.6. Gọi độ dài một cạnh của khu đất là x (mét) thì độ dài cạnh kề với nó là 50 – x.

Diện tích khu vườn là $S_1 = x(50 - x)$.

Nếu chiều dài và chiều rộng cùng giảm đi a (mét) thì diện tích khu đất mới là $S_2 = (x - a)(50 - x - a)$

Diện tích bị giảm đi là :

$$S = S_1 - S_2 = x(50 - x) - (x - a)(50 - x - a)$$

$$S = 50a - a^2.$$

1.7. Xét vế trái T rồi xét vế phải P, ta được :

$T = 2(x + 1)(y + 1) = 2(xy + x + y + 2) = 2xy + 2x + 2y + 2$

$P = (x + y)(x + y + 2) = x^2 + xy + 2x + xy + y^2 + 2$

$= 2xy + 2x + 2y + (x^2 + y^2) = 2xy + 2x + 2y + 2$

Vậy T = P.

1.8. Ta có $(x + y)(x + z) + (y + z)(y + x) = 2(z + x)(z + y)$

$\Leftrightarrow x^2 + xz + xy + yz + y^2 + xy + yz + xz = 2(z^2 + yz + xz + xy)$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) + 2xy + 2yz + 2zx = 2z^2 + 2yz + 2zx + 2xy$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2z^2 \Leftrightarrow z^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

1.9. a) Vì x = 71 nên x – 1 = 70. Thay 70 = x – 1 vào biểu thức A ta được :

$A = x^5 - x^4(x - 1) - x^3(x - 1) - x^2(x - 1) - x(x - 1) + 29$

$= x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x + 29$

$= x + 29 = 71 + 29 = 100.$

b) Vì x = 35 nên x + 1 = 36 ; x + 2 = 37 ; x – 1 = 34 và 2x – 1 = 69.

Do đó $B = x^5 - x^4(x + 1) + x^3(x + 2) - x^2(2x - 1) - x(x - 1) + 15$

$= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + 2x^3 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x + 15$

$= x + 15 = 35 + 15 = 50.$

1.10. Ta có $3(x^2 + x + 2)(x^3 - x^2 - x + 1)$

$= 3(x^5 - 2x^2 - x + 2) = 3x^5 - 6x^2 - 3x + 6$

Đáp số : 0, 0, –6.

Lưu ý : Khi thực hiện phép nhân $3(x^2 + x + 2)(x^3 - x^2 - x + 1)$ nên nhân $(x^2 + x + 2)$ với $(x^3 - x^2 - x + 1)$ trước, sau đó nhân 3 với kết quả.

1.11. a) A = 0 (không phụ thuộc vào giá trị của x)

b) B = 19 (không phụ thuộc vào giá trị của x và y).

1.12. a) $x = -2$; b) $x = -4$.

1.13. $B = (n - 1)(n + 6) - (n + 1)(n - 6)$

$= (n^2 + 5n - 6) - (n^2 - 5n - 6) = 10n \vdots 10$,

1.14. Gọi số nguyên ở giữa là a thì số nguyên liền trước và liền sau số a là a – 1 và a + 1.

Ta có $(a - 1).a + a(a + 1) + (a - 1)(a + 1) = 242$

$\Leftrightarrow a^2 - a + a^2 + a + a^2 + a - a - 1 = 242$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 1 = 242 \Leftrightarrow 3a^2 = 243$

$\Leftrightarrow a^2 = 81 \Leftrightarrow a = \pm 9$.

- Nếu a = 9 thì ba số nguyên liên tiếp là 8, 9, 10.
- Nếu a = –9 thì ba số nguyên liên tiếp là –10, –9, –8.

1.15. a) $P = (x - a)(x - b)(x - c) = (x^2 - bx - ax + ab)(x - c)$

$= x^3 - cx^2 - bx^2 + bcx - ax^2 + acx + abx - abc$

$= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$.

b) $|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$.

- Khi x = 3 thì $P = 3^3 - 12.3^2 + 47.3 - 60 = 0$
- Khi x = –3 thì $P = (-3)^3 - 12.(-3)^2 + 47.(-3) - 60 = -336$.

1.16. Ta có $(a - 1)(a - 2)(a + 3) - (a + 1)(a + 2)(a - 3)$

$= (a^2 - 3a + 2)(a + 3) - (a^2 + 3a + 2)(a - 3)$

$= (a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a + 2a + 6) - (a^3 - 3a^2 + 3a^2 - 9a + 2a - 6) = 12$.

Áp dụng : Đặt a = 150 thì

$T = 149.148.153 - 151.152.147$

$= (a - 1)(a - 2)(a + 3) - (a + 1)(a + 2)(a - 3) = 12$.

Đặt b = 100 thì

$P = 99.98.103 - 101.102.97$

$= (b - 1)(b - 2)(b + 3) - (b + 1)(b + 2)(b - 3) = 12$.

Vậy T = P.

1.17. Vì x, y, z tỉ lệ với a, b, c nên $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$. Suy ra $x = ka$; $y = kb$; $z = kc$.

• Xét vế trái T :

$$T = (k^2a^2 + 2k^2b^2 + 3k^2c^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2)$$
$$= k^2(a^2 + 2b^2 + 3c^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2) = k^2(a^2 + 2b^2 + 3c^2)^2$$

• Xét vế phải P :

$$P = (ax + 2by + 3cz)^2 = (ka^2 + 2kb^2 + 3kc^2)^2$$
$$= [k(a^2 + 2b^2 + 3c^2)]^2 = k^2(a^2 + 2b^2 + 3c^2)^2$$

Vậy T = P.

1.18. a) Rút gọn biểu thức được kết quả là 324 (không phụ thuộc vào biến).

b) Rút gọn biểu thức được kết quả là 90 (không phụ thuộc vào biến).

1.19. a) $413^2 - 413.26 + 13^2 = (413 - 13)^2 = 400^2 = 160000$

b) $[(5^4)^2 + 3]\,[(5^2)^4 - 3] - 5^{16} + 10$

$= (5^8 + 3)(5^8 - 3) - 5^{16} + 10$

$= 5^{16} - 9 - 5^{16} + 10 = 1.$

c) $\frac{(41 + 39)^2}{(41 + 39)(41 - 39)} = \frac{41 + 39}{41 - 39} = \frac{80}{2} = 40.$

1.20. a) Ta có $2014 . 2016 = (2015 - 1)(2015 + 1) = 2015^2 - 1 < 2015^2$. Vậy A < B.

b) $C = 1 + (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)$

$= 1 + (3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) = 1 + (3^8 - 1)(3^8 + 1) = 1 + 3^{16} - 1 = 3^{16}$

$D = (3^3)^5 + (3^5)^3 = 3^{15} + 3^{15} = 2.3^{15} < 3.3^{15} < 3^{16}$. Vậy C > D.

c) Đặt a = 500 thì

$E = (a + 1)^2 + (a + 3)^2 + (a - 4)^2 = 3a^2 + 26.$

$F = (a - 1)^2 + (a - 3)^2 + (a + 4)^2 = 3a^2 + 26.$

Vậy E = F.

d) $M = (x^2 - 2xy + y^2) + (4x^2 + 4x + 1) + (9y^2 - 6y + 1)$

$= (x - y)^2 + (2x + 1)^2 + (3y - 1)^2 \geq 0$ với mọi x, y.

$N = -1$. Do đó M > N.

1.21. Ta có $M - N = (77^2 + 75^2 + ... + 3^2 + 1^2) - (76^2 + 74^2 + ... + 2^2)$

$$= (77^2 - 76^2) + (75^2 - 74^2) + ... + (3^2 - 2^2) + 1^2$$
$$= (77 - 76)(77 + 76) + (75 - 74)(75 + 74) + ... + (3 - 2)(3 + 2) + 1$$
$$= 77 + 76 + 75 + 74 + ... + 3 + 2 + 1$$
$$= \frac{(77 + 1).77}{2} = 3003.$$

Do đó $\frac{M - N - 3}{3000} = \frac{3003 - 3}{3000} = 1.$

1.22. a) $A = [(3x - 2) + (3x + 2)]^2 = (6x)^2 = 36x^2.$

Với $x = -\frac{1}{3}$ thì $A = 4$.

b) $B = [(x + y - 7) - (y - 6)]^2 = (x - 1)^2$

Với $x = 101$ thì $B = 10000$.

Lưu ý : Sau khi rút gọn, biểu thức B không chứa biến y nên giá trị của B không phụ thuộc vào giá trị của y.

c) $C = 4x^2 - 20x + 25 + 2 = (2x - 5)^2 + 2$

Với $x = 52,5$ thì $C = 10002$.

1.23. $D = (x + y)^2 - 6(x + y) - 5 = (-9)^2 - 6.(-9) - 5 = 130.$

1.24. a) $x = 1$; b) $x = \pm 5$.

1.25. $A = [(x^2 + 1) + x]\,[(x^2 + 1) - x]\,(x^4 + 1 - x^2)$

$$= [(x^2 + 1)^2 - x^2]\,[(x^4 + 1) - x^2]$$
$$= [(x^4 + 1) + x^2]\,[(x^4 + 1) - x^2]$$
$$= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = x^8 + x^4 + 1 > 0 \text{ với mọi x.}$$

1.26. a) $M = (25x^2 - 20x + 4) + 3 = (5x - 2)^2 + 3 > 0$ với mọi x.

b) $N = (9x^2 - 6xy + y^2) + y^2 + 1 = (3x - y)^2 + y^2 + 1 > 0$ với mọi x, y.

1.27. a) $P = -(x^2 - 2x + 1) - 1 = -(x - 1)^2 - 1 < 0$ với mọi x.

b) $Q = -(x^2 - 8x + 16) - (y^2 - 4y + 4) - 1$

$= -(x - 4)^2 - (y - 2)^2 - 1 < 0$ với mọi x, y.

1.28. a) $A = (x + 6)^2 + 3 \geq 3$. Vậy minA =3 khi $x = -6$.

b) $B = (3x - 2)^2 - 4 \geq -4$. Vậy minB = -4 khi $x = \frac{2}{3}$.

1.29. a) $C = -(x^2 - 4x + 4) + 5 = -(x - 2)^2 + 5 \leq 5$. Vậy maxC = 5 khi x = 2.

b) $D = -(x^2 + 4xy + 4y^2) - 9x^2 + 3 = -(x + 2y)^2 - 9x^2 + 3 \leq 3$

Vậy maxD = 3 khi x = 0 và y = 0.

1.30. Ở mỗi hình thì cạnh của hình vuông lớn nhất hơn cạnh của hình vuông được tô đậm là 2.

Ở hình 1.n thì cạnh của hình vuông lớn nhất là 2n + 1 ; cạnh của hình vuông được tô đậm là 2n – 1.

Do đó số ô vuông không được tô đậm là :

$$(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n.$$

Nếu n = 75 thì số ô vuông không được tô đậm là :

$$8 \,.\, 75 = 600 \text{ (ô)}.$$

1.31. Ta có $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

1.32. $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

Từ đó suy ra a = b = c.

1.33. Từ (1) suy ra $-4x - 4y - 4z = -6$

Từ (2) suy ra $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 3$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên ta được :

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 4y - 4z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 + (2z - 1)^2 = 0$$

Từ đó ta được $x = y = z = \frac{1}{2}$.

1.34. $(a + b + c + 1)(a - b - c + 1) = (a - b + c - 1)(a + b - c - 1)$

$\Leftrightarrow [(a + 1) + (b + c)]\,[(a + 1) - (b + c)] = [(a - 1) - (b - c)]\,[(a - 1) + (b - c)]$

$\Leftrightarrow (a + 1)^2 - (b + c)^2 = (a - 1)^2 - (b - c)^2$

$\Leftrightarrow (a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (b + c)^2 - (b - c)^2$

$\Leftrightarrow 4a = 4bc \Leftrightarrow a = bc.$

1.35. Ta đặt $x = a^2 + b^2$; $y = c^2 + d^2$

Khi đó $x.y = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)$

$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ (đpcm).

1.36. Gọi bốn số nguyên liên tiếp là $n, n + 1, n + 2, n + 3$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Ta có $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n(n + 3).(n + 1)(n + 2) + 1$

$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1$

$= (n^2 + 3n + 1)^2$ (đpcm).

1.37. Gọi số nguyên ở giữa là x. Các số nguyên liền trước và liền sau của x là $x - 1$ và $x + 1$. Theo đề bài ta có

$$(x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$$

Suy ra $x = 0$ hoặc $x = 4$.

- Nếu $x = 0$ thì ba số nguyên liên tiếp là $-1, 0, 1$.
- Nếu $x = 4$ thì ba số nguyên liên tiếp là $3, 4, 5$.

1.38. a) $x = 8$; b) $x = 7$.

1.39. a) $A = (x^3 - 15x^2 + 75x - 125) + 1 = (x - 5)^3 + 1 = (35 - 5)^3 + 1 = 27001$

b) $B = (x^3 + 18x^2 + 108x + 216) - 200$

$= (x + 6)^3 - 200 = (-26 + 6)^3 - 200 = -8200$

1.40. a) $M = 3x^2 + 3y^2 - (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 1$

$= 3x^2 + 3y^2 - 2(x^2 - xy + y^2) + 1$

$= 3x^2 + 3y^2 - 2x^2 + 2xy - 2y^2 + 1$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 1 = (x + y)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5.$

b) $N = (8x^3 - 12x^2 y + 6xy^2 - y^3) + 3(4x^2 - 4xy + y^2) + 3(2x - y) + 11$

$= (2x - y)^3 + 3(x - y)^2 + 3(2x - y) + 1 + 10 = (2x - y + 1)^3 + 10$

$= (9 + 1)^3 + 10 = 1010.$

1.41. a) $P = 369^3 - 219^3 = (369 - 219)(369^2 + 369.219 + 219^2)$

$= 150.(369^2 + 369.219 + 219^2)$

Ta nhận thấy các số hạng trong dấu ngoặc, mỗi số hạng là tích của hai số chia hết cho 3 nên mỗi số hạng chia hết cho 9, tổng chia hết cho 9.

Do đó $P = 150 . 9k = 1350 . k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vậy $P \vdots 1350$.

b) $Q = 372^3 + 128^3 = (372 + 128)(372^2 - 372.128 + 128^2)$

$= 500(372^2 - 372.128 + 128^2)$

Ta nhận thấy các số hạng trong dấu ngoặc, mỗi số hạng là tích của hai số chia hết cho 4 nên mỗi số hạng chia hết cho 16, tổng chia hết cho 16.

Do đó $Q = 500 . 16k = 8000k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vậy $Q \vdots 8000$.

1.42. Ta có $\dfrac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \dfrac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{(a + c)(a^2 - ac + c^2)}$

Thay $a = b + c$ vào $a^2 - ab + b^2$ và $a^2 - ac + c^2$ ta được :

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{(a + b)\left[(b + c)^2 - (b + c)b + b^2\right]}{(a + c)\left[(b + c^2) - (b + c)c + c^2\right]}$$

$$= \frac{(a + b)(b^2 + 2bc + c^2 - b^2 - bc + b^2)}{(a + c)(b^2 + 2bc + c^2 - bc - c^2 + c^2)} = \frac{a + b}{a + c} \text{ (đpcm).}$$

1.43. Xét vế trái T

$T = [(a + b) + c]^3 - a^3 - b^3 - c^3$

$= (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 - a^3 - b^3 - c^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a^2 + 2ab + b^2)c + 3(a + b)c^3 + c^3 - a^3 - b^3 - c^3$

$= 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2$ (1)

Xét vế phải P

$P = 3(a + b)(bc + ab + b^2 + ac)$

$= 3(abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + ab^2 + bc^2 + abc)$

$= 6abc + 3a^2b + 3ac^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3ab^2 + 3bc^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $T = P$.

Áp dụng : Đặt $x = a + b - c$; $y = a - b + c$; $z = -a + b + c$

Khi đó $x + y + z = a + b + c$.

Vậy $A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

$= 3 . 2a . 2b . 2c = 24abc$.

1.44. a) Thu gọn được $2c^2$. Đáp số 200.

b) Thu gọn được $4(a^2 + b^2 + c^2)$. Đáp số 40.

1.45. Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

Bình phương hai vế ta được $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = 4$

Do đó $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) = 4$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2.\frac{c + b + a}{abc} = 4$$

Thay $a + b + c = abc$ ta được $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 = 4$

Suy ra $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$.

1.46. Xét vế trái T

$T = (x + y)^4 + x^4 + y^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + x^4 + y^4$

$= 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4$. (1)

Xét vế phải P :

$P = 2(x^2 + xy + y^2)^2 = 2(x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3)$

$= 2x^4 + 6x^2y^2 + 2y^4 + 4x^3y + 4xy^3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $T = P$.

1.47. Ta đặt $A = x^4 - 2x^3 - x^2 + ax + b = \left[\pm(x^2 + cx + d)\right]^2 = (x^2 + cx + d)^2$.

$A = x^4 + c^2x^2 + d^2 + 2cx^3 + 2dx^2 + 2cdx$ với mọi x

$\Leftrightarrow A = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2$ với mọi x

Suy ra $\begin{cases} 2c = -2 \\ c^2 + 2d = -1 \\ a = 2cd \\ b = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ d = -1 \\ a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x^2 - x - 1)^2$.

1.48. a) $(x + 3)^4 - (x - 3)^4 - 24x^3 = 108$

Khai triển vế trái ta được :

$(x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81) - (x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81) - 24x^3$

Thu gọn ta được 216x. Do đó $216x = 108 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

b) $(x + 2)^5 - (x - 2)^5 = 64$.

• Khai triển vế trái ta được :

$(x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32) - (x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32)$

• Thu gọn ta được $20x^4 + 160x^2 + 64$

Do đó $20x^4 + 160x^2 + 64 = 64$ hay $20x^2(x^2 + 8) = 0$

Suy ra $x = 0$.

1.49. Ta có $(a + b + c)^2 + 12 = 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) + 12 = 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 12 - 4a - 4b - 4c = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 4a + 4) + (b^2 - 4b + 4) + (c^2 - 4c + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 = 0$

Từ đó ta được $a = b = c = 2$.

1.50. Đáp số : $M - N = 2$.

1.51. a) $(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

b) $(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

c) $(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

1.52. a) Ta có nhận xét rằng với đa thức f(x) cho trước thì f(1) bằng tổng các hệ số của đa thức. Vì vậy để tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển $(4x - 5)^8$ ta chỉ cần tính giá trị của $(4x - 5)^8$ khi cho $x = 1$.

Với x = 1 thì $(4x - 5)^8 = (4.1 - 5)^8 = 1$.

Vậy tổng số các hệ số khi khai triển $(4x - 5)^8$ là 1.

b) Với x = 1 ; y = 1 thì $(5x - 3y)^{10} = (5.1 - 3.1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Vậy tổng số các hệ số khi khai triển $(5x - 3y)^{10}$ là 1024.

1.53. a) $44^{20} = (45 - 1)^{20} = B(45) + (-1)^{20} = 15k + 1$.

Vậy 44^{20} chia cho 15 dư 1.

b) $44^{21} = (45 - 1)^{21} = B(45) + (-1)^{21} = 15k - 1$

Vậy 44^{21} chia cho 15 dư 14.

1.54. Ta có $3^{123} = 3^3 . 3^{120} = 27.(3^4)^{30} = 27.81^{30}$

$= 27.(80 + 1)^{30} = 27.[B(80) + 1^{30}] = 27.80k + 27$ $(k \in \mathbb{N})$

Vậy khi chia 3^{123} cho 80 được số dư là 27.

Nhận xét : Các số có dạng 3^{4k+3} $(k \in \mathbb{N})$ chia cho 80 đều có số dư là 27.

1.55. a) $4x^ny^3 (2x^2 - 3y^2)$.

b) $(a - b)^2 - (b - a)(a - 3b) = (a - b)^2 + (a - b)(a - 3b)$

$= (a - b)(a - b + a - 3b) = (a - b)(2a - 4b) = 2(a - b)(a - 2b)$.

c) $a(a - b)^2(a + b) - (b - a)^2(a^2 - 5ab + b^2)$

$= a(a - b)^2(a + b) - (a - b)^2 (a^2 - 5ab + b^2)$

$= (a - b)^2 (a^2 + ab - a^2 + 5ab - b^2) = (a - b)^2 (6ab - b^2)$

$= b(a - b)^2 (6a - b)$.

1.56. a) $79^2 - 79.29 = 79(79 - 29) = 79.50 \vdots 50$.

b) $216^5 + 4.6^{13} = (6^3)^5 + 4.6^{13} = 6^{15} + 4.6^{13} = 6^{13} (6^2 + 4) = 6^{13}.40 \vdots 40$.

1.57. Gọi số phải tìm là x. Ta có $x^2 = 4x^3$

Suy ra $x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - 4x) = 0$

Do đó hoặc x = 0 hoặc 1 – 4x = 0

Vậy số phải tìm là x = 0 hoặc $x = \frac{1}{4}$.

1.58. A = 217(217 – 143 – 174) = 217(–100) = –21700.

1.59. Ta đặt $\underbrace{11 \ldots 1}_{n} = a$ thì $\underbrace{99 \ldots 9}_{n} = 9a$.

Do đó $9a + 1 = \underbrace{99 \ldots 9}_{n} + 1 = 10^n$.

Vậy $N = \underbrace{44...4}_{n}\ \underbrace{22...2}_{n} = \underbrace{44...4}_{n}\ \underbrace{00...0}_{n} + \underbrace{22...2}_{n}$

$= 4 . \underbrace{11...1}_{n}\ \underbrace{00...0}_{n} + 2 . \underbrace{11...1}_{n} = 4a.10^n + 2a$

$= 2a(2.10^n + 1) = 2a.[2(9a + 1) + 1)$

$= 2a(18a + 3) = 6a(6a + 1).$

Ta thấy 6a và 6a + 1 là hai số nguyên liên tiếp.

Vậy $N = \underbrace{66...6}_{n} \times \underbrace{66...6}_{n-1}7$ hoặc $-\underbrace{66...6}_{n-1}7 \times (-\underbrace{66...6}_{n})$

Lưu ý : Những bài toán có chữ số giống nhau liên tiếp như trên, để dễ biến đổi người ta thường đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$.

1.60. Vì p là số nguyên tố nên 2p + 1 là số lẻ. Do đó x^3 là một số lẻ và x là số lẻ.

Ta đặt $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Khi đó $2p + 1 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$

Vậy $2p = 8k^3 + 12k^2 + 6k \Leftrightarrow p = 4k^3 + 6k^2 + 3k = k(4k^2 + 6k + 3)$

Vì p là số nguyên tố nên k = 1, do đó x = 3.

1.61. a) $(x - 9)(x - 7) + 1 = x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$.

b) $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$

$= (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.

c) $(x^2 + x - 1)^2 + 4x^2 + 4x = (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + 1) + 1 + 4(x^2 + x)$

$= (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 1 = (x^2 + x + 1)^2$.

1.62. a) $(x + 2y - 3)^2 - 4(x + 2y - 3) + 4 = (x + 2y - 3 - 2)^2 = (x + 2y - 5)^2$

b) $(x - y)^3 - 1 - 3(x - y)(x - y - 1) = (x - y - 1)^3$.

(Áp dụng hằng đẳng thức $(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$ trong đó $A = x - y$, $B = 1$).

1.63. $(x^2 + y^2 - 17)^2 - 4(xy - 4)^2$

$= [x^2 + y^2 - 17 - 2(xy - 4)]\ [x^2 + y^2 - 17 + 2(xy - 4)]$

$= (x^2 + y^2 - 2xy - 9)(x^2 + y^2 + 2xy - 25) = [(x - y)^2 - 3^2]\ [(x + y)^2 - 5^2]$

$= (x - y - 3)(x - y + 3)(x + y - 5)(x + y + 5)$.

1.64. a) $(x + 5)^3 = 0 \Rightarrow x = -5$.

b) $(x + 2)^3 + (x - 3)^3 = 0$.

Suy ra $[(x + 2) + (x - 3)]\,[(x + 2)^2 - (x + 2)(x - 3) + (x - 3)^2] = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 - x + 19) = 0.$ (1)

Ta có $x^2 - x + 19 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{75}{4} > 0$ nên từ (1) suy ra $2x - 1 = 0$, do đó $x = \frac{1}{2}$.

1.65. Ta có $x^2 + 102 = y^2$ suy ra $x^2 - y^2 = 102$. (*)

Dễ thấy x và y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Từ (*) ta có

$$(x - y)(x + y) = 102.$$

Vì x và y cùng chẵn hoặc cùng lẻ nên $x - y$ và $x + y$ đều là số chẵn nên tích của chúng chia hết cho 4. Trong khi đó $102 \not\vdots\ 4$. Vậy không tồn tại cặp số nguyên (x ; y) thoả mãn đề bài.

1.66. Ta có $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, suy ra $x^2 - a^2 = b^2 - y^2$.

Do đó $(x - a)(x + a) = (b - y)(b + y)$

Mặt khác, từ $x + y = a + b$ suy ra $x - a = b - y$.

Vì vậy $(x - a)(x + a) = (x - a)(b + y)$ hay $(x - a)(x + a) - (x - a)(b + y) = 0$

$$(x - a)[(x + a) - (b + y)] = 0$$

Suy ra :

- Hoặc $x - a = 0$ do đó $b - y = 0$, dẫn tới $x = a$ và $y = b$.
- Hoặc $(x + a) - (b + y) = 0$ do đó $x + a = b + y$. (1)

Mặt khác $x - a = b - y$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $2x = 2b$, suy ra $x = b$, do đó $y = a$. Vậy $x^n + y^n = a^n + b^n$.

1.67. a) $x^2(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 3)$

b) $2ac(ac - b) - d(ac - b) = (ac - b)(2ac - d)$

c) $3x(4x - y) - 2z(4x - y) = (4x - y)(3x - 2z)$.

1.68. a) $abx^2 - aby^2 - a^2xy + b^2xy = ax(bx - ay) + by(bx - ay) = (bx - ay)(ax + by)$.

b) $x^2 + axy - bxy - aby^2 = x(x + ay) - by(x + ay) = (x + ay)(x - by)$.

1.69. $(abc + bc) + (ab + b) + (ac + c) + (a + 1)$

$= bc(a + 1) + b(a + 1) + c(a + 1) + (a + 1) = (a + 1)(bc + b + c + 1)$

$= (a + 1) . [b(c + 1) + (c + 1)] = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$.

1.70. Đa thức đã cho có 36 hạng tử, nhóm thành bốn nhóm, mỗi nhóm 9 hạng tử.

$A = (x^{35} + x^{34} + ... + x^{27}) + (x^{26} + x^{25} + ... + x^{18})$

$+ (x^{17} + x^{16} + ... + x^{9}) + (x^{8} + x^{7} + ... + 1)$

$A = x^{27}(x^{8} + x^{7} + ... + 1) + x^{18}(x^{8} + x^{7} + ... + 1) + x^{9}(x^{8} + x^{7} + ... + 1)$

$+ (x^{8} + x^{7} + ... + 1)$

$A = (x^{8} + x^{7} + ... + 1)(x^{27} + x^{18} + x^{9} + 1)$

$= (x^{8} + x^{7} + ... + 1)[x^{18}(x^{9} + 1) + (x^{9} + 1)]$

$= (x^{8} + x^{7} + ... + 1)(x^{9} + 1)(x^{18} + 1).$

1.71. Xét vế trái T

$T = x(x + 1)^4 + x(x + 1)^3 + [x(x + 1)^2 + (x + 1)^2]$

$T = x(x + 1)^4 + x(x + 1)^3 + (x + 1)^2 . (x + 1)$

$T = x(x + 1)^4 + x(x + 1)^3 + (x + 1)^3$

$T = x(x + 1)^4 + (x + 1)^3 (x + 1)$

$T = x(x + 1)^4 + (x + 1)^4$

$T = (x + 1)^4 (x + 1)$

$T = (x + 1)^5 = P.$

1.72. $A = (2^{10} - 2^9) - 2^8 - 2^7 - ... - 2^2 - 2 - 1$

$= 2^9(2 - 1) - 2^8 - 2^7 - ... - 2^2 - 2 - 1 = 2^9 - 2^8 - 2^7 - ... - 2^2 - 2 - 1$

$= 2^8(2 - 1) - 2^7 - ... - 2^2 - 2 - 1 = 2^8 - 2^7 - ... - 2^2 - 2 - 1 = ...$

$= 2(2 - 1) - 1 = 2 - 1 = 1.$

1.73. Ta có $x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3 = (x^3 + y^3) + (x^2z - xyz + y^2z)$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2) + z(x^2 - xy + y^2)$

$= (x^2 - xy + y^2)(x + y + z) = (x^2 - xy + y^2) . 0 = 0.$

1.74. a) $x + 2y = xy + 2 \Leftrightarrow x + 2y - xy - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x(1 - y) - 2(1 - y) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - y)(x - 2) = 0$

Do đó hoặc $1 - y = 0$ hoặc $x - 2 = 0$

- Nếu $1 - y = 0 \Leftrightarrow y = 1$ thì x lấy giá trị bất kì
- Nếu $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ thì y lấy giá trị bất kì.

b) $xy = x + y \Leftrightarrow xy + 1 = x + y + 1 \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 1$

$\Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 1 \Leftrightarrow (y - 1)(x - 1) = 1$

Vì $1 = 1 . 1 = (-1)(-1)$ nên có hai trường hợp :

• $x - 1 = 1$ và $y - 1 = 1$ suy ra $x = 2$; $y = 2$

• $x - 1 = -1$ và $y - 1 = -1$ suy ra $x = 0$; $y = 0$.

1.75. Ta có $xy = 2(x + y) \Leftrightarrow xy - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 4$

$\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) = 4 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) = 4$

Vì $x > y$ nên $x - 2 > y - 2$. Do đó $(x - 2)(y - 2) = 4 . 1 = (-1) . (-4)$

Suy ra $\begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 2 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 2 = -1 \\ y - 2 = -4 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$

1.76. Vận dụng các hằng đẳng thức để khai triển các luỹ thừa rồi thu gọn ta được

$A = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + a^2z^2 + c^2x^2 + b^2z^2 + c^2y^2$

$= (a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2) + (b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2) + (c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2)$

$= a^2 (x^2 + y^2 + z^2) + b^2 (x^2 + y^2 + z^2) + c^2 (x^2 + y^2 + z^2)$

$= (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)$.

1.77. a) $5x^2 (x - 1) + 10xy(x - 1) - 5y^2 (1 - x)$

$= 5(x - 1)(x^2 + 2xy + y^2) = 5(x - 1)(x + y)^2$

b) $x^4 (x - y) - y^4 (x - y) = (x - y)(x^4 - y^4)$

$= (x - y)(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = (x - y)^2 (x + y)(x^2 + y^2)$.

c) $x^m (x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^m - 1)$

$= (x - 1)(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + ... + x + 1) = (x - 1)^2 (x^{m-1} + x^{m-2} + ... + x + 1)$.

1.78. a) $2a^{n+2}b^n - 18a^nb^{n+2} = 2a^nb^n (a^2 - 9b^2) = 2a^nb^n (a - 3b)(a + 3b)$.

b) $xy(x^5 - x^3y^2 - x^2y^3 + y^5) = xy[x^3 (x^2 - y^2) - y^3(x^2 - y^2)]$

$= xy(x^2 - y^2)(x^3 - y^3) = xy[(x + y)(x - y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$= xy(x - y)^2(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

c) $x^2y^2z^2 (xyz + 1) - (xyz + 1) = (xyz + 1)(x^2y^2z^2 - 1)$

$= (xyz + 1)^2 (xyz - 1)$.

1.79. a) $x[x^2(x^2+1)^2-7^2] = x[x(x^2+1)-7][x(x^2+1)+7]$

$= x(x^3+x-7)(x^3+x+7).$

b) $(x^2-9)^2+12x(x-3)^2$

$= (x-3)^2(x+3)^2-12x(x-3)^2 = (x-3)^2[(x+3)^2-12x]$

$= (x-3)^2(x^2-6x+9) = (x-3)^2(x-3)^2 = (x-3)^4.$

c) $(x-z)(x+z)-y(2x-y) = x^2-z^2-2xy+y^2 = (x^2-2xy+y^2)-z^2$

$= (x-y)^2-z^2 = (x-y-z)(x-y+z).$

1.80. a) $(x-3y)^2-3^2 = (x-3y-3)(x-3y+3).$

b) $25x^2-(y^2-4y+4) = (5x)^2-(y-2)^2 = (5x-y+2)(5x+y-2).$

c) $(a+b)^2-(x+y)^2 = (a+b+x+y)(a+b-x-y).$

1.81. $A = x^3(x-4)-4x(x-4) = x(x-4)(x^2-4) = x(x-4)(x-2)(x+2).$

Vì x là số chẵn nên $(x-4)(x-2)x(x+2)$ là tích của 4 số chẵn liên tiếp.

1.82. $a(b^2+c^2)-b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-2abc$

$= ab^2+ac^2-bc^2-a^2b+a^2c+b^2c-2abc$

$= (ab^2-a^2b)+(ac^2-bc^2)+(a^2c-2abc+b^2c)$

$= -ab(a-b)+c^2(a-b)+c(a-b)^2 = (a-b)(-ab+c^2+ac-bc)$

$= (a-b)[a(c-b)+c(c-b)] = (a-b)(c-b)(a+c).$

1.83. a) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$= (a+b+c-a)[(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2]-(b^3+c^3)$

$= (b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2+ab+ac+a^2)-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$= (b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc) = 3(b+c)[(a^2+ab)+(ac+bc)]$

$= 3(b+c)[a(a+b)+c(a+b)] = 3(a+b)(b+c)(c+a).$

Vậy $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

Ta được lại kết quả ở bài tập 1.43

Đây cũng là một hằng đẳng thức đáng nhớ.

Hằng đẳng thức trên tương đương với hằng đẳng thức sau :

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a).$$

b) $4ab(a^2-b^2)-6(a^3+a^2b-ab^2-b^3)+9(a^2-b^2)$

$= 4ab(a^2-b^2)-6[a^2(a+b)-b^2(a+b)]+9(a^2-b^2)$

$= 4ab(a^2-b^2)-6(a+b)(a^2-b^2)+9(a^2-b^2) = (a^2-b^2)(4ab-6a-6b+9)$

$= (a+b)(a-b)[2a(2b-3)-3(2b-3)] = (a+b)(a-b)(2b-3)(2a-3).$

1.84. a) $\frac{15}{4}x$; b) $-3y + 2x^2$.

c) $24(x - y)^3 + 18(x - y)^2 - 12(x - y)$.

1.85. a) $C \vdots D \Leftrightarrow \begin{cases} 2n \geq n + 2 \\ 5 \geq n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{2 ; 3 ; 4\}$

b) $M \vdots N \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \geq n \\ n + 1 \geq n \\ n + 3 \geq 6 \\ n \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 8 \\ n \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{6, 7, 8\}$.

1.86. $P = x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2 > 0$ với mọi $x \neq 0$; $y \neq 0$.

1.87. $Q = 2xy - y^2 - 4x^2 = -(4x^2 - 2xy + y^2) = -\left[\left(2x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] < 0$

với mọi $x \neq 0$; $y \neq 0$.

1.88. a) Làm tính chia ta được dư bằng 0.

b) Làm tính chia ta được dư $-6x + 10$.

1.89. Ta có $f(1) = 1 - 6 + 2 + 28 = 25$

$f(-1) = 1 + 6 - 2 + 28 = 33$

$f(2) = 16 - 48 + 4 + 28 = 0$

Do đó dư trong phép chia $f(x)$ cho $x - 1$, $x + 1$, $x - 2$ lần lượt là 25 ; 33 và 0.

1.90. a) $(x - 4)^3 : (x - 4)^2 = x - 4$

b) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) : (x^2 + 3x + 9) = x - 3$.

c) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) : (x + 5) = x^2 - 5x + 25$.

1.91. a) Chia đa thức $6x^2 + 5ax - 4$ cho đa thức $x - 2$ ta được thương là $6x + 5a + 12$ và dư $10a + 20$.

Theo đề bài ta có $10a + 20 = 10$, suy ra $a = -1$.

Cách khác : Gọi thương là Q, ta có :

$$6x^2 + 5ax - 4 = (x - 2).Q + 10.$$

Cho $x = 2$ ta được $24 + 10a - 4 = 10$, suy ra $a = -1$.

b) Chia đa thức $x^4 + 5x^3 - 2x^2 + ax + 40$ cho $(x^2 - 3x + 2)$ ta được thương là $x^2 + 8x + 20$ và dư $(a + 44)x$.

Để phép chia là phép chia hết thì ta phải có $(a + 44)x = 0$ với mọi x.

Suy ra $a + 44 = 0$ hay $a = -44$. Ta có $x^2 + 8x + 20 = (x + 4)^2 + 4 \geq 4$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của thương là 4 khi $x = -4$.

1.92.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + ax^2 + bx \qquad + 5 & x^2 - x + 1 \\ \hline -\ 4x^3 - 4x^2 + 4x \qquad\qquad & 4x + (a+4) \\ \hline (a+4)x^2 + (b-4)x + 5 & \\ -\ (a+4)x^2 - (a+4)x + (a+4) & \\ \hline (a+b)x + (1-a) & \end{array}$$

$A \vdots B \Leftrightarrow (a+b)x + (1-a) = 0$ với mọi $x \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 1-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1. \end{cases}$

Vậy nếu $a = 1$, $b = -1$ thì $A \vdots B$.

Cách khác : dùng phương pháp đồng nhất hệ số.

Ta có nhận xét : hạng tử có bậc cao nhất của đa thức bị chia là $4x^3$; hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia là x^2 do đó hạng tử bậc cao nhất của thương là $4x$. Vậy thương có dạng $4x + m$.

Ta có $4x^3 + ax^2 + bx + 5 = (x^2 - x + 1)(4x + m)$

Khai triển rồi thu gọn vế phải ta được $4x^3 + (m-4)x^2 + (4-m)x + m$.

Do đó : $4x^3 + ax^2 + bx + 5 = 4x^3 + (m-4)x^2 + (4-m)x + m$ với mọi x.

Suy ra $\begin{cases} m-4=a \\ 4-m=b \\ m=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ m=5. \end{cases}$

Vậy nếu $a = 1$, $b = -1$ thì $A \vdots B$.

1.93. a) Thực hiện phép chia ta được thương là $x^2 - 2x - 4$ và dư $(a+14)x + (b-12)$

Để phép chia là phép chia hết ta phải có

Suy ra $\begin{cases} a+14=0 \\ b-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-14 \\ b=12. \end{cases}$

b) Thực hiện phép chia ta được thương là $x^2 + 9x + 18$ và dư $(a+32)x^2 + (b-36)x$.

Để phép chia là phép chia hết ta phải có : $(a+32)x^2 + (b-36)x = 0$ với mọi x.

Suy ra $\begin{cases} a+32=0 \\ b-36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=36. \end{cases}$

1.94. a) Gọi Q là thương, ta có :

$$4x^3 + ax + b = (x-1)(x+1).Q + 2x - 3.$$

Thay $x = 1$ rồi lại thay $x = -1$ vào đẳng thức trên ta được

$$\begin{cases} a+b=-5 \\ -a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-3. \end{cases}$$

Cách khác : Thực hiện phép chia ta được thương là 4x và dư (a + 4)x + b.

Theo đề bài ta có : $(a + 4)x + b = 2x - 3$ với mọi x

Suy ra $\begin{cases} a + 4 = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3. \end{cases}$

b)
$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 2x^2 + ax + b & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\ 5x^3 \qquad\quad + 25x & 5x + 2 \\ \cline{1-1} 2x^2 + (a - 25)x + b & \\ -\ 2x^2 \qquad\qquad + 10 & \\ \cline{1-1} (a - 25)x + (b - 10) & \end{array}$$

Theo đề bài dư là 1 nên : $(a - 25)x + (b - 10) = 1$ với mọi x.

Suy ra $\begin{cases} a - 25 = 0 \\ b - 10 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 25 \\ b = 11. \end{cases}$

1.95. a) Ta có $f(-2) = (-8 + 4 + 3)^{100} + (4 - 10 + 7)^{99} - 2 = (-1)^{100} + 1^{99} - 2 = 0$.

Vậy $f(x) \vdots (x + 2)$.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $f(-1) = 0 + 1^n - 1 = 0$

$$f(-2) = (-1)^{2n} + 0 - 1 = 0$$

nên f(x) chia hết cho $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

1.96. Để đa thức f(x) chia hết cho (x − 1) thì f(1) = 0 hay a + b + 1 = 0.

Suy ra b = −(a + 1) (*)

Khi đó $f(x) = ax^n - (a + 1)x^{n-1} + 1 = ax^n - ax^{n-1} - x^{n-1} + 1$

$= ax^{n-1}(x - 1) - (x^{n-1} - 1) = ax^{n-1}(x - 1) - (x - 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)$

$= (x - 1)[ax^{n-1} - (x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)]$

$= (x - 1) . g(x)$ trong đó $g(x) = ax^{n-1} - (x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)$

$f(x) \vdots (x - 1)^2 \Leftrightarrow$ g(x) nhận x = 1 làm nghiệm.

$\Leftrightarrow g(1) = 0$

$\Leftrightarrow a - (n - 2 + 1) = a - n + 1 = 0$

Do đó a = n − 1.

Thay a = n − 1 vào (*) được b = −(n − 1 + 1) = −n

Vậy a = n − 1 ; b = −n.

1.97. Cho $x = 0$ ta được $f(0, y) = 0y - 0 + y = 0$

Cho $y = 0$ ta được $f(x, 0) = x - 0 - x + 0 = 0$

Cho $x = y$ ta được $f(y, y) = y(y + 1)^n - y(y + 1)^n - y + y = 0$

Do đó $f(x, y)$ chia hết cho $(x - 0)(y - 0)(x - y)$

hay $f(x, y)$ chia hết cho $xy(x - y)$.

1.98. a) Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của $f(x)$ nên $x^3 - 8x^2 + 9x - 2 = (x - 1) . g(x)$

trong đó $g(x) = (x^3 - 8x^2 + 9x - 2) : (x - 1) = x^2 - 7x + 2$.

Do đó $x^3 - 8x^2 + 9x - 2 = (x - 1)(x^2 - 7x + 2)$.

b) Dễ thấy $x = -1$ là nghiệm nên $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1) . g(x)$

trong đó $g(x) = (x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

Vậy $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$.

1.99. Ta có $(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$. Đa thức chia có bậc hai nên đa thức dư có dạng $ax + b$.

Vậy $f(x) = q(x)(x - 2)(x + 1) + ax + b$.

Vì $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 5 nên $f(2) = 5$.

Vì $f(x)$ chia cho $x + 1$ dư 2 nên $f(-1) = 2$. Ta có $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -a + b = 2. \end{cases}$

Suy ra $a = 1$; $b = 3$. Vậy đa thức dư là $x + 3$.

1.100. a) Làm tính chia A cho $2x - 3$ ta được dư là -2. Muốn cho giá trị của A chia hết cho giá trị của $2x - 3$ thì ta phải có $2x - 3 \in Ư(2) = \{\pm 1 ; \pm 2\}$.

$2x - 3$	1	-1	2	-2
$2x$	4	2	5	1
x	2	1	$\frac{5}{2}$ (loại)	$\frac{1}{2}$ (loại)

Vậy khi $x \in \{1 ; 2\}$ thì giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B.

b) Chia đa thức A cho $(3x + 2)$ ta được dư là 7. Muốn cho giá trị của A chia hết cho giá trị của $3x + 2$ thì ta phải có $3x + 2 \in Ư(7) = \{\pm 1 ; \pm 7\}$

$3x + 2$	1	-1	7	-7
$3x$	-1	-3	5	-9
x	$-\frac{1}{3}$ (loại)	-1	$\frac{5}{3}$ (loại)	-3

Các giá trị $-\frac{1}{3}$ và $\frac{5}{3}$ bị loại vì không nguyên.

Vậy khi $x \in \{-1 ; -3\}$ thì giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B.

1.101. a) $(x + 3)(x + 4)$; b) $(x - 3)(x + 11)$;

c) $(x - 3)(x - 6)$; d) $(x + 6)(x - 9)$.

1.102. a) $(4x + 3)(5x - 2)$; b) $(6x - 1)(3x + 4)$;

c) $(3x - 2y)(4x - 5y)$;

d) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^2 = x^4 - x^2y^2 - 4x^2y^2 + 4y^4$

$= x^2(x^2 - y^2) - 4y^2(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2)$

$= (x - y)(x + y)(x - 2y)(x + 2y)$.

1.103. a) $(x^2 - 8)^2 + 36 = x^4 - 16x^2 + 64 + 36$

$= x^4 - 16x^2 + 100 = x^4 + 20x^2 + 100 - 36x^2$

$= (x^2 + 10)^2 - (6x)^2 = (x^2 - 6x + 10)(x^2 + 6x + 10)$.

b) $x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

$= [(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2](x^4 - x^2 + 1)$

$= [(x^2 + 1)^2 - x^2](x^4 - x^2 + 1)$

$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

1.104. Ta có $P = (n^2 - 3)^2 + 16 = n^4 - 6n^2 + 9 + 16$

$= n^4 - 6n^2 + 25 = n^4 + 10n^2 + 25 - 16n^2$

$= (n^2 + 5)^2 - (4n)^2 = (n^2 - 4n + 5)(n^2 + 4n + 5)$

Dễ thấy $n^2 - 4n + 5 < n^2 + 4n + 5$.

Do đó để P là số nguyên tố thì $n^2 - 4n + 5 = 1$ hay $n^2 - 4n + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (n - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 2$. Khi đó $P = 17$ là một số nguyên tố.

1.105. a) $6x^3 - 11x^2 - x - 2$

Nhẩm thấy $x = 2$ là nghiệm nên đa thức chứa nhân tử $x - 2$.

Do đó $6x^3 - 11x^2 - x + 2 = 6x^3 - 12x^2 + x^2 - 2x + x - 2$

$= 6x(x - 2) + x(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(6x^2 + x + 1)$.

b) $4x^3 + 5x^2 + 5x + 1$

Nhẩm thấy $x = -\frac{1}{4}$ là nghiệm nên đa thức chứa nhân tử $x + \frac{1}{4}$ hay nhân tử $4x + 1$.

Do đó $4x^3 + 5x^2 + 5x + 1 = 4x^3 + x^2 + 4x^2 + x + 4x + 1$

$= x^2(4x + 1) + x(4x + 1) + (4x + 1) = (4x + 1)(x^2 + x + 1)$.

1.106. a) $A = 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$

Nhẩm thấy tổng các hệ số bằng 0 nên $x = 1$ là nghiệm. Do đó đa thức chứa nhân tử $x - 1$.

Ta có $A = 3x^4 - 3x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 3x - 5x + 5$

$= 3x^3(x - 1) + 5x^2(x - 1) - 3x(x - 1) - 5(x - 1)$

$= (x - 1)(3x^3 + 5x^2 - 3x - 5) = (x - 1)[x^2(3x + 5) - (3x + 5)]$

$= (x - 1)(3x + 5)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1)(3x + 5)$.

b) $B = x^4 - 5x^3 + 10x + 4$. Nhẩm thấy $x = -1$ là nghiệm nên đa thức chứa nhân tử $x + 1$. Do đó

$B = x^4 + x^3 - 6x^3 - 6x^2 + 6x^2 + 6x + 4x + 4$

$= x^3(x + 1) - 6x^2(x + 1) + 6x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x^3 - 6x^2 + 6x + 4)$

Nhân tử thứ hai có nghiệm $x = 2$ nên chứa nhân tử $x - 2$. Do đó :

$x^3 - 6x^2 + 6x + 4 = x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x - 2x + 4$

$= x^2(x - 2) - 4x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 4x - 2)$

Vậy $B = (x + 1)(x - 2)(x^2 - 4x - 2)$.

c) $C = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x^2 + 3x + 2$

$= x^2(x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 3x + 2) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 1)$

$= (x + 1)(x + 2)(x^2 + 1)$.

Lưu ý : Có thể nhẩm thấy $x = -1$; $x = -2$ là nghiệm nên có thể có cách tách khác.

1.107. a) $4x^2 - 12x - y^2 + 8y - 7 = (4x^2 - 12x + 9) - (y^2 - 8y + 16)$

$= (2x - 3)^2 - (y - 4)^2 = (2x - y + 1)(2x + y - 7).$

b) $2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$

$= 2x^4 - 2x^3y + x^3y + 2x^2y^2 + 2x^2y^2 - x^2y^2 + xy^3 - 2xy^3 + 2y^4$

$= (2x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2) + (x^3y + x^2y^2 + xy^3) + (2x^2y^2 - 2xy^3 + 2y^4)$

$= 2x^2(x^2 - xy + y^2) + xy(x^2 - xy + y^2) + 2y^2(x^2 - xy + y^2)$

$= (x^2 - xy + y^2)(2x^2 + xy + 2y^2).$

1.108. $(x + y)^4 + x^4 + y^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + x^4 + y^4$

$= 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 = 2(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4)$

$= 2[(x^4 + x^3y + x^2y^2) + (x^3y + x^2y^2 + xy^3) + (x^2y^2 + xy^3 + y^4)]$

$= 2[x^2(x^2 + xy + y^2) + xy(x^2 + xy + y^2) + y^2(x^2 + xy + y^2)]$

$= 2(x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$

Ta thấy lại kết quả này ở bài 1.46.

1.109. $A = x^{10} + x^9 + x^8 + ... + x^2 + x - 10$

$= (x^{10} - 1) + (x^9 - 1) + (x^8 - 1) + ... + (x^2 - 1) + (x - 1)$

Phân tích từng nhóm thành nhân tử :

$x^{10} - 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1)$

$x^9 - 1 = (x - 1)(x^8 + x^7 + ... + x + 1)$

$x^8 - 1 = (x - 1)(x^7 + ... + x + 1)$

...

$x - 1 = (x - 1) . 1$

Vậy $A = (x - 1)(x^9 + 2x^8 + 3x^7 + ... + 9x + 10)$

Cách khác : Nhẩm thấy $x = 1$ là nghiệm nên đa thức chứa nhân tử $(x - 1)$. Do đó

$A = x^{10} - x^9 + 2x^9 - 2x^8 + 3x^8 - 3x^7 + ... + 9x^2 - 9x + 10x - 10$

$A = x^9(x - 1) + 2x^8(x - 1) + 3x^7(x - 1) + ... + 9x(x - 1) + 10(x - 1)$

$A = (x - 1)(x^9 + 2x^8 + 3x^7 + ... + 9x + 10).$

1.110. a) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = a^2(b - c) + b^2(c - a) - c^2[(b - c) + (c - a)]$

$= a^2(b - c) - c^2(b - c) + b^2(c - a) - c^2(c - a)$

$= (b - c)(a^2 - c^2) + (c - a)(b^2 - c^2) = (b - c)(a - c)(a + c) + (c - a)(b - c)(b + c)$

$= (b - c)(a - c)[(a + c) - (b + c)] = (a - b)(b - c)(a - c).$

b) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$= a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) - c\,[(b^2 - c^2) + (c^2 - a^2)]$

$= a(b^2 - c^2) - c(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) - c(c^2 - a^2)$

$= (b^2 - c^2)(a - c) + (c^2 - a^2)(b - c) = (b - c)(b + c)(a - c) + (c - a)(c + a)(b - c)$

$= (b - c)(c - a)\,[-(b + c) + (c + a)] = (a - b)(b - c)(c - a).$

c) $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

$= a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) - c[(b^3 - c^3) + (c^3 - a^3)]$

$= a(b^3 - c^3) - c(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) - c(c^3 - a^3)$

$= (b^3 - c^3)(a - c) + (c^3 - a^3)(b - c)$

$= (a - c)(b - c)(b^2 + bc + c^2) + (b - c)(c - a)(c^2 + ca + a^2)$

$= (b - c)(c - a)(-b^2 - bc + ca + a^2)$

$= (b - c)(c - a)\,[(a - b)(a + b) + c(a - b)] = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$

1.111. $A = ab(a - b)(c + 1) + bc(b - c)(a + 1) + ca(c - a)(b + 1)$

$= ab(a - b)(c + 1) + bc(b - c)(a + 1) - ca(b + 1)\,[(a - b) + (b - c)]$

$= ab(a - b)(c + 1) - ca(b + 1)(a - b) + bc(b - c)(a + 1) - ca(b + 1)(b - c)$

$= a(a - b)\,[b(c + 1) - c(b + 1)] + c(b - c)\,[b(a + 1) - a(b + 1)]$

$= (a - b)(b - c)(a - c)$

1.112. $B = a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$

$= a^4(b - c) + b^4(c - a) - c^4\,[(b - c) + (c - a)]$

$= a^4(b - c) - c^4(b - c) + b^4(c - a) - c^4(c - a)$

$= (b - c)(a^4 - c^4) + (c - a)(b^4 - c^4)$

$= (b - c)(a + c)(a - c)(a^2 + c^2) + (c - a)(b - c)(b + c)(b^2 + c^2)$

$= (b - c)(a - c)\,[(a + c)(a^2 + c^2) - (b + c)(b^2 + c^2)]$

$= (b - c)(a - c)\,[(a^3 + a^2c + ac^2 + c^3) - (b^3 + b^2c + bc^2 + c^3)]$

$= (b - c)(a - c)\,[(a^3 - b^3) + c(a^2 - b^2) + c^2(a - b)]$

$= (b - c)(a - c)(a - b)\,[a^2 + ab + b^2 + ac + bc + c^2]$

$= (b - c)(a - c)(a - b)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$

$= \frac{1}{2}(a - b)(b - c)(a - c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$

$= \frac{1}{2}(a - b)(b - c)(a - c)\,[(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2].$

Vì $a > b > c$ nên $B > 0$.

1.113. a) $M = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc$

$= [ab(a + b) + abc] + [bc(b + c) + abc] + [ca(c + a) + abc]$

$= ab(a + b + c) + bc(a + b + c) + ca(a + b + c)$

$= (a + b + c)(ab + bc + ca).$

b) $N = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$

$= ab(a + b) + b^2c + bc^2 + ac^2 + a^2c + 2abc$

$= ab(a + b) + (a^2c + abc) + (b^2c + abc) + (bc^2 + ac^2)$

$= ab(a + b) + ac(a + b) + bc(a + b) + c^2(a + b)$

$= (a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$

$= (a + b)(b + c)(c + a).$

1.114. a) $x^{12} + 4 = x^{12} + 4x^6 + 4 - 4x^6$

$= (x^6 + 2)^2 - (2x^3)^2 = (x^6 - 2x^3 + 2)(x^6 + 2x^3 + 2).$

b) $4x^8 + 1 = 4x^8 + 4x^4 + 1 - 4x^4$

$= (2x^4 + 1)^2 - (2x^2)^2 = (2x^4 - 2x^2 + 1)(2x^4 + 2x^2 + 1).$

1.115. $A = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Vì x là số tự nhiên nên $x^2 - 2x + 2 \le x^2 + 2x + 2$

Khi đó A có giá trị là một số nguyên tố.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1 \\ x^2 + 2x + 2 \quad \text{có giá trị là một số nguyên tố} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 2 \quad \text{có giá trị là một số nguyên tố} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \quad (1) \\ x^2 + 2x + 2 \quad \text{có giá trị là một số nguyên tố} \end{cases}$

Giải (1) ta được $x = 1$. Khi đó $x^2 + 2x + 2 = 5$ đúng là một số nguyên tố.

Vậy khi $x = 1$ thì $A = 5$ là một số nguyên tố.

1.116. $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$

Nếu $a + b + c = 0$ thì $A = 0$ tức là $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ hay $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Ta được lại kết quả ở ví dụ 10.

1.117. a) $x^7 + x^5 - 1 = x^7 - x^6 + x^5 + x^6 - 1 = x^5(x^2 - x + 1) + (x^3 + 1)(x^3 - 1)$

$= x^5(x^2 - x + 1) + (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^3 - 1)$

$= (x^2 - x + 1)[x^5 + (x + 1)(x^3 - 1)] = (x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 - x - 1).$

b) $x^7 + x^5 + 1 = x^7 + x^6 + x^5 - x^6 + 1 = x^5(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

$= x^5(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[x^5 - (x - 1)(x^3 + 1)] = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$

1.118. a) $x^5 + x - 1 = x^5 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1)$

$= x^2(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1).$

b) $x^{11} + x + 1 = x^{11} - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x^2(x^9 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2[(x^3)^3 - 1^3] + (x^2 + x + 1)$

$= x^2 . (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[(x^3 - x^2)(x^6 + x^3 + 1) + 1]$

$= (x^2 + x + 1)(x^9 - x^8 + x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1).$

1.119. a) $x^8 + x^7 + 1 = x^8 + x^7 + x^6 - x^6 + 1 = x^6(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

$= x^6(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$

b) $x^5 + x^4 + 2x^2 - 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + x^2 + x^2 + x - x - 1$

$= (x^5 + x^3 + x^2) + (x^4 + x^2 + x) - (x^3 + x + 1)$

$= x^2(x^3 + x + 1) + x(x^3 + x + 1) - (x^3 + x + 1)$

$= (x^3 + x + 1)(x^2 + x - 1).$

1.120. Ta có $M = x^{3n+1} + x^{3n-1} + 1 = x^{3n+1} + x^{3n} + x^{3n-1} - (x^{3n} - 1)$

$= x^{3n-1}(x^2 + x + 1) - [(x^3)^n - 1^n]$

$= x^{3n-1}(x^2 + x + 1) - \{(x^3 - 1)[(x^3)^{n-1} + (x^3)^{n-2} + ... + x^3 + 1]\}$

$= x^{3n-1}(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^{3n-3} + x^{3n-6} + ... + x^3 + 1)$

$= (x^2 + x + 1) . [x^{3n-1} - (x - 1)(x^{3n-3} + x^{3n-6} + ... + x^3 + 1)]$

Do đó $M \vdots (x^2 + x + 1)$.

1.121. a) $A = (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8$.

Đặt $x^2 + 3x = y$ thì $A = y^2 - 2y - 8 = (y - 4)(y + 2)$

Thay trở lại $y = x^2 + 3x$, ta được :

$A = (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) = (x + 4)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

b) $B = (x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7$

Đặt $x^2 + 4x + 10 = y$ thì $x^2 + 4x + 11 = y + 1$

Khi đó $B = y^2 - 7(y + 1) + 7 = y^2 - 7y = y(y - 7)$

Thay trở lại $y = x^2 + 4x + 10$ ta được :

$B = (x^2 + 4x + 10)(x^2 + 4x + 3) = (x^2 + 4x + 10)(x + 1)(x + 3)$.

1.122. a) $C = (x^2 - 3x + 5)^2 - 7x(x^2 - 3x + 5) + 12x^2$

Đặt $x^2 - 3x + 5 = y$ thì $C = y^2 - 7xy + 12x^2$

$= y^2 - 3xy - 4xy + 12x^2 = y(y - 3x) - 4x(y - 3x) = (y - 3x)(y - 4x)$

Thay trở lại $y = x^2 - 3x + 5$ ta được :

$C = (x^2 - 3x + 5 - 3x)(x^2 - 3x + 5 - 4x) = (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 7x + 5)$

$= (x - 1)(x - 5)(x^2 - 7x + 5)$.

b) $D = 2(x^2 + 5x - 2)^2 - 7(x^2 + 5x - 2)(x^2 + 3) + 5(x^2 + 3)^2$

Đặt $x^2 + 5x - 2 = a$ và $x^2 + 3 = b$

Khi đó $D = 2a^2 - 7ab + 5b^2 = (a - b)(2a - 5b)$

Thay trở lại ta được :

$D = (x^2 + 5x - 2 - x^2 - 3)(2x^2 + 10x - 4 - 5x^2 - 15)$

$= (5x - 5)(-3x^2 + 10x - 19) = 5(1 - x)(3x^2 - 10x + 19)$.

1.123. Gọi bốn số nguyên liên tiếp là n, $n + 1$, $n + 2$ và $n + 3$ trong đó $n \in \mathbb{Z}$.

Ta có $A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = [n(n + 3)]\,[(n + 1)(n + 2)] + 1$

$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$.

Đặt $n^2 + 3n = a$ thì $A = a(a + 2) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$.

Do đó $A = (n^2 + 3n + 1)^2$.

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên $n^2 + 3n + 1$ cũng là một số nguyên.

Do đó $A = (n^2 + 3n + 1)^2$ là một số chính phương.

1.124. $M = [(x - y)(x - 4y)] . [(x - 2y)(x - 3y) + y^4$

$= (x^2 - 5xy + 4y^2)(x^2 - 5xy + 6y^2) + y^4$

Đặt $x^2 - 5xy + 4y^2 = a$ thì $x^2 - 5xy + 6y^2 = a + 2y^2$

Khi đó $M = a(a + 2y)^2 + y^4 = a^2 + 2ay^2 + y^4 = (a + y^2)^2$.

Thay trở lại $a = x^2 - 5xy + 4y^2$ ta được :

$M = (x^2 - 5xy + 4y^2 + y^2)^2 = (x^2 - 5xy + 5y^2)^2 \geq 0$.

1.125. $N = 4(x^2 - 15x + 50)(x^2 - 18x + 72) - 3x^2$

$= 4(x - 5)(x - 10)(x - 6)(x - 12) - 3x^2$

$= 4[(x - 5)(x - 12)][(x - 10)(x - 6)] - 3x^2$

$= 4(x^2 - 17x + 60)(x^2 - 16x + 60) - 3x^2$

Đặt $x^2 - 16x + 60 = a$ thì

$N = 4(a - x)a - 3x^2 = 4a^2 - 4ax - 3x^2 = (2a + x)(2a - 3x)$

Thay trở lại $a = x^2 - 16x + 60$, ta được

$N = (2x^2 - 31x + 120)(2x^2 - 35x + 120) = (x - 8)(2x - 15)(2x^2 - 35x + 120)$.

1.126. • Xét trường hợp $A = (x^2 + ax + 3)(x^2 + bx - 1)$

Khai triển rồi thu gọn ta được :

$$A = x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 + (3b - a)x - 3.$$

Suy ra $\begin{cases} a + b = -7 \\ ab + 2 = 12 \\ 3b - a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -2. \end{cases}$

Vậy $A = x^4 - 7x^3 + 12x^2 - x - 3 = (x^2 - 5x + 3)(x^2 - 2x - 1)$

• Xét trường hợp $A = (x^2 + ax - 3)(x^2 + bx + 1)$

Cũng khai triển và giải như trên ta thấy không có giá trị nào của a và b thoả mãn đề bài.

1.127. • Trường hợp $B = (x^3 + ax + 5)(x^2 + bx + 1)$

Khai triển rồi thu gọn ta được :

$$B = x^5 + bx^4 + (a + 1)x^3 + (ab + 5)x^2 + (a + 5b)x + 5$$

Suy ra : $\begin{cases} b = 3 \\ a + 1 = -1 \\ ab + 5 = -1 \\ a + 5b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy $B = (x^3 - 2x + 5)(x^2 + 3x + 1)$.

• Trường hợp $B = (x^3 + ax + 1)(x^2 + bx + 5)$

Khai triển và giải như trên ta thấy không có giá trị nào của a và b thoả mãn đề bài.

1.128. $P = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

Cho $a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = -a$ ta đều được $P = 0$. Mặt khác $(a + b)$; $(b + c)$; $(c + a)$ đôi một không có nhân tử chung, nên $P = k(a + b)(b + c)(c + a)$ với k là hằng số :

Cho $a = b = c = 1$ ta được $24 = 8k \Rightarrow k = 3$.

Vậy $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$.

1.129. Cho $a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = a$ ta đều được $Q = 0$. Vậy Q chứa các nhân tử $a + b$; $b + c$ và $c - a$. Các nhân tử này đôi một không có nhân tử chung nên $Q = k(a + b)(b + c)(c - a)$ với k là hằng số.

Cho $a = 0$, $b = c = 1$ ta được $1 . 1 . 2 = k . 1 . 2 . 1 \Rightarrow k = 1$.

Do đó $bc(b + c) + ca(c + a) - ab(a + b) = (a + b)(b + c)(c - a)$.

1.130. a) Gọi hai số chẵn liên tiếp là $2n$ và $2n + 2$.

Tích của chúng là $2n.(2n + 2) = 4n(n + 1)$.

Ta thấy $n(n + 1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2. Do đó $4n(n + 1) \vdots 8$.

b) Trong 5 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3, một số chia hết cho 5. Trong 5 số nguyên liên tiếp có hai số chẵn liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 8 (câu a).

Ta thấy 3, 5, 8 là các số nguyên tố cùng nhau đôi một nên tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho $3 . 5 . 8 = 120$.

1.131. a) $A = n^3 (n - 2) - n(n - 2) = (n - 2)(n^3 - n) = n(n - 2)(n - 1)(n + 1)$

Trong 4 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 ; có hai số chẵn liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 8. Vì $(3, 8) = 1$ nên tích của 4 số nguyên liên tiếp chia hết cho $3 . 8 = 24$.

b) $B = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n[(n^2 - 2)^2 - n^2] = n(n^2 - n - 2)(n^2 + n - 2)$

$= n(n - 2)(n + 1)(n + 2)(n - 1)$

Tích của 5 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 120 nên $B \vdots 120$.

1.132. $A = n(n - 2)(n + 2)(n + 4)$.

Vì n là số chẵn nên $n = 2k$ do đó

$A = 2k(2k - 2)(2k + 2)(2k + 4) = 16(k - 1)(k + 1)(k + 2)k$

Ta thấy $k(k-1)(k+1)(k+2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 24.

Vậy A chia hết cho tích $16 . 24 = 2^4 . 2^3 . 3 = 2^7 . 3$

Do đó $A \vdots 2^7$.

1.133. $A = 5[5(6^{99} + 6^{98} + ... + 6^2 + 6 + 2) + 1]$

$= 5[(6-1)(6^{99} + 6^{98} + ... + 6^2 + 6 + 1) + 1]$

$= 5[6^{100} + 6^{99} + ... + 6^3 + 6^2 + 6 - 6^{99} - 6^{98} - 6^2 - 6 - 1 + 1] = 5 . 6^{100}$.

Vậy $A : 6^{100}$.

1.134. $B = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + (7^5 + 7^6 + 7^7 + 7^8) + ... + (7^{4n-3} + 7^{4n-2} + 7^{4n-1} + 7^{4n})$

$= 2800\,(1 + 7^4 + 7^8 + ... + 7^{4n-4}) \vdots 2800$

Do đó $B \vdots 400$.

1.135. Từ các đẳng thức $a = x^2 - yz$; $b = y^2 - zx$; $c = z^2 - xy$ và với x, y, z là các số nguyên nên ta có $ax = x^3 - xyz$; $by = y^3 - xyz$; $cz = z^3 - xyz$.

Từ đó $ax + by + cz = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ (bài 1.116)

$= (x + y + z)(a + b + c)$.

Vì x, y, z là các số nguyên khác nhau nên $a + b + c \neq 0$.

Do đó $ax + by + cz \vdots a + b + c$.

1.136. a) $A = n(n^2 + 3n + 2) = n(n + 1)(n + 2)$

A là tích của ba số nguyên liên tiếp nên $A \vdots 3$.

b) Ta có $15 = 3 . 5$ và $(3 ; 5) = 1$. Muốn $A \vdots 15$ thì $A \vdots 3$ và $A \vdots 5$.

Đã có $A \vdots 3$ (câu a) nên chỉ cần tìm n để $A \vdots 5$.

Do $A = n(n + 1)(n + 2)$ nên để $A \vdots 5$ thì một trong ba nhân tử phải chia hết cho 5.

- Nếu $n \vdots 5$ thì $A \vdots 5$ mà $n < 10$ nên $n = 5$.
- Nếu $n + 1 \vdots 5$ thì $A \vdots 5$.

Ta có $n + 1 \vdots 5$ và $n < 10$ nên $n + 1 = 5$ hoặc $n + 1 = 10$ suy ra $n = 4$ hoặc $n = 9$.

- Nếu $n + 2 \vdots 5$ thì $A \vdots 5$

Ta có $n + 2 \vdots 5$ và $n < 10$ nên $n + 2 = 5$ hoặc $n + 2 = 10$

Suy ra $n = 3$ hoặc $n = 8$. Vậy $n \in \{3 ; 4 ; 5 ; 8 ; 9\}$ thì $A \vdots 15$.

1.137. Dễ thấy m > n. Ta có $2^m - 2^n = 2^n(2^{m-n} - 1) = 64 . 7$

Từ (1) ta thấy $2^n(2^{m-n} - 1) \vdots 64$ mà $(2^{m-n} - 1)$ và 64 nguyên tố cùng nhau nên $2^n \vdots 64$. (2)

Cũng từ (1) ta thấy $64 . 7 \vdots 2^n$ mà $(7, 2^n) = 1$ nên $64 \vdots 2^n$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $2^n = 64$, do đó n = 6.

Mặt khác $2^{m-n} - 1 = 7$ hay $2^{m-n} = 8 \Rightarrow 2^{m-6} = 2^3$, từ đó $m - 6 = 3 \Rightarrow m = 9$.

Vậy m = 9, n = 6.

1.138. $A = n^3 + 6kn - n = (n^3 - n) + 6kn$

Vì $n^3 - n \vdots 6$ (xem ví dụ 39), $6kn \vdots 6$ nên $A \vdots 6$.

1.139. $B = (n^3 - n) + 12n - 6n^2 - 6$.

Vì $n^3 - n \vdots 6$ nên $B \vdots 6$.

1.140. Xét hiệu $(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c) = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c) \vdots 30$

Ta có $(a^5 - a) \vdots 30$; $b^5 - b \vdots 30$; $c^5 - c \vdots 30$ (ví dụ 41)

Mặt khác $a + b + c \vdots 30$ nên $a^5 + b^5 + c^5 \vdots 30$.

1.141. Xét hiệu $(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3) - (a_1 + a_2 + ... + a_n)$

$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + ... + (a_n^3 - a_n) \vdots 3$

(vì $a_1^3 - a_1 \vdots 3$; $a_2^3 - a_2 \vdots 3$; $a_n^3 - a_n \vdots 3$).

Mặt khác $a_1 + a_2 + ... + a_n = 999 \vdots 3$ nên $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 \vdots 3$.

1.142. Xét hiệu $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$

$= (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d) \vdots 2$.

Mặt khác do $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ nên $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2) \vdots 2$

Suy ra $a + b + c + d \vdots 2$ (1)

Do a, b, c, d nguyên dương nên $a + b + c + d > 2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra a + b + c + d là hợp số.

1.143. a) Ta có $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$

Xét tích $(a - 1)a(a + 1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3.

Mặt khác $a \not\vdots 3$ (do a là số nguyên tố lớn hơn 3) nên

$(a - 1)(a + 1)$ phải chia hết cho 3. (1)

Ta có a là số lẻ nên $a = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Do đó $a^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1)$.

Tích $k(k + 1) \vdots 2$ nên $4k(k + 1) \vdots 8$, suy ra $a^2 - 1 \vdots 8$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 - 1 \vdots 24$ (vì $3.8 = 24$ và $(3, 8) = 1$).

b) Ta có $a^2 - b^2 = (a^2 - 1) - (b^2 - 1)$.

Vì $a^2 - 1 \vdots 24$; $b^2 - 1 \vdots 24$ nên $a^2 - b^2 \vdots 24$.

1.144. a) Một số chính phương lẻ có dạng $a^2 = (2k + 1)^2$.

Ta phải chứng minh $(2k + 1)^2 - 1 \vdots 8$.

Thực vậy $(2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1) \vdots 8$.

Suy ra một số chính phương lẻ chia cho 8 dư 1.

b) Giả sử cả 6 số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_6$ đều lẻ, khi đó bình phương của mỗi số này chia cho 8 dư 1. Do đó tổng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$ ở vế trái chia cho 8 dư 5, nhưng khi đó vế phải a_6^2 chia cho 8 dư 1 (mâu thuẫn).

Do đó cả 6 số $a_1, a_2, \ldots, a_6$ không thể cùng lẻ.

1.145. a) $A = (n + 5)(n - 2) + 28$. Đặt $n - 2 = k$ thì $n + 5 = k + 7$

Khi đó $A = k(k + 7) + 28$.

• Nếu $k \vdots 7$ thì $k + 7 \vdots 7$, suy ra $k(k + 7) \vdots 49$ mà $28 \not\vdots 49$ nên $A \not\vdots 49$.

• Nếu $k \not\vdots 7$ thì $k + 7 \not\vdots 7$. Vì 7 là số nguyên tố nên $k(k + 7) \not\vdots 7$ mà $28 \vdots 7$ nên $A \not\vdots 7$ dẫn tới $A \not\vdots 49$.

b) $B = (n + 7)(n - 4) + 22$. Đặt $n - 4 = k$ thì $n + 7 = k + 11$.

Khi đó $B = k(k + 11) + 22$.

• Nếu $k \vdots 11$ thì $k + 11 \vdots 11$, suy ra $k(k + 11) \vdots 121$ mà $22 \not\vdots 121$ nên $B \not\vdots 121$.

• Nếu $k \not\vdots 11$ thì $k + 11 \not\vdots 11$. Vì 11 là số nguyên tố nên $k(k + 11) \not\vdots 11$ mà $22 \vdots 11$ nên $B \not\vdots 11$ dẫn tới $B \not\vdots 121$.

1.146. a) $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} = 36^n + 19^n - 2.2^n = (36^n - 2^n) + (19^n - 2^n)$

Ta có $36^n - 2^n \vdots 34$; $19^n - 2^n \vdots 17$ nên $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} \vdots 17$.

b) $6^{2n+1} + 5^{n+2} = 6.36^n + 25.5^n = 31.5^n + 6.36^n - 6.5^n$

$= 31.5^n + 6(36^n - 5^n) \vdots 31$.

c) $9^{2n} + 39 = 81^n - 1 + 40 = (81^n - 1) + 40$

Có $81^n - 1 \vdots 80 \Rightarrow 81^n - 1 \vdots 40$. Suy ra $9^{2n} + 39 \vdots 40$.

1.147. a) $S_1 = (3^n + 9^n) + (5^n + 7^n)$

Vì n lẻ nên $3^n + 9^n \vdots (3 + 9)$; $5^n + 7^n \vdots (5 + 7)$ do đó $S_1 \vdots 12$

b) $S_2 = (2^n + 8^n) + (3^n + 7^n) + (4^n + 6^n) + 5^n + 1^n$

Vì n lẻ nên $2^n + 8^n \vdots (2+8)$; $3^n + 7^n \vdots (3+7)$

$4^n + 6^n \vdots (4+6)$; $5^n \vdots 5$ còn $1 \not\vdots 5$ nên $S_2 \not\vdots 5$.

1.148. $A = (400^n - 1^n) + (256^n - 9^n)$

Có $400^n - 1^n \vdots (400 - 1)$ tức là chia hết cho 399, do đó chia hết cho 19.

$256^n - 9^n \vdots (256 - 9)$ tức là chia hết cho 247, do đó chia hết cho 19. Vậy $A \vdots 19$.

Mặt khác $A = (400^n - 9^n) + (256^n - 1^n)$

Có $400^n - 9^n \vdots (400 - 9)$ tức là chia hết cho 391, do đó chia hết cho 17.

$256^n - 1^n \vdots (256 - 1)$ tức là chia hết cho 255, do đó chia hết cho 17. Vậy $A \vdots 17$.

Vì (19, 17) = 1 nên $A \vdots 19 . 17$ hay $A \vdots 323$.

1.149. a) $1 + 2 + ... + 20 = \dfrac{(1+20).20}{2} = 21 . 10$

Vì (21, 10) = 1 nên chỉ cần chứng minh $A \vdots 21$ và $A \vdots 10$.

Ta có $A = (1^3 + 20^3) + (2^3 + 29^3) + ... + (10^3 + 11^3)$

Mỗi nhóm chia hết cho 21 nên $A \vdots 21$. (1)

Mặt khác $A = (1^3 + 19^3) + (2^3 + 18^3) + ... + (9^3 + 11^3) + 10^3 + 20^3$

Mỗi nhóm chia hết cho 20 do đó chia hết cho 10 ; hai hạng tử cuối chia hết cho 10 nên $A \vdots 10$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \vdots 21 . 10$ hay $A \vdots (1 + 2 + 3 + ... + 20)$.

b) Ta có $1 + 2 + 3 + ... + 21 = \dfrac{(1+21).21}{2} = 11 . 21$

Vì (11, 21) = 1 nên chỉ cần chứng minh $B \vdots 11$ và $B \vdots 21$. Tiếp tục giải như câu a).

1.150. $3^{99} = (3^3)^{33} = 27^{33} = (26 + 1)^{33} = B(26) + 1^{33}$

$5^{98} = (5^2)^{49} = 25^{49} = (26 - 1)^{49} = B(26) + (-1)^{49}$

Do đó $3^{99} + 5^{98} = B(26) \vdots 13$.

1.151. Ta có $199 = 6.33 + 1 = 6k + 1$ (với k = 33).

Suy ra $3^{199} = 3^{6k+1} = 3.3^{6k} = 3.(3^3)^{2k} = 3.27^{2k}$

$= 3.(28 - 1)^{2k} = 3[B(28) + (-1)^{2k}] = 3.[B(7) + 1] = 3 . B(7) + 3$.

Vậy 3^{199} chia cho 7 dư 3.

1.152. a) $5.7^{2(n+1)} + 2^{3n} = 5.49^{n+1} + 8^n = 5[(41 + 8)^{n+1}] + 8^n$

$= 5[B(41) + 8^{n+1}] + 8^n = 5.B(41) + 5.8^{n+1} + 8^n$

$= 5.B(41) + 5.8.8^n + 8^n = 5.B(41) + 41.8^n \vdots 41.$

b) $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$

$= (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n) \vdots 7$

Mặt khác $A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n) \vdots 13$.

Do đó $A \vdots 7 . 13$ hay $A \vdots 91$ (vì $(7 ; 13) = 1$).

1.153. • Nếu $n = 3k$ thì $A \vdots 3$.

• Nếu $n = 3k \pm 1$ thì $n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 \vdots 3$, do đó $A \vdots 3$.

1.154. a) $A = n(n + 1)(2n + 1)$

• Nếu $n = 3k$ thì $A \vdots 3$.

• Nếu $n = 3k + 1$ thì $2n + 1 = 6k + 3 \vdots 3$, do đó $A \vdots 3$

• Nếu $n = 3k - 1$ thì $n + 1 = 3k \vdots 3$, do đó $A \vdots 3$.

Mặt khác $n(n + 1) \vdots 2$ nên $A \vdots 2$, suy ra $A \vdots 6$.

b) $B = 14n^3 + 51n^2 + 7n = (12n^3 + 48n^2 + 6n) + (2n^3 + 3n^2 + n)$.

Mỗi nhóm đều chia hết cho 6 nên $B \vdots 6$.

1.155. Nếu cả 3 số a, b, c đều không chia hết cho 3 thì $a = 3k_1 \pm 1$; $b = 3k_2 \pm 1$; $c = 3k_3 \pm 1$.

Suy ra $a^2 = 9k_1^2 \pm 6k_1 + 1 = 3q_1 + 1$.

Tương tự $b^2 = 3q_2 + 1$; $c^2 = 3q_3 + 1$.

Vế trái chia cho 3 dư 2, vế phải chia cho 3 dư 1, vô lí.

Do đó trong ba số a, b, c ít nhất cũng có một số chia hết cho 3, suy ra $abc \vdots 3$.

1.156. a) • Nếu n chẵn, đặt $n = 2k$ ta có $5^n - 1 = 5^{2k} - 1 = 25^k - 1 \vdots 24$.

• Nếu n lẻ, đặt $n = 2k + 1$, ta có $5^n - 1 = 5^{2k+1} - 1 = 5.25^k - 5 + 4$

$= 5(25^k - 1) + 4 = 5.24.q + 4 \not\vdots 24$.

Vậy với n là số chẵn thì $5^n - 1 \vdots 24$.

b) • Xét $n = 3k$, ta có : $7^n - 1 = 7^{3k} - 1 = 343^k - 1 \vdots 342$.

• Nếu $n = 3k + 1$, ta có :

$7^n - 1 = 7^{3k+1} - 1 = 7 . 7^{3k} - 7 + 6 = 7(343^k - 1) + 6 \not\vdots 342$.

• Nếu $n = 3k + 2$, ta có :

$$7^n - 1 = 7^{3k+2} - 1 = 49 \,.\, 343^k - 49 + 48 = 49(343^k - 1) + 48 \not\vdots\ 342.$$

Vậy với n chia hết cho 3 thì $7^n - 1 \vdots 342$.

1.157. Vì a là số nguyên không chia hết cho 7 nên a có dạng $7k \pm 1$; $7k \pm 2$; $7k \pm 3$.

• Nếu $a = 7k \pm 1$ thì $a^3 = (7k \pm 1)^3 = B(7) \pm 1$

• Nếu $a = 7k \pm 2$ thì $a^3 = (7k \pm 2)^3 = B(7) \pm 8$

• Nếu $a = 7k \pm 3$ thì $a^3 = (7k \pm 3)^3 = B(7) \pm 27$

Rõ ràng khi thêm 1 hay bớt 1 vào các kết quả trên ta được một số chia hết cho 7.

1.158. a) Nếu $n = 3k$ thì $A = 9k^2 + 3k + 2 \not\vdots\ 3$

Nếu $n = 3k \pm 1$ thì $A = 9k^2 \pm 6k + 3k + 3 \pm 1 \not\vdots\ 3$

Vậy $A \not\vdots\ 3 \Rightarrow A \not\vdots\ 6$.

b) $B = 9^n + 1 = (9^n - 1) + 2$. Vì $9^n - 1 \vdots 8$, $2 \not\vdots\ 8 \Rightarrow B \not\vdots\ 8$.

1.159. a) $A = a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$

• Nếu $a = 5k \pm 1$ thì $a^2 - 1 = (5k \pm 1)^2 - 1 = B(5) \vdots \Rightarrow A \vdots 5$.

• Nếu $a = 5k \pm 2$ thì $a^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = B(5) \Rightarrow A \vdots 5$.

b) $B = a^4 - b^4 = (a^4 - 1) - (b^4 - 1)$

Cả $a^4 - 1$ và $b^4 - 1$ đều chia hết cho 5 nên $B \vdots 5$.

1.160. a) • Nếu $n = 5k$ thì $n^2 + 2 = 25k^2 + 2 \not\vdots\ 5$.

• Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 + 2 = (5k \pm 1)^2 + 2 = B(5) + 3 \not\vdots\ 5$

• Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 2 = (5k \pm 2)^2 + 2 = B(5) + 6 \not\vdots\ 5$.

b) Gọi 5 số nguyên liên tiếp là $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Ta có $(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5(n^2 + 2)$.

Vì $n^2 + 2 \not\vdots\ 5$ (câu a) nên $5(n^2 + 2) \not\vdots\ 25$.

Một số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 thì nó không phải là số chính phương.

1.161. a) Vì a, b, $\in \mathbb{Z}$ nên a^2 và b^2 chia cho 3 dư 0 hoặc dư 1. Do đó $a^2 = 3q_1 + r_1$;

$b^2 = 3q_2 + r_2$ trong đó $a^2 + b^2 = 3q_1 + r_1 + 3q_2 + r_2 = 3(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2)$.

Vì $a^2 + b^2 \vdots 3$; $3(q_1 + q_2) \vdots 3$ nên $r_1 + r_2 \vdots 3$

Suy ra $r_1 = r_2 = 0$ (vì $r_1, r_2 \in \{0 ; 1\}$. Vậy $a^2 \vdots 3$; $b^2 \vdots 3$, dẫn tới $a \vdots 3$; $b \vdots 3$.

b) Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên a^2 và b^2 chia cho 7 dư 0, dư 1, dư 4 hoặc dư 2.

Gọi r_1 là số dư khi chia a^2 cho 7 ; r_2 là số dư khi chia b^2 cho 7.

Khi đó $a^2 = 7q_1 + r_1$; $b^2 = 7q_2 + r_2$

Ta có $a^2 + b^2 = 7(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2)$

Vì $a^2 + b^2 \vdots$; $7(q_1 + q_2) \vdots 7$ nên $r_1 + r_2 \vdots 7$.

Suy ra $r_1 = r_2 = 0$ (vì $r_1, r_2 \in \{0, 1, 4, 2\}$

Vậy $a^2 \vdots 7$, $b^2 \vdots 7$, dẫn tới $a \vdots 7$ và $b \vdots 7$.

1.162. a) Vì p là số nguyên tố nên $4p^2 + 1 > 5$; $6p^2 + 1 > 5$.

Ta có $4p^2 + 1 = 5p^2 - (p^2 - 1) = 5p^2 - (p - 1)(p + 1)$

$6p^2 + 1 = 5p^2 + 5 + (p - 2)(p + 2)$.

Xét các trường hợp số dư khi chia p cho 5 :

• Nếu $p = 5k + 1$ hoặc $p = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $(p - 1)(p + 1) \vdots 5$, do đó $4p^2 + 1$ là hợp số.

• Nếu $p = 5k + 2$ hoặc $p = 5k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $(p - 2)(p + 2) \vdots 5$, do đó $6p^2 + 1$ là hợp số.

• Vậy chỉ còn trường hợp $p = 5k$. Để p là số nguyên tố thì $k = 1$ do đó $p = 5$.

Thử lại với $p = 5$ ta được $4p^2 + 1 = 101$ và $6p^2 + 1 = 151$ đều là các số nguyên tố.

b) Đặt $n + 2 = p$ thì $2n^2 + 8n + 9 = 2(n + 2)^2 + 1 = 2p^2 + 1$

$4n^2 + 16n + 17 = 4(n + 2)^2 + 1 = 4p^2 + 1$.

Khi p là số nguyên tố thì $2p^2 + 1 > 3$; $4p^2 - 1 > 3$.

Ta có $2p^2 + 1 = 3p^2 - (p^2 - 1) = 3p^2 - (p - 1)(p + 1)$

• Nếu p không chia hết cho 3 thì $p = 3k + 1$ hoặc $3k + 2$.

Khi đó $(p - 1)(p + 1) \vdots 3$, do đó $2p^2 + 1$ là hợp số.

• Nếu p chia hết cho 3 thì $p = 3k$.

Để p là số nguyên tố thì $k = 1$, khi đó $p = 3$ và $n = 1$.

Thử lại với n = 1 ta có : $n + 2 = 3$ (là số nguyên tố)

$2n^2 + 8n + 9 = 19$ (là số nguyên tố)

$4n^2 + 16n + 17 = 37$ (là số nguyên tố).

1.163. Chia ba số nguyên a, b, c cho 2 thì ít nhất cũng có hai số trong ba số đó có cùng số dư. Hiệu của hai số này chia hết cho 2. Hiệu này là a – b hoặc b – c hoặc c – a. Do đó $P \vdots 2$.

1.164. Xét 24 số : $1, 11, 111, ..., \underbrace{11...1}_{24 \text{ chữ số}}$

Đem các số này chia cho 23 thì được số dư từ 0 đến 22 (nhiều nhất gồm 23 loại). Có 24 số mà chỉ có 23 loại số dư nên ít nhất phải có hai số có số dư giống nhau. Hiệu của hai số này chia hết cho 23. Rõ ràng hiệu này gồm toàn chữ số 1 ở đầu và toàn chữ số 0 ở cuối.

1.165. Xét dãy số $3, 3^2, 3^3, ..., 3^{1001}$ (1)

Dãy số này có 1001 số. Đem chia mỗi số cho 1000. Có 1001 số tự nhiên khác nhau chia cho 1000 mà chỉ có 1000 số dư nên phải tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 1000. Gọi hai số đó là 3^m và 3^n ($1 \le n < m \le 1001$).

Vậy $3^m - 3^n \vdots 1000$ hay $3^n(3^{m-n} - 1) \vdots 1000$

Mặt khác $(3^n, 1000) = 1$ nên $3^{m-n} - 1 \vdots 1000$

Do đó 3^{m-n} chia cho 1000 dư 1 nên có tận cùng là 001.

Dễ thấy 3^{m-n} là một số của dãy (1).

Vậy tồn tại một luỹ thừa của 3 có tận cùng là 001.

1.166. Ta lập 122 số dạng

$a_1 = 123$

$a_2 = 123\ 123$

$a_3 = 123\ 123\ 123$

....

$a_{122} = \underbrace{123\ 123 ... 123}_{122 \text{ nhóm } 123}$

Chia các số trên cho 122 ta được các số dư từ 1 đến 121 (nhiều nhất gồm 121 loại). Có 122 số mà chỉ có 121 loại số dư nên ít nhất phải có hai số chia cho 122 có cùng số dư. Giả sử đó là a_m và a_n ($1 \le n < m \le 122$). Hiệu của chúng phải chia hết cho 122 : $a_m - a_n \vdots 122$.

Hiệu này có dạng $\underbrace{123\ 123 ... 123}_{3(m-n) \text{ chữ số}}\underbrace{000\ 000 ... 000}_{3n \text{ chữ số}}$.

1.167. Khi chia một số cho 60 thì số dư có thể là 0, 1, ..., 59. Chia 60 số này thành 31 nhóm (31 "lồng") : (1 ; 59) ; (2 ; 58) ; (3 ; 57) ; ... ; (29, 31) ; (0) và (30). Xét các phép chia 32 số cho 60 ta được 32 số dư. Có 32 số dư mà chỉ có 31 nhóm nên tồn tại hai số có số dư thuộc cùng một nhóm. Hai số này có hiệu chia hết cho 60 nếu số dư bằng nhau, có tổng chia hết cho 60 nếu số dư khác nhau.

1.168. Chia 92 số tự nhiên này cho 91, theo nguyên lí Đi-ric-lê tồn tại hai số có cùng số dư. Gọi hai số đó là $\overline{abc}$ và $\overline{mnp}$. Ta có

$$\overline{abcmnp} = 1000\,\overline{abc} + \overline{mnp} = 1000(91k + r) + (91q + r)$$

$$= 91(1000k + q) + 1001r = 91(1000k + q) + 91.11r \vdots 91.$$

1.169. Gọi 7 số tự nhiên đó là $a_1, a_2, a_3, ..., a_7$. Ta lập 7 tổng sau :

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$...$$

$$S_7 = a_1 + a_2 + ... + a_7$$

– Nếu có một tổng trong các tổng trên chia hết cho 7 thì bài toán giải xong.

– Nếu không có tổng nào chia hết cho 7 thì các số dư chỉ có thể là 1, 2, 3, 4, 5 hoặc 6.

Có 7 tổng mà chỉ có 6 loại số dư nên ít nhất cũng có hai tổng có cùng số dư. Hiệu của hai tổng này chia hết cho 7 và hiệu này là tổng các số ở một số tấm bìa nào đó.

1.170. Ta phải chứng minh $A = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \vdots 9$ (1)

• Với n = 0 thì (1) đúng vì $A = 0 + 1 + 8 = 9 \vdots 9$

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 \vdots 9$ (đây là giả thiết quy nạp) ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1 tức là phải chứng minh.

$$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 \vdots 9.$$

Ta có $(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$

$$= [k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$$

Số hạng $[k^3 + (k + 1)^3) + (k + 2)^3] \vdots 9$ nên tổng này chia hết cho 9.

Vậy (1) đúng với mọi số tự nhiên n.

1.171. • Với n = 0 thì (1) đúng vì A = 49 + 8 = 57 ⋮ 57.

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $7^{k+2} + 8^{2k+1}$ ⋮ 57, ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1, nghĩa là phải chứng minh $7^{(k+1)+2} + 8^{2(k+1)+1}$ ⋮ 57.

Ta có $7^{k+3} + 8^{2k+3} = 7.7^{k+2} + 64.8^{2k+1}$

$= 7.7^{k+2} + 7.8^{2k+1} + 57.8^{2k+1} = 7(7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57.8^{2k+1}$

nên tổng chia hết cho 57. Vậy (1) đúng với mọi n ∈ ℕ.

1.172. a) $A = 2^{2n} + 5$ ⋮ 3 (1)

• Với n = 0 thì (1) đúng vì A = 1 + 5 = 6 ⋮ 3

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $2^{2k} + 5$ ⋮ 3.

Ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1, nghĩa là phải chứng minh

$2^{2(k+1)} + 5$ ⋮ 3.

Ta có $2^{2(k+1)} + 5 = 4.2^{2k} + 5 = (2^{2k} + 5) + 3.2^{2k}$

Vì $2^{2k} + 5$ ⋮ 3 ; 3.2^{2k} ⋮ 3 nên $2^{2(2k+1)} + 5$ ⋮ 3.

Vậy (1) đúng với mọi n ∈ ℕ.

b) $B = 2^{2n} + 15n - 1$ ⋮ 3 (1)

• Với n = 0 thì B = 1 + 0 − 1 = 0 ⋮ 3 ; (1) đúng

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $2^{2k} + 15k - 1$ ⋮ 3, ta phải chứng minh :

$2^{2k+2} + 15(k + 1) - 1$ ⋮ 3

Ta có $2^{2(k+1)} + 15(k + 1) - 1 = 4.2^{2k} + 15k + 15 - 1$

$= (3.2^{2k} + 15) + (2^{2k} + 15k - 1) = 3.(2^{2k} + 5) + (2^{2k} + 15k - 1)$ ⋮ 3.

Vậy (1) đúng với mọi n ∈ ℕ.

1.173. a) $A = 10^n - 9n - 1$ ⋮ 81 (1)

• Với n = 0 thì A = 1 − 0 − 1 = 0 ⋮ 81 (1) đúng.

• Giả sử (1) đúng với n = k nghĩa là $10^k - 9k - 1$ ⋮ 81 ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1 nghĩa là $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$ ⋮ 81.

Ta có $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1 = 10.10^k - 9k - 9 - 1 = (10^k - 9k - 1) + 9.10^k - 9$

$= (10^k - 9k - 1) + 9(10^k - 1) = (10^k - 9k - 1) + 9.9.q.$

Vì $10^k - 9k - 1$ ⋮ 81 ; 81.q ⋮ 81 nên tổng trên chia hết cho 81.

Vậy (1) đúng với mọi n ∈ ℕ.

b) $B = 10^n + 18n - 1 \vdots 27$. (1)

• Với $n = 0$ thì (1) đúng vì $B = 1 + 0 - 1 = 0 \vdots 27$.

• Giả sử (1) đúng với $n = k$, nghĩa là $10^k + 18k - 1 \vdots 27$ ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh $10^{k+1} + 18(k + 1) - 1 \vdots 27$.

Ta có $10^{k+1} + 18(k + 1) - 1 = 10.10^k + 18k + 18 - 1$

$= (10^k + 18k - 1) + 9(10^k + 2)$

Ta thấy $10^k + 18k - 1 \vdots 27$ (do giả thiết quy nạp)

$10^k + 2 \vdots 3$ vì tổng các chữ số của $10^k + 2$ là 3 do đó $9(10^k + 2) \vdots 27$

Vậy $(10^k + 18k - 1) + 9(10^k + 2) \vdots 27$. Do đó (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.174. a) $A = 16^n - 15n - 1 \vdots 75$. (1)

• Dễ thấy với $n = 0$ thì (1) đúng.

• Giả sử (1) đúng với $n = k$, nghĩa là $16^k - 15k - 1 \vdots 75$, ta phải chứng minh $16^{k+1} - 15(k + 1) - 1 \vdots 75$.

Ta có $16^{k+1} - 15(k + 1) - 1 = 16.16^k - 15k - 15 - 1$

$= (16^k - 15k - 1) + 15.16^k - 15 = (16^k - 15k - 1) + 15(16^k - 1)$

Ta có $16^k - 15k + 1 \vdots 75$; $16^k - 1 \vdots (16 - 1)$

tức là $16^k - 1 \vdots 15$ do đó chia hết cho 5, suy ra $15(16^k - 1) \vdots 75$.

Vậy tổng chia hết cho 75, suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) $B = a^{4n+1} - a \vdots 30$. (1)

• Dễ thấy (1) đúng với $n = 0$.

• Giả sử (1) đúng với $n = k$ nghĩa là $a^{4k+1} - 1 \vdots 30$, ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là $a^{4(k+1)+1} - a \vdots 30$.

Ta có $a^{4(k+1)+1} - a = a^{4k+5} - a = a^{4k+5} - a + a^{4k+1} - a^{4k+1}$

$= (a^{4k+1} - a) + (a^{4k+5} - a^{4k+1}) = (a^{4k+1} - a) + a^{4k}(a^5 - a)$.

Ta có $a^{4k+1} - a \vdots 30$ (do giả thiết quy nạp)

$a^5 - a \vdots 30$ (xem Ví dụ 41)

Do đó tổng chia hết cho 30. Vậy (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.175. Ta phải chứng minh $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ số } a}} \vdots 3^n$ (với $a \in \mathbb{N}^*$, $a < 10$) (1)

- Với $n = 1$ ta có $\overline{aaa} \vdots 3$. Vậy (1) đúng.
- Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là $\underbrace{aa\ldots a}_{3^k \text{ số } a} \vdots 3^k$, ta phải chứng minh (1) đúng

với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh $\underbrace{aa\ldots a}_{3^{k+1} \text{ số } a} \vdots 3^{k+1}$.

Ta có $3^{k+1} = 3 \,.\, 3^k = 3^k + 3^k + 3^k$.

Do đó $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{3^{k+1} \text{ số } a}} = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\ \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}\ \underbrace{aa\ldots a}_{3^k}}$

$$= \underbrace{aa\ldots a}_{3^k} .10^{2.3^k} + \underbrace{aa\ldots a}_{3^k} . 10^{3^k} + \underbrace{aa\ldots a}_{3^k} = \underbrace{aa\ldots a}_{3^k} (10^{2.3^k} + 10^{3^k} + 1)$$

Ta thấy $\underbrace{aa\ldots a}_{3^k} \vdots 3^k$ (do giả thiết quy nạp)

$10^{2.3^k} + 10^{3^k} + 1 \vdots 3$ (vì có tổng các chữ số chia hết cho 3).

Do đó $\underbrace{aa\ldots a}_{3^k} (10^{2.3^k} + 10^{3^k} + 1) \vdots 3^{k+1}$.

Vậy (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chương II

2.1. a) $M.(x^3 + 27) = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) \Rightarrow M = 1$;

b) $M.(16 - x^2) = (x + 4)(x - 4)^2 \Rightarrow M = 4 - x$;

c) $M.(3x^2 - 7xy + 2y^2) = (x - 2y)(3x^2 + 5xy - 2y^2) \Rightarrow M = x + 2y$.

2.2. So sánh hai tích chéo ta được hai phân thức đã cho không bằng nhau.

2.3. • Xét tích $cd(a^2 - 2b^2) = a^2cd - 2b^2cd = a^2cd - 2bd.bc$

$= a^2cd - 2bd.ad = a^2cd - 2abd^2$. (1)

• Xét tích $ab(c^2 - 2d^2) = abc^2 - 2abd^2 = ac.bc - 2abd^2$

$= ac.ad - 2abd^2 = a^2cd - 2abd^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $cd(a^2 - 2b^2) = ab(c^2 - 2d^2)$.

Do đó $\dfrac{a^2 - 2b^2}{c^2 - 2d^2} = \dfrac{ab}{cd}$.

2.4. Xét tích $(x^2 - x + 1)[(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)]$

$= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$

$= (x^8 + x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1) = x^{16} + x^8 + 1$.

Từ đó suy ra (đpcm).

2.5. Ta có : $\dfrac{5a + 7b}{6a + 5b} = \dfrac{29}{28}$ suy ra $28(5a + 7b) = 29(6a + 5b)$

$\Rightarrow 140a + 196b = 174a + 145b$ hay $2a = 3b$. (1)

Vì $(a, b) = 1$ và $(2, 3) = 1$ nên từ (1) suy ra $a \vdots 3$; $b \vdots 2$.

Ta đặt $a = 3m$; $b = 2n$.

Từ (1) ta có $6m = 6n$ hay $m = n$. Vì $(a, b) = 1$ nên $m = n = 1$.

Do đó $a = 3$; $b = 2$.

2.6. a) Nhân và chia đa thức A với $x - 1$ ta được : $A = \dfrac{x^{36} - 1}{x - 1}$;

b) Nhân và chia đa thức B với $x + 1$ ta được : $B = \dfrac{x^{128} - 1}{x + 1}$.

2.7. Với $a > b > 0$ thì giá trị của cả hai phân thức đều dương.

Ta có : $\dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{(a + b)^2}{a^2 - b^2} = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} > \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

2.8. a) $\dfrac{2}{x+2}$; b) $\dfrac{3x-2}{2x-1}$.

2.9. Rút gọn vế trái ta được vế phải.

2.10. a) $A = \dfrac{x|x-3|}{5(x+3)(x-3)}$

* Nếu $x > 3$ thì $A = \dfrac{x(x-3)}{5(x+3)(x-3)} = \dfrac{x}{5(x+3)}$;

* Nếu $x < 3$ và $x \neq -3$ thì $A = \dfrac{-x(x-3)}{5(x+3)(x-3)} = \dfrac{-x}{5(x+3)}$.

b) $B = \dfrac{|(x-1)^3|}{x(x-1)^2} = \dfrac{|x-1|^3}{x|x-1|^2} = \dfrac{|x-1|}{x}$

* Nếu $x > 1$ thì $B = \dfrac{x-1}{x}$;

* Nếu $x < 1$ và $x \neq 0$ thì $B = \dfrac{1-x}{x}$.

2.11. $C = \dfrac{(2-x)^3}{(x^2+1)(x-2)} = \dfrac{-(x-2)^2}{x^2+1} \leq 0$.

2.12. a) $P = \dfrac{a-b+c}{a+b-c}$.

b) • Tử thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c)$ (xem bài 1.110a).

• Mẫu thức $ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2 = (a-b)(b-c)(b+c)$.

Do đó $Q = \dfrac{a-c}{b+c}$.

2.13. $A = \dfrac{(a^2+a+1)(x^2+1)}{(a^2-a+1)(x^2+1)} = \dfrac{a^2+a+1}{a^2-a+1}$.

Ta có $a^2 \pm a + 1 = \left(a \pm \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} > 0$

Do đó $A > 0$ với mọi giá trị của x và a.

2.14. a) $B = \dfrac{y^4 + 2}{(x^2 + 1)(y^4 + 2)} = \dfrac{1}{x^2 + 1} > 0$ với mọi x, y.

b) B max $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2 + 1}$ max $\Leftrightarrow (x^2 + 1)$ min $\Leftrightarrow x = 0$. Khi đó max B = 1.

2.15. $= \dfrac{x^2(x + 4) - (x + 4)}{x^3 + 4x^2 + x^2 + 4x - 2x - 8} = \dfrac{(x + 4)(x^2 - 1)}{x^2(x + 4) + x(x + 4) - 2(x + 4)}$

$= \dfrac{(x + 4)(x + 1)(x - 1)}{(x + 4)(x + 2)(x - 1)} = \dfrac{x + 1}{x + 2}$.

Khi $x = -1002$ thì $C = \dfrac{-1001}{-1000} = 1{,}001 > 1$.

2.16. a) $\dfrac{n!}{n![1 + (n + 1)]} = \dfrac{1}{n + 2}$.

b) $\dfrac{(n + 1)![(n + 2) + 1]}{(n + 2)![n + 3 - 1]} = \dfrac{(n + 1)!(n + 3)}{(n + 1)!(n + 2)(n + 2)} = \dfrac{n + 3}{(n + 2)^2}$.

2.17. a) $A = \dfrac{(x + 5y)(x - 5y)}{3(x + 5y)} = \dfrac{x - 5y}{3} = \dfrac{99}{3} = 33$;

b) $B = \dfrac{3(x - 3y)}{2(x + 3y)(x - 3y)} = \dfrac{3}{2(x + 3y)} = \dfrac{3}{2.\dfrac{1}{4}} = 6$.

2.18. Ta có $10x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x = 3 - 10x^2$.

Do đó $P = \dfrac{3x^2 + 3.(3 - 10x^2) - 6}{9x^2 - 1} = \dfrac{-27x^2 + 3}{9x^2 - 1} = \dfrac{-3(9x^2 - 1)}{9x^2 - 1} = -3$.

2.19. Ta có $a^2 - 6b^2 = ab \Leftrightarrow a^2 - 6b^2 - ab = 0$

hay $(a + 2b)(a - 3b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2b \text{ (loại)} \\ a = 3b. \end{array}\right.$

Thay $a = 3b$ vào biểu thức A ta được $A = \dfrac{2.(3b).b}{(3b)^2 - 7b^2} = \dfrac{6b^2}{2b^2} = 3$.

2.20. Từ điều kiện $a + b = c \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$.

$a + b = c \Rightarrow b - c = -a \Rightarrow b^2 + c^2 - 2bc = a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 2bc$.

$a + b = c \Rightarrow c - a = b \Rightarrow c^2 + a^2 - 2ca = b^2 \Rightarrow c^2 + a^2 - b^2 = 2ca$.

Do đó $B = \dfrac{-2ab.2bc.2ca}{4a^2b^2c^2} = -2$.

2.21. • Ta có : $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b + c = -d$

Do đó $ab - cd = ab + c(a + b + c) = ab + ac + bc + c^2 = c^2 + 1$

Tương tự $bc - ad = a^2 + 1$; $ca - bd = b^2 + 1$.

Vậy $P = \dfrac{(c^2+1)(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} = 1$.

2.22. a) $\dfrac{x^{80} + x^{40} + 1}{x^{20} + x^{10} + 1} = \dfrac{x^{80} + 2x^{40} + 1 - x^{40}}{x^{20} + x^{10} + 1} = \dfrac{(x^{40} + 1)^2 - (x^{20})^2}{x^{20} + x^{10} + 1}$

$= \dfrac{(x^{40} - x^{20} + 1)(x^{40} + x^{20} + 1)}{x^{20} + x^{10} + 1} = \dfrac{(x^{40} - x^{20} + 1)[(x^{20} + 1)^2 - (x^{10})^2]}{x^{20} + x^{10} + 1}$

$= \dfrac{(x^{40} - x^{20} + 1)(x^{20} - x^{10} + 1)(x^{20} + x^{10} + 1)}{x^{20} + x^{10} + 1} = (x^{40} - x^{20} + 1)(x^{20} - x^{10} + 1)$.

b) Nhân cả tử và mẫu của phân thức đã cho với $x^4 - 1$, ta được

$$\frac{(x^{80} + x^{76} + x^{72} + ... + x^8 + x^4 + 1)(x^4 - 1)}{(x^{40} + x^{38} + x^{36} + ... + x^4 + x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

$= \dfrac{x^{84} - 1}{(x^{42} - 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{(x^{42} - 1)(x^{42} + 1)}{(x^{42} - 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{x^{42} + 1}{x^2 + 1}$.

2.23. a) $\dfrac{a^{2n} - b^{2n}}{(a - b)(a^n + b^n)} = \dfrac{(a^n - b^n)(a^n + b^n)}{(a - b)(a^n + b^n)}$

$= \dfrac{(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})}{a - b}$

$= a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$.

b) $\dfrac{x^{3n} - y^{3n}}{x^n - y^n} = \dfrac{(x^n - y^n)(x^{2n} + x^ny^n + y^{2n})}{(x^n - y^n)} = x^{2n} + x^ny^n + y^{2n}$.

c) $\dfrac{x^{4m} - y^{4n}}{x^{3m} + x^{2m}y^n + x^my^{2n} + y^{3n}} = \dfrac{(x^{2m} - y^{2m})(x^{2m} + y^{2m})}{(x^{2m} + y^{2n})(x^m + y^n)}$

$= \dfrac{(x^m - y^n)(x^m + y^n)}{x^m + y^n} = x^m - y^n$.

2.24. Áp dụng hằng đẳng thức : nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

a) $A = \dfrac{(x - y)(x + y)(y - z)(y + z)(z - x)(z + x)}{3(x - y)(y - z)(z - x)} = \dfrac{(x + y)(y + z)(z + x)}{3}$.

b) $B = \dfrac{3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)}{3(x - y)(y - z)(z - x)} = (x + y)(y + z)(z + x)$.

2.25. Từ điều kiện $ax + by + cz = 0$, suy ra :

$(ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + z^2 + 2(abxy + bcyz + cazx) = 0$

$\Rightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -2(abxy + bcyz + cazx)$.

Xét mẫu thức : $ab(x - y)^2 + bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2$

$= ab(x^2 - 2xy + y^2) + bc(y^2 - 2yz + z^2) + ca(z^2 - 2zx + x^2)$

$= abx^2 - 2abxy + aby^2 + bcy^2 - 2bcyz + bcz^2 + caz^2 - 2cazx + cax^2$

$= -2(abxy + bcyz + cazx) + (aby^2 + acz^2) + (abx^2 + bcz^2) + (acz^2 + bcy^2)$

$= (a^2x^2 + aby^2 + acz^2) + (abx^2 + b^2y^2 + bcz^2) + (acx^2 + bcy^2 + c^2z^2)$

$= a(ax^2 + by^2 + cz^2) + b(ax^2 + by^2 + cz^2) + c(ax^2 + by^2 + cz^2)$

$= (ax^2 + by^2 + cz^2)(a + b + c)$.

Do đó : $P = \dfrac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(ax^2 + by^2 + cz^2)(a + b + c)} = \dfrac{1}{a + b + c} = \dfrac{1}{0,01} = 100$.

2.26. Thêm vào tử và mẫu cùng đa thức $2xy - 2x - 2y + 1$ $(= 0)$ ta được :

$$P = \frac{2x^2 - 2x + 1 + 2xy - 2x - 2y + 1}{2y^2 - 2y + 1 + 2xy - 2x - 2y + 1} = \frac{2(x^2 + xy - 2x - y + 1)}{2(y^2 + xy - 2y - x + 1)}$$

$$= \frac{(x^2 + xy - x) - (x + y - 1)}{(y^2 + xy - y) - (x + y - 1)} = \frac{(x + y - 1)(x - 1)}{(x + y - 1)(y - 1)} = \frac{x - 1}{y - 1}.$$

2.27. a) Ta đặt $(4n + 1, 5n + 1) = d$.

Suy ra $5(4n + 1) - 4(5n + 1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$ do đó $d = 1$, ta có đpcm.

b) Ta đặt $(12n + 1, 30n + 1) = d$

Suy ra $5(12n + 1) - 2(30n + 1) \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d$, do đó $d \in \{1 ; 3\}$.

Nhưng do $12n + 1 \not\vdots\, 3$ nên $d = 1$, ta có đpcm.

2.28. a) $\dfrac{x + y}{xy}$; b) $\dfrac{y}{y - x}$.

2.29. a) Rút gọn các phân thức rồi quy đồng mẫu thức ta được

$$\frac{x(x + y) + y(x - y) - 2xy}{(x - y)(x + y)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1.$$

b) Rút gọn từng phân thức ta được

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{x-x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=1.$$

2.30. a) $A=\dfrac{n^3-3n^2+2n}{6}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

Tích $n(n-1)(n-2)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6.

Do đó $A=\dfrac{6k}{6}=k$ $(k\in\mathbb{Z})$.

b) $B=\dfrac{n^4-2n^3-n^2+2n}{12}=\dfrac{n(n-2)(n-1)(n+1)}{12}.$

Tích $n(n-2)(n-1)(n+1)$ là tích của bốn số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 24 (bài 1.131). Do đó $B=\dfrac{24k}{12}=2k$ $(k\in\mathbb{Z})$.

2.31. $P=\dfrac{1}{(y-z)(x-y)(x+y+z)}+\dfrac{1}{(z-x)(y-z)(x+y+z)}+\dfrac{1}{(x-y)(z-x)(x+y+z)}$

$=\dfrac{(z-x)+(x-y)+(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}=0.$

2.32. a) $A=\dfrac{2x^2-5x}{2x-5}+\dfrac{3}{2x-5}=x+\dfrac{3}{2x-5}$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2x-5\in Ư(3)=\{\pm 1;\pm 3\}$.

$2x-5$	1	-1	3	-3
$2x$	6	4	8	2
x	3	2	4	1

Vậy A có giá trị nguyên khi $x\in\{1;2;3;4\}$.

b) $B=\dfrac{3x^3+9x^2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+3}-\dfrac{2}{x+3}=3x^2-1-\dfrac{2}{x+3}$ (ĐK : $x\neq -3$).

B có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x+3\in Ư(2)=\{\pm 1;\pm 2\}$.

$x+3$	1	-1	2	-2
x	-2	-4	-1	-5

Vậy B có giá trị nguyên khi $x\in\{-1;-2;-4;-5\}$.

2.33. a) $P = \dfrac{4x+2}{x^2+2} = \dfrac{x^2+4x+4-(x^2+2)}{x^2+2} = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+2} - 1 \geq -1.$

Vậy min $P = -1$ khi $x = -2$.

b) $Q = \dfrac{2x^2-4x+8}{x^2-2x+4} + \dfrac{9}{x^2-2x+4} = 2 + \dfrac{9}{(x-1)^2+3} \leq 2 + \dfrac{9}{3}.$

$\Rightarrow Q \leq 5$. Do đó max $Q = 5$ khi $x = 1$.

2.34. $\dfrac{x^2+5}{x^3-3x+2} = \dfrac{m}{x+2} + \dfrac{n}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+5}{x^3-3x+2} = \dfrac{m(x-1)^2+n(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+5}{(x+2)(x-1)^2} = \dfrac{mx^2-(2m-n)x+(m+2n)}{(x+2)(x-1)^2}$. Suy ra

$$\begin{cases} m = 1 \\ 2m - n = 0 \\ m + 2n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2. \end{cases}$$

2.35. a) Quy đồng mẫu thức, ta được

$$\frac{(y+z)(z-y)+(z+x)(x-z)+(x+y)(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{z^2-y^2+x^2-z^2+y^2-x^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0$$

b) Quy đồng mẫu thức ta được

$$\frac{yz(z-y)+xz(x-z)+xy(y-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{yz(z-y)+xz(x-z)-xy[(z-y)+(x-z)]}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{y(z-y)(z-x)+x(x-z)(z-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(z-y)(z-x)(y-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{1}{xyz}.$$

2.36. a) $A = \dfrac{x(z-y)+y(x-z)+z(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \dfrac{xz-xy+xy-yz+yz-xz}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0.$

b) $B = \dfrac{x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

$$= \frac{x^2(z-y)+y^2(x-z)-z^2[(z-y)+(x-z)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{(z-y)(x^2-z^2)+(x-z)(y^2-z^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1.$$

c) $C = \dfrac{x^3(z-y) + y^3(x-z) - z^3[(z-y)+(x-z)]}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

$= \dfrac{(z-y)(x^3-z^3) + (x-y)(y^3-z^3)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

$= \dfrac{(z-y)(x-z)(x^2+xy+z^2) + (x-y)(y-z)(y^2+yz+z^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

$= \dfrac{(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = x + y + z.$

2.37. a) Thay $7 = 2a - b$ vào biểu thức A :

$$A = \frac{5a-b}{3a+(2a-b)} + \frac{3b-2a}{2b-(2a-b)} = \frac{5a-b}{5a-b} + \frac{3b-2a}{3b-2a} = 1 + 1 = 2.$$

b) Thay $-1 = 3a + 5b$ vào biểu thức B :

$$B = \frac{8a+5b}{5a+(3a+5b)} + \frac{3a+b}{4b-(3a+5b)} = \frac{8a+5b}{8a+5b} + \frac{3a+b}{-3a-b} = 1 - 1 = 0.$$

2.38. a) Nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ nhất với z ; nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ hai với xz, ta được :

$$P = \frac{xz}{-xyz+xz+z} - \frac{y(xz)}{yz(xz)-y(xz)+xz} + \frac{z}{xz+z-1}$$

$$= \frac{xz}{-1+xz+z} - \frac{1}{z-1+xz} + \frac{z}{xz+z-1} = 1$$

b) Nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ nhất với z ; nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ hai với xz, ta được :

$$Q = \frac{xz}{xyz+xz+2z} + \frac{y(xz)}{yz(xz)+y(xz)+xz} + \frac{2z}{xz+2z+2}$$

$$= \frac{xz}{2+xz+2z} + \frac{2}{2z+2+xz} + \frac{2z}{xz+2z+2} = 1.$$

2.39. Vì $xy + yz + zx = 0$ nên $x^2 + 2yz = x^2 + 2yz - xy - yz - zx = (x-y)(x-z)$.

Tương tự : $y^2 + 2zx = (y-z)(y-x)$; $z^2 + 2xy = (z-x)(z-y)$.

Do đó $A = \dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)} = 1$ (bài 2.36b).

2.40. Thực hiện các phép tính ở vế trái T

$$T = \frac{x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

$$= \frac{x(1-z^2-y^2+y^2z^2) + y(1-z^2-x^2+x^2z^2) + z(1-y^2-x^2+x^2y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

$$= \frac{x - xz^2 - xy^2 + xy^2z^2 + y - yz^2 - x^2y + x^2yz^2 + z - y^2z - x^2z + x^2y^2z}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

$$= \frac{xyz(xy+yz+zx) + x(1-xy-xz) + y(1-xy-yz) + z(1-xz-yz)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

$$= \frac{xyz.1 + xyz + xyz + xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

2.41. Ta có $x + y + z = 0 \Rightarrow (y+z)^2 = (-x)^2$ hay $y^2 + z^2 + 2yz = x^2 \Rightarrow y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$

Tương tự : $z^2 + x^2 - y^2 = -2zx$; $x^2 + y^2 - z^2 = -2xy$.

Do đó $A = \dfrac{x^2}{-2xy} + \dfrac{y^2}{-2zx} + \dfrac{z^2}{-2xy} = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{-2xyz}$.

Vì $x + y + z = 0$ nên $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (Ví dụ 10 chương I).

Do đó $A = \dfrac{3xyz}{-2xyz} = -\dfrac{3}{2}$.

2.42. Ta có $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$, suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2$.

Do đó $ab + bc + ca = 0$.

Ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{bc + ac + ab}{abc} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} = 3\left(\dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{b}.\dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{3}{abc}$.

2.43. a) Vì $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$ nên $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{3}{xyz}$, do đó

$$P = \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} = \frac{xyz}{z^3} + \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} = xyz\left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right) = xyz.\frac{3}{xyz} = 3.$$

b) $Q = \dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y} = \left(\dfrac{x+y}{z} + 1\right) + \left(\dfrac{y+z}{x} + 1\right) + \left(\dfrac{z+1}{y} + 1\right) - 3$

$$= (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 = -3.$$

2.44. Xét vế trái VT :

$$VT = \frac{b}{a^3 - 1} - \frac{a}{b^3 - 1} = \frac{b}{(a-1)(a^2 + a + 1)} - \frac{a}{(b-1)(b^2 + b + 1)}$$

vì $a + b = 1$ nên $a - 1 = -b$; $b - 1 = -a$, do đó :

$$VT = \frac{b}{-b(a^2 + a + 1)} - \frac{a}{-a(b^2 + b + 1)} = \frac{-1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1}$$

$$= \frac{-b^2 - b - 1 + a^2 + a + 1}{(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)} = \frac{(a+b)(a-b) + (a-b)}{a^2b^2 + a^2b + a^2 + ab^2 + ab + a + b^2 + b + 1}$$

$$= \frac{(a-b) + (a-b)}{a^2b^2 + ab(a+b) + (a+b)^2 - ab + 2} = \frac{2(a-b)}{a^2b^2 + 3} = VP.$$

2.45. Từ các điều kiện đã cho, ta có $x + y + z = 2(ax + by + cz)$.
Mặt khác $x = by + cz$ nên $x + y + z = 2(ax + x) = 2x(a + 1)$.

Suy ra $\frac{1}{a+1} = \frac{2x}{x+y+z}$.

Tương tự : $\frac{1}{b+1} = \frac{2y}{x+y+z}$; $\frac{1}{c+1} = \frac{2z}{x+y+z}$.

Do đó $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$.

2.46. Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}$

hay $\frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$

$$\Leftrightarrow c(a+b+c)(a+b) = -ab(a+b) \Leftrightarrow (ac + bc + c^2)(a+b) + ab(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(ac + bc + c^2 + ab) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

Suy ra $a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = -a$.
Không mất tính tổng quát, giả sử $a = -b$, ta có

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{(-b)^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{c^3}. \quad (1)$$

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + c^3} = \frac{1}{(-b)^3 + b^3 + c^3} = \frac{1}{c^3}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra (đpcm).

Nhận xét. Kết luận của bài toán trên vẫn đúng nếu ta thay số mũ 3 bởi số mũ lẻ bất kì.

2.47. ĐK : $abc \neq 0$. Từ điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k$, suy ra $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=k^2$

hay $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2.\frac{c+a+b}{abc}=k^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2=k^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=k^2-2$$

Để $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=k$ thì $k^2-2=k \Leftrightarrow k^2-k-2=0 \Leftrightarrow (k+1)(k-2)=0$,

suy ra $k=2$ hoặc $k=-1$. Rõ ràng $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>0$ nên $k=-1$ bị loại.

2.48. Từ điều kiện $\frac{a+b-c}{ab}-\frac{b+c-a}{bc}-\frac{c+a-b}{ca}=0$

suy ra $$\frac{c(a+b-c)-a(b+c-a)-b(c+a-b)}{abc}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-2ab+b^2-c^2}{abc}=0 \Leftrightarrow \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{abc}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b-c=0 \\ a-b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b+c \\ b=a+c \end{array}\right. \text{(đpcm).}$$

2.49. • Từ điều kiện $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$, suy ra $\frac{bcx+cay+abz}{abc}=0$ hay $bcx+cay+abz=0$.

• Từ điều kiện : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=10$ suy ra $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+2\left(\frac{ab}{xy}+\frac{bc}{yz}+\frac{ca}{zx}\right)=100$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+2.\frac{abz+bcx+cay}{xzy}=100$. Do đó $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=100$.

2.50. Từ điều kiện $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$

suy ra : $$x+y+z=\left(\frac{x^2}{y+z}+x\right)+\left(\frac{y^2}{z+x}+y\right)+\left(\frac{z^2}{x+y}+z\right)$$

$$=\frac{x^2+xy+xz}{y+z}+\frac{y^2+yz+xy}{z+x}+\frac{z^2+zx+zy}{x+y}$$

$$=\frac{x(x+y+z)}{y+z}+\frac{y(x+y+z)}{z+x}+\frac{z(x+y+z)}{x+y}$$

$$=(x+y+z)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Vì $x + y + z \neq 0$ nên $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} = 1$.

2.51. a) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+3)} . \dfrac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x+5)} = \dfrac{x-4}{x+5}$;

b) $\dfrac{(x+7)(x-7)}{(x+1)^2} . \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+7)(x-3)} = \dfrac{x-7}{x+1}$.

2.52. a) $\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{y^2(x+y)^2} : \dfrac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{xy^2}$;

b) $\dfrac{3(x^2-xy+y^2)}{4x(x-y)(x+y)} : \dfrac{9(x+y)(x^2-xy+y^2)}{2x(x-y)} = \dfrac{1}{6(x+y)^2}$.

2.53. a) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{b}$; b) $\dfrac{a+x}{a+x-y}$.

2.54. $\dfrac{x^2+y^2}{y^2}\left(\dfrac{x^2-2xy+y^2-x^2}{2x-y}\right) = \dfrac{x^2+y^2}{y^2} . \dfrac{-y(2x-y)}{2x-y} = -\dfrac{x^2+y^2}{y}$.

2.55. a) $-\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{3x+4y}$; c) $\dfrac{1}{2x+y}$.

2.56. a) $A = \dfrac{b(2a+1)(a+5b)}{a-3b} . \dfrac{a(a-3b)}{ab(a+5b)} = 2a+1$. Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $2a+1$ là số nguyên lẻ.

b) $B = \dfrac{4ab}{a-3b} . \dfrac{a(a-3b)}{2ab} = 2a$. Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $2a$ là số chẵn.

2.57. a) Đặt $x + 1 = a$, ta được :

$$A = \frac{a(a+1) - 2(a^2-a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)} . \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{2-a}$$

$$= \frac{-a^2+3a-2}{2-a} = \frac{(a-1)(2-a)}{2-a} = a - 1 = x + 1 - 1 = x.$$

b) $B = \dfrac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{(x+y+z)^2} . \dfrac{(x+y-z)(x+y+z)}{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}$

$$= \frac{x+y-z}{2}.$$

2.58. a) $VT = \dfrac{|x-3|}{(x-3)(x+3)} .(x+3)^2$.

Vì $x < -3$ nên $VT = \dfrac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} .(x+3)^2 = -(x+3) = VP$.

b) $VT = \dfrac{(x+y)(x-y)^2}{x-y} \cdot \dfrac{(x-y)^2}{(x-y)^2(x+y)^2} = \dfrac{x-y}{x+y} = VP.$

2.59. a) $P = \dfrac{xy(x-y)}{(x+y)(x-y)} \cdot \dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)xy} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}$. Ta thấy

$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} + y^2 > 0$ nên $P > 0 \Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow x > y$ và $x \neq -y$.

b) $Q = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^3} = \dfrac{1}{(x-y)^2}$.

Vì $x \neq y$ nên $(x-y)^2 > 0$. Do đó $Q > 0$ với mọi x, y làm Q có nghĩa.

2.60. a) $A = \dfrac{(x+2)(x+a)}{(x+2)(x-a)} \cdot \dfrac{(x-a)^2}{2(x-a)(x+a)} = \dfrac{1}{2}$.

b) $B = \left[\dfrac{(x+a)(x-b)}{(x-a)(x+b)} \cdot \dfrac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}\right] : \left[\dfrac{(x+1)(x-b)}{(x+1)(x+b)} : \dfrac{(x-1)(x-b)}{(x-1)(x+b)}\right]$

$= \dfrac{(x-b)^2}{(x+b)^2} : \dfrac{(x-b)^2}{(x+b)^2} = 1.$

2.61. $VT = \dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{x^2+y^2+z^2} : \dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}$

$= \dfrac{2xyz(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2} \cdot \dfrac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2} = \dfrac{2xyz}{x+y+z}$.

Vì $x = y + z$ nên $T = \dfrac{2(y+z)yz}{2(y+z)} = yz = VP$.

2.62. Vì $xy + yz + zx = 1$ nên $x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$.

Tương tự $y^2 + 1 = (y+z)(y+x)$; $z^2 + 1 = (z+x)(z+y)$.

Do đó $P = \dfrac{(x+y)^2}{(x+y)(x+z)} \cdot \dfrac{(y+z)^2}{2(y+z)(y+x)} \cdot \dfrac{(z+x)^2}{3(z+x)(z+y)} = \dfrac{1}{6}$.

2.63. Vì $x + y + z = 1$ nên $z = 1 - x - y$. Do đó $xy + z = xy + 1 - x - y = (x-1)(y-1)$.

Tương tự $yz + x = (y-1)(z-1)$; $zx + y = (z-1)(x-1)$.

Vậy $Q = \dfrac{(x-1)(y-1)}{(x+y)^2} \cdot \dfrac{(y-1)(z-1)}{(y+z)^2} \cdot \dfrac{(z-1)(x-1)}{(z+x)^2}$

$= \dfrac{(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2}{(1-z)^2(1-x)^2(1-y)^2} = 1.$

2.64. Ta có $\frac{a-b}{ab}.\frac{b-c}{bc}.\frac{c-a}{ca} = (c-a)(a-b)(b-c)$, suy ra

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2} - (c-a)(a-b)(b-c) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)\left(\frac{1}{a^2b^2c^2} - 1\right) = 0.$$

Vì $abc \neq \pm 1$ nên $\frac{1}{a^2b^2c^2} - 1 \neq 0$. Do đó $(a-b)(b-c)(c-a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ b = c \\ c = a. \end{array}\right.$

Suy ra trong ba số a, b, c ít nhất phải có hai số bằng nhau.

2.65. Từ điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$.

Do đó $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{z^2}$ hay $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} = -\frac{2}{xy}$.

Tương tự : $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{yz}$; $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = -\frac{2}{xz}$.

Ta có $A = \frac{x^2(y^2+z^2) - y^2z^2}{x^2y^2z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{yz}$.

$B = \frac{y^2(z^2+x^2) - z^2x^2}{x^2y^2z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{-2}{zx}$.

$C = \frac{z^2(x^2+y^2) - x^2y^2}{x^2y^2z^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} = \frac{-2}{xy}$.

Do đó $A.B.C = \frac{-8}{x^2y^2z^2} = \frac{-8}{4^2} = -\frac{1}{2}$.

2.66. $A = \frac{y^3 - x^3}{x^3y^3(x-y)^3} + \frac{3}{(x-y)^4}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{6}{(x-y)^5}.\frac{y-x}{xy}$

$$= \frac{-(x^2+xy+y^2)}{x^3y^3(x-y)^2} + \frac{3}{(x-y)^4}.\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy}\right)$$

$$= \frac{-(x^2+xy+y^2)}{x^3y^3(x-y)^2} + \frac{3}{(x-y)^4}.\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$$

$$= \frac{-(x^2+xy+y^2)}{x^3y^3(x-y)^2} + \frac{3}{(x-y)^4}.\frac{(y-x)^2}{x^2y^2} = \frac{-x^2-xy-y^2}{x^3y^3(x-y)^2} + \frac{3}{(x-y)^2x^2y^2}$$

$$= \frac{-x^2-xy-y^2+3xy}{x^3y^3(x-y)^2} = \frac{-(x-y)^2}{x^3y^3(x-y)^2} = \left(-\frac{1}{xy}\right)^3.$$

2.67. a) $A = 1$.

b) Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng.

Đáp số : $B = 5$.

2.68. $M = N = -1$.

2.69. a) Sử dụng các hằng đẳng thức $A^3 \pm B^3$; $A^2 - B^2$ để biến đổi vế trái thành vế phải.

b) $VT = \dfrac{(x+2)(y+2) - 4(x+1)(y+1)}{(x+1)(y+2)} : \dfrac{x^2(y+1)(y+2) - y^2(x+1)(x+2)}{(x+1)(y+2)}$

$= \dfrac{xy + 2x + 2y + 4 - 4(xy + x + y + 1)}{(x+1)(y+2} : \dfrac{x^2(y^2 + 3y + 2) - y^2(x^2 + 3x + 2)}{(x+1)(y+2)}$

$= \dfrac{-3xy - 2x - 2y}{(x+1)(y+2)} : \dfrac{x^2y^2 + 3x^2y + 2x^2 - x^2y^2 - 3xy^2 - 2y^2}{(x+1)(y+2)}$

$= \dfrac{-(3xy + 2x + 2y)}{(x+1)(y+2)} . \dfrac{(x+1)(y+2)}{3xy(x-y) + 2(x-y)(x+y)} = \dfrac{1}{y-x} = VP.$

2.70. $A = \dfrac{(y^2 - yz + z^2)(y+z) + x^3 - 3xyz}{x(y+z)} . \dfrac{2x(y+z)}{x+y+z} + (x+y+z)^2$

$= \dfrac{2(y^3 + z^3 + x^3 - 3xyz)}{x+y+z} + (x+y+z)^2$

$= \dfrac{2(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{(x+y+z)} + (x+y+z)^2$

$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$= 3(x^2 + y^2 + z^2)$.

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $A \vdots 3$.

2.71. $B = \dfrac{x(x^2 - yz)}{x+y+z} + \dfrac{y(y^2 - zx)}{x+y+z} + \dfrac{z(z^2 - xy)}{x+y+z} = \dfrac{x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz}{x+y+z}$

$= \dfrac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x+y+z} = \dfrac{(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{x+y+z}$

$= \dfrac{1}{2}.2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = \dfrac{1}{2}.2[(x-y)^2 + (y-x)^2 + (z-x)^2] \geq 0.$

2.72. ĐK : $x - y \neq \dfrac{-1}{2}$; $x \neq y$.

$$M = \left[\frac{1}{1 + 2(x-y)} + 2(x-y) - 1\right] : \left[2(x-y) - \frac{4(x-y)^2}{2(x-y)+1}\right]$$

Đặt $x - y = a$, ta được $M = \left(\dfrac{1}{1+2a} + 2a - 1\right) : \left(2a - \dfrac{4a^2}{2a+1}\right)$

$$= \frac{1 + 4a^2 - 1}{1 + 2a} : \frac{4a^2 + 2a - 4a^2}{2a + 1} = \frac{4a^2}{1 + 2a}.\frac{2a + 1}{2a} = 2a = 2(x - y).$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên M là một số chẵn.

2.73. ĐK : $x \neq 2$; $x \neq -1$. Đặt $x - 1 = a$, ta được :

$$N = \left(\frac{a}{a^2 + a + 1} - \frac{2}{a - 1}\right) : \left(\frac{a^4 + 2}{a^3 - 1} - a\right)$$

$$= \frac{a^2 - a - 2a^2 - 2a - 2}{a^3 - 1} : \frac{a^4 + 2 - a^4 + a}{a^3 - 1} = \frac{-(a^2 + 3a + 2)}{a^3 - 1}.\frac{a^3 - 1}{a + 2}$$

$$= \frac{-(a + 1)(a + 2)}{a + 2} = -(a + 1) = -(x - 1 + 1) = -x.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên N có giá trị là một số nguyên.

2.74. ĐK : $x \neq 0$; $x \neq -4$.

$$P = \frac{x^2}{x + 4}.\frac{(x + 4)^2}{x} + 9 = x(x + 4) + 9 = (x + 2)^2 + 5 \geq 5.$$

Do đó min P = 5 khi $x = -2$.

2.75. ĐK : $x \neq \pm 2$.

$$Q = \left[\frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}.\frac{4(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{4x}{x - 2}\right] : \frac{-16}{x(x - 2)^3}$$

$$= \left[\frac{4(x^2 - 2x + 4)}{(x - 2)^2} - \frac{4x}{x - 2}\right].\frac{x(2 - x)^3}{16} = \frac{16}{(2 - x)^2}.\frac{x(2 - x)^3}{16} = 2x - x^2$$

$$= -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = -[(x - 1)^2 - 1] = -(x - 1)^2 + 1 \leq 1.$$

Do đó max Q = 1 khi $x = 1$.

2.76. ĐK : $x \neq -1$; $x \neq \pm 2$; $x \neq 0$.

a) $$A = \frac{(x + 1)^3 - (2x^2 + 4x - 1) - (x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}.\frac{3x(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$= \frac{x^3 + 1}{x^3 + 1}.\frac{3x}{x - 2} = \frac{3x}{x - 2}.$$

b) $A = \dfrac{3x}{x-2} = \dfrac{3x-6+6}{x-2} = 3 + \dfrac{6}{x-2}$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x - 2 \in Ư(6) = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6\}$.

$x-2$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
x	3	1	4	0 (loại)	5	-1 (loại)	8	-4

Vậy khi $x \in \{-4 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 8\}$ thì A có giá trị nguyên.

2.77. ĐK : $x \neq 0 ; x \neq \pm 2$.

a) $B = \left[\dfrac{x^2}{x(x-2)(x+2)} - \dfrac{10}{5(x+2)} + \dfrac{1}{x-2}\right] : \left(x + 2 + \dfrac{6-x^2}{x-2}\right)$

$= \dfrac{x - 2(x-2) + (x+2)}{(x+2)(x-2)} : \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{6}{(x+2)(x-2)} . \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{3}{x+2}$.

Lưu ý. Rút gọn các phân thức trước rồi sau đó quy đồng mẫu các phân thức.

b) $|x| = \dfrac{1}{2}$ suy ra $x = \pm\dfrac{1}{2}$.

- Khi $x = \dfrac{1}{2}$ thì $B = \dfrac{6}{5}$;
- Khi $x = -\dfrac{1}{2}$ thì $B = 2$.

c) $B = -1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x+2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3+x+2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -5$ (TMĐK).

d) $B > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ và $(x \neq 0 ; x \neq 2)$.

e) B có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x + 2 \in \{\pm 1 ; \pm 3\}$

$x+2$	1	-1	3	-3
x	-1	-3	1	-5

2.78. ĐK : $xy \neq 0 ; x \neq y$.

a) $M = \dfrac{(x^2+y^2)(x+y)(y-x)}{x^4y^4(x-y)^3} + \dfrac{2(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3(x-y)^4} + \dfrac{2(x+y)(y-x)}{x^2y^2(x-y)^5}$

$= \dfrac{-(x^2+y^2)(x+y)}{x^4y^4(x-y)^2} + \dfrac{2(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3(x-y)^4} - \dfrac{2(x+y)}{x^2y^2(x-y)^4}$

$= \dfrac{(x+y)(-x^2-y^2+2xy)}{x^4y^4(x-y)^2} = \dfrac{-(x+y)}{x^4y^4}$

b) $M = 54$.

2.79. ĐK : $x \neq \pm y$.

a) $N = x^2 + y^2$.

b) $N = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x + y)^2 - 2xy = \left(\frac{1}{40}\right)^2 - 2.\left(\frac{-1}{80}\right) = \frac{41}{1600}$.

2.80. Vì $xyz = 1$ nên $x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$, do đó biểu thức đã cho có nghĩa.

Ta có : $xyz = 1$ nên $\frac{1}{x} = yz$; $\frac{1}{y} = zx$; $\frac{1}{z} = xy$.

Do đó $P = (x + yz)^2 + (y + zx)^2 + (z + xy)^2 - (x + yz)(y + zx)(z + xy)$

$= x^2 + y^2z^2 + 2xyz + y^2 + z^2x^2 + 2xyz + z^2 + x^2y^2 + 2xyz$

$- (xyz + x^2y^2 + z^2x^2 + x^2 + y^2z^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2) = 6 - 2 = 4.$

2.81. ĐK : $xyz \neq 0$.

Vận dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng ta được

$$Q = \frac{1}{x}(x^2 + y^2 - z^2 + z^2 + x^2 - y^2) + \frac{1}{y}(x^2 + y^2 - z^2 + y^2 + z^2 - x^2)$$

$$+ \frac{1}{z}(y^2 + z^2 - x^2 + z^2 + x^2 - y^2)$$

$$= \frac{1}{x}.2x^2 + \frac{1}{y}.2y^2 + \frac{1}{z}.2z^2 = 2(x + y + z) = 2a.$$

2.82. Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$. Do đó : $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} = \frac{-2}{xy}$

Tương tự : $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-2}{yz}$; $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{-2}{zx}$.

Do đó $$A = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}\right).\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2}\right).\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

$$= \frac{-2}{xy}.\frac{-2}{yz}.\frac{-2}{zx} = \frac{-8}{x^2y^2z^2}$$

Với $xyz \neq 0$ thì $x^2y^2z^2 > 0$. Mặt khác $-8 < 0$ nên $A < 0$.

2.83. ĐK : $a \neq -b$; $b \neq -c$; $c \neq -a$.

$$B = \frac{ab}{(b + c)(c + a)} + \frac{bc}{(c + a)(a + b)} + \frac{ca}{(a + b)(b + c)} + \frac{2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

$$= \frac{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{(a + b)(b + c)(c + a)} = 1$$

(xem bài 1.113).

2.84. ĐK : $bc \neq 0$; $b + c \neq \pm a$. Xét biểu thức $C + 1 = x + y + xy + 1 = (x + 1)(y + 1)$.

Ta có $\quad x + 1 = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \dfrac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$.

$$y + 1 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2} + 1 = \frac{4bc}{(b + c)^2 - a^2}.$$

Do đó $C + 1 = \dfrac{(b + c)^2 - a}{2bc}.\dfrac{4bc}{(b + c)^2 - a^2} = 2$, suy ra $C = 1$.

Nhận xét. Việc thêm 1 vào C là để có thể phân tích C + 1 thành nhân tử, từ đó tìm được giá trị của C.

2.85. ĐK : $xyz \neq 0$; $x \neq y$; $y \neq z$; $z \neq x$. Ta đặt $M = \dfrac{x - y}{z} + \dfrac{y - z}{x} + \dfrac{z - x}{y}$.

Khi đó $P = M\left(\dfrac{z}{x - y} + \dfrac{x}{y - z} + \dfrac{y}{z - x}\right) = M.\dfrac{z}{x - y} + M.\dfrac{x}{y - z} + M.\dfrac{y}{z - x}$.

Ta có : $M.\dfrac{z}{x - y} = \left(\dfrac{x - y}{z} + \dfrac{y - z}{x} + \dfrac{z - x}{y}\right).\dfrac{z}{x - y}$

$$= 1 + \frac{z(y - z)}{x(x - y)} + \frac{z(z - x)}{y(x - y)} = 1 + \frac{yz(y - z) + zx(z - x)}{xy(x - y)}$$

$$= 1 + \frac{z(x - y)(z - x - y)}{xy(x - y)} = 1 + \frac{(x - y).z.2z}{xy(x - y)} \text{ (vì } z = -x - y)$$

$$= 1 + \frac{2z^3}{xyz}.$$

Tương tự $M.\dfrac{x}{y - z} = 1 + \dfrac{2x^3}{xyz}$; $M.\dfrac{y}{x - z} = 1 + \dfrac{2y^3}{xyz}$.

Do đó $\quad P = \left(1 + \dfrac{2z^3}{xyz}\right) + \left(1 + \dfrac{2x^3}{xyz}\right) + \left(1 + \dfrac{2y^3}{xyz}\right) = 3 + \dfrac{2(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz}$.

Vì $x + y + z = 0$ nên $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Vậy $P = 3 + \dfrac{2.3xyz}{xyz} = 9$.

2.86. a) Nhân và chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức (trừ phân thức cuối) với a, ta được :

$$S_1 = \frac{1}{a}.\left[\frac{a}{x(x + a)} + \frac{a}{(x + a)(x + 2a)} + ... + \frac{a}{(x + 9a)(x + 10a)} + \frac{1}{x + 10a}\right]$$

$$= \frac{1}{a}.\left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + a}\right) + \left(\frac{1}{x + a} - \frac{1}{x + 2a}\right) + ... + \left(\frac{1}{x + 9a} - \frac{1}{x + 10a}\right) + \frac{1}{x + 10a}\right]$$

$$= \frac{1}{a}.\frac{1}{x} = \frac{1}{ax}.$$

b) $S_2 = \frac{b}{a}.\left[\frac{a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)(x+2a)} + ... + \frac{a}{(x+99a)(x+100a)} + \frac{1}{x+100a}\right]$

$S_2 = \frac{b}{a}.\left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right) + \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-2a}\right) + ... + \left(\frac{1}{x+99a} - \frac{1}{x+100a}\right) + \frac{1}{x+100a}\right]$

$S_2 = \frac{b}{a}.\frac{1}{x} = \frac{b}{ax}.$

2.87. a) $A = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) = 0.$

b) Dạng tổng quát của mỗi hạng tử là

$$\frac{3k^2 + 3k + 1}{[k(k+1)]^3} = \frac{(k+1)^3 - k^3}{k^3(k+1)^3} = \frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}.$$

Cho k lấy các giá trị 1, 2, 3,..., n ta được

$$B = \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n}{(n+1)^3}.$$

2.88. Ta có $a_k = \frac{2k+1}{[k(k+1)]^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$

Cho k lấy các giá trị từ 1 đến 99, ta được

$$S = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + ... + \left(\frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2}\right) = 1 - \frac{1}{100^2} < 1.$$

2.89. Ta có $a_k = \frac{(2k+1)^2 - 2^2}{(2k+1)^2} = \frac{(2k-1)(2k+3)}{(2k+1)^2}.$

Cho k lấy các giá trị từ 1 đến 50 ta được

$$P = \left(1 - \frac{4}{3^2}\right).\left(1 - \frac{4}{5^2}\right).\left(1 - \frac{4}{7^2}\right)...\left(1 - \frac{4}{101^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}.\frac{5}{3}\right).\left(\frac{3}{5}.\frac{7}{5}\right).\left(\frac{5}{7}.\frac{9}{7}\right)...\left(\frac{99}{101}.\frac{103}{101}\right)$$

$$= \frac{1.3.5...99}{3.5.7...101}.\frac{5.7.9...103}{3.5.7...101} = \frac{1}{101}.\frac{103}{3} = \frac{103}{303} > \frac{101}{303} = \frac{1}{3}.$$

2.90. Ta có $\dfrac{xy + 2x + 1}{xy + x + y + 1} = \dfrac{(xy + x) + (x + 1)}{(x + 1)(y + 1)}$

$$= \frac{x(y + 1) + (x + 1)}{(x + 1)(y + 1)} = \frac{x}{x + 1} + \frac{1}{y + 1}$$

Tương tự $\dfrac{yz + 2y + 1}{yz + y + z + 1} = \dfrac{y}{y + 1} + \dfrac{1}{z + 1}$;

$$\frac{zx + 2z + 1}{zx + z + x + 1} = \frac{z}{z + 1} + \frac{1}{x + 1}.$$

Do đó $A = \left(\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{1}{y + 1}\right) + \left(\dfrac{y}{y + 1} + \dfrac{1}{z + 1}\right) + \left(\dfrac{z}{z + 1} + \dfrac{1}{x + 1}\right) = 3.$

2.91. a) Vì $2 = 3 - 1$ nên $2M = 1.(3 - 1) + 3(3 - 1) + 3^2(3 - 1) + \ldots + 3^n(3 - 1)$
$= 3 - 1 + 3^2 - 3 + 3^3 - 3^2 + \ldots + 3^{n+1} - 3^n = -1 + 3^{n+1}$.

Suy ra $M = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

Cách khác :

$$\begin{array}{rl} 3M = & 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n + 3^{n-1} \\ -\ M = & 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n \\ \hline 2M = & -1 \qquad\qquad\qquad\qquad + 3^{n+1} \end{array}$$

Suy ra $M = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

b) $2N = 1.(3 - 1) + \dfrac{1}{3}(3 - 1) + \dfrac{1}{3^2}(3 - 1) + \ldots + \dfrac{1}{3^n}(3 - 1)$

$$= 3 - 1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^n} = 3 - \frac{1}{3^n}$$

Do đó $N = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2.3^n}$.

Cách khác :

$$\begin{array}{rl} -\ 3N = & 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ N = & 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^{n-1}} + \dfrac{1}{3^n} \\ \hline 2N = & 3 \qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{1}{3^n} \end{array}$$

Do đó $N = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2.3^n}$.

2.92. Xét vế trái T

$$T \le \frac{n+1-1}{(n+1)!} + \frac{n+2-1}{(n+2)!} + \frac{n+3-1}{(n+3)!} + ... + \frac{100-1}{100!}$$

$$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + ... + \frac{1}{99!} - \frac{1}{100!}$$

$$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{100!} < \frac{1}{n!}.$$

2.93. a) $P = \left[\frac{ax^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{ay^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{az^2}{(z-x)(z-y)}\right]$

$$+ \left[\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}\right]$$

$$= a.\left[\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}\right]$$

Theo bài 2.36b thì kết quả trong dấu [ ] thứ nhất là 1.

Theo ví dụ 10 thì kết quả trong dấu [ ] thứ hai là 0.

Do đó $P = a.1 + 0 = a$.

b) $Q = \left[\frac{a}{x(x-y)(x-z)} + \frac{a}{y(y-z)(y-x)} + \frac{a}{z(z-x)(z-y)}\right]$

$$+ \left[\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}\right]$$

$$= a.\left[\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}\right]$$

Theo bài 2.35b thì kết quả trong dấu [ ] thứ nhất là $\frac{1}{xyz}$.

Theo ví dụ 10 thì kết quả trong dấu [ ] thứ hai là 0.

Do đó $Q = \frac{a}{xyz}$.

2.94. Dạng tổng quát của các hạng tử trong A là

$$\frac{2k}{x^2-k^2}=\frac{1}{x-k}-\frac{1}{x-11+k}+\frac{11}{(x-11+k)(x+k)}$$

(Bạn đọc tự chứng minh vế phải bằng vế trái).

Cho k lần lượt lấy các giá trị từ 1 đến 10 ta được :

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-10}+\frac{11}{(x-10)(x+1)}$$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-9}+\frac{11}{(x-9)(x+2)}$$

$$\frac{6}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-8}+\frac{11}{(x-8)(x+3)}$$

.....

$$\frac{18}{x^2-81}=\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-2}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}$$

$$\frac{20}{x^2-100}=\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-1}+\frac{11}{(x-1)(x+10)}$$

Do đó $A=11.\left[\frac{1}{(x-10)(x+1)}+\frac{1}{(x-9)(x+2)}+...+\frac{1}{(x-1)(x+10)}\right]=11B.$

2.95. Từ giả thiết, suy ra $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=0.$

Do đó $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2+b^2+c^2}\right)+\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2+b^2+c^2}\right)+\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{z^2}{a^2+b^2+c^2}\right)=0.$

hay $x^2.\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+y^2.\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)$

$$+z^2.\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)=0$$

Do $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$; $\frac{1}{b^2}>\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$; $\frac{1}{c^2}>\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

nên giá trị của các biểu thức trong ngoặc lớn hơn 0.

Suy ra $x^2=y^2=z^2=0$ hay $x=y=z=0$. Vậy $x^{1000}+y^{1000}+z^{1000}=0$.

2.96. $P = a^2.\left[\dfrac{yz}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{zx}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}\right]$

$- b^2.\left[\dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}\right]$

$= a^2.1 - b^2.0 = a^2$ (xem Ví dụ 10).

2.97. Từ điều kiện $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$ suy ra $\dfrac{yz + zx + xy}{xyz} = 0$

Do đó $xy + yz + zx = 0 \Rightarrow yz = -xy - zx$.

a) Ta có $x^2 + 2yz = x^2 - xy - zx + yz = (x - y)(x - z)$.

Tương tự $y^2 + 2zx = (y - z)(y - x)$; $z^2 + 2xy = (z - x)(z - y)$.

Do đó $A = \left[\dfrac{yz}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{zx}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}\right]$

$- 3\left[\dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}\right]$

$= 1 - 3.0 = 1$ (xem Ví dụ 10).

b) $B = \left[\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}\right]$

$-2\left[\dfrac{yz}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{zx}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}\right]$

Theo bài 2.36b thì kết quả trong dấu [ ] thứ nhất là 1.

Theo ví dụ 10 thì kết quả trong dấu [ ] thứ hai là 1.

Do đó : $B = 1 - 2.1 = -1$.

2.98. Ta có $\dfrac{x-y}{(z-x)(z-y)} = \dfrac{(z-y)+(x-z)}{(z-x)(z-y)} = \dfrac{1}{z-x} - \dfrac{1}{z-y}$.

Tương tự $\dfrac{y-z}{(x-y)(x-z)} = \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x-z}$; $\dfrac{z-x}{(y-z)(y-x)} = \dfrac{1}{y-z} - \dfrac{1}{y-x}$.

Do đó vế trái $VT = \left(\dfrac{1}{z-x} - \dfrac{1}{z-y}\right) + \left(\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x-z}\right) + \left(\dfrac{1}{y-z} - \dfrac{1}{y-x}\right)$

$= \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{2}{y-z} + \dfrac{2}{z-x} = VP.$

2.99. a) $P_1 = \frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}...\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2.3.4...(n+1)}{1.2.3...n}.\frac{2.3.4...(n+1)}{3.4.5...(n+2)}$

$$= \frac{n+1}{1}.\frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Vì $\frac{n+1}{n+2} < 1$ nên $P_1 < 2$.

b) $P_2 = \left(1+\frac{2}{4}\right).\left(1+\frac{2}{10}\right).\left(1+\frac{2}{18}\right)...\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$

Dạng tổng quát của mỗi nhân tử là

$$1+\frac{2}{k(k+3)} = \frac{k^2+3k+2}{k(k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}.$$

Cho k lấy các giá trị từ 1 đến n ta được

$$P_2 = \frac{2.3}{1.4}.\frac{3.4}{2.5}.\frac{4.5}{3.6}...\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$$

$$= \frac{2.3.4...(n+1)}{1.2.3...n}.\frac{3.4.5...(n+2)}{4.5.6...(n+3)} = \frac{n+1}{1}.\frac{3}{n+3} = \frac{3(n+1)}{n+3}.$$

Vì $\frac{n+1}{n+3} < 1$ nên $P_2 < 3$.

2.100. $A = \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}.\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}.\frac{(4-1)(4^2+4+1)}{(4+1)(4^2-4+1)}$

$$.\frac{(5-1)(5^2+5+1)}{(5+1)(5^2-5+1)}...\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$= \frac{1.2.3.4...(n-1)}{3.4.5.6...(n+1)}.\frac{1}{2^2-2+1}.\frac{2^2+2+1}{3^2-3+1}.\frac{3^2+3+1}{4^2-4+1}.\frac{4^2+4+1}{5^2-5+1}$$

$$...\frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{n^2-n+1}.\frac{n^2+n+1}{1}.$$

Ta nhận thấy $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1$ nên các phân thức dạng $\frac{k^2+k+1}{(k+1)^2-(k+1)+1}$ đều rút gọn được thành 1.

Do đó $A = \frac{2}{n(n+1)}.\frac{1}{3}.1.1.1...\frac{n^2+n+1}{1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

2.101. Dạng tổng quát của mỗi nhân tử là

$$k^4 + \frac{1}{4} = \left(k^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - k^2 = \left(k^2 + k + \frac{1}{2}\right)\left(k^2 - k - \frac{1}{2}\right)$$

Trong biểu thức A cho k lần lượt các giá trị 2, 4, 6,..., 20 ; trong biểu thức B cho k lần lượt các giá trị 1, 3, 5,..., 19, ta được

$$\frac{A}{B} = \frac{\left(2^2+2+\frac{1}{2}\right)\left(2^2-2+\frac{1}{2}\right)\left(4^2+4+\frac{1}{2}\right)\left(4^2-4+\frac{1}{2}\right)\left(6^2+6+\frac{1}{2}\right)\left(6^2-6+\frac{1}{2}\right)}{\left(1^2+1+\frac{1}{2}\right)\left(1^2-1+\frac{1}{2}\right)\left(3^2+3+\frac{1}{2}\right)\left(3^2-3+\frac{1}{2}\right)\left(5^2+5+\frac{1}{2}\right)\left(5^2-5+\frac{1}{2}\right)}$$

$$...\frac{\left(20^2+20+\frac{1}{2}\right)\left(20^2-20+\frac{1}{2}\right)}{\left(19^2+19+\frac{1}{2}\right)\left(19^2-19+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 2.\frac{2^2-2+\frac{1}{2}}{1^2+1+\frac{1}{2}}.\frac{2^2+2+\frac{1}{2}}{3^2-3+\frac{1}{2}}.\frac{4^2-4+\frac{1}{2}}{3^2+3+\frac{1}{2}}.\frac{4^2+4+\frac{1}{2}}{5^2-5+\frac{1}{2}}$$

$$...\frac{18^2+18+\frac{1}{2}}{19^2-19+\frac{1}{2}}.\frac{20^2-20+\frac{1}{2}}{19^2+19+\frac{1}{2}}.\frac{20^2+20+\frac{1}{2}}{1}$$

Ta nhận thấy các phân thức dạng $\frac{k^2-k+\frac{1}{2}}{(k-1)^2+(k-1)+\frac{1}{2}}$ hoặc nghịch đảo của nó rút gọn được thành 1.

Do đó $\frac{A}{B} = \frac{841}{2}.2 = 841 \in \mathbb{Z}$.

2.102. Ta có $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{\dfrac{a+b}{a-b}-1} = \dfrac{2a}{2b} = \dfrac{a}{b}$.

Tương tự : $\dfrac{y+1}{y-1} = \dfrac{b}{c}$; $\dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{c}{a}$. Do đó $\dfrac{x+1}{x-1}.\dfrac{y+1}{y-1}.\dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{c}.\dfrac{c}{a} = 1$.

2.103. Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$ (bài 1.116)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$

$\Leftrightarrow a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

Ta có $\left(\dfrac{a}{b}+1\right)\left(\dfrac{b}{c}+1\right)\left(\dfrac{c}{a}+1\right) = \dfrac{a+b}{b}.\dfrac{b+c}{c}.\dfrac{c+a}{a}$.

- Nếu $a + b + c = 0$ thì $a + b = -c$; $b + c = -a$; $c + a = -b$. Khi đó $P = \dfrac{-c}{b}.\dfrac{-a}{c}.\dfrac{-b}{a} = -1$.

- Nếu $a = b = c$ thì $P = \dfrac{2b}{b}.\dfrac{2c}{c}.\dfrac{2a}{a} = 8$.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

1.1. (h.59) ΔAIB có $\widehat{AIB} = 65^o \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 115^o$.

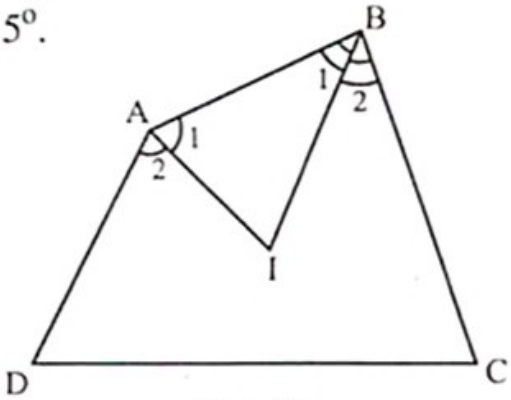
Do đó $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 2.\left(\widehat{A_1} + \widehat{B_1}\right) = 230^o$.

Từ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^o$.

Suy ra $\widehat{C} + \widehat{D} = 130^o$.

Mặt khác $\widehat{C} - \widehat{D} = 10^o$

nên $\widehat{C} = 70^o$; $\widehat{D} = 60^o$.



Hình 59

1.2. (h.60) Giả sử phân giác của $\widehat{A}$; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$; $\widehat{D}$ cắt nhau tạo thành tứ giác HIJK.

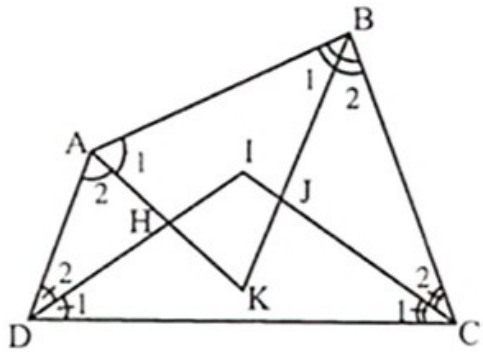
Ta có : $\widehat{DIC} = 180^o - \left(\widehat{C_1} + \widehat{D_1}\right)$

$\widehat{AKB} = 180^o - \left(\widehat{A_1} + \widehat{B_1}\right)$

$\Rightarrow \widehat{AKB} + \widehat{DIC} = 360^o - \left(\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} + \widehat{D_1}\right)$

$= 360^o - \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}\right) = 360^o - 180^o = 180^o$.

Suy ra điều phải chứng minh.



Hình 60

1.3. (h.61) Gọi BE ; DF là các tia phân giác của góc B và D.

Ta có : $\widehat{B_1} + \widehat{E_1} = 90^o$. (1)

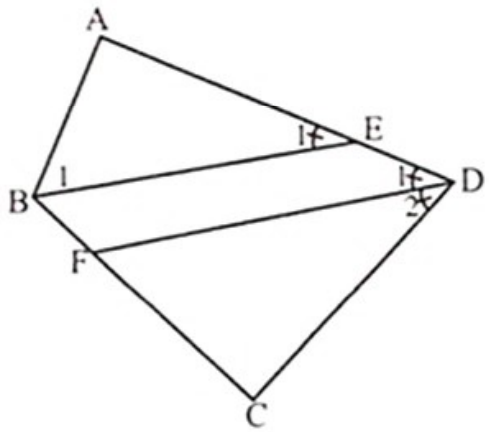
Mà $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^o \Rightarrow 2.\widehat{B_1} + 2.\widehat{D_1} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{D_1} = 90^o$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{D_1}$

$\Rightarrow$ BE // DF hoặc BE = FD

Nếu AB = BC, AD = CD thì đường thẳng BE, DF trùng nhau.



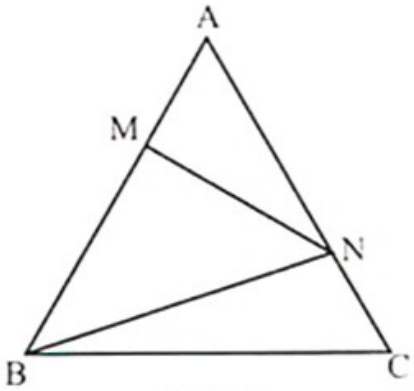
Hình 61

CDTOAN8TAP1 13A

1.4. * ***Bổ đề :*** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và các điểm M, N lần lượt thuộc AB, AC. Chứng minh rằng MN ≤ a.

Trường hợp 1. Nếu một trong hai điểm M ; N trùng với một trong ba đỉnh A ; B ; C thì dễ có MN ≤ a.

Trường hợp 2. M ; N không trùng với đỉnh A ; B ; C (h.62).



Hình 62

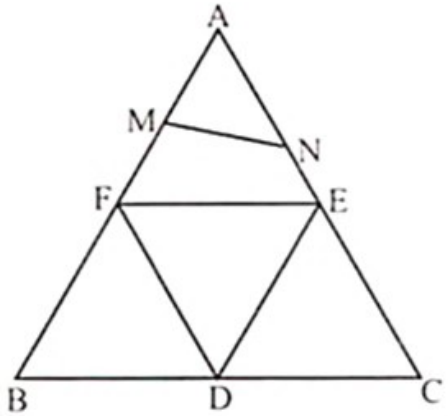
Xét tam giác MNB có $\widehat{BMN} > \widehat{MAN} = \widehat{ABC} > \widehat{MBN} \Rightarrow BN > MN$.

Mặt khác tam giác BCN có $\widehat{BNC} > \widehat{BAC} = \widehat{BCN} \Rightarrow BC > BN$.

Do vậy MN < BC = a.

Vậy MN ≤ a. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, N trùng với hai đỉnh tam giác.

Trở lại bài toán, giả sử tam giác đều có AB = 2020 và tứ giác nói trên là MNPQ. Gọi D, E, F là trung điểm BC, AC, AB. Ta có tam giác AEF ; BDF ; CDE có cạnh là 1010 (h.63). Ta có 4 điểm M ; N ; P ; Q thuộc đường gấp khúc EAF ; BDF ; DCE nên tồn tại hai điểm thuộc cùng một đường gấp khúc. Không mất tính tổng quát, giả sử M, N thuộc EAF. Áp dụng bổ đề ta có MN ≤ 1010. Vậy tứ giác MNPQ không thể có cả bốn cạnh cùng lớn hơn 1010.

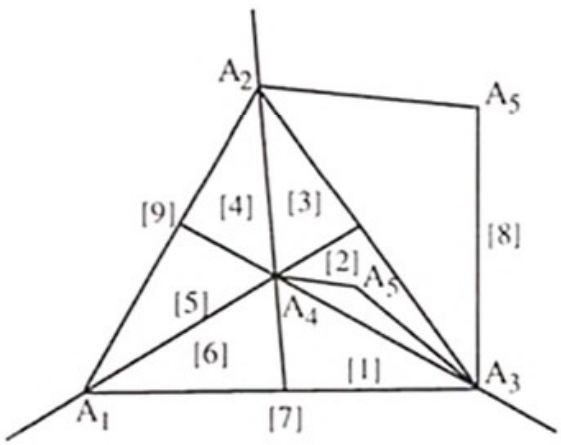


Hình 63

1.5. Xét bốn điểm bất kỳ A_1, A_2, A_3, A_4, có hai trường hợp xảy ra :

Trường hợp 1. Hoặc là $A_1A_2A_3A_4$ là một tứ giác lồi. Vậy bài toán được chứng minh.

Trường hợp 2. Hoặc là $A_1A_2A_3A_4$ là một tứ giác lõm. Giả sử A_4 nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$ (h.64). Khi đó điểm thứ năm phải thuộc một trong 9 phần do các đường thẳng dựng qua từng cặp điểm trong bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4. Ta thấy A_5 không thể nằm trên các đường thẳng



Hình 64

đó vì theo giả thiết không có ba điểm nào thẳng hàng. Do đó A_5 sẽ tạo với 3 trong 4 điểm đã chọn một tứ giác lồi. Chẳng hạn A_5 thuộc phần [8] (tức là A_2A_3 cắt A_4A_5) thì tứ giác $A_2A_4A_3A_5$ là tứ giác lồi ; còn nếu A_5 thuộc phần [2] (tức là A_4A_3 cắt A_1A_5) thì tứ giác $A_1A_3A_5A_4$ là tứ giác lồi.

1.6. a) Ta có : $\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{D}}{4} = \frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}}{1+2+3+4} = \frac{360^p}{10} = 36^o.$

Suy ra : $\widehat{A} = 36^o$; $\widehat{B} = 72^o$; $\widehat{C} = 108^o$; $\widehat{D} = 144^o \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^o$

$\Rightarrow$ AB//CD. Vậy ABCD là hình thang.

b) Kết quả :

$\widehat{EDC} = 36^o$; $\widehat{ECD} = 72^o$; $\widehat{DEC} + 72^o$.

1.7. (h.65) Ta có : $\widehat{N_1} = \widehat{D} + \widehat{E_2}$

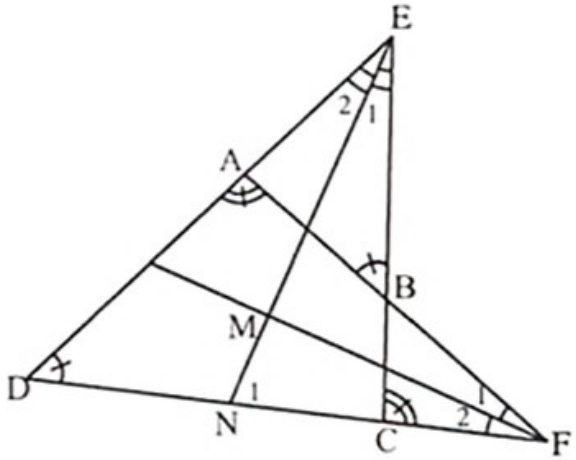
$\Rightarrow \widehat{N_1} + \widehat{F_1}$

$= \widehat{D} + \frac{\widehat{AEB} + \widehat{CFB}}{2} = \frac{\widehat{D} + \widehat{AEB} + \widehat{D} + \widehat{CFB}}{2}$

$= \frac{180^o - \widehat{BCD} + 180^o - \widehat{BAD}}{2}$

$= \frac{180^o + 180^o - \left(\widehat{BCD} + \widehat{BAD}\right)}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{N_1} + \widehat{F_2} = 90^o$. Vậy $EM \perp FM$.



Hình 65

1.8. (h.66) a) Gọi E là giao điểm của BM và CD.

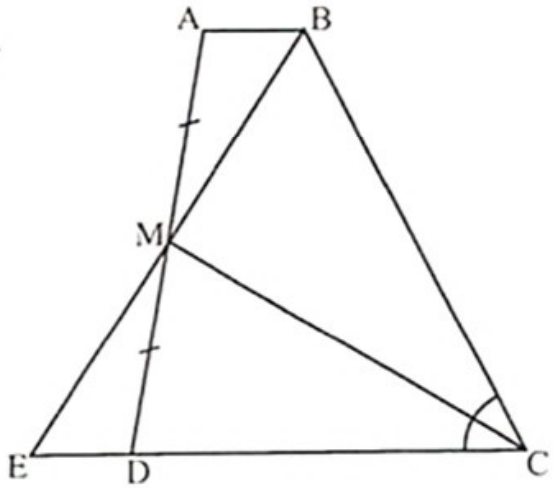
Ta có $\Delta ABM = \Delta DEM$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = ED$; $BM = EM$.

ΔBCE có CM là phân giác $\widehat{BCE}$; CM là đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta BCM$ cân tại C $\Rightarrow$ CM là đường cao, suy ra $CM \perp BM$ hay ΔBCM vuông tại M.

b) ΔBCE cân tại C

$\Rightarrow BC = EC = ED + DC$ hay $BC = AB + DC$.



Hình 66

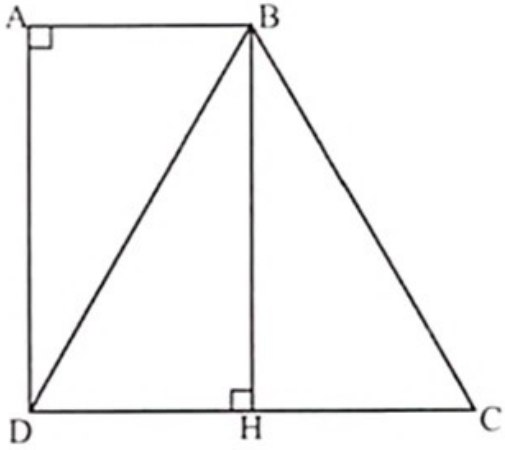
1.9. (h.67) Kẻ BH ⊥ CD. Ta có

$\Delta ABD = \Delta HDB$

$\Rightarrow AB = DH$, mà $DC = 2.AB$

$\Rightarrow DH = HC \Rightarrow \Delta BDC$ cân tại B, mà $DC = BC \Rightarrow \Delta BCD$ đều

$\Rightarrow \widehat{BCD} = 60^o \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^o$.



Hình 67

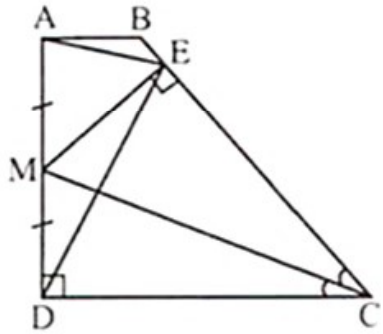
1.10. (h.68) CM là phân giác góc C

$\Rightarrow MD = ME$.

Mà $MA = MD \Rightarrow MA = MD = ME$.

Suy ra ΔAED vuông tại E

$\Rightarrow \widehat{AED} = 90^o$.



Hình 68

1.11. Đáp số :

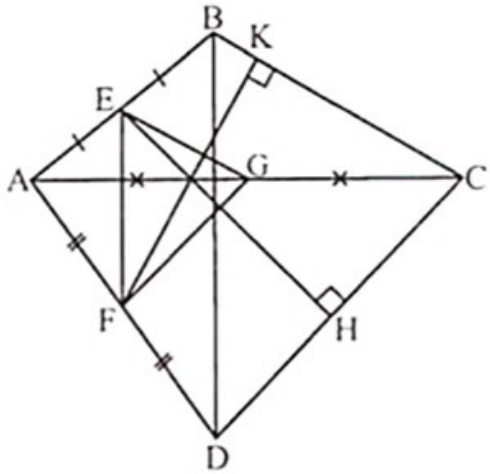
$\widehat{A} = 100^o$; $\widehat{B} = 80^o$.

$\widehat{D} = 120^o$; $\widehat{C} = 60^o$.

1.12. (h.69)Gọi G là trung điểm của AC.

Ta có : EG ; EF ; FG lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC ; ABD ; ACD.

$\Rightarrow$ EF// BD ; EG// BC ; FG// DC. Mà AC ⊥ BD ; FK ⊥ BC ; EH ⊥ CD nên AC ⊥ EF ; FK ⊥ EG ; EH ⊥ FG. Từ đó suy ra AC, EH, FK chứa ba đường cao của tam giác EFG, do vậy AC, EH, FK đồng quy.

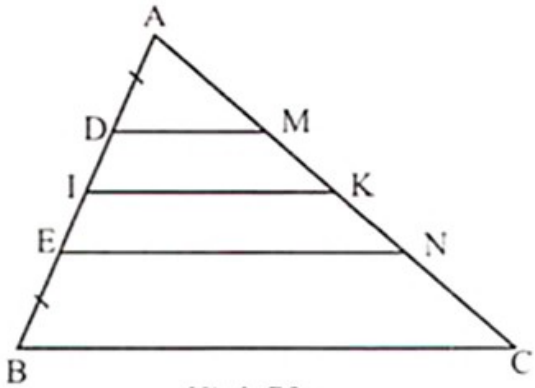


Hình 69

1.13. (h.70) Gọi I là trung điểm của DE, kẻ IK// BC, K thuộc BC. Áp dụng đường trung bình của tam giác ABC, hình thang DMNE ta có : $IK = \frac{1}{2}BC$;

$IK = \frac{1}{2}(DM + EN)$.

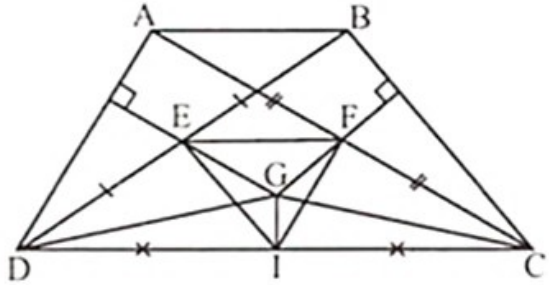
Suy ra $DM + EN = BC$.



Hình 70

1.14. (h.71) Gọi I là trung điểm của DF.

Ta có EI ; FI lần lượt là đường trung bình của ΔBCD và $\Delta ACD \Rightarrow EI \,//\, BC$; $FI \,//\, AD$. Mà $EG \perp AD$, $FG \perp BC$ nên $EG \perp FI$; $FG \perp EI$. Suy ra G là trực tâm ΔEIF, suy ra $GI \perp EF$. Mặt khác $EF \,//\, CD$ suy ra $GI \perp CD$. Lại có ID = IC, suy ra ΔGCD cân tại G suy ra GC = GD.

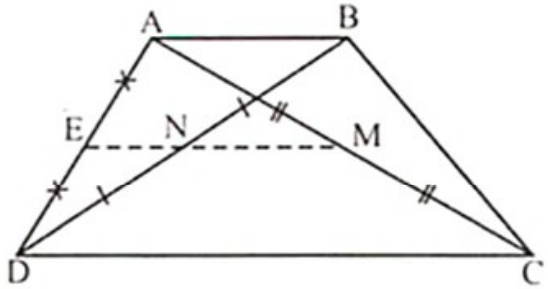


Hình 71

1.15. (h.72) Gọi E là trung điểm của AD. Ta có EM ; EN lần lượt là đường trung bình của tam giác ACD ; ABD.

Suy ra $EM \,//\, CD$; $EM = \frac{1}{2}CD$. (1)

$EN \,//\, AB$; $EN = \frac{1}{2}AB$. (2)



Hình 72

Từ (1), (2) và $AB \,//\, CD$ suy ra E, N, M thẳng hàng.

Do đó $MN = EM - EN = \frac{1}{2}(CD - AB)$.

1.16. (h.73) Gọi K, I là giao điểm của AM, AN với ED.

Theo đề bài, ta có : BM = MN = NC = 2 cm.

Theo tính chất đường trung bình, ta có :

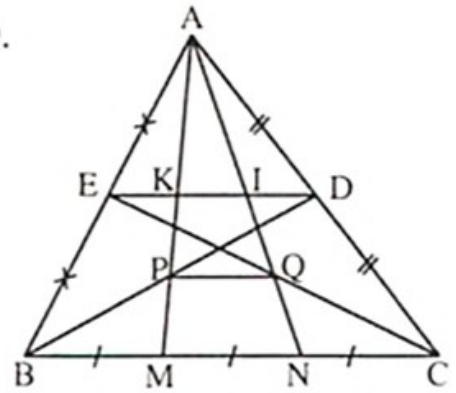
EK = KI = ID = 1 cm. Dễ suy ra :

$\Delta BMP = \Delta DKP$ (g.c.g) $\Rightarrow BP = PD$.

Tương tự, ta có : CQ = QE.

Vận dụng bài 1.15, ta có :

$PQ = \frac{1}{2}(BC - ED) = 1{,}5$ (cm).



Hình 73

1.17. (h.74) Kẻ CE//BD với E thuộc AD

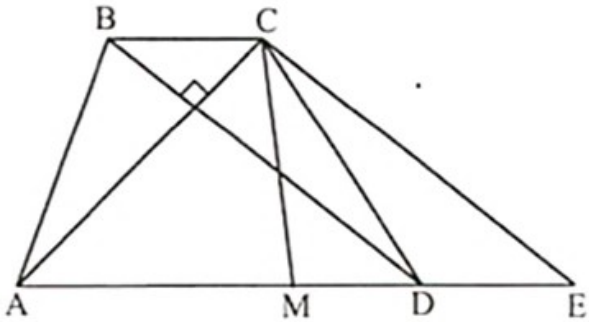
$\Rightarrow \Delta BCD = \Delta EDC$ (g.c.g)

$\Rightarrow DE = BC = 3$ (cm) $\Rightarrow AE = 8$ (cm)

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AE

$CE \,//\, BD \Rightarrow CE \perp AC$

suy ra ΔAEC vuông tại C có CM là đường trung tuyến, suy ra $CM = \frac{AE}{2} = 4$ (cm).



Hình 74

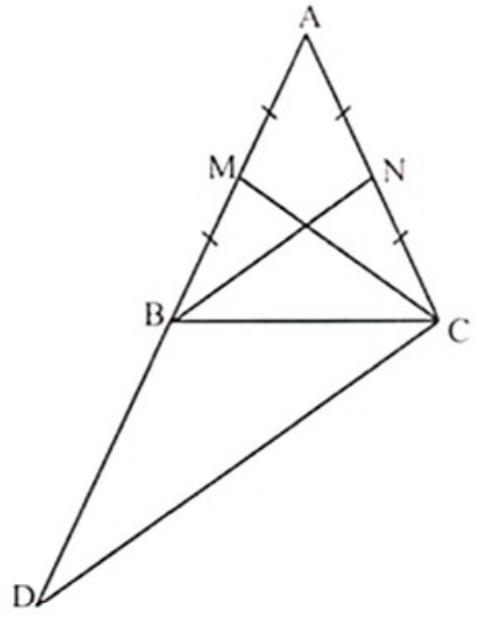
1.18. (h.75) Gọi N là trung điểm AC $\Rightarrow$ BN = CM.

Mặt khác BN là đường trung bình của tam giác ACD

$\Rightarrow BN = \frac{1}{2}CD \Rightarrow CM = \frac{1}{2}CD.$

Nhận xét. Bài toán có nhiều cách giải (học sinh tự vẽ hình) :

- *Cách 2*. Gọi I là trung điểm CD, chứng minh được CM = CI. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.
- *Cách 3*. Trên tia CM lấy K sao cho M là trung điểm của CK, chứng minh được $\Delta ACK = \Delta BDC$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



Hình 75

- Cách *4*. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho CE = CA, chứng minh được $\Delta BCD = \Delta CBE$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1.19. (h.76) a) ΔANQ đều $\Rightarrow \widehat{AQN} = 60^o \Rightarrow \widehat{CQN} = 120^o$

$\Rightarrow \widehat{NAP} = 120^p + \widehat{BAC} = 120^o + \widehat{CQR} = \widehat{RQN}$.

Mà $AP = RQ \left(= \frac{1}{2}AB\right)$; AN = NQ

$\Rightarrow \Delta APN = \Delta QRN$ (c. g. c)

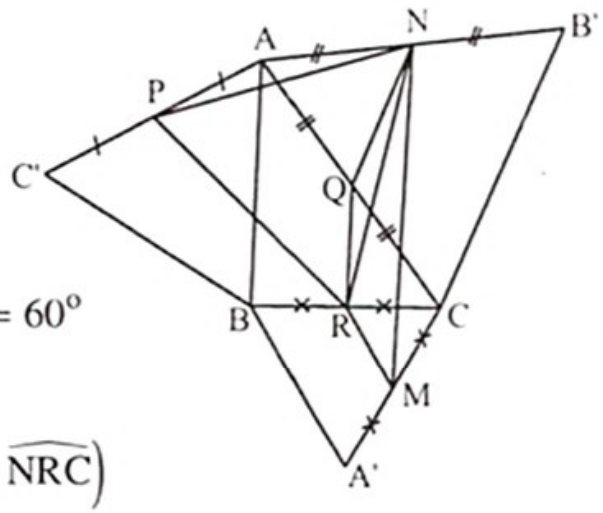
b) $\Delta ANP = \Delta QNR \Rightarrow \widehat{ANP} = \widehat{QNR}$.

Mà $\widehat{ANQ} = 60^o$ (ΔANQ đều) $\Rightarrow \widehat{PNR} = 60^o$

$\Rightarrow \Delta PNR$ đều $\Rightarrow$ RP = RN.

Ta có RP = RN ; $\widehat{PRC} = \widehat{NRM}\left(= 60^o + \widehat{NRC}\right)$

KC = RM nên $\Delta RPC = \Delta RNM$ (c.g.c) $\Rightarrow$ PC = MN.



Hình 76

1.20. (h.77) Gọi E là trung điểm của AC ; G là trọng tâm của tam giác ABC ; M là trung điểm của BG.

Gọi A', B', C', G', M', E' lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A, B, C, G, M, E trên đường thẳng xy. Khi đó AA'//BB'// CC'//GG'//MM'//EE'.

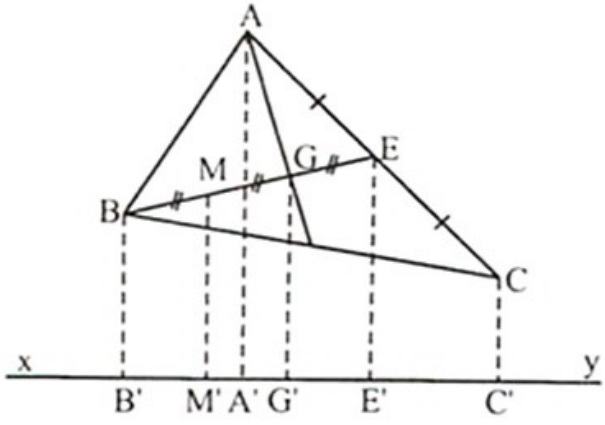
Từ đó ta có GG', EE', MM' lần lượt là các đường trung bình của các hình thang vuông MM'E'E ; AA'C'C, BB'G'G.

Theo tính chất đường trung bình của hình thang, ta có :

$$2.GG' = MM' + EE' \quad (1)$$

$$2.MM' = BB' + GG' \quad (2)$$

$$2.EE' = AA' + CC' \quad (3)$$



Hình 77

Thay được (2) và (3) vào (1) ta được :

$$4.GG' = BB' + GG' + AA' + CC'$$

$\Rightarrow 3.GG' = AA' + BB' + CC'$ (đpcm).

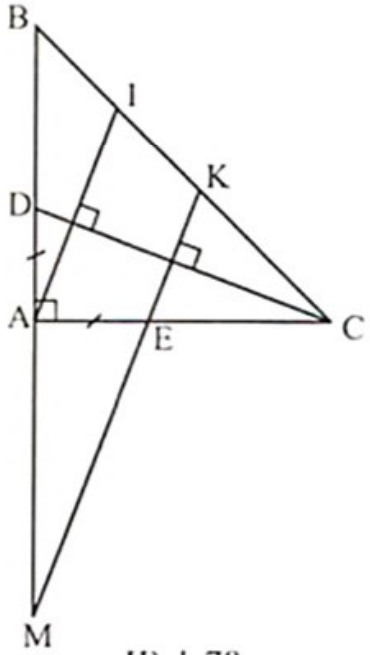
1.21. (h.78) Gọi M là giao điểm của KE với BA.

$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta ADC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = AC$

$\Rightarrow AM = AB$.

Do đó AI là đường trung bình của tam giác BKM $\Rightarrow$ IB = IK.



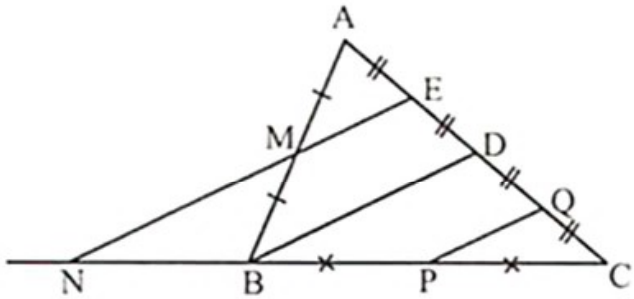
Hình 78

1.22. (h.79) a) Gọi D là trung điểm của AC

$\Rightarrow$ ME là đường trung bình của tam giác ABD $\Rightarrow$ ME//BD mà BD cắt đường thẳng BC nên đường thẳng ME cũng cắt đường thẳng BC.

b) Gọi P và Q là trung điểm của BC và DE, suy ra PQ là đường trung bình của tam giác BCD nên PQ// NE

$\Rightarrow$ PQEN là hình thang.



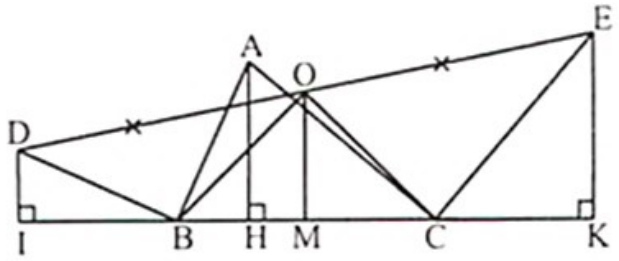
Hình 79

Mà DE = DQ = $\frac{1}{4}$AC, BD//PQ nên BD là đường trung bình của hình thang PQEN, suy ra BN = BP hay BN = $\frac{1}{2}$BC.

1.23. (h.80) Gọi H ; I ; K lần lượt là hình chiếu của A, D, E trên đường thẳng BC, ta có :

$\Delta AHB = \Delta BID$; $\Delta AHC = \Delta CKE$

nên BI = AH = CK, DI = BH, EK = CH.



Hình 80

Gọi O ; M lần lượt là trung điểm DE và IK, suy ra OM là đường trung bình của hình thang DIKE

$\Rightarrow$ OM//DI và $OM = \frac{1}{2}(DI + EK) = \frac{1}{2}(BH + HC) = \frac{1}{2}BC$.

Mà BI = CK $\Rightarrow$ MB = MC = $\frac{1}{2}$BC ; OM//DI $\Rightarrow$ OM vuông góc với BC

Vậy tam giác BOC vuông cân, suy ra O cố định.

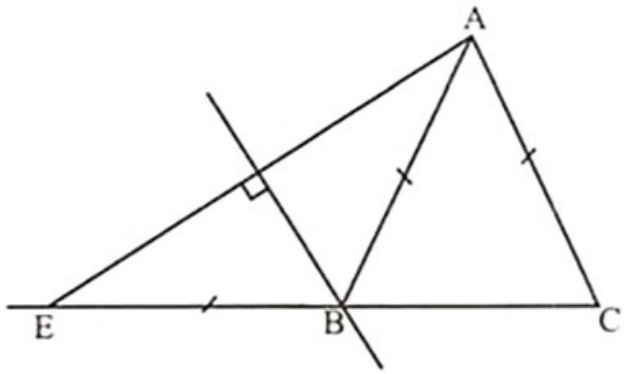
1.24. (h.81) *Phân tích.*

– Giả sử ABC là tam giác phải dựng thoả mãn điều kiện đề bài.

– Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho BE = BA

$\Rightarrow$ EC = EB + BC = 8 cm và BAE cân tại B nên $\widehat{AEB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 35^o$.

– Ta thấy ACE dựng được vì biết ba yếu tố $\widehat{AEB} = 35^o$, EC = 8cm, $\widehat{C} = 70^o$.



Hình 81

Mặt khác BA = BE nên điểm B thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AE và thuộc đoạn thẳng CE. Từ đó điểm B dựng được.

Cách dựng

Dựng ΔAEC có $\widehat{E} = 35^o$; EC = 8cm ; $\widehat{C} = 70^o$. Dựng đường trung trực của AE cắt CE tại B.

Nối AB ta được tam giác ABC phải dựng.

Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

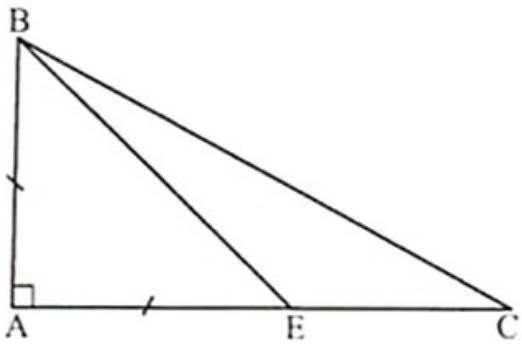
1.25. (h.82) *Phân tích*. Dành cho bạn đọc.

Cách dựng

– Dựng ΔBCE có $\widehat{E} = 135^o$; EB = 2cm ; BC = 10cm.

– Dựng A là hình chiếu của B trên đường thẳng EC.

Nối A với C $\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác phải dựng.



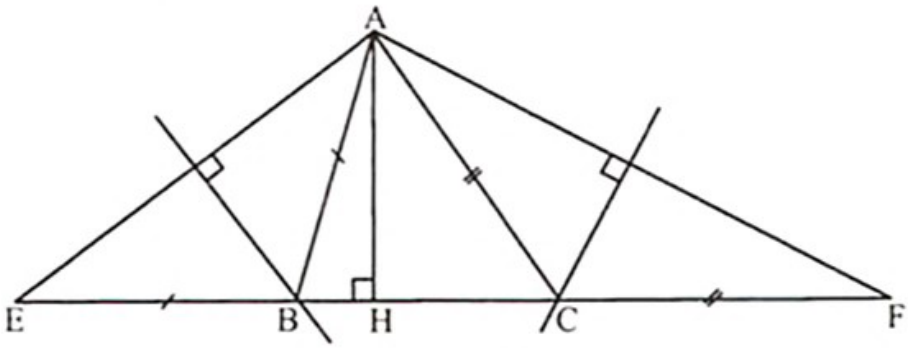
Hình 82

Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

1.26. (h.83) *Phân tích*.

– Giả sử ABC là tam giác phải dựng thoả mãn điều kiện đề bài là $\widehat{B} = \alpha$, đường cao AH = h, AB + BC + CA = P.

– Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho BE = BA, khi đó $\widehat{AEB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{\alpha}{2}$.



Hình 83

– Ta thấy AHE dựng được vì biết ba yếu tố $\widehat{AEB} = \frac{\alpha}{2}$, AH = h, $\widehat{H} = 90^o$.

– Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho CF = CA. Khi đó EF = AB + BC + CA = P $\Rightarrow$ điểm F dựng được.

– Mặt khác BA = BE nên điểm B thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AE và thuộc đoạn thẳng EF. Từ đó điểm B dựng được.

– Tương tự, CA = CF nên điểm C thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AF và thuộc đoạn thẳng EF. Từ đó điểm C dựng được.

Cách dựng

– Dựng ΔAHE có $\widehat{H} = 90^o$; AH = h ; $\widehat{E} = \frac{\alpha}{2}$

– Trên tia EH dựng điểm F sao cho EF = P

– Dựng đường trung trực của đoạn thẳng AE cắt EF tại B.

– Dựng đường trung trực của đoạn thẳng AF cắt EF tại C.

Nối AB, AC ta được tam giác ABC phải dựng

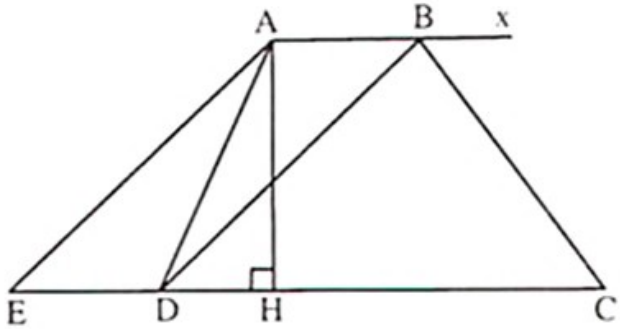
Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

1.27. (h.84) *Phân tích.*

– Giả sử ABCD là hình thang phải dựng thoả mãn điều kiện đề bài.

– Kẻ AE // BD (E thuộc đường thẳng CD) khi đó AE = BD = 6cm, AB = ED = 3cm, suy ra EC = 10cm.

– Ta thấy ΔAHE dựng được vì biết ba yếu tố.



Hình 84

– Điểm C, D dựng được vì biết EC = 10cm, ED = 3cm.

– Điểm B nằm trên tia Ax // CD và cách CD một khoảng cách là 3cm.

Cách dựng

– Dựng ΔAHE có $\widehat{H} = 90^o$; AH = 4cm ; AE = 6cm.

– Trên tia EH dựng điểm D, C sao cho ED = 3cm ; EC = 10cm.

– Trên nửa mặt phẳng bờ AE chứa điểm C vẽ tia Ax song song với EC

– Trên tia Ax dựng điểm B sao cho AB = 3cm.

– Nối AD, BC ta được hình thang ABCD phải dựng.

Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

1.28. (h.85) *Phân tích.* Dành cho bạn đọc.

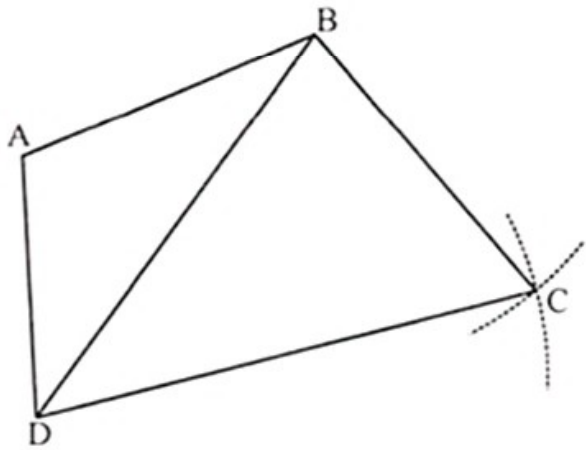
Cách dựng

– Dựng ΔABD có $\widehat{A} = \alpha$, AB = a, DA = d.

– Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa điểm A, vẽ hai cung tròn tâm B bán kính b ; tâm D bán kính c, chúng cắt nhau tại C.

– Nối CB, CD ta được tứ giác ABCD phải dựng.

Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.



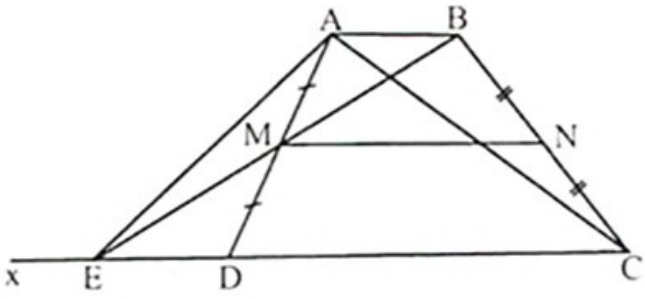
Hình 85

1.29. (h.86) *Phân tích.*

– Giả sử ABCD là hình thang phải dựng thoả mãn điều kiện đề bài.

– Ta thấy ΔABC dựng được vì biết ba cạnh AB = a, BC = d, AC = m.

– Kẻ tia BM cắt đường thẳng CD tại E thì MN là đường trung bình của ΔBCE nên CE = 2MN = 2n ⇒ điểm E thuộc tia Cx // AB và cách điểm C một khoảng cách 2n.



Hình 86

– M là trung điểm của BE ⇒ M dựng được.

– M là trung điểm của AD ⇒ D dựng được.

Cách dựng

– Dựng ΔABC có AB = a, BC = d, AC = m.

– Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Cx song song với AB.

– Dựng điểm E thuộc tia Cx sao cho CE = 2n.

– Dựng M là trung điểm của BE.

– Nối AM cắt đường thẳng EC tại D, ta được hình thang ABCD phải dựng.

Dành cho bạn đọc.

1.30. (h.87) *Phân tích.* Dành cho bạn đọc.

Cách dựng

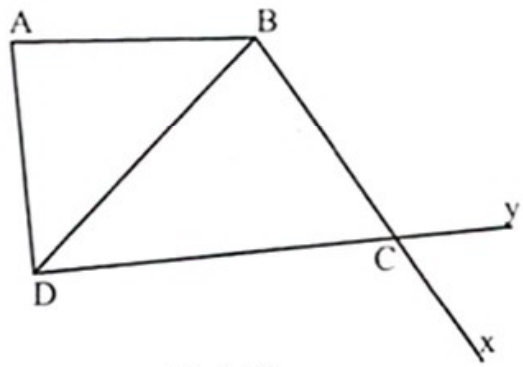
– Dựng ΔABD có $\widehat{A} = 80^o$;

AB = 2cm ; AD = 3cm.

– Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa điểm A dựng hai tia Bx, Dy sao cho

$\widehat{ABx} = 120^o$; $\widehat{ADy} = 100^o$

– Tia Bx và Dy cắt nhau tại C



Hình 87

⇒ Tứ giác ABCD là tứ giác phải dựng.

Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

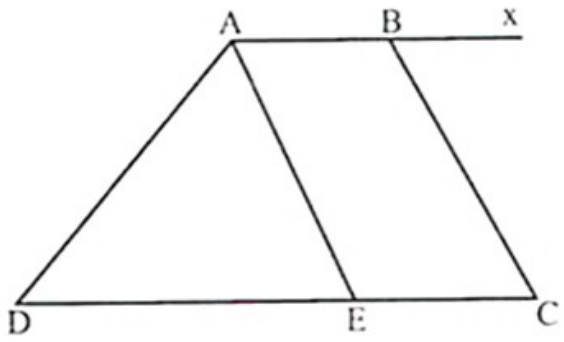
1.31. (h.88) *Phân tích*. Dành cho bạn đọc.

Cách dựng

– Dựng ΔADE có $\widehat{E} = 60^o$; ED = 4cm ; $\widehat{D} = 45^o$

– Trên tia DE dựng điểm C sao cho DC = 6 cm.

– Dựng tia Ax // CD (tia Ax nằm trên nửa mặt phẳng bờ AD có chứa C)



Hình 88

– Trên tia Ax dựng điểm B sao cho AB = 2 cm. Nối BC, ta được hình thang ABCD phải dựng.

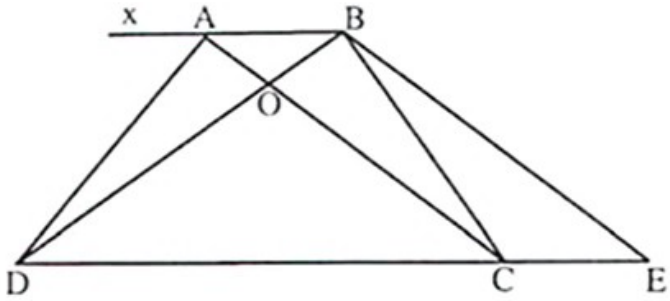
Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

1.32. (h.89) *Phân tích*.

– Giả sử ABCD là hình thang phải dựng thoả mãn điều kiện đề bài.

– Kẻ BE // AC (E thuộc đường thẳng CD) suy ra CE = AB = 2cm, BE = AC = 5cm và

$\widehat{DBE} = \widehat{DOC} = 120^o$.



Hình 89

– Tam giác BDE dựng được vì biết ba yếu tố.

– Điểm A nằm trên tia Bx song song với DE và cách điểm B một khoảng cách 2cm nên A dựng được.

– Điểm C thuộc đoạn thẳng ED và cách điểm E một khoảng cách 2 cm nên C dựng được.

Cách dựng

– Dựng ΔBDE sao cho BD = 3 cm, $\widehat{DBE} = 120^o$, BE = 5cm.

– Trên tia ED dựng điểm C sao cho EC = 2cm.

– Dựng tia Bx // CD (tia Bx nằm trên nửa mặt phẳng bờ BE có chứa D)

– Trên tia Bx dựng điểm A sao cho BA = 2cm.

Nối AD, BC ta được hình thang ABCD phải dựng.

Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

1.33. a) (h.90a) *Phân tích*. Dành cho bạn đọc.

Cách dựng

– Dựng ΔADC sao cho $CD = 4,5$ cm, $\widehat{D} = 55^o$, $AD = 3$ cm.

– Dựng tia Ax // CD (tia Ax nằm trên nửa mặt phẳng bờ AD có chứa C)

– Dựng cung tròn (C ; 2,5cm) cắt tia Ax tại B.

– Nối BC, ta được hình thang phải dựng.

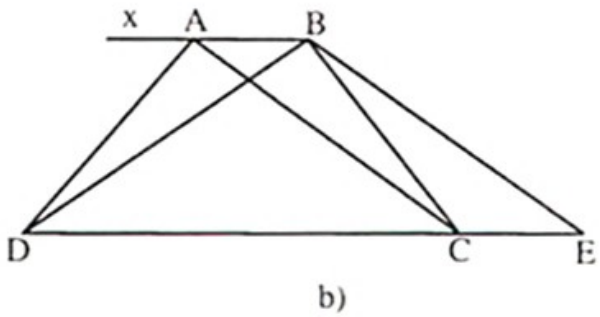
Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

b) (h.90b) *Phân tích*. Dành cho bạn đọc.

Cách dựng

– Dựng ΔBDE có DE = 6cm ; BD = 3,5cm ; BE = 3cm.

Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa điểm E dựng tia Bx song song với DE



Hình 90

– Trên tia Bx dựng điểm A sao cho BA = 2cm.

– Trên đoạn ED dựng điểm C sao cho EC = 2cm.

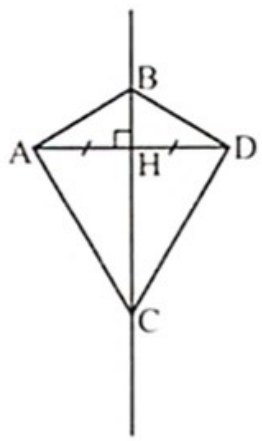
– Nối AD, BC, suy ra ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh, biện luận. Dành cho bạn đọc.

1.34. Xét phản ví dụ :

Trong hình 91, hai tam giác ABC, DBC đối xứng nhau qua đường thẳng chứa cạnh chung BC và AC > AB.

Như vậy bạn Việt sai, bạn Nam đúng.



Hình 91

1.35. (h.92) Vẽ đường phân giác của AD. Trên AD lấy E đối xứng với M qua AB, suy ra BM = BE, CN = CE.

Lấy Q đối xứng với P qua BC

$\Rightarrow$ BP = BQ, CP = CQ.

$\Delta MBP = \Delta EBQ$(c.g.c) $\Rightarrow$ MP = EQ.

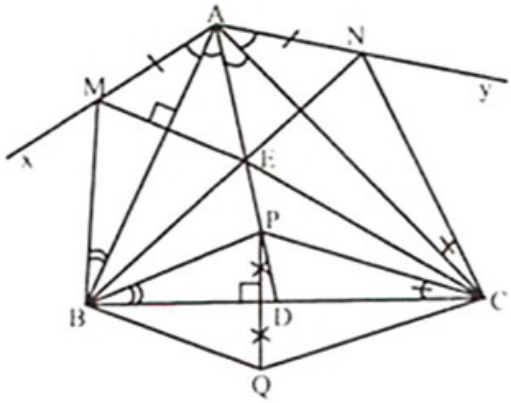
$\Delta QEC = \Delta PNC$ (c.g.c) $\Rightarrow$ PN = EQ

$\Rightarrow$ PM = PN.

$\Rightarrow \Delta AMP = \Delta ANP$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MAP} = \widehat{NAP} \Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CAP}$.

Suy ra P thuộc đường phân giác AD của ΔABC.



Hình 92

1.36. (h.93) a) E và M đối xứng qua AB

$\Rightarrow$ AE = AM ; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (1)

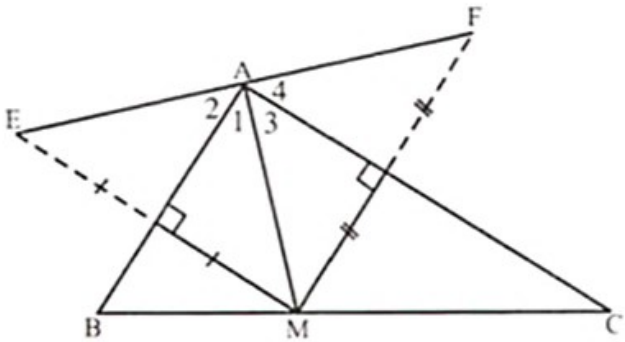
F và M đối xứng qua AC

$\Rightarrow$ AF = AM ; $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AE = AF. (3)

Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{MAE} + \widehat{MAF} = 2.\left(\widehat{A_1} + \widehat{A_3}\right) = 180^o$. (4)



Hình 93

Từ (3) và (4) suy ra A là trung điểm của EF.

b) Ta có EF = 2.AM nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là chân đường cao kẻ từ A.

1.37. (h.94) • Nếu AM = AN, ta có kết quả hiển nhiên.

• Xét AM $\neq$ AN. Kẻ AH là đường phân giác góc A

$\Rightarrow$ AH là trục đối xứng của tam giác cân.

Gọi I, K, J là trung điểm AB, MN, AC

$\Rightarrow$ IJ // BC. (1)

Kẻ MM' // BC $\Rightarrow$ BM = CM'

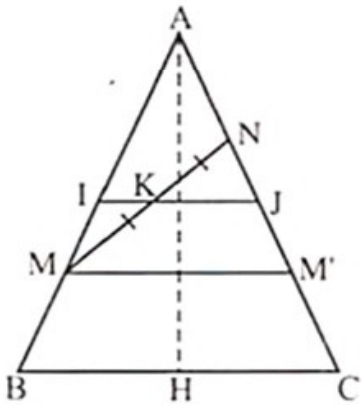
$\Rightarrow$ CM' = AN $\Rightarrow$ JN = JM'.

$\Rightarrow$ JK là đường trung bình của $\Delta NMM'$

$\Rightarrow$ JK // MM'.

$\Rightarrow$ JK // BC. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ I, J, K thẳng hàng.

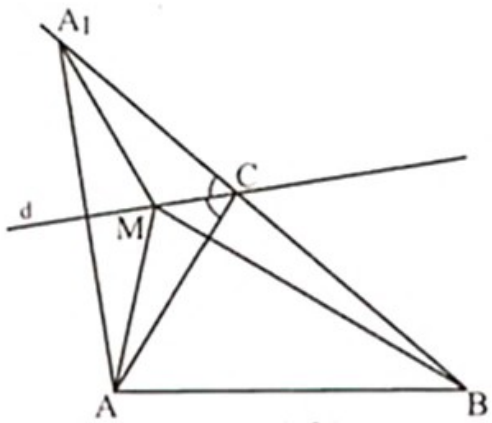


Hình 94

1.38. (h.95) Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua tia phân giác ngoài góc đỉnh C.

Ta có $\widehat{ACB} + \widehat{ACA_1} = 180^o$, suy ra B, C, A_1 thẳng hàng.

Ta có : $MA + MB > BA_1 = CA + CB$.



Hình 95

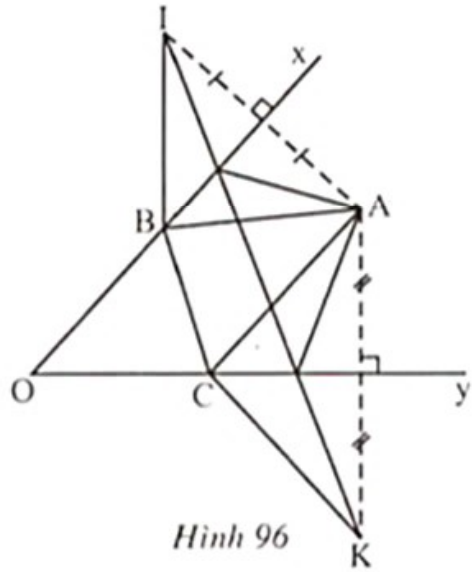
1.39. (h.96) Gọi I đối xứng với A qua Ox, K đối xứng với A qua Oy

$\Rightarrow AB = IB$; $AC = CK$

Do đó :

$AB + BC + CA = IB + BC + CK \geq IK$

$\Rightarrow$ Chu vi ΔABC nhỏ nhất bằng IK khi B, C là giao điểm của IK với Ox và Oy.



Hình 96

1.40. (h.97) Gọi E là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC

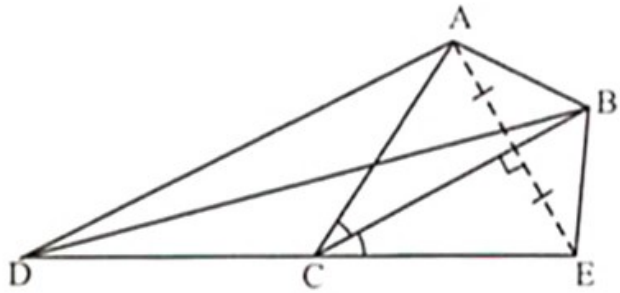
$\Rightarrow AC = CE$; $AB = BE$

$\widehat{ACB} = \widehat{ECB}$, mà góc ngoài đỉnh C của tứ giác ABCD tại đỉnh C bằng $\widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ D, C, E thẳng hàng.

$\Rightarrow DE = CE + CD < BD + BE$

hay $AC + CD < BD + AB$.



Hình 97

1.41. (h.98) a) M đối xứng với H qua AB nên $\Delta AIM = \Delta AIH$; N đối xứng với H qua AC nên $\Delta AKH = \Delta AKN$.

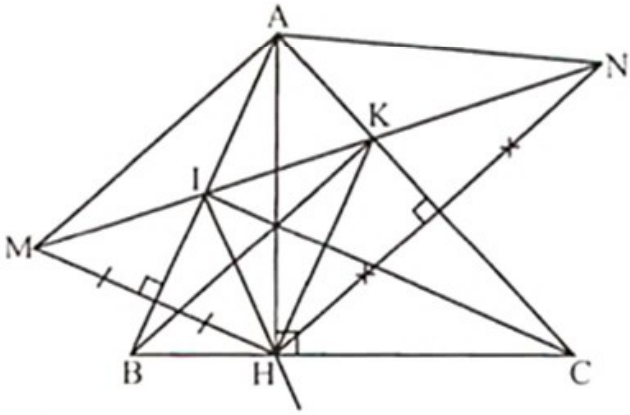
Suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{AHI}$; $\widehat{ANK} = \widehat{AHK}$

và $\widehat{MAH} = 2.\widehat{BAH}$; $\widehat{NAH} = 2.\widehat{HAK}$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = 2.\widehat{BAC} = 140^o$

Mặt khác : AM = AN (= AH) nên ΔAMN cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \frac{1}{2}.\left(180^o - \widehat{MAN}\right) = 20^o$.



Hình 98

Suy ra $\widehat{IHK} = \widehat{IHA} + \widehat{KHA} = 20^o + 20^o = 40^o$.

b) Ta có KC là phân giác góc $\widehat{HKN}$ (1)

Mặt khác : $\widehat{IHA} = \widehat{KHA}$ (vì $\widehat{AMI} = \widehat{ANK}$) $\Rightarrow$ HA là tia phân giác $\widehat{IHK}$, mà $HA \perp HC \Rightarrow$ HC là tia phân giác góc ngoài đỉnh H của $\widehat{IHK}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IC là phân giác $\widehat{KIH}$ (3)

Mặt khác : IB là phân giác $\widehat{MIH}$ (tính chất đối xứng trục) $\Rightarrow IB \perp IC \Rightarrow AB \perp CI$.

Tương tự ta có $AC \perp BK$.

1.42. (h.99) Qua A kẻ đường thẳng xy // BC.

Gọi D đối xứng với B qua xy thì $BD = 2h_a$.

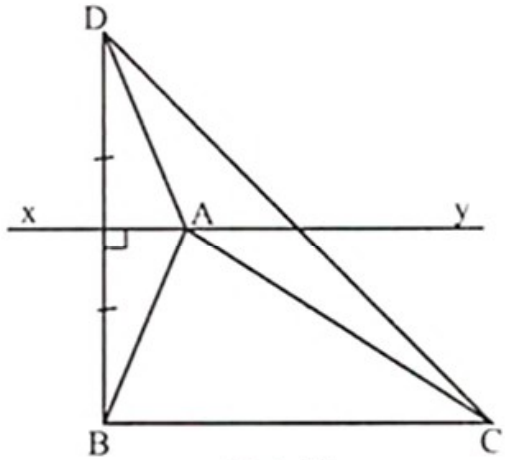
Ta có :

$AC + AD \geq CD = \sqrt{BD^2 + BC^2}$

tức là $b + c \geq \sqrt{4h_a^2 + a^2}$

$\Rightarrow h_a^2 \leq 14 \leq \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2] = p(p-a)$.

Vậy $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$.



Hình 99

1.43. (h.100) a) $\Delta FAH = \Delta FAI$ (c.g.c) $\Rightarrow FI = FH$

$\Delta FBI = \Delta KBE$ (c.g.c) $\Rightarrow FI = KE$

b) Từ câu a $\Rightarrow FH = KE$

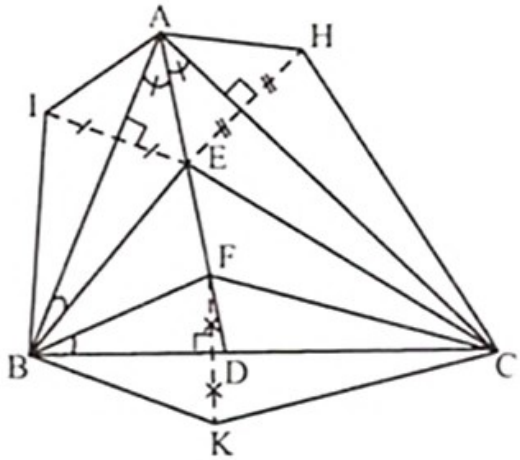
$CH = CE$ (do đối xứng)

$CF = CK$.

Do đó $\Delta CFH = \Delta CKE$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{HCF} = \widehat{ECK} \Rightarrow \widehat{HCE} = \widehat{FCK}$

$\Rightarrow 2.\widehat{ACE} = 2.\widehat{DCF}$ hay $\widehat{ACE} = \widehat{DCF}$.



Hình 100

1.44. (h.101) a) $\Delta AEH = \Delta CGF$ (c.g.c)

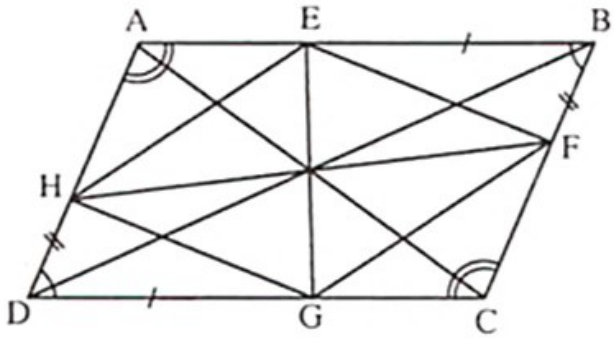
$\Rightarrow HE = GF$

$\Delta DHG = \Delta BFE$ (c.g.c) $\Rightarrow HG = EF$

$\Rightarrow$ Tứ giác EFGH là hình bình hành.

b) ABCD là hình bình hành $\Rightarrow$ AC, BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. (1)

EFGH là hình bình hành $\Rightarrow$ EG, HF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. (2)



Hình 101

DH // BF ; DH = BF nên DHBF là hình bình hành, suy ra BD, HF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. (3)

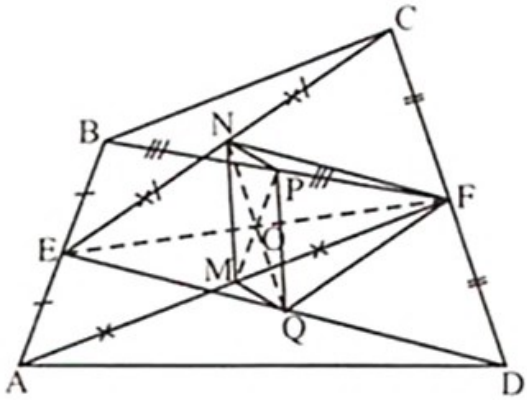
Từ (1), (2) và (3) suy ra AC, BD, EG, HF đồng quy.

1.45. (h.102) Sử dụng đường trung bình trong tam giác, ta được ENFQ là hình bình hành

⇒ EF và NQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường. (1)

Tương tự, ta được EMFP là hình bình hành, suy ra EF và MP cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MP và NQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường. Vậy MNPQ là hình bình hành.



Hình 102

1.46. a) Do P là một điểm thuộc mặt phẳng của tam giác đều ABC nên P là một điểm nằm trên một cạnh hoặc bên ngoài tam giác hoặc P là một điểm nằm bên trong tam giác.

• Nếu P nằm trên một cạnh thì hiển nhiên.

• Xét P là điểm nằm bên ngoài tam giác ABC (h.103a) (nếu P nằm trong tam giác (h.103b) , chứng minh tương tự).

Tứ giác PA'CB' là hình thang vì có A'C // PB'.

Tứ giác PA'BI là hình bình hành nên $\hat{P} = \hat{B} = 60^o$,

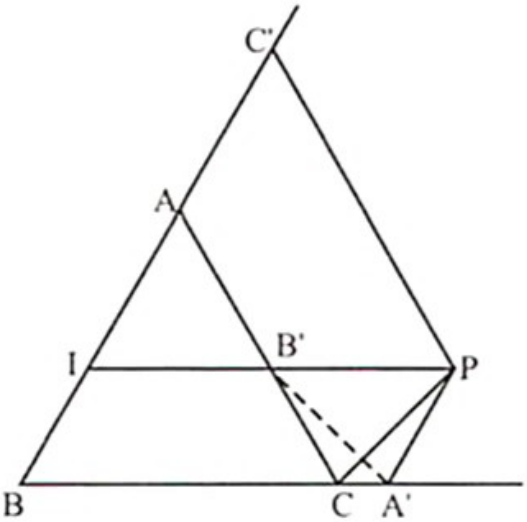
mà $\widehat{PB'C} = \widehat{ACB} = 60^o$ ⇒ PA'CB' là hình thang cân ⇒ PC = A'B'.

Tương tự PB = A'C' ; PA = B'C'

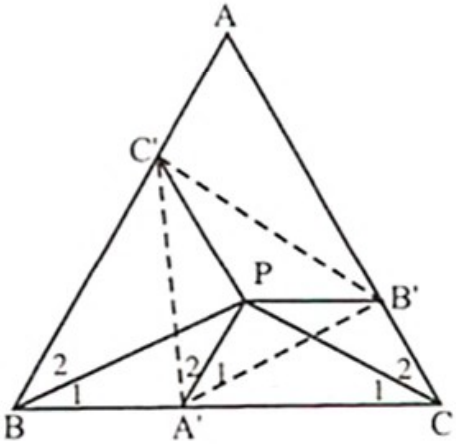
A'B'C' đều ⇔ A'B' = B'C' = C'A'

⇔ PC = PA = PB

⇔ P là trọng tâm ΔABC.



a)



b)

Hình 103

b) Tứ giác PA'BC' ; PA'CB' là hình thang cân nên :

$$\widehat{BPC} - \widehat{B'A'C'} = 180^o - \widehat{B_1} - \widehat{C_1} - \widehat{B_2} - \widehat{C_2}$$

$$= 180^o - \left(\widehat{B_1} + \widehat{B_2}\right) - \left(\widehat{C_1} + \widehat{C_2}\right) = 60^o.$$

Tương tự như trên, ta có $\widehat{CPA} - \widehat{C'B'A'} = 60^o$; $\widehat{APB} - \widehat{A'C'B'} = 60^o$

hay $\alpha = 60^o$ không phụ thuộc vào vị trí P.

1.47. (h.104) Gọi N là giao điểm của BC và DM.

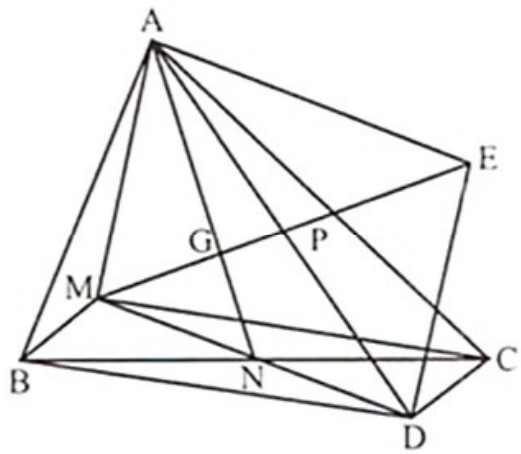
Tứ giác MBDC là hình bình hành nên N là trung điểm BC và MD.

Gọi ME và AD cắt nhau tại P.

Tứ giác MAED là hình bình hành nên P là trung điểm AD và ME

ΔAMD có AN, MP là đường trung tuyến nên G là trọng tâm. A ; N cố định nên G cố định.

Suy ra khi M di động thì đường thẳng ME luôn đi qua điểm G cố định.



Hình 104

1.48. (h.105) • Trường hợp $\widehat{BAC}$ nhọn.

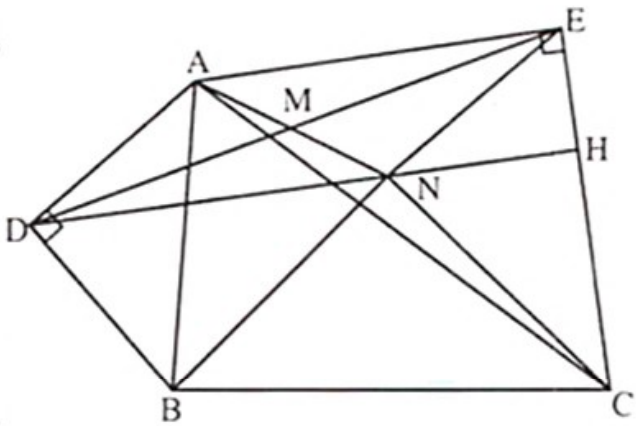
Dựng hình bình hành AEND ta có BD = DA = EN ; DN = AE = EC.

Lại có $\widehat{NDB} = 90^o - \widehat{NDA}$

$= 90^o - \widehat{AEN} = \widehat{CEN}$

• ΔBDN và ΔNEC có BD = NE ; $\widehat{NDB} = \widehat{CEN}$; DN = CE

⇒ ΔBDN = ΔNEC, suy ra BN = CN và $\widehat{DNB} = \widehat{ECN}$.



Hình 105

Mặt khác AE ⊥ CE ; DN // AE ⇒ DN ⊥ CE. (1)

Đặt DN cắt CE tại H ⇒ $\widehat{HCN} + \widehat{HNC} = 90^o$ ⇒ $\widehat{BNC} = 90^o$.

Do đó BNC vuông cân tại N ⇒ N cố định.

Vậy AM luôn đi qua điểm N cố định.

• Trường hợp $\widehat{BAC}$ tù hoặc vuông thì chứng minh tương tự.

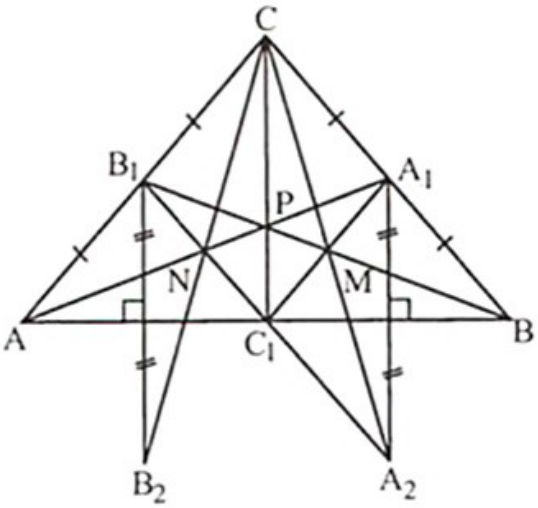
1.49. (h.106) • Ta có : $CC_1 // A_1A_2$ và $CC_1 = A_1A_2$ nên $CC_1A_1A_2$ là hình bình hành

$\Rightarrow A_1M = C_1M$. Mặt khác $A_1B_1C_1B$ cũng là hình bình hành, do đó B, B_1, M thẳng hàng, suy ra $P \in BB_1$.

Tương tự ta có $P \in AA_1$.

• ΔABC có AA_1, BB_1 là đường trung tuyến cắt nhau tại P

$\Rightarrow AP = \frac{2}{3}AA_1$; $BP = \frac{2}{3}BB_1$. Mà $AA_1 = BB_1$ nên AP = BP.



Hình 106

1.50. (h.107) a) Gọi Q là giao điểm CP và AP, O là giao điểm BD và AC.

• ΔABC có AM ; BO là các đường trung tuyến nên N là trọng tâm

$\Rightarrow$ CQ là đường trung tuyến $\Rightarrow$ QA = QB.

• Dễ thấy $\Delta APQ = \Delta BCQ$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ AP = BC = AD

b) • Giả sử AB = AC. Khi đó ABC cân tại A $\Rightarrow$ AM là đường trung trực của BC

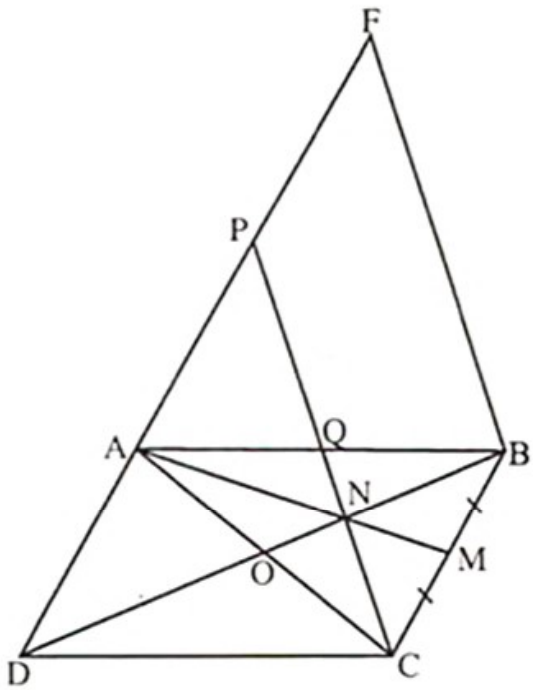
$\Rightarrow$ NBC cân $\Rightarrow$ NB = NC. (1)

AD // BC, AM $\perp$ BC nên NA là trung trực của BC $\Rightarrow$ NP = ND. (2)

Từ (1) và (2) suy ra CP = BD.

• Đảo lại, giả sử CP = BD, qua B kẻ đường thẳng song song với CP cắt AD tại F, suy ra PFBC là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{CPD} = \widehat{BFD}$.



Hình 107

Vì BD = CP = BF nên ΔDBF cân tại B

$\Rightarrow \widehat{NDA} = \widehat{BFP} = \widehat{CPD} \Rightarrow \Delta NDP$ cân tại N. Mặt khác AP = AD

$\Rightarrow$ NA là đường trung trực của PD $\Rightarrow AM \perp AD \Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AB = AC$.

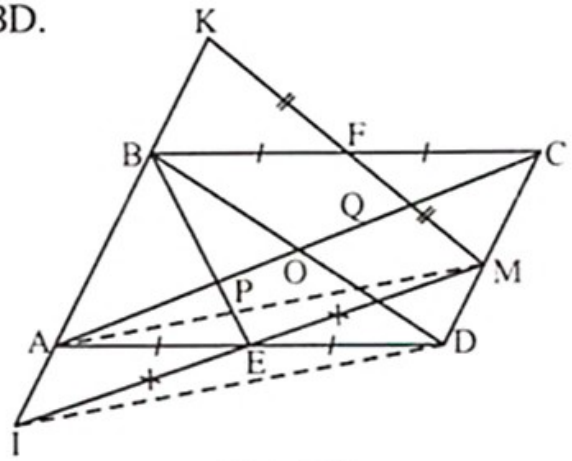
1.51. (h.108) a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có : AO ; BE là trung tuyến của $\Delta ABD \Rightarrow$ P là trọng tâm

$\Rightarrow AP = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC.$

Tương tự, ta có : $\frac{1}{3}CQ = AC.$

Do đó : $PQ = AC - AP - CQ = \frac{1}{3}AC.$



Hình 108

Vậy AP = PQ = QC

b) Ta có : AE = ED, EM = MI $\Rightarrow$ AMDI là hình bình hành $\Rightarrow$ AI // MD. (1)

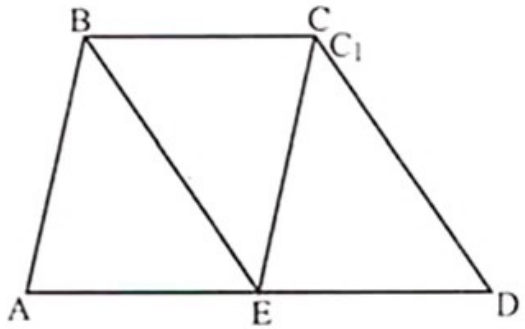
Tương tự, ta có : BK // MC. (2)

Mà AB // CD. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra I, A, B, K thẳng hàng hay I, K thuộc đường thẳng AB.

c) AI + AK = IK = 2.EF không đổi khi M di động trên cạnh CD.

1.52. Vẽ hình bình hành ABC_1E (h.109). Khi đó chu vi ΔBC_1E và ΔBCE bằng nhau. Suy ra $C_1 \equiv C$, nếu không, trong hai tam giác BC_1E và BCE sẽ có một tam giác nằm trong tam giác kia và chu vi của chúng không thể bằng nhau. Như vậy AE = BC



Hình 109

Tương tự như vậy, ta được BCDE là hình bình hành. Suy ra DE = BC hay $BC = \frac{1}{2}AD.$

Nhận xét. Trong bài toán có sử dụng ý tưởng sau : Nếu C_1 nằm trong tam giác BEC thì $CB + CE > C_1B + C_1E$.

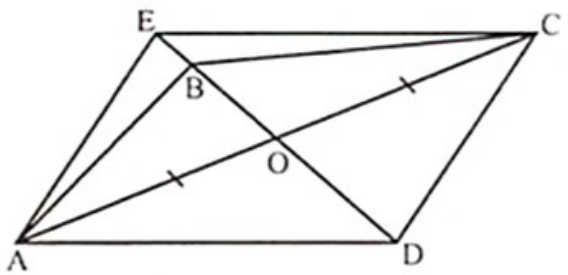
1.53. (h.110) • Giả sử OB ≠ OD (chẳng hạn OB < OD)

Trên tia OB lấy E sao cho OE = OD

$\Rightarrow$ AECD là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AEC}.$

• Áp dụng tính chất góc ngoài tam giác, ta có :



Hình 110

$\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{CBO} > \widehat{AEO} + \widehat{OEC} = \widehat{AEC} \Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ADC}$, trái giả thiết, do đó điều giả sử là sai. Vậy OD = OB hay ABCD là hình bình hành.

1.54. (h.111) Trên tia đối của tia PA lấy điểm K sao cho PK = PA.

Áp dụng tính chất đường trung bình trong tam giác ABK, ACK ta có :

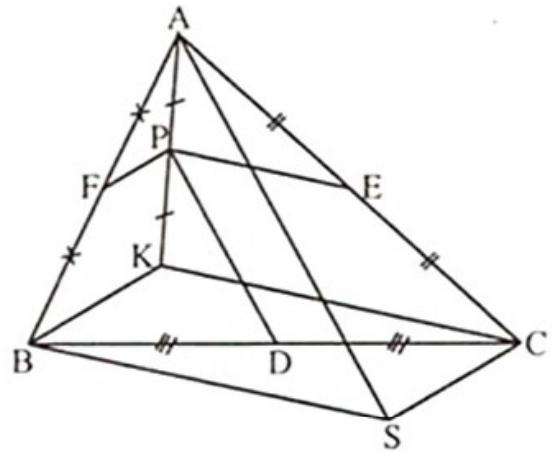
PF // BK ; PE // CK và $PE = \frac{1}{2}KC$.

Vì PE // BS và $PE = \frac{1}{2}BS$

$\Rightarrow$ KC // BS và KC = BS

$\Rightarrow$ BSCK là hình bình hành

$\Rightarrow$ CS // BK $\Rightarrow$ CS // PF.



Hình 111

1.55. (h.112) • Ta có : ΔBCH cân tại C, nên

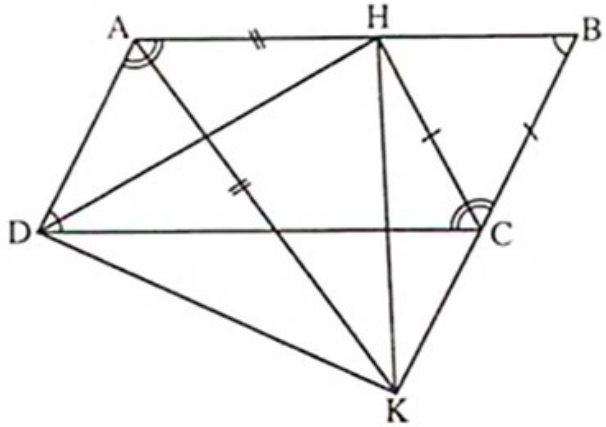
$\widehat{CBH} = \widehat{CHB} \Rightarrow \widehat{CBH} = \widehat{HCD}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{HCD}$

$\Rightarrow$ AHCD là hình thang cân. Do đó AC = DH. (1)

• Mặt khác AK = AB = CD nên ACKD là hình thang cân. Do đó AC = DK (2)

Từ (1) và (2) suy ra DH = DK hay ΔDHK cân tại D.



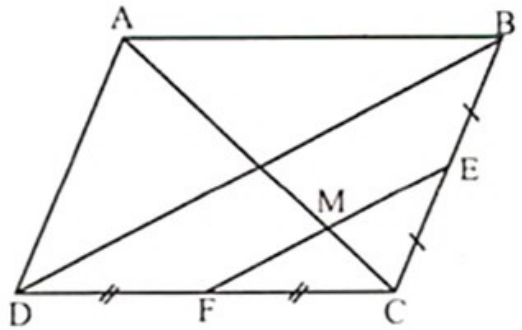
Hình 112

1.56. (h.113) – Dựng M là trung điểm của EF

– Trên tia đối của tia MA, dựng điểm C sao cho $MC = \frac{1}{3}MA$

– Dựng B đối xứng với C qua E

– Dựng D đối xứng với C qua F.



Hình 113

1.57. (h.114) • Gọi I là giao điểm của HF và CE. Suy ra H, I, F thẳng hàng.

• Ta có $\widehat{BCD} + \widehat{HCF} = 180^o$

$\Rightarrow$ D, C, F thẳng hàng.

• Ta có OM là đường trung bình của ACE

$\Rightarrow$ OM // CE $\Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{ECF}$

Mà ΔODC ; ΔICF lần lượt cân tại O và I

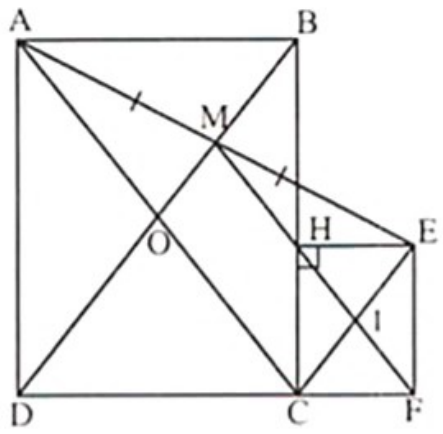
nên $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$; $\widehat{ICF} = \widehat{IFC}$

$\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{IFC} \Rightarrow$ IF // AC.

Mặt khác IM là đường trung bình của ΔACE

$\Rightarrow$ MI // AC $\Rightarrow$ I, M, F thẳng hàng

$\Rightarrow$ M, H, F thẳng hàng.



Hình 114

1.58. (h.115) a) Kẻ EI $\perp$ AH

$\Rightarrow$ HDEI là hình chữ nhật $\Rightarrow$ EI = HD

$\Rightarrow$ EI = AH.

Mặt khác $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (cùng phụ với $\widehat{HAE}$)

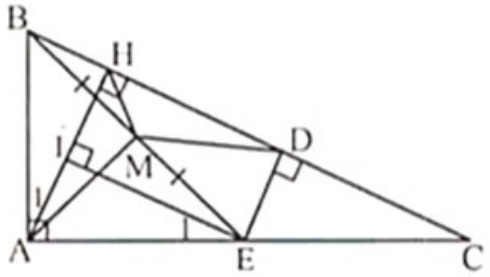
nên ΔHAB = ΔIEA $\Rightarrow$ AB = AE.

b) Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông, suy ra :

$$AM = DM = \frac{1}{2}BE,$$

do đó ΔAHM = ΔDHM (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{DHM} = \frac{1}{2}\widehat{AHD} = 45^o$.



Hình 115

1.59. (h.116) a) AIDK là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{KIA}$

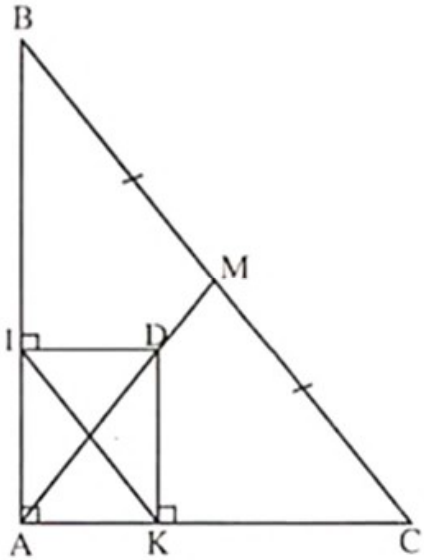
AMB cân (tính chất) $\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{MBA}$

$\Rightarrow \widehat{KIA} = \widehat{MBA} \Rightarrow$ IK // BC

b) IK = AD $\Rightarrow$ AD = $\frac{1}{3}$BC

$= \frac{1}{3}.2AM = \frac{2}{3}AM$

$\Rightarrow$ D là trọng tâm ΔABC.



Hình 116

1.60. (h.117) a) Gọi O là giao điểm của AH và DE. Ta có : ADHE là hình chữ nhật

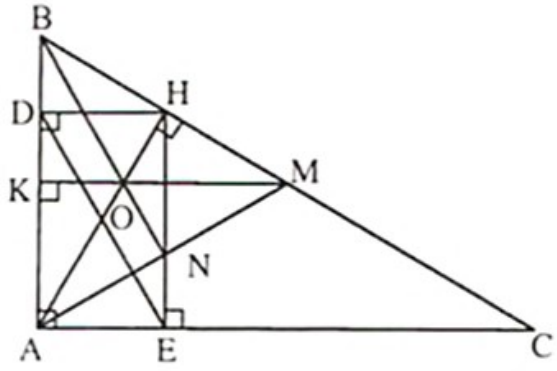
$\Rightarrow OA = OD$

$\Rightarrow \Delta OAD$ cân $\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODA}$. (1)

AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông ABC

$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \Delta AMB$ cân

$\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAB}$. (2)



Hình 117

Mà $\widehat{OAD} + \widehat{MBA} = 90^o$ nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ODA} + \widehat{MAB} = 90^o$ hay $AM \perp DE$.

b) $AM = MC \Rightarrow \Delta AMC$ cân $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{BHD}$.

Mặt khác AE = HD, do đó $\Delta EAN = \Delta DHB$ (g.c.g)

$\Rightarrow NE = BD$. Lại có BD // NE $\Rightarrow$ BDEN là hình bình hành $\Rightarrow$ BN // DE.

c) Ta có : BN // DE $\Rightarrow BN \perp AM$.

Suy ra ΔBMA có AH ; BN ; MK là đường cao do đó AH, BN, MK đồng quy.

1.61. (h.118) Gọi H, I lần lượt là trung điểm của DC, EM

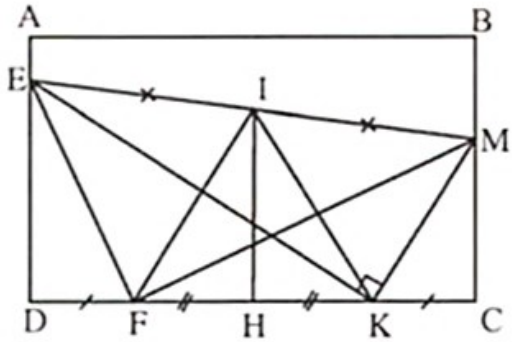
$\Rightarrow$ IH là đường trung bình của hình thang CDEM $\Rightarrow IH \perp CD$.

Mà HF = HK (vì DF = CK)

$\Rightarrow \Delta IKF$ cân tại I $\Rightarrow$ IK = IF.

Mà ΔKME vuông, có KI là đường trung tuyến, suy ra $KI = \frac{1}{2}ME$

$\Rightarrow FI = \frac{1}{2}ME \Rightarrow \Delta MEF$ vuông tại F.



Hình 118

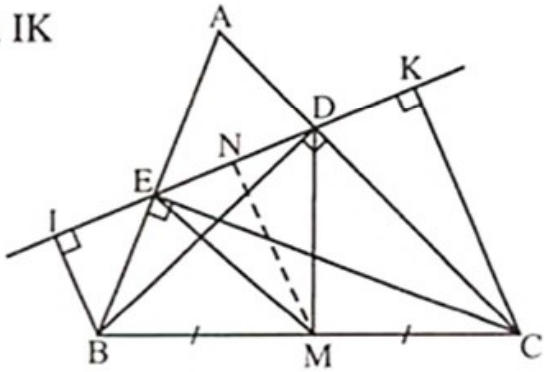
1.62. (h.119) • Gọi M, N là trung điểm của BC và IK

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của hình thang vuông BCKI $\Rightarrow MN \perp KI$

• Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông BDC ; BEC ta có :

$EM = \frac{1}{2}BC$; $MD = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow EM = MD \Rightarrow \Delta MED$ cân tại M.



Hình 119

Mà $MN \perp DE \Rightarrow$ MN là đường cao $\Rightarrow$ MN là đường trung tuyến

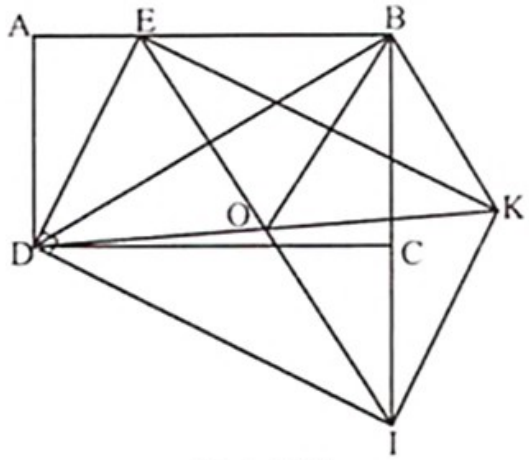
$\Rightarrow NE = ND \Rightarrow IE = DK$.

1.63. (h.120) Gọi O là giao điểm hai đường chéo EI, DK. Ta có OD = OK = OE = OI.

ΔBEI vuông có BO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow$ BO = OE = OI

$\Rightarrow$ BO = OD = OK nên ΔBKD vuông tại B, suy ra $\widehat{DBK} = 90^o$.



Hình 120

1.64. (h.121) a) BDEH là hình chữ nhật

$\Rightarrow \Delta$BDI cân tại I $\Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{IDB}$. (1)

Tương tự, ta có : $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$. (2)

Mà ΔABC cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra :

$\widehat{IBD} = \widehat{ODC} \Rightarrow$ DO // AB và

$\widehat{IDB} = \widehat{OCD} \Rightarrow$ DI // AC.

Do đó AIDO là hình bình hành.

b) AIDO là hình bình hành

$\Rightarrow$ AI = DO ; AO = DI.

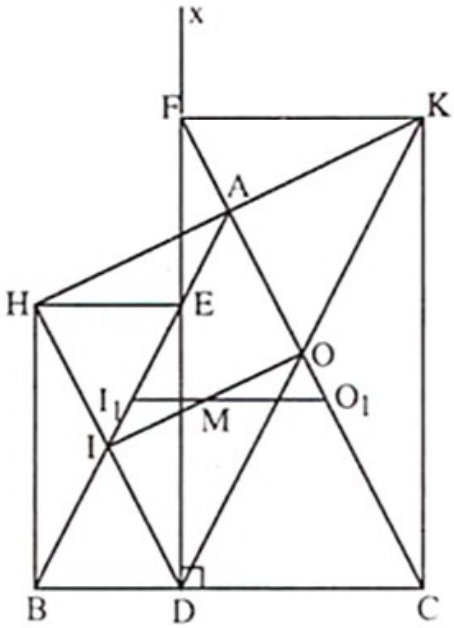
$\Rightarrow$ HI // AO ; HI = AO (= ID)

$\Rightarrow$ AHIO là hình bình hành

$\Rightarrow$ AH // IO, AH = IO. (4)

Tương tự, AKOI là hình bình hành

$\Rightarrow$ AK // IO, AK = IO (5)



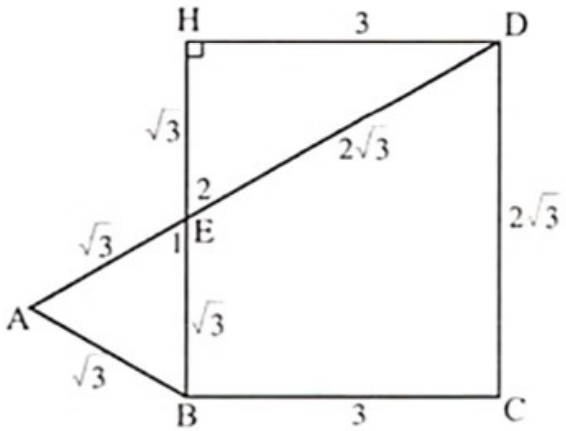
Hình 121

Từ (4) và (5) suy ra A, H, K thẳng hàng, AH = AK, do vậy A là trung điểm của HK.

c) AIDO là hình bình hành nên M là trung điểm của AD. Vì I_1, O_1 là trung điểm AB, AC nên theo tính chất đường trung bình tam giác ta có I_1M // BD, MO_1 // CD, suy ra M thuộc đoạn thẳng I_1O_1.

1.65. (h.122) • Trên đoạn AD lấy điểm E sao cho AE = AB.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên BE.



Hình 122

Ta có : AB = AE, $\widehat{A} = 60^o \Rightarrow \Delta ABE$ đều $\Rightarrow \widehat{E_1} = 60^o$, $\widehat{E_2} = 60^o$

• ΔHDE có $\widehat{E_2} = 60^o \Rightarrow HE = \frac{1}{2}ED = \sqrt{3}$.

Áp dụng định lý Pytago : HD = 3.

$\Rightarrow$ BCDH có HB = CD ; BC = HD ; $\widehat{H} = 90^o \Rightarrow$ BCDH là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^o + 90^o = 150^o$; $\widehat{C} = 90^o$; $\widehat{ADC} = 90^o - 30^o = 60^o$.

1.66. • Bạn Toán đi trước đặt đồng xu vào tâm hình chữ nhật.

• Tiếp theo, bạn Học đặt đồng xu ở vị trí nào thì bạn Toán chỉ cần đặt đồng xu tiếp theo đối xứng với đồng xu bạn Học đã đặt.

• Cứ tiếp tục như vậy, nếu bạn Học còn vị trí đặt đồng xu thì còn vị trí đối xứng với vị trí đó qua tâm để bạn Toán đặt.

Vậy bạn Toán đi theo cách đó thì luôn thắng cuộc.

1.67. (h.123) Gọi P và M lần lượt là trung điểm AD và BC.

Áp dụng tính chất đường trung bình trong tam giác, ta có :

NP // MQ (// AB), NP = MQ ($= \frac{1}{2}$AB)

$\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành.

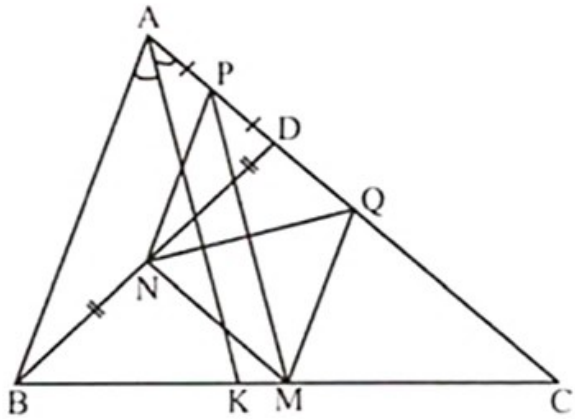
Mà NP = MN (vì $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$)

$\Rightarrow$ MNPQ là hình thoi $\Rightarrow$ MP $\perp$ NQ . (1)

Mặt khác $\widehat{NPQ} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{MPC}$

$\Rightarrow$ AK // MP. (2)

Từ (1) và (2) suy ra NQ $\perp$ AK.



Hình 123

1.68. (h.124) Không mất tính tổng quát, giả sử OC $\geq$ OA ; OD $\geq$ OB.

Trên OC lấy điểm F sao cho OF = OA, trên OD lấy điểm E sao cho OE = OB

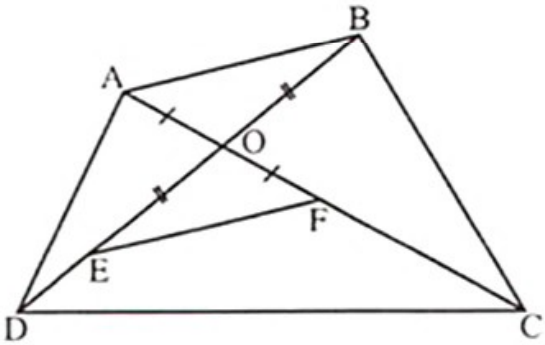
$\Rightarrow$ tứ giác ABFE là hình bình hành

$\Rightarrow$ AB = EF.

Vì chu vi tam giác OAB bằng chu vi tam giác COD nên :

AB + OA + OB = OD + OC + CD

$\Rightarrow$ AB + OA + OB = OE + DE + OF + FC + CD $\Rightarrow$ AB = ED + DC + CF



Hình 124

hay EF = ED + DC + CF điều này chỉ xảy ra khi E ≡ D, và F ≡ C hay OA = OC, OB = OD.

Khi ấy ABCD là hình bình hành.

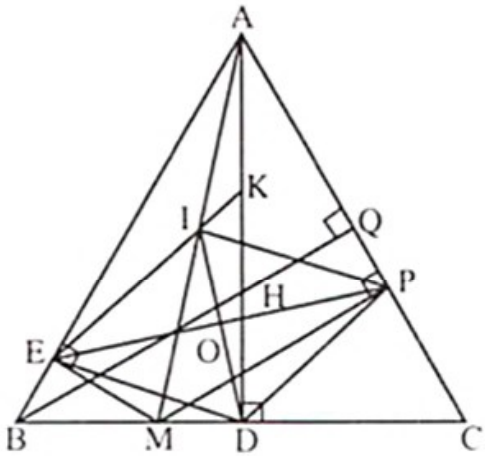
Mặt khác, chu vi tam giác OAB ; AOD bằng nhau nên :

$$AD + OA + OD = AB + OA + OB \Rightarrow AD = AB.$$

Vậy ABCD là hình thoi.

1.69. (h.125) a) Áp dụng đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có :

$$EI = DI = PI = MI = AI = \frac{1}{2}\ AM. \quad (1)$$



Hình 125

Mặt khác, áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$$\widehat{EID} = \widehat{EIM} + \widehat{MID} = 2.\widehat{EAI} + 2.\widehat{IAD}$$
$$= 2.\widehat{BAD} = 60^o,$$

suy ra ΔEID đều nên EI = ED. (2)

Tương tự, ta có : $\widehat{DIP} = \widehat{MIP} - \widehat{MID} = 2.\widehat{MAC} - 2.\widehat{MAD} = 2.\widehat{DAC} = 60^o$

⇒ ΔDIP đều nên DP = IP. (3)

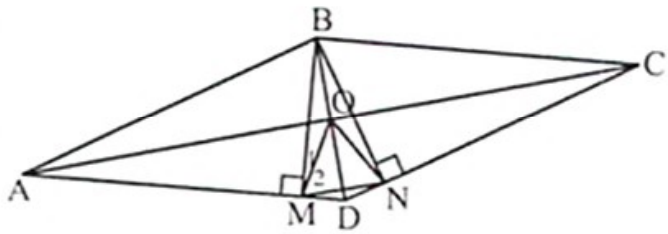
Từ (1), (2), (3) ta có EI = IP = DP = ED ⇒ DEIP là hình thoi.

b) Gọi O là giao điểm EP và ID, K là trung điểm AH ⇒ AK = KH = HD.

Theo tính chất đường trung bình ta có : OH // IK, MH // IK, suy ra M, O, H thẳng hàng hay EP, MH, ID đồng quy.

1.70. (h.126) Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có :



Hình 126

$$MO = ON = \frac{1}{2}BD \text{ mà } MN = \frac{1}{2}BD$$

⇒ MO = NO = MN

⇒ ΔOMN đều ⇒ $\widehat{MON} = 60^o$

$\widehat{MOD} = 30^o \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{MBO} = 15^o \Rightarrow \widehat{BDA} = 75^o$. Từ đó suy ra các góc của hình thoi là : $\widehat{A} = \widehat{C} = 30^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 150^o$.

1.71. (h.127) a) Gọi M là trung điểm BP $\Rightarrow$ BM = CQ $\Rightarrow$ BMQC là hình bình hành $\Rightarrow$ QM = BC, QM // BC.

$\Delta AIP = \Delta MQP$ (g. c. g) $\Rightarrow$ AI = MQ

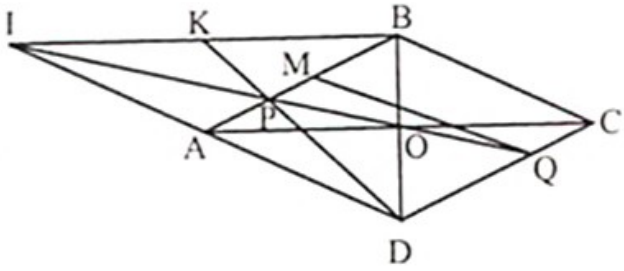
$\Rightarrow$ AI = AD (= MQ)

$\Rightarrow \Delta BID$ có BA là đường trung tuyến,

AI = AD = AB $\Rightarrow \Delta BID$ vuông tại B.

b) ΔIBD có BA là đường trung tuyến,

$AP = \frac{1}{3}AB$, vậy P là trọng tâm $\Rightarrow$ BK = KI.

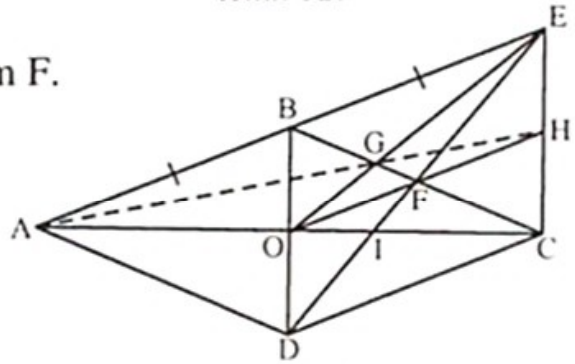


Hình 127

1.72. (h.128) Ta có BECD là hình bình hành tâm F.

OF là đường trung bình của ΔBCD, suy ra H là trung điểm EC mà G là trọng tâm của ΔAEC.

Vậy A, G, H thẳng hàng.



Hình 128

1.73. (h.129) a) $\Delta ABE = \Delta ADF$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ AE = AF $\Rightarrow \Delta AEF$ vuông cân.

AI là đường trung tuyến của ΔAEF

$\Rightarrow$ AI là đường cao $\Rightarrow AI \perp EF$.

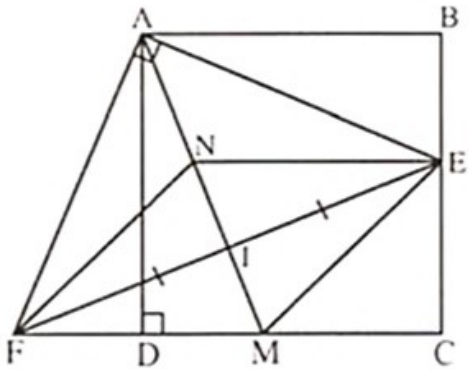
$\Delta MIF = \Delta NIE$ (g.c.g) $\Rightarrow$ MF = NE.

Ta có : MF // NE, MF = NE, $MN \perp EF$

$\Rightarrow$ MENF là hình thoi.

b) MENF là hình thoi $\Rightarrow$ ME = MF.

$\Delta ABE = \Delta ADF \Rightarrow$ BE = DF.



Hình 129

Chu vi ΔCEM là : CM + ME + EC = CM + MF + EC = CM + MD + DF + EC

= CM + MD + BE + EC = 2.BC.

Do vậy chu vi ΔCEM bằng 2.BC không đổi khi E chuyển động trên BC.

1.74. (h.130) Lấy điểm M trên tia DE sao cho CM // EF.

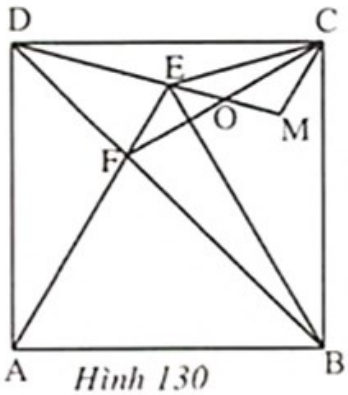
Ta có ΔADE cân tại A ; $\widehat{DAE} = 30^o$.

$\Rightarrow \widehat{ADE} = 75^o \Rightarrow \widehat{MDC} = 15^o$

$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{FBE}$. (1)

Mà $\widehat{MCD} = \widehat{EAB}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{BEF}$ (= 60°). (2)

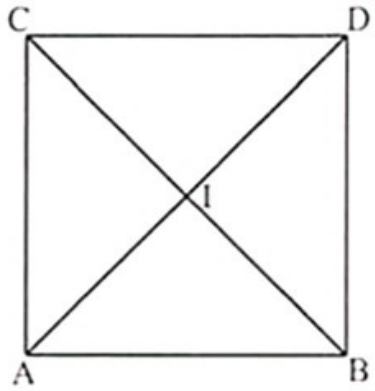


Hình 130

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta DCM = \Delta BEF$ (g.c.g) $\Rightarrow CM = EF$ mà $CM \parallel EF$

$\Rightarrow$ CMFE là hình bình hành $\Rightarrow OC = OF$.

1.75. (h.131) Dựng ABC vuông cân đỉnh A. Do chỉ đánh dấu bởi một trong hai dấu (+) hoặc (–) nên tồn tại hai điểm cùng dấu, không mất tính tổng quát, giả sử hai điểm A, B cùng dấu và cùng dấu (+).



Hình 131

• Nếu C có dấu (+) thì ABC là tam giác phải tìm.

• Nếu C có dấu (–) thì ta dựng điểm D sao cho ABCD là hình vuông.

✓ Nếu D có dấu (+) thì ABC là tam giác phải tìm.

✓ Nếu D có dấu (–) thì gọi I là giao điểm của AD và BC

+ Nếu I có dấu (+) thì ABI là tam giác cần tìm

+ Nếu I có dấu (–) thì CID là tam giác cần tìm.

1.76. (h.132) Vì $\widehat{MAB} = \widehat{MBC}$ mà $\widehat{MBC} + \widehat{MBA} = 90^o$

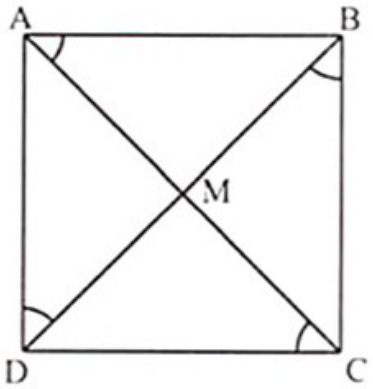
$\Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 90^o$. Suy ra $\widehat{AMB} = 90^o$.

Tương tự ta có

$\widehat{BMC} = 90^o$; $\widehat{CMD} = 90^o$; $\widehat{DAM} = 90^o$

Từ đó suy ra $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} = 180^o$, suy ra ba điểm A, M, C thẳng hàng.

$\widehat{BMC} + \widehat{CMB} = 180^o$, suy ra ba điểm B, M, D thẳng hàng.



Hình 132

Vậy M là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

1.77. (h.133) a) Trên CD lấy E sao cho CE = AB

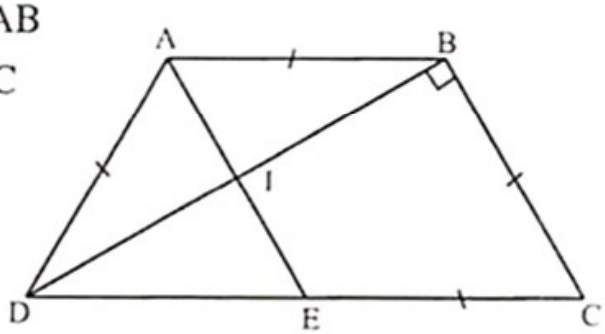
Tứ giác ABCE có AB // CE ; AB = BC nên ABCE là hình thoi

$\Rightarrow AE \parallel BC$, $AE = BC$, $\widehat{AED} = \widehat{BCD}$

$\Rightarrow AE = AD \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AED} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$

Vậy ABCD là hình thang cân



Hình 133

b) Đặt I là giao điểm AE và BD, ta có $AE \parallel BC$; $BD \perp BC$ nên $AE \perp BD$.

ΔABD cân tại A (AB = AD) có AI là đường cao nên AI cũng là đường phân giác, suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{DAE}$. Mà $\widehat{BAE} = \widehat{AED}$ suy ra $\widehat{DAE} = \widehat{AED}$

$\Rightarrow$ ΔADE cân tại D. Mà AD = AE $\Rightarrow$ ΔADE đều $\Rightarrow$ $\widehat{ADC} = 60^o$.

ABCD là hình thang cân nên $\widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 60^o$

$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{CBA} = 180^o - 60^o = 120^o$.

1.78. (h.134) Gọi cạnh hình vuông là a.

Trên tia đối của tia BC lấy M sao cho $BM = \frac{1}{2}a$.

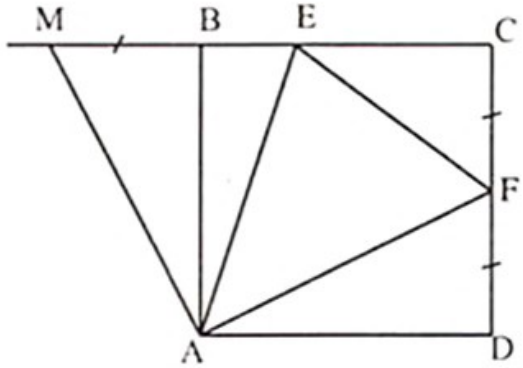
Khi đó $\Delta ABM = \Delta ADF$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = AF$

Ta có : $EF = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{5a}{6}$.

Mà $ME = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a = \frac{5a}{6} \Rightarrow EF = MF$.

Do đó $\Delta AME = \Delta AFE$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AEB}$.



Hình 134

1.79. (h.135) Dựng hình vuông BACD, ta có ΔBHM, ΔCKM vuông cân và AHMK là hình chữ nhật nên BH = HM = AK, CK = MK = AH.

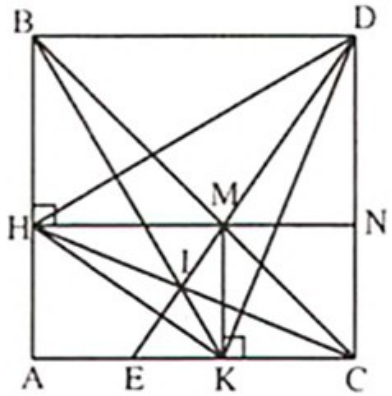
ΔBDH và ΔABK có AB = BD, BH = AK, $\widehat{BAK} = \widehat{DBH} = 90^o$

nên $\Delta BDH = \Delta ABK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{BDH}$, mà $\widehat{ABK} + \widehat{KBD} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{BDH} + \widehat{KBD} = 90^o \Rightarrow BK \perp DH$. (1)

Tương tự ta có : $DK \perp CH$. (2)



Hình 135

Gọi HM cắt CD tại N, DM cắt AC tại E, DM cắt AC tại E.

Ta có MNCK là hình vuông, BDNH là hình chữ nhật

$\Rightarrow MN = MK = AH$, $DN = BH = AK$.

Do đó $\Delta HAK = \Delta MND$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{HKA} = \widehat{MDN}$

Mà $\widehat{MDN} + \widehat{DEC} = 90^o \Rightarrow \widehat{HKA} + \widehat{DEC} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{HKA} + \widehat{DEC} = 90^o$ hay $DE \perp HK$.

Xét ΔDHK có KB, HC, DE là các đường cao nên KB, HC, DE đồng quy, suy ra MD qua điểm I hay đường thẳng MI luôn đi qua điểm cố định D khi M di động.

1.80. (h.136) Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\Delta ABE = \Delta DAM$ (c.g.c), suy ra

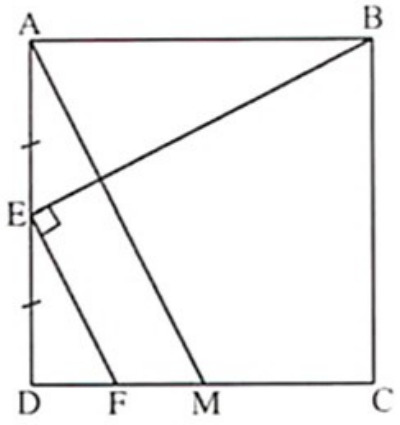
$AM = BE$, $\widehat{DAM} = \widehat{ABE}$,

mà $\widehat{DAM} + \widehat{MAB} = 90^o$,

suy ra $\widehat{ABE} + \widehat{MAB} = 90^o$ hay $AM \perp BE$, suy ra $AM // EF$

ΔADM có $AM // EF$, $AE = ED$, suy ra EF là đường trung bình của ΔADM

$\Rightarrow \dfrac{EF}{AM} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $\dfrac{EF}{BE} = \dfrac{1}{2}$.



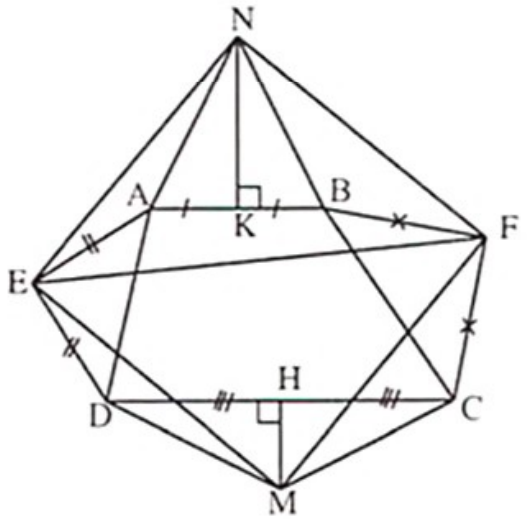
Hình 136

1.81. (h.137) Gọi K là trung điểm của AB. Lấy điểm N nằm ngoài hình thang ABCD sao cho $NK \perp AB$; $NK = AB$.

Dễ thấy : $\Delta MHC = \Delta BKN \Rightarrow MC = NB$; mặt khác $AB // CD$ và ΔBCF vuông cân tại F nên $\Delta FMC = \Delta FNB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \Delta MFN$ vuông cân tại F.

Tương tự ΔMEN vuông cân tại E. Suy ra MENF là hình vuông $\Rightarrow \Delta MENF$ là hình vuông $\Rightarrow \Delta MEF$ vuông cân tại M.



Hình 137

1.82. (h.138) a) Theo tính chất của hình vuông, ta có :

$\widehat{DAB} = 45^o, \widehat{CAG} = 45^o$,

suy ra : $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAG} = 180^o$.

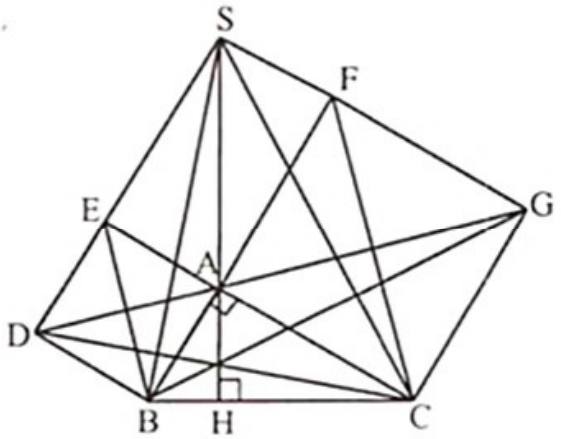
Do đó D, A, G thẳng hàng. (1)

b) Ta có $BE \perp AD$, $CF \perp AG \Rightarrow BE // CF$.

Ta có $\widehat{EAB} + \widehat{BAC} = 180^o \Rightarrow$ C, A, E thẳng hàng. Tương tự B, A, F thẳng hàng.

Do đó $BF = BA + AF = EA + AC = EC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra BCFE là hình thang cân.



Hình 138

c) Gọi S là giao điểm của tia DE và tia GF. Suy ra $\Delta ABC = \Delta FSA$

$\Rightarrow \widehat{FAS} = \widehat{ACB}$, mà $\widehat{ACB} + \widehat{CAH} = 90^o \Rightarrow \widehat{FAS} + \widehat{CAH} = 90^o$

$\Rightarrow$ S, A, H thẳng hàng.

Xét ΔCBG và ΔASC có $BC = SA$, $CG = AC$, $\widehat{BCG} = \widehat{SAC}$

$\Rightarrow \Delta CBG = \Delta ASC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ASC} = \widehat{CBG}$, mà $\widehat{ASC} + \widehat{SCB} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{CBG} + \widehat{SCB} = 90^o$ hay $BG \perp SC$. (3)

Tương tự ta có : $SB \perp CD$. (4)

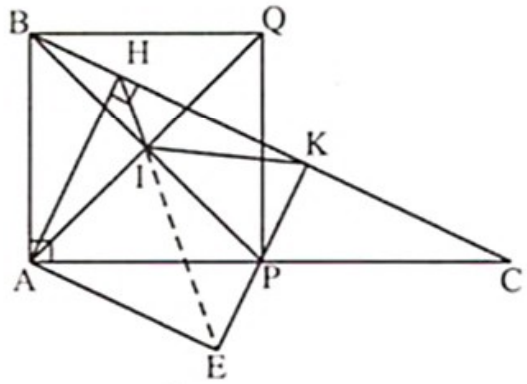
Từ (3), (4) ta có SH, BG, CD là đường cao trong tam giác SBC nên SH, BG, CD đồng quy, suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Câu c vẫn đúng trong trường hợp tam giác ABC là tam giác thường.

1.83. (h.139) a) $AC > AB \Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^o$, suy ra $\widehat{ABC} > 45^o$.

b) $\Delta ABH = \Delta APE$ (góc nhọn, cạnh góc vuông), suy ra $AB = AP$.

c) ABQP là hình bình hành, $\widehat{A} = 90^o$, $AB = AP$, suy ra ABQP là hình vuông.



Hình 139

Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông, ta có :

$$AI = KI \left(= \frac{1}{2}BP\right)$$

$\Rightarrow \Delta AHI = \Delta KHI$ (c.c.c).

$\Rightarrow$ HI là phân giác $\widehat{AHK}$, mặt khác HE là phân giác của $\widehat{AHK}$ nên H, I, E thẳng hàng.

d) Ta có $KI = \frac{1}{2}BP \Rightarrow KI = \frac{1}{2}AQ \Rightarrow \Delta AKQ$ vuông tại K,

$\Rightarrow QK \perp AK$, mà $HE \perp AK$ (tính chất hình vuông), vậy HE //QK.

1.84. (h.140) Gọi D, E, F là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác. Kẻ HI // AB, HK // AC $\Rightarrow BH \perp HK$; $HC \perp HI$.

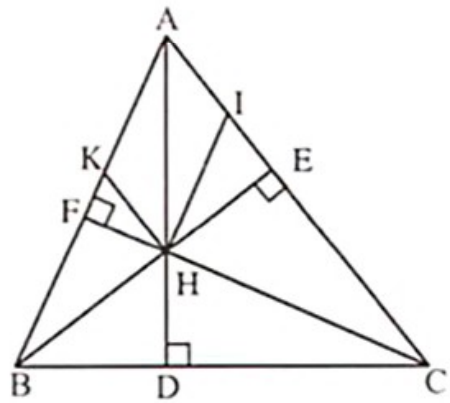
Dễ có : $HA < AK + AI$, $HB < BK$, $HC < CI$.

Suy ra $HA + HB + HC < AB + AC$. (1)

Tương tự, ta có :

$HA + HB + HC < AB + BC$. (2)

$HA + HB + HC < BC + AC$. (3)



Hình 140

Từ (1), (2), (3) cộng vế với vế, rồi chia cho 3 ta được điều phải chứng minh.

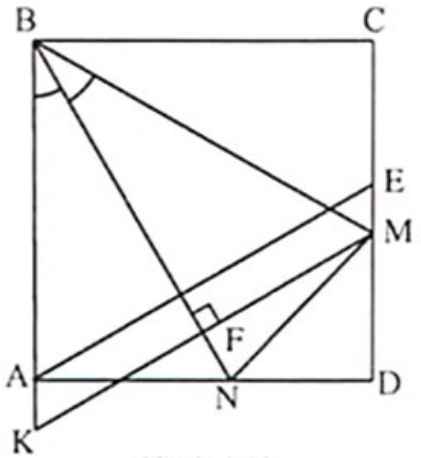
1.85. (h.141) Từ M vẽ MF ⊥ BN cắt AB tại K. Kẻ AE // KM (E ∈ CD). ΔABN = ΔDAE

⇒ AE = BN.

Mà AE = KM ⇒ BN = KM.

ΔBKM cân ⇒ $MF = \frac{KM}{2} = \frac{BN}{2}$.

$MN \geq MF \Rightarrow MN \geq \frac{BN}{2}$. Do đó $\frac{BN}{MN} \leq 2$.



Hình 141

1.86. (h.142) Dựng hình bình hành ADBK và BDCL. Ta có :

AK // BD, AK = BD, CL // BD, CL = BD

⇒ AK // CL, AK = CL

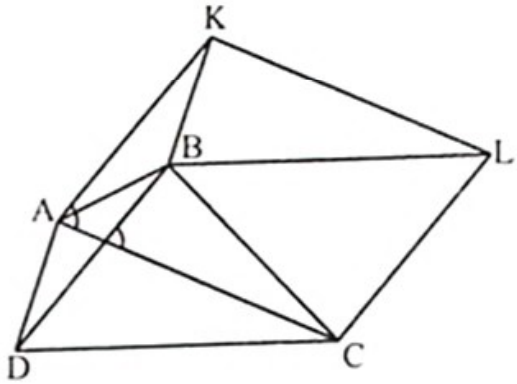
⇒ AKLC là hình bình hành. Do đó

AB + BC + CD + DA = (AB + CD) + (BC + DA)

= (AB + BL) + (BC + BK) ≥ AL + CK

Dấu bằng khi A, B, L thẳng hàng và B, K, C thẳng hàng khi ABCD là hình bình hành.

Vậy hình bình hành thoả mãn điều kiện đề bài có chu vi nhỏ nhất.



Hình 142

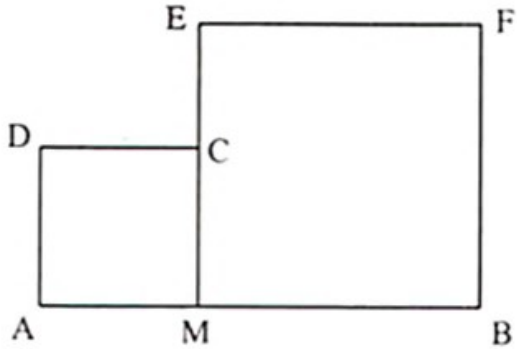
1.87. (h.143) Đặt AM = x ⇒ BM = a − x

Ta có : $S_{AMCD} + S_{BMEF} = x^2 + (a - x)^2$

$= 2x^2 + a^2 - 2ax = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{AMCD} + S_{BMEF} = \frac{a^2}{2}$

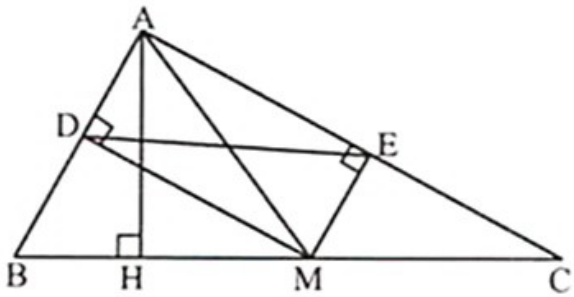
khi $x = \frac{a}{2}$ hay M là trung điểm của AB.



Hình 143

1.88. (h.144) Hạ đường cao AH. Ta có ADME là hình chữ nhật, suy ra DE = AM ≥ AH.

Vậy DE nhỏ nhất bằng AH khi M trùng với H.



Hình 144

1.89. (h.145) Gọi B' là điểm đối xứng của B qua AD.

Gọi I là giao điểm của AD và B'C.

• Nếu $M \in IA \Rightarrow MB' + MC \le AB' + AC$

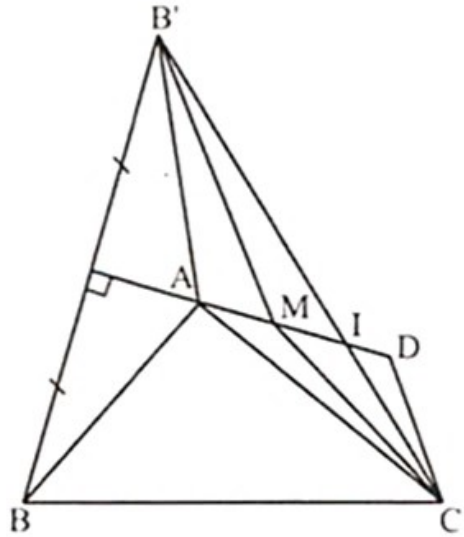
$\Rightarrow MB + MC \le AB + AC.$ (1)

• Nếu $M \in ID \Rightarrow MB' + MC \le DB' + DC$

$\Rightarrow MB + MC \le DB + DC.$ (2)

Từ (1) và (2) ta suyra :

$MB + MC \le \max\{AB + AC ; DB + DC\}$.



Hình 145

1.90. (h.146) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BC. Không giảm tính tổng quát, giả sử M thuộc ΔAOB. Gọi OM cắt AB tại N.

Ta có : $MA + MC < NA + NC$

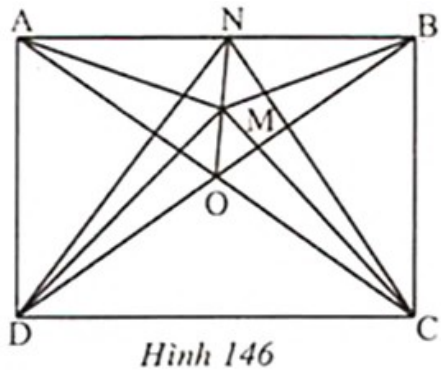
$MB + MD < NB + ND$

$\Rightarrow MA + MB + MC + MD < AB + NC + ND$ (1)

Áp dụng bài 1.89. Ta có :

$NC + ND \le \max\{AD + AC ; BD + BC\}$

$\Rightarrow NC + ND \le AD + AC.$ (2)



Hình 146

Từ (1) và (2) suy ra $MA + MB + MC + MD < AB + AC + AD$.

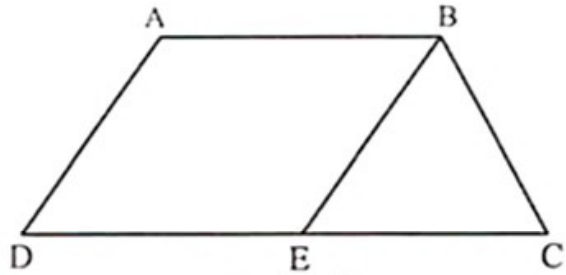
Nhận xét. Trong bài 1.89 và 1.90 có sử dụng bài toán quen thuộc sau : Cho điểm M nằm bên trong tam giác ABC thì $MB + NC < AB + AC$. Bạn đọc cần nhớ bất đẳng thức này.

1.91. (h.147) Kẻ BE // AD, $E \in CD$, suy ra ABED là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{ABE}$, $\widehat{A} = \widehat{BED}$.

Ta có $\widehat{A} = \widehat{BED} > \widehat{C}$, $\widehat{ABC} > \widehat{ABE} = \widehat{D}$.

Suy ra : $\widehat{A} + \widehat{B} > \widehat{C} + \widehat{D}$.



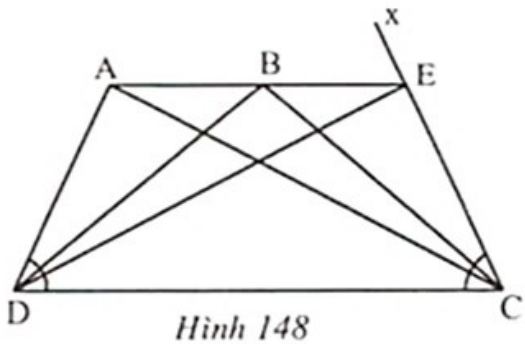
Hình 147

1.92. (h.148) Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm B vẽ tia Cx sao cho $\widehat{CDA} = \widehat{DCx}$, Cx cắt đường thẳng AB tại E.

Vì $\widehat{D} > \widehat{C} \Rightarrow \widehat{DCE} > \widehat{DCB}$

$\Rightarrow$ B nằm giữa A và E.

AECD là hình thang cân $\Rightarrow AC = DE$. (1)



Hình 148

Mặt khác $\widehat{DBE} > \widehat{DAB} = \widehat{BEC} > \widehat{BED} \Rightarrow DE > BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC > BD$.

1.93. (h.149) Nếu ABCD là hình bình hành $\Rightarrow$ điều phải chứng minh. Xét ABCD không phải là hình bình hành, giả sử AB cắt CD tại E.

Dựng hình bình hành ABCF $\Rightarrow AF = BC$

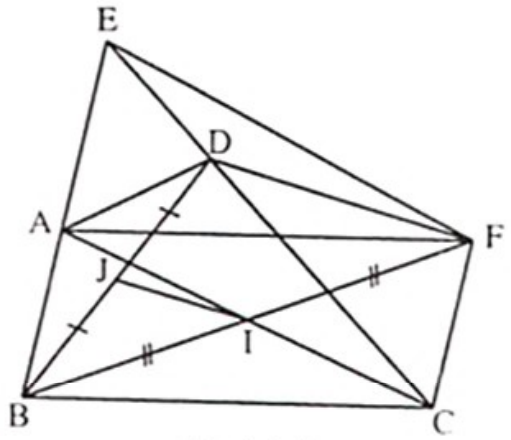
$DF = 2IJ \Rightarrow AC + 2\,IJ = AC + DF < AF + CD$

hay $AC + 2\,IJ < BC + DC$. (1)

Mà $BD < AD + AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$AC + BD + 2\,IJ < AB + BC + CD + AD$.



Hình 149

1.94. (h.150) a) Xét ΔCDN và ΔBCM có

$$\widehat{NCD} = \widehat{MBC}\left(= 90^o\right)$$

$BM = CN$; $BC = CD$ nên $\Delta BMC = \Delta CND$ (c.g.c)

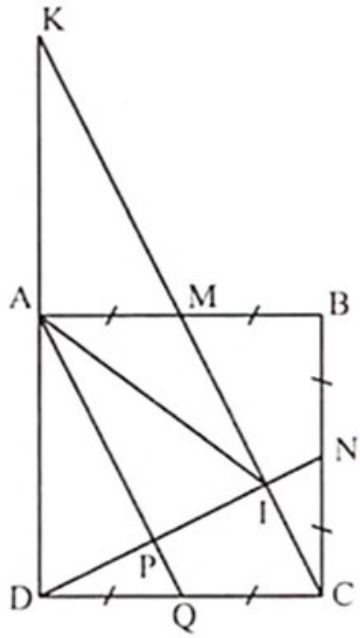
Suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{NDC}$, mà $\widehat{NDC} + \widehat{CND} = 90^o$

nên $\widehat{BCM} + \widehat{CND} = 90^o$ hay ΔNIC vuông tại I.

b) *Cách 1* : Gọi Q là trung điểm của CD ; P là giao điểm AQ và DI.

Tứ giác AMCQ có AM = CQ ; AM // CQ nên AMCQ là hình bình hành $\Rightarrow$ AQ // CM $\Rightarrow AQ \perp DI$. (1)

Tam giác DCI có Q là trung điểm của CD ; QP // CI nên P là trung điểm của DI . (2)



Hình 150

Từ (1) và (2) ta có AP là đường cao ; đường trung tuyến của tam giác ADI nên ΔADI cân tại A.

Cách 2 : Gọi K là giao điểm của hai tia CM và DA.

Ta có AM = BM ; $\widehat{AMK} = \widehat{BMC}$; $\widehat{KAM} = \widehat{CBM}$

nên $\Delta AMK = \Delta BMC$ (c.g.c), suy ra $AK = BC \Rightarrow AK = AD$.

ΔIK vuông tại I có IA là đường trung tuyến

$\Rightarrow AI = AD$ (tính chất tam giác vuông).

1.95. (h.151) Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = \widehat{ABO}$. Trên tia Bx lấy K sao cho BK = BO

$\Rightarrow \Delta BKO$ vuông cân tại B $\Rightarrow \widehat{BKO} = 45^o$.

Ta có $\Delta BKC = \Delta BOA$ (c.g.c) $\Rightarrow KC = AO$.

Đặt OA = a. Từ OA : OB : OC = 1 : 2 : 3

$\Rightarrow$ OB = 2a ; OC = 3a ; BK = 2a ; CK = a.

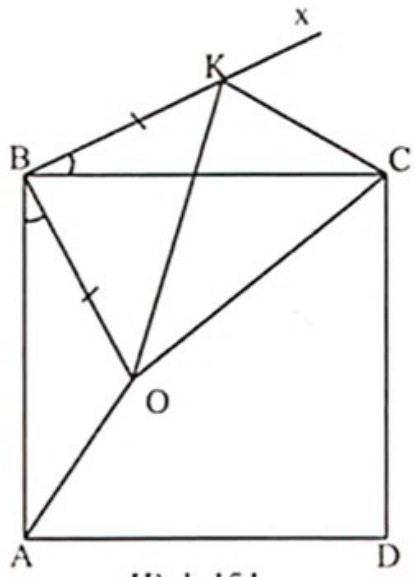
Áp dụng định lí Py-ta-go :

$OK^2 = BK^2 + BO^2 = 8a^2$

$\Rightarrow OK^2 + KC^2 = OC^2 (= 9a^2)$

$\Rightarrow \Delta OKC$ vuông tại K (theo định lí Py-ta-go đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKC} = 45^o + 90^o = 135^o \Rightarrow \widehat{AOB} = 135^o$.



Hình 151

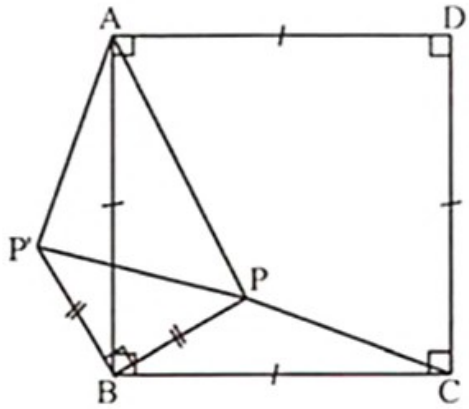
1.96. (h.152) Lấy điểm P' khác phía với điểm P đối với đường thẳng AB sao cho tam giác BP' vuông cân tại B.

Ta có $\Delta ABP' = \Delta CBP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AP'B} = 135^o$,

AP' = CP. Vì $\widehat{BP'P} = 45^o$ nên $\widehat{PP'A} = 90^o$.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta được :

$PA^2 = AP'^2 + PP'^2 = PC^2 + 2.PB^2$.



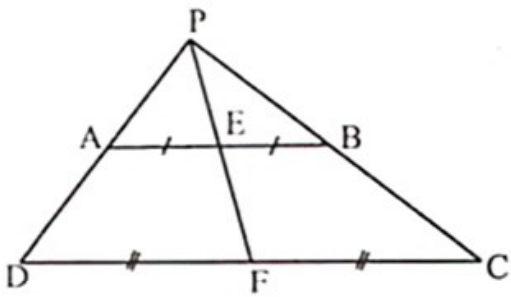
Hình 152

1.97. *Cách 1.* (h.153a) Gọi P là giao điểm của đường thẳng BC và AD $\Rightarrow$ tam giác PAB, PCD có PE, PF lần lượt là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền, nên ta có :

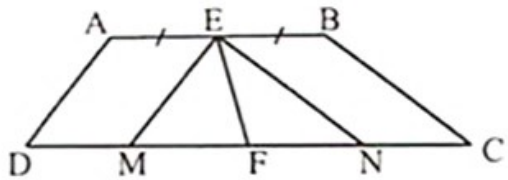
- ΔPEB, ΔPFC cân nên $\widehat{EPB} = \widehat{EBP}$; $\widehat{FPC} = \widehat{FCP}$, mà $\widehat{EBP} = \widehat{FCP}$, suy ra $\widehat{EPB} = \widehat{FPC}$, do đó P, E, F thẳng hàng.
- $PF = \dfrac{CD}{2}$; $PE = \dfrac{AB}{2}$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. (h.153b) Qua E vẽ đường thẳng song song với AD, BC cắt CD tại M, N $\Rightarrow$ AEMD, BCNE là các hình bình hành $\Rightarrow$ AE = DM, BE = CN. Mà DF = CF, AE = BE nên FM = FN và CD – AB = MN.



a)



b)

Hình 153

Từ đó suy ra : EF là đường trung tuyến trong tam giác vuông EMN

$\Rightarrow EF = \dfrac{MN}{2}$. Vậy $EF = \dfrac{CD - AB}{2}$.

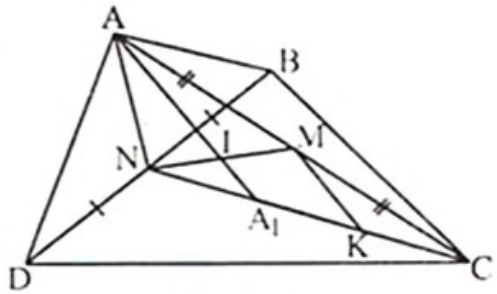
1.98. (h.154) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BD. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng A_1C, suy ra $CK = A_1K = A_1N$, suy ra MK là đường trung bình của tam giác CAA_1, suy ra $MK // A_1A$. Gọi I là giao điểm của MN và A_1A.

ΔMKN có $A_1K = A_1N$, $A_1I // MK \Rightarrow IM = IN$.

Vậy I là trung điểm của MN, suy ra AA_1 đi qua trung điểm I của MN.

Chứng minh tương tự, ta có BB_1, CC_1, DD_1 cũng đi qua trung điểm I của MN.

Vậy AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy.



Hình 154

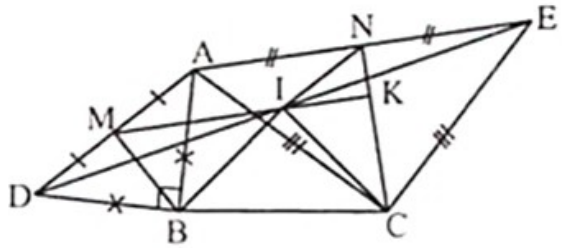
1.99. *Cách 1.* (h.155) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AD ; AE khi đó MI, NI là đường trung bình của ΔADE, suy ra AMIN là hình bình hành.

Do đó $MI = AN = NC$; $BM = MA = IN$

Mà $\widehat{AMI} = \widehat{ANI}$, suy ra $\widehat{BMI} = \widehat{INC}$.

ΔBMI và ΔINC có $BM = IN$;

$\widehat{BMI} = \widehat{INC}$; $MI = NC$



Hình 155

nên $\Delta BMI = \Delta INC$ (c.g.c) $\Rightarrow BI = IC$. (1)

Gọi K là giao điểm của MI và CN.

Vì $MI // AE$ mà $CN \perp AE$ nên $MI \perp CN$. Suy ra $\widehat{KIC} + \widehat{KCI} = 90^o$,

mà $\widehat{KCI} = \widehat{MIB} \Rightarrow \widehat{KIC} + \widehat{MIB} = 90^o \Rightarrow \widehat{BIC} = 90^o$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔBIC vuông cân.

Cách 2 (h.156)

Kẻ DK ; AH ; IO ; EJ vuông góc với đường thẳng BC.

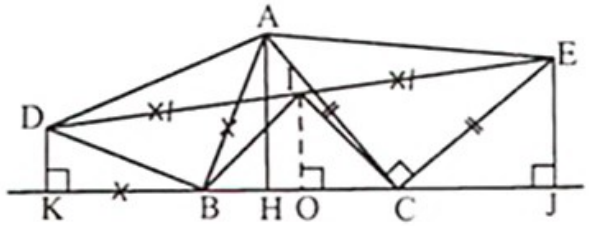
ΔBDK và ΔABH có $BD = BA$;

$\widehat{DKB} = \widehat{AHB} \left(= 90^o\right)$

$\widehat{DBK} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABH}$)

nên $\Delta BDK = \Delta ABH$

$\Rightarrow DK = BH$; $BK = AH$.



Hình 156

Tương tự EJ = CH ; CJ = AH $\Rightarrow$ DK + EJ = BH + CH = BC và BK = CJ (= AH)

DEJK là hình thang (DK // EJ) có ID = IE và IO//DK $\Rightarrow$ OK = OJ.

Mà BK = CJ, suy ra OB = OC. (3)

Lại có $IO = \dfrac{DK + EJ}{2} = \dfrac{1}{2}BC.$ (4)

Từ (3) và (4) ta có : OB = OC = IO và IO $\perp$ BC $\Rightarrow$ ΔBIC vuông cân tại I.

1.100. (h.157) Vẽ hình bình hành ACMD, khi đó AD // CM suy ra

$\widehat{DCM} = \widehat{ADC} = 70^o$

$\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{BCD} + \widehat{DCM} = 120^o$

CM = AD = BC $\Rightarrow$ ΔCMB cân tại C

$\Rightarrow \widehat{CMB} = \widehat{CBM} = 30^o$.

Ta có EF là đường trung bình của ΔAMB

$\Rightarrow$ EF // BM $\Rightarrow \widehat{EFD} = \widehat{BID} = \widehat{CIM}$

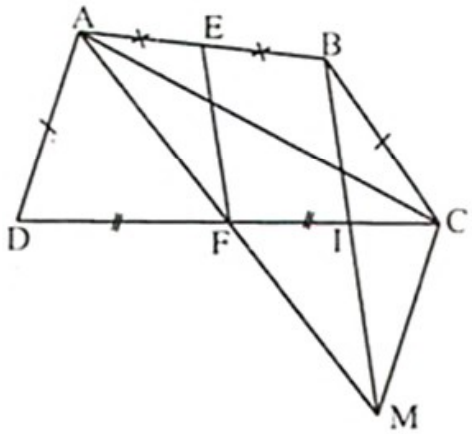
(I là giao điểm của BM và CD).

Mặt khác, xét ΔMIC có

$\widehat{CIM} = 180^o - \widehat{ICM} - \widehat{IMC}$

$\Rightarrow \widehat{CIM} = 180^o - 70^o - 30^o = 80^o$.

Vậy $\widehat{EFD} = 80^o$.

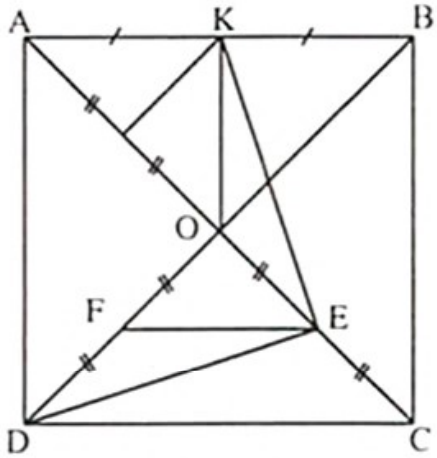


Hình 157

1.101. (h.158) *Cách 1.* Gọi F là trung điểm của OD, suy ra EF là đường trung bình của ΔOCD nên $EF = \dfrac{1}{2}DC$, mà $OK = \dfrac{1}{2}AD$, suy ra EF = OK.

Mặt khác $DF = OE (= \dfrac{1}{2}OD = \dfrac{1}{2}OC)$.

Ta có $\widehat{DFE} = \widehat{EOK} \left(= 135^o\right)$



Hình 158

$\Rightarrow \Delta DFE = \Delta EOK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FDE} = \widehat{OEK}$.

Suy ra $\widehat{DEK} = \widehat{DEO} + \widehat{OEK} = \widehat{DEO} + \widehat{FDE} = \widehat{AOD} = 90^o$ hay KE $\perp$ DE.

Cách 2 :

Gọi I là trung điểm AO. Ta có ΔODE = ΔIEK $\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{IEK}$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

1.102. (h.159) Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm BD, CE, AD. Vì AD = 3.AB, suy ra I là trung điểm của BM.

Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông $\Rightarrow$ AN = DN ($= \frac{1}{2}$CE).

Do ΔNAD cân tại N $\Rightarrow$ NI $\perp$ AD, suy ra NI // BC.

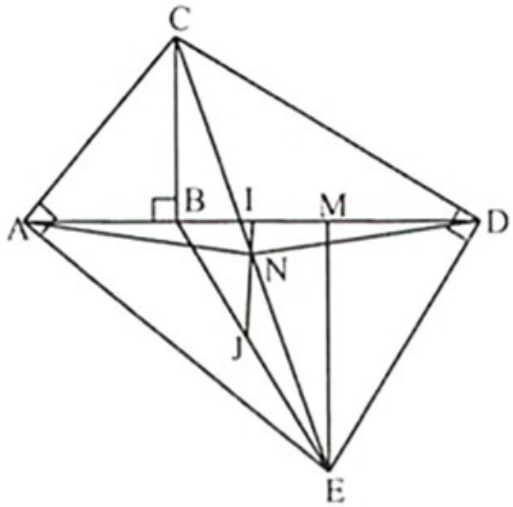
Gọi J là giao điểm của NI với BE

$\Rightarrow$ NJ là đường trung bình của ΔBCE

$\Rightarrow$ JB = JE $\Rightarrow$ IJ là đường trung bình của ΔBME

$\Rightarrow$ IJ // ME $\Rightarrow$ ME $\perp$ BD mà MB = MD

$\Rightarrow$ ΔBDE cân tại E.



Hình 159

1.103. (h.160) Kẻ các tia phân giác trong của góc ADC, DCB cắt nhau tại E.

Tam giác CDE có $\widehat{C} = 65^o$, $\widehat{D} = 55^o$, suy ra $\widehat{CED} = 60^o$.

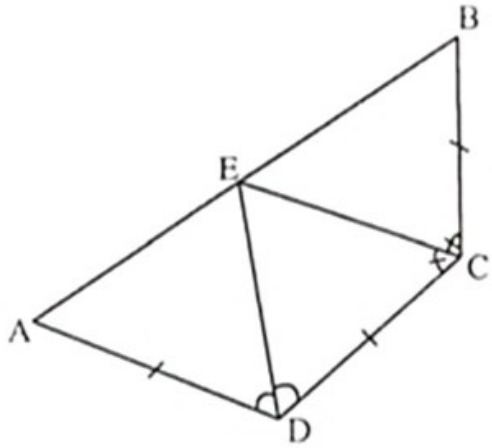
Ta có : ΔADE = ΔCDE (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{CED} = 60^o$.

ΔCBE = ΔCDE (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{CED} = 60^o$.

Từ đó suy ra A, B, E thẳng hàng.

Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{EBC} = \widehat{EDC} = 55^o$.



Hình 160

1.104. (h.161) Gọi M là giao điểm của CD và SE.

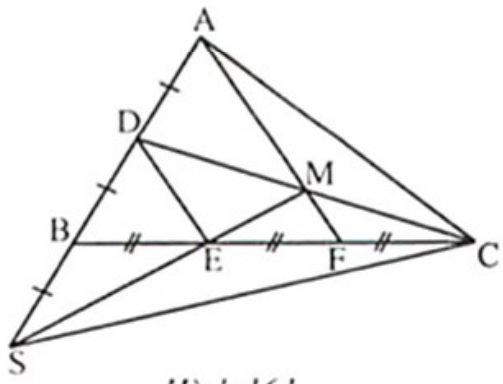
ΔCDS có CB là đường trung tuyến và $CE = \frac{2}{3}BC$, suy ra E là trọng tâm tam giác CDS, suy ra MC = MD. ΔCDE có MF là đường trung bình $\Rightarrow$ MF // DE. (1)

ΔABF có DE là đường trung bình

$\Rightarrow$ AF // DE. (2)

Từ (1), (2) suy ra A, M, F thẳng hàng.

Vậy AF, CD, SE đồng quy tại M.



Hình 161

1.105. (h.162) Hạ CN ⊥ AM. Ta có

$\widehat{NMC} = \widehat{A_1} + \widehat{C_2} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 45^o$

⇒ ΔMNC vuông cân tại N, do đó MN = CN.

Mặt khác $\widehat{B_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^o$,

suy ra ΔABM vuông.

⇒ ΔABM = ΔCAN (cạnh huyền–góc nhọn)

⇒ MB = AN, MA = CN.

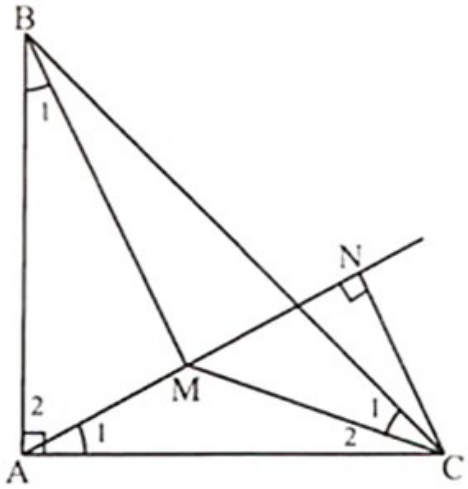
Vậy $MA = MN = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}MB$. (1)

ΔMNC vuông cân tại C nên ta có :

$MC = MN\sqrt{2} \Rightarrow MC = MA\sqrt{2}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra

$MA : MB : MC = 1 : 2 : \sqrt{2}$.

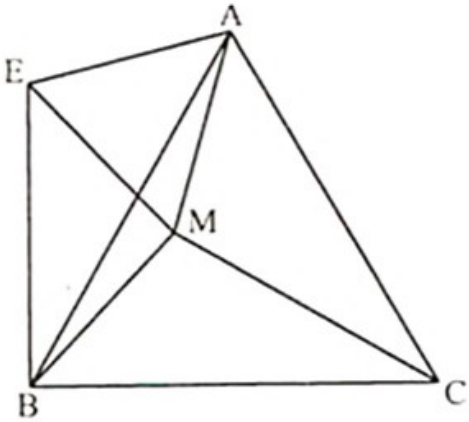


Hình 162

1.106. (h.163) Vẽ tam giác AME đều, với E khác phía C so với AM.

Ta chứng minh được ΔEAB = ΔMAC và ΔBME vuông tại M, từ đó suy ra

$\widehat{AMB} = 150^o$.



Hình 163

Chương II

2.1. (h.164) Gọi I là trung điểm của BE. Ta có NPRI là hình bình hành.

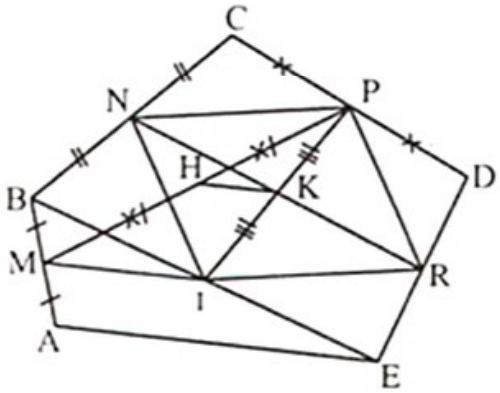
Suy ra K là trung điểm của PI

⇒ HK là đường trung bình của ΔPMI

⇒ HK // MI và $HK = \frac{1}{2}MI$. (1)

Mặt khác MI là đường trung bình của ΔABE, suy ra MI // AE ; $MI = \frac{1}{2}AE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra HK // AE và $HK = \frac{1}{4}AE$.

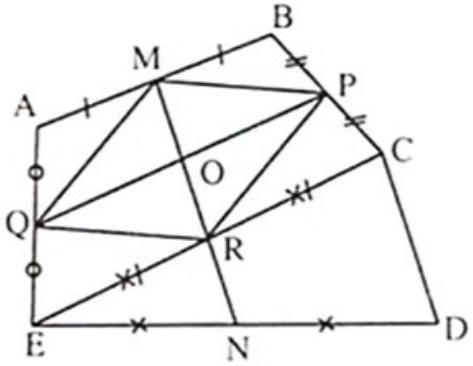


Hình 164

2.2. (h.1.65) Gọi R là trung điểm của CE. Khi đó NR là đường trung bình của ΔCDE và MPRQ là hình bình hành, suy ra MR đi qua trung điểm O của PQ hay M, O, R thẳng hàng.

• Giả sử MN // CD $\Rightarrow$ MN đi qua R nên cũng đi qua trung điểm PQ.

• Đảo lại, giả sử MN đi qua trung điểm PQ thì MN cũng qua R nên MN // CD.

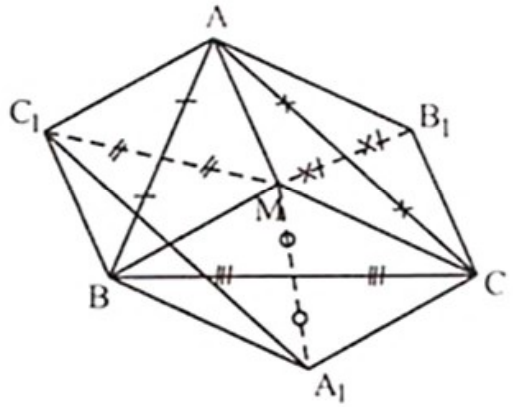


Hình 165

2.3. (h.1.66) a) Ta có $AMBC_1; BMCA_1$ là các hình bình hành.

$$AC_1 // BM ; AC_1 = BM ;$$
$$CA_1 // BM ; CA_1 = BM$$

Suy ra $AC_1 = CA_1; AC_1 // CA_1$, do đó AC_1A_1C là hình bình hành, suy ra AA_1 và CC_1 cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. (1)



Hình 166

Tương tự ta có AB_1A_1B là hình bình hành, suy ra AA_1 và BB_1 cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AA_1 ; BB_1 ; CC_1 đồng quy.

b) Theo tính chất hình bình hành, ta có :

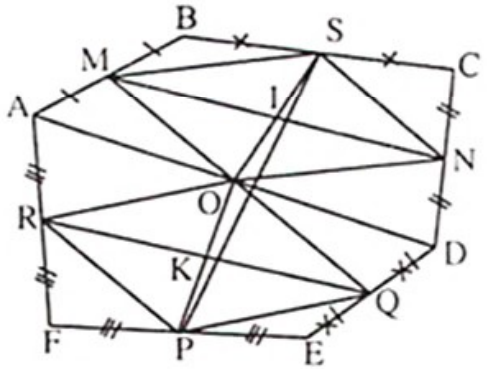
$$AC_1 = A_1C = MB ; AB_1 = A_1B = MC ; BC_1 = B_1C = AM.$$

Để hình lục giác $AB_1CA_1BC_1$ có các cạnh bằng nhau thì MB = MC = MA hay M là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

2.4. (h.167) • Gọi O là trung điểm của AD. Áp dụng tính chất đường trung bình trong ΔABC và ΔADC ta được : MS // ON và MS = ON

$\Rightarrow$ MSNO là hình bình hành

$\Rightarrow$ MN và SO cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.



Hình 167

Tương tự, tứ giác PROQ là hình bình hành, suy ra PO và RQ cắt nhau tại trung điểm K của mỗi đường.

Gọi G là giao điểm của SK và PI $\Rightarrow$ G là trọng tâm của ΔSOP nên :

$GS = \frac{2}{3}SK$; $GP = \frac{2}{3}PI$.

• ΔMNP có PI là đường trung tuyến mà $GP = \frac{2}{3}$ PI nên G là trọng tâm của ΔMNP.

• ΔRSQ có SK là đường trung tuyến mà $GS = \frac{2}{3}SK$ nên G là trọng tâm của ΔRSQ

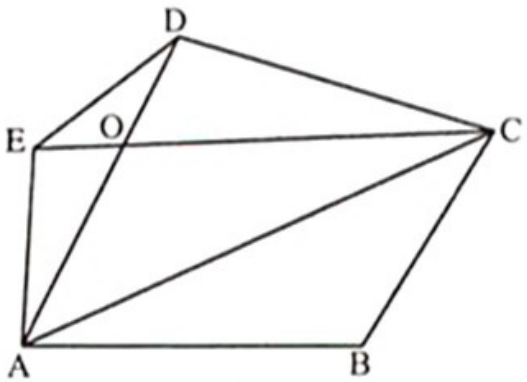
Vậy hai tam giác MNP và RSQ có cùng trọng tâm.

2.5. • Nhận xét ngũ giác đều và hình vuông thoả mãn điều kiện đề bài.

• Xét đa giác$A_1A_2...A_n$ với các đường chéo bằng nhau và $n \geq 6$. Khi đó $A_1A_4 = A_1A_5 = A_2A_4 = A_2A_5$. Nhưng trong tứ giác lồi $A_1A_2\ A_4A_5$ ta luôn có $A_1A_5 + A_2A_4 < A_1A_4 + A_2A_5$, mâu thuẫn.

Vậy đa giác có thể có nhiều nhất 5 cạnh.

2.6. (h.168) Giả sử AC là đường chéo lớn nhất của ngũ giác ABCDE, O là giao điểm của các đường chéo AD và CE. Ta có $AC < AO + OC < AD + CE$, suy ra AC, CE, AD là độ dài ba cạnh của một tam giác.



Hình 168

2.7. (h.169) • Tổng các góc trong của lục giác bằng 720°. Xét ba cặp góc $(\widehat{A};\widehat{B})$; $(\widehat{C};\widehat{D})$; $(\widehat{E};\widehat{F})$ tồn tại một cặp góc có tổng không lớn hơn 240°.

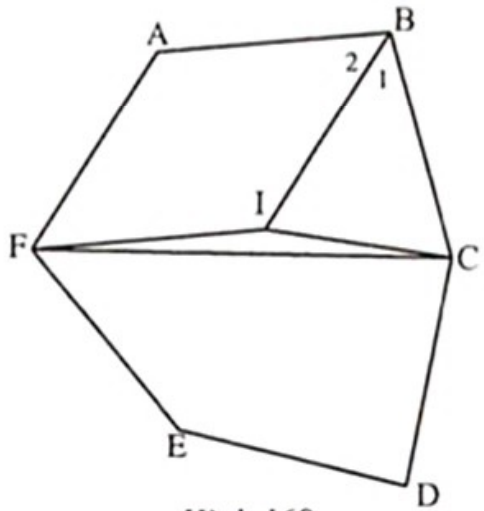
Giả sử $\widehat{A} + \widehat{B} \leq 240^o$. Dựng hình thoi ABIF, ta có

$\widehat{B_1} = \widehat{CBA} - \widehat{B_2} = \widehat{B} - (180^o - \widehat{A})$

$= \widehat{A} + \widehat{B} - 180^o \leq 240^o - 180^o \Rightarrow \widehat{B_1} \leq 60^o$

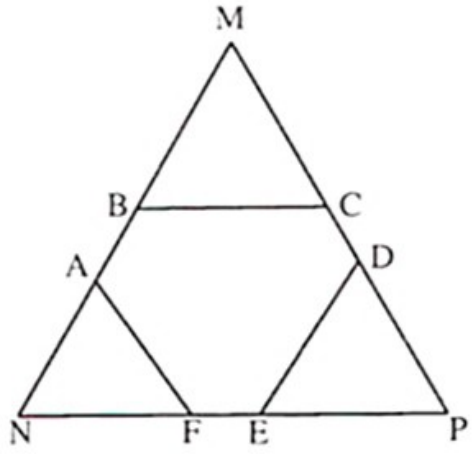
ΔIBC cân tại B có $\widehat{B_1} \leq 60^o \Rightarrow CI \leq BC = 1$

Xét ΔCIF có $CF \leq CI + IF \leq 1 + 1 = 2$.



Hình 169

2.8. (h.170) Giả sử có lục giác lồi ABCDEF có tất cả các góc bằng nhau. kéo dài ba cạnh không kề nhau của hình lục giác chúng tạo thành ΔMNP. Vì các góc của lục giác lồi bằng nhau nên suy ra ΔMBC, ΔDPE, ΔNAF đều và ΔMNP đều.



Hình 170

Ta có : $BC - EF = MB - (NP - NF - PE)$

$= MB - MN + NF + PE$

$= MB + AN - MN + DE$

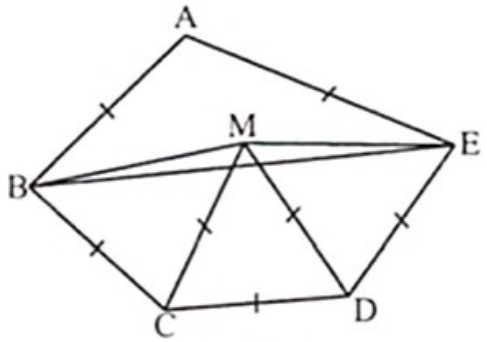
$= DE - AB.$

Tương tự : $BC - EF = AF - CD \Rightarrow BC - EF = AF - CD = DE - AB.$

2.9. (h.171) • Tổng các góc trong của ngũ giác lồi là : $(5 - 2).180^o = 540^o$.

Ngũ giác đã cho không thể có hai góc bé hơn hoặc bằng 90° vì ngược lại, nếu nó có hai góc như vậy thì tổng các góc trong nhỏ hơn $2.90^o + 3.120^o = 540^o$.

• Giả sử ABCDE có một góc nhọn, chẳng hạn $\widehat{B} < 90^o$.



Hình 171

Ta dựng ΔDCM đều nằm về phía ngũ giác. Khi đó BCM cân.

Vì $\widehat{C} < 120^o \Rightarrow \widehat{BCM} < 60^o$

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{BMC} > 60^o$.

Tương tự EDM cân.

Vì $\widehat{D} < 120^o \Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{DME} > 60^o \Rightarrow \widehat{BMC} + \widehat{EMD} > 120^o$. (1)

ΔABE cân, $\widehat{A} < 120^o \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AEB} > 30^o$

Ta có : $\widehat{B} < 90^o \Rightarrow \widehat{CBE} < 60^o$, mà $\widehat{CBM} > 60^o$

$\Rightarrow \widehat{CBM} > \widehat{CBE} \Rightarrow$ M và A thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ BE

$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DME} < 180^o$

mà $\widehat{CMD} = 60^o \Rightarrow \widehat{BMC} + \widehat{EMD} < 120^o$. (2)

Từ (1), (2) suy ra mâu thuẫn.

• Trường hợp góc $\widehat{B} = 90^o$ tương tự, không xảy ra.

Vậy tất cả các góc đều là góc tù.

2.10. Vì đa giác có 9 đỉnh nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau cùng màu.

Ta gọi đỉnh đó là A và B giả sử cùng tô màu xanh. Khi đó tồn tại một đỉnh thuộc đường trung trực của AB, giả sử là M.

• Nếu đỉnh M tô xanh $\Rightarrow \Delta ABM$ thoả mãn đề bài.

• Nếu M tô đỏ. Ta xét đỉnh C kề với A và F kề với B.

Nếu ít nhất đỉnh E hoặc F tô xanh thì ΔABE hoặc ΔABF có ba đỉnh tô xanh thoả mãn điều kiện.

Nếu E, F không tô xanh mà tô đỏ thì ΔMEF thoả mãn điều kiện đề bài.

2.11. Đặt đa giác đều 50 cạnh là $A_1A_2A_3...A_{50}$. Xét từ một đỉnh A_1 : Đường chéo ngắn nhất là A_1A_3, đường chéo dài nhất là A_1A_{26}.

Từ đó, có 24 loại độ dài khác nhau.

2.12. Ta thấy nếu một đa giác đều có đỉnh là các đỉnh của đa giác đều ban đầu thì số đỉnh của nó phải là một ước số lớn hơn 2 của 2015.

Vì 2015 = 5.13.31 nên sẽ có :

1 đa giác đều 2015 đỉnh
5 đa giác đều 403 đỉnh
13 đa giác đều 155 đỉnh
31 đa giác đều 65 đỉnh
65 đa giác đều 31 đỉnh
403 đa giác đều 5 đỉnh
155 đa giác đều 13 đỉnh

Vậy tổng số đa giác đều là : 1 + 5 + 13 + 31 + 65 + 403 + 155 = 673.

2.13. (h.172) Gọi M, N là giao điểm của d với BC và AD

Ta xét ΔCMI và ΔDNI có :

$\widehat{ICM} = \widehat{IDN}$; CI = ID ; $\widehat{CIM} = \widehat{DIN}$

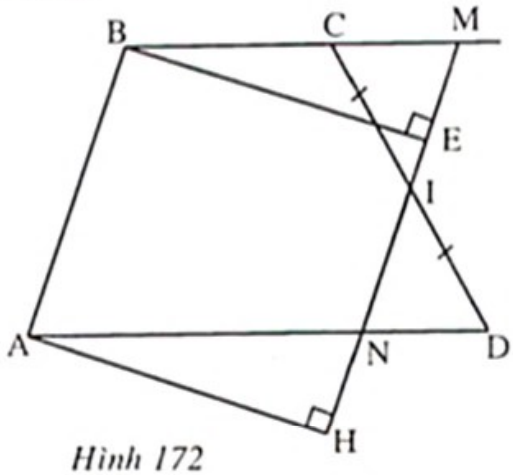
nên $\Delta CMI = \Delta DNI$ (c.g.c)

$\Rightarrow S_{CMI} = S_{DNI}$ do đó $S_{ABCD} = S_{ABMN}$ (1)

Mặt khác ABMN là hình bình hành nên :

$S_{ABMN} = AB.BE \Rightarrow S_{ABMN} = S_{ABEH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABCD} = S_{ABEH}$.



Hình 172

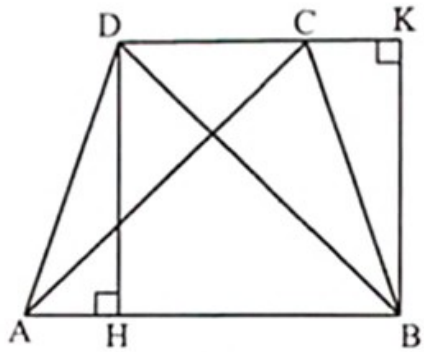
2.14. (h.173) Kẻ DH $\perp$ AB, BK $\perp$ CD.

Do AB// CD nên $\widehat{HDK} = 90^o$. Mà $\widehat{BDC} = 45^o$ suy ra DB là đường phân giác $\widehat{HDK}$, suy ra HBKD là hình vuông.

Mà $\Delta HAD = \Delta KCB$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow S_{HAD} = S_{KCB} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{BHDK}$.

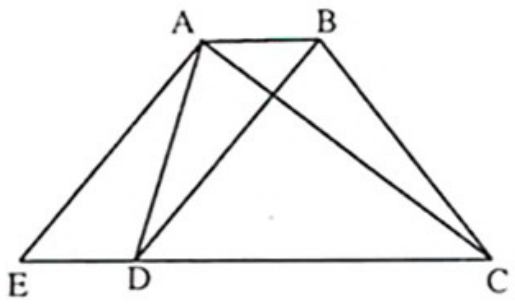
Mà $S_{BHDK} = BK^2 = \dfrac{BD^2}{2} = \dfrac{AC^2}{2} = 32\ (cm^2)$

Vậy $S_{ABCD} = 32\ (cm^2)$.



Hình 173

2.15. (h.174) Vẽ AE // BD, E ∈ CD, suy ra ABDE là hình bình hành, suy ra $AE = BD = 12\,(cm)$; $ED = AB = 5$ (cm).



Hình 174

Ta có : $AE^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$

$CE^2 = 20^2 = 400$ nên $AE^2 + AC^2 = CE^2$,

suy ra ΔACE vuông tại A

$\Rightarrow S_{ACE} = \frac{1}{2}AE.AC = 96\ (cm^2)$.

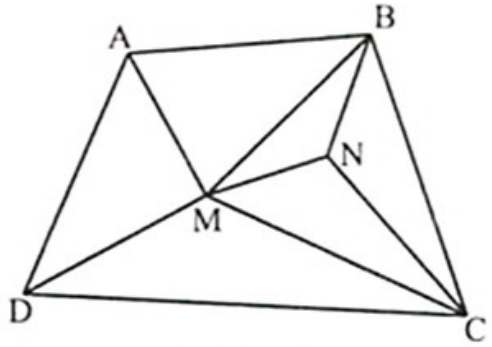
ΔADE và ΔABC có đường cao hạ từ A và từ C bằng nhau và DE = AB nên $S_{ADE} = S_{ABC}$.

Suy ra $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ADE} + S_{ACD} = 96\ (cm^2)$.

2.16. (h.175) *Cách 1 :*

• Với điểm thứ nhất M, nối với 4 đỉnh tứ giác, ta được 4 tam giác đôi một không có điểm trong chung.

• Điểm thứ hai N phải là điểm trong của một trong 4 tam giác chung đỉnh M. Nối N với ba đỉnh của tam giác, suy ra số tam giác tăng 2.



Hình 175

• Tương tự với hai điểm còn lại, với mỗi điểm thì số tam giác tăng hai. Vậy số tam giác không có điểm chung là : 4 + 2 + 2 + 2 = 10 tam giác. Tổng diện tích các tam giác đó bằng 1 ; nên có ít nhất một tam giác đó có diện tích không vượt quá $\frac{1}{10}$.

Cách 2 :

Nối các điểm tạo thành các tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh, phủ vừa kín tứ giác. Tổng các góc trong của các tam giác bằng tổng các góc trong của tứ giác cộng với 4 lần 360° nên bằng $360^o + 4.360^o = 10.180^o$.

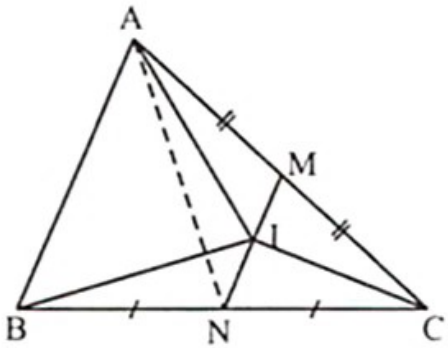
Vậy có 10 tam giác mà tổng diện tích là 1 nên tồn tại tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{10}$.

Nhận xét. Làm tương tự như trên, ta có bài toán tổng quát : Trong đa giác lồi n đỉnh ($n \geq 3$) có n điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng (trong 2n điểm) thì tồn tại một tam giác có ba đỉnh là ba điểm trong 2n điểm đã cho mà có diện tích không vượt quá $\frac{1}{3n-2}$.

2.17. • *Trường hợp 1* : I thuộc đoạn MN (h.176).

Ta có MN là đường trung bình của ABC nên MN// AB, ta có : $S_{AIB} = S_{ANB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Mà $S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC} = S_{ABC} \Rightarrow S_{AIB} = S_{AIC} + S_{BIC}$.



Hình 176

Trường hợp 2 : I không thuộc đoạn MN (h.177).

Xét I thuộc tia đối của tia MN.

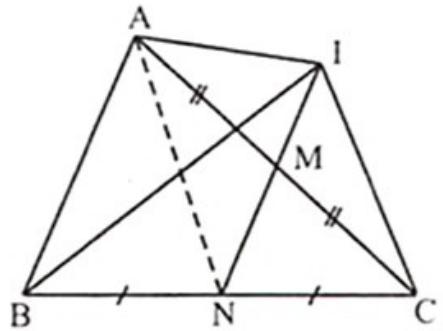
$$S_{AIB} = S_{ANB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Mà $S_{AIB} + S_{BIC} - S_{AIC} = S_{ABC}$

Suy ra : $S_{BIC} = S_{ABC} - S_{AIB} + S_{AIC} = S_{AIB} + S_{AIC}$

Với I thuộc tia đối của tia NM. Chứng minh tương tự ta có :

$$S_{AIC} = S_{AIB} + S_{BIC}.$$



Hình 177

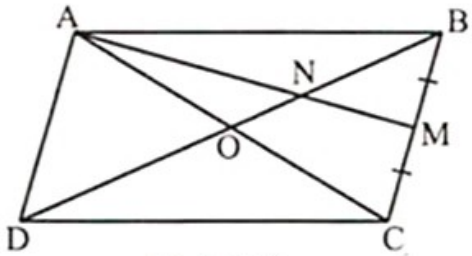
2.18. (h.178) Gọi O là giao điểm của AC và BD

$\Rightarrow$ N là trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow MN = \frac{1}{3} AM \Rightarrow S_{BMN} = \frac{1}{3}.S_{ABM}$. (1)

Mà MB = MC

$\Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. (2)



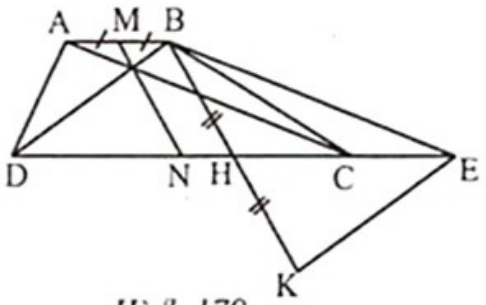
Hình 178

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_{BMN} = \frac{1}{12}.S$

Do đó $S_{MCDN} = S_{BCD} - S_{BMN} = \frac{S}{2} - \frac{S}{12} = \frac{5}{12}.S$.

2.19. (h.179) Giả sử hình thang ABCD có AC = 5cm, BD = 3 cm, MN = 2cm.

Kẻ BH // MN, BE // AC thì BH = 2cm, BE = 5cm và CE = AB.



Hình 179

Ta có :

$$EH = EN - HN = \frac{1}{2}CD + CE - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(CD + AB) = \frac{1}{2}ED$$

$\Rightarrow DH = HE$.

Trên tia đối của tia HB lấy K sao cho HK = BH.

Ta có $\Delta BHD = \Delta KHE$ (c.g.c) $\Rightarrow KE = BD = 3$ cm.

Dễ có $BK^2 + KE^2 = BE^2$ (= 25) suy ra ΔBEK vuông tại K nên

$$S_{BKE} = \frac{1}{2}BK.EK = 6 \text{ cm}^2.$$

Mặt khác : $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = S_{ABC} + S_{BDC}$

$= S_{EBC} + S_{BDC} = S_{BDE} = S_{BKE}$.

Vậy $S_{ABCD} = 6 \text{ cm}^2$.

2.20. (h.56) BE// DC nên $S_{EDC} = S_{BDC}$.

Tương tự, ta có 5 tam giác EDC, BDC, CBA, EBA, AED đều có diện tích bằng nhau và ta kí hiệu diện tích đó là a.

Từ các hình bình hành EDCY và XDCB suy ra EX = EY – XY = XB – XY = YB, do đó $S_{AEX} = S_{AYB}$.

Tương tự như vậy ta có 5 tam giác AEX, ABY, CBZ, DCV, EDW đều có diện tích bằng nhau và ta kí hiệu diện tích đó là b.

Từ đó ta suy ra 5 tam giác AXY, BYZ, CZV, DWV và EWX có diện tích bằng nhau và bằng a – 2b.

• Ta có $S_{DCW} = S_{DCZ} = a - b$ nên suy ra DC// WZ tức là XY// WZ, tương tự như vậy với các cặp cạnh khác, ta có XYZVW cũng là ngũ giác đặc biệt.

2.21. (h.180) Gọi E, F là hình chiếu của B và C xuống AM.

Gọi K là giao điểm của AM với BC.

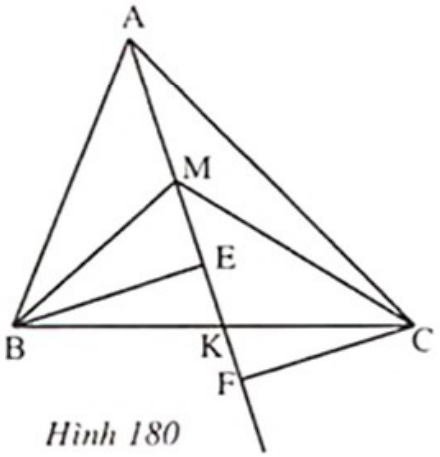
Ta có :

$AM.BC = AM.(BK + CK) \geq AM.(BE + CF)$

$\Rightarrow AM.BC \geq 2.(S_{ABM} + S_{ACM})$. (1)

Tương tự : $BM.CA \geq 2.(S_{BAM} + S_{BCM})$ (2)

$CM.AB \geq 2.(S_{CMA} + S_{BCM})$ (3)

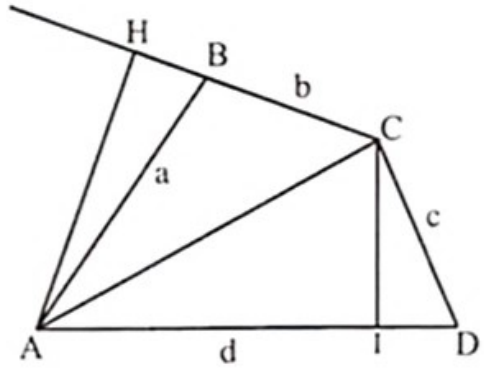


Hình 180

Từ (1), (2), (3) suy ra $AM.BC + BM.CA + CM.AB \geq 4.S_{ABC}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của AM. BC + BM. CA + CM. AB là $4.S_{ABC}$ khi M là trực tâm ΔABC.

2.22. (h.181) Vẽ AH $\perp$ BC, CI $\perp$ AD ta có :



Hình 181

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.\ AH = \frac{1}{2}b.\ AH \le \frac{1}{2}ab$

$S_{ACD} = \frac{1}{2}AD.\ CI = \frac{1}{2}d.\ CI \le \frac{1}{2}cd$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le \frac{1}{2}(ab + cd).$ (1)

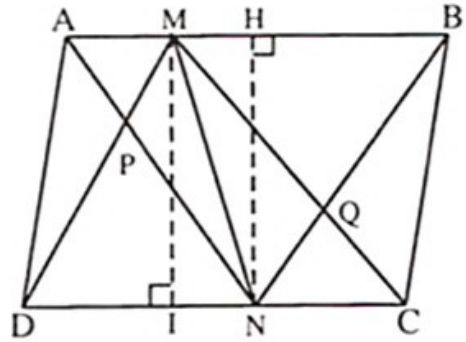
Tương tự, ta có : $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}(ad + bc)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_{ABCD} \le \frac{1}{4}(ab + cd + ad + bc) = \frac{1}{4}(a + c)(b + d).$

Ta có : $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}(ab + cd)$ mà $ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}$; $cd \le \frac{c^2 + d^2}{2}$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

2.23. (h.182) a) Vẽ MI $\perp$ CD ; NH $\perp$ AB



Hình 182

Ta có : $S_{ABN} = \frac{1}{2}AB.NH = \frac{1}{2}.S_{ABCD}$

$S_{MCD} = \frac{1}{2}.CD.MI = \frac{1}{2}.S_{ABCD}$

nên $S_{ABN} = S_{MCD}$,

hay $S_{APM} + S_{MBQ} + S_{MPNQ} = S_{DPN} + S_{CNQ} + S_{MPNQ}$.

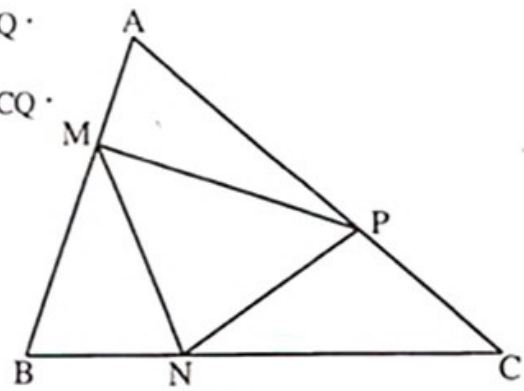
Vậy $S_{APM} + S_{MBQ} = S_{DPN} + S_{CNQ}$.

b) Ta có : AMND là hình thang nên : $S_{ADP} = S_{MPN}$.

Ta có BMNC là hình thang nên $S_{BCQ} = S_{MNQ}$.

Do đó $S_{MPNQ} = S_{MPN} + S_{MQN} = S_{ADP} + S_{BCQ}$.

2.24. (h.183) Từ $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA} = m$, ta có :



Hình 183

$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{AP}{AC} = 1 - m.$

Đặt diện tích ΔABC là S.

Áp dụng tính chất hai tam giác có chung đường cao, ta có :

$$\frac{S_{APM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AMP}}{S_{ABP}}.\frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = m.(1-m) \Rightarrow S_{AMP} = \left(m - m^2\right).S.$$

Tương tự $S_{BMN} = \left(m - m^2\right).S$, $S_{CNP} = \left(m - m^2\right).S$.

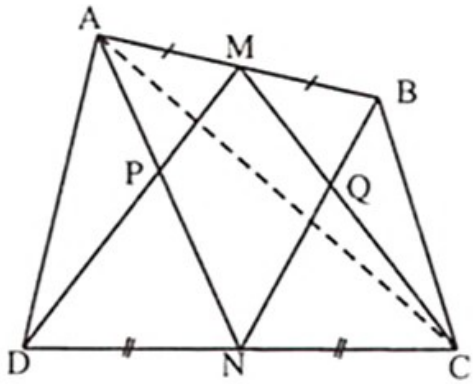
Do $S_{MNP} = S_{ABC} - S_{AMP} - S_{BMN} - S_{CNP}$

$$= S - 3\left(m - m^2\right).S = \left(3m^2 - 3m + 1\right).S$$

$$= \left[3\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right].S \geq \frac{1}{4}.S$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S_{MNP} là $\frac{1}{4}S$ khi $m = \frac{1}{2}$ tức là M, N, P là trung điểm AB, BC, CA.

2.25. • *Cách 1* (h.184a) :



a)

Ta có : $S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$; $S_{ANC} = \frac{1}{2}S_{ACD}$

$$\Rightarrow S_{AMCN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \qquad (1)$$

Tương tự : $S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{AMCN} + S_{BMDN} = S_{ABCD}$

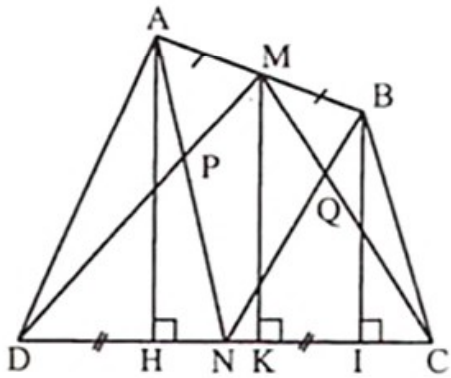
$\Leftrightarrow S_{AMP} + S_{MPNQ} + S_{CNQ} + S_{BMQ} + S_{MPNQ} + S_{DPN}$

$= S_{AMP} + S_{BMQ} + S_{BCQ} + S_{CNQ} + S_{MPNQ} + S_{DNP} + S_{APD}$.

Suy ra $S_{APD} + S_{BCQ} = S_{MPNQ}$.

• *Cách 2* (h.184b) :

Kẻ đường cao AH, BI, MK của các tam giác ADN, BCN, MCD ta có :



b)

Hình 184

$$S_{AND} = \frac{1}{2}DN.AH = \frac{1}{4}CD.AH$$

$$S_{BCN} = \frac{1}{2}CN.BI = \frac{1}{4}CD.BI$$

$$S_{MCD} = \frac{1}{2}CD.MK \qquad (3)$$

$$\Rightarrow S_{ADN} + S_{BCN} = \frac{1}{4}.CD.(AH + BI) \qquad (4)$$

Mà AIKB là hình thang vuông có MK là đường trung bình nên AH + BI = 2.MK, kết hợp với (3) ; (4), suy ra

$S_{MCD} = S_{ADN} + S_{BCN} \Rightarrow S_{ADP} + S_{BCQ} = S_{MPNQ}$.

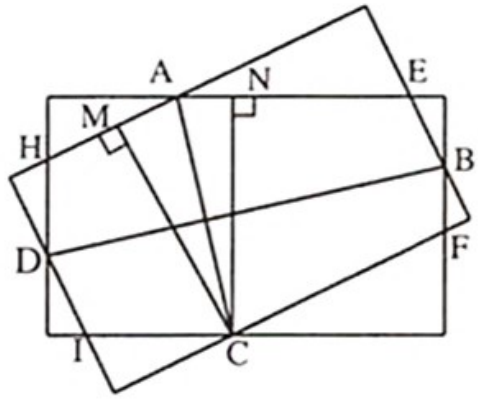
2.26. (h.185) Vẽ CM, CN $\Rightarrow$ CM = CN.

Suy ra AC là tia phân giác góc MAN và góc MCN.

Chứng minh tương tự ta có : BD là phân giác của $\widehat{EBF}$.

Dựa vào cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc, ta có : $\widehat{MAN} = \widehat{EBF}$ nên $\widehat{CAE} = \widehat{DBF}$

Từ đó suy ra AC $\perp$ BD



Hình 185

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$

$S_{AEBFCIDH} > S_{ABCD} = \frac{1}{2}.AC.BD > \frac{1}{2}.CN.BD > \frac{1}{2}ab.$

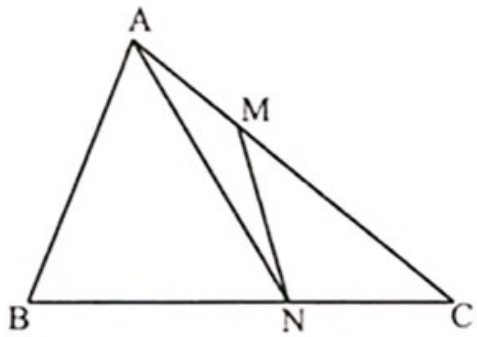
2.27. (h.186) Từ $AM = \frac{1}{3}AC$ nên $S_{MNC} = 2.\ S_{ANM}$.

Ta có $S_{AMNB} = 3.S_{CMN} = 3.2.S_{AMN}$

$= 6.S_{AMN}$.

Suy ra $S_{ANB} = 5.\ S_{AMN} = \frac{5}{3}S_{ANC}$, tức là

$BN = \frac{5}{3}NC$ hay $BN = \frac{5}{8}BC = 3{,}75$ (cm).



Hình 186

2.28. (h.187) Ta có $S_{PFH} - S_{PEG} = 2cm^2$, suy ra

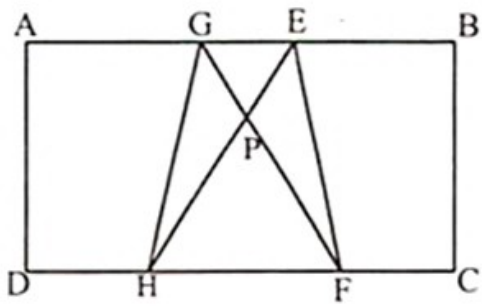
$(S_{PFH} + S_{PEF}) - (S_{PEG} + S_{PEF}) = 2$

hay $S_{EHF} - S_{FEG} = 2$, tức là

FH.AD – EG.AD = 4.

Suy ra $\frac{1}{3}AB.AD - \frac{1}{5}AB.AD = 4$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 30\ cm^2$.



Hình 187

2.29. (h.188) Áp dụng tỉ số diện tích chung đường cao ta có :

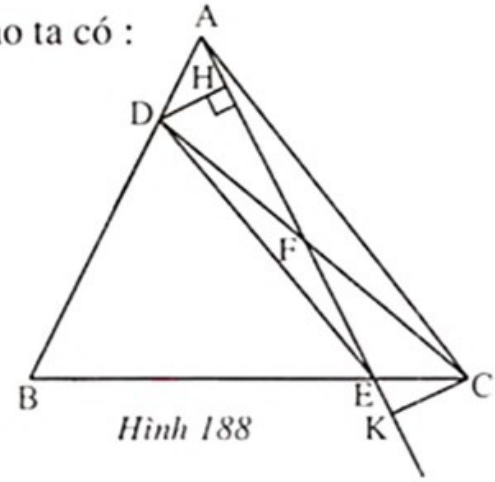
$\frac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \frac{EC}{EB} = \frac{1}{4}$; $\frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{AEC} = S_{ADE}$ mà ΔAEC ; ΔADE có chung cạnh AE.

Kẻ $DH \perp AE$; $CK \perp AE \Rightarrow DH = CK$

$\Rightarrow \Delta DHF = \Delta CKF$ (góc nhọn, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow FC = FD$.



Hình 188

2.30. (h.189) Đặt $AB = AC = BC = a$. Kẻ $AH \perp BC$; $OI \perp BC$; $OK \perp AB$; $OJ \perp AC$.

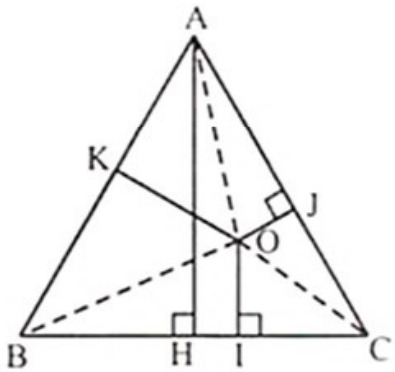
Ta có : $S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} = S_{ABC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.OI + \frac{1}{2}AC.OJ + \frac{1}{2}AB.OK = \frac{1}{2}AH.BC$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a.(OI + OJ + OK) = \frac{1}{2}a.AH$

$\Leftrightarrow OI + OJ + OK = AH$.

ΔABC cố định, suy ra AH không đổi, suy ra $OI + OJ + OK = AH$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.



Hình 189

Nhận xét : Vận dụng kỹ thuật trên, có thể giải được bài toán sau :

• Cho tam giác cân ABC (AB = AC) và điểm M di động trên đáy BC. Chứng minh rằng khi M di động thì tổng khoảng cách từ M tới hai cạnh bên không đổi.

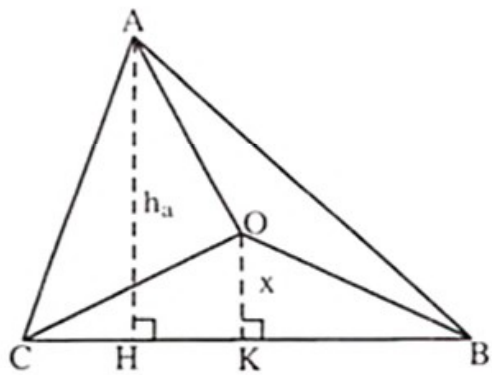
• Cho tam giác cân ABC (AB = AC) và điểm M di động trên tia đối của tia BC. Chứng minh rằng khi M di động thì hiệu khoảng cách từ M tới cạnh bên AB và AC không đổi.

• Cho tam giác ABC đều, điểm M tùy ý nằm ngoài tam giác và bên trong góc B. Gọi x, y, z là khoảng cách từ M đến AB, BC, CA. Chứng minh rằng $x + y - z$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

2.31. (h.190) Hai tam giác có chung một cạnh thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao ứng với cạnh đó, nên :

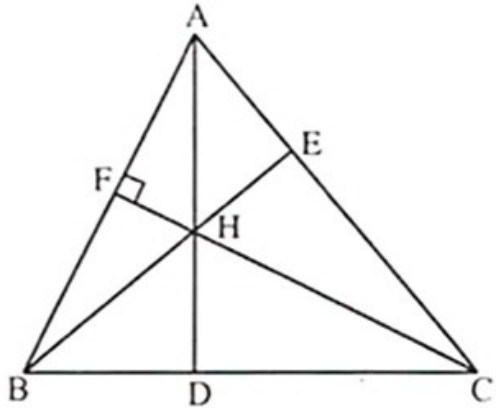
$\frac{x}{h_a} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$; $\frac{y}{h_b} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}$; $\frac{z}{h_c} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$.

Suy ra : $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = \frac{S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}}{S_{ABC}} = 1$.



Hình 190

2.32. (h.191) Áp dụng bài 2.31, trong trường hợp O trùng với H, ta có : $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1$.



Hình 191

Suy ra :

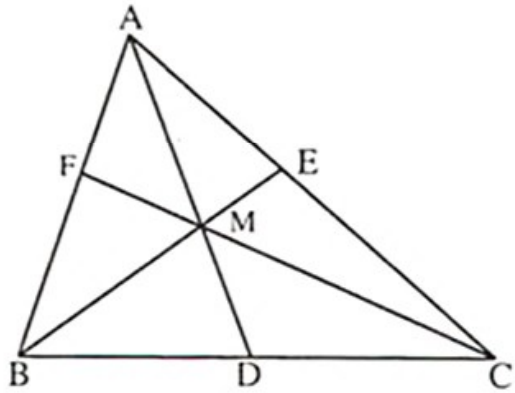
$$P=\frac{AH}{AD}+\frac{BH}{BE}+\frac{CH}{CF}$$

$$=\left(1-\frac{HD}{AD}\right)+\left(1-\frac{HE}{BE}\right)+\left(1-\frac{HF}{CF}\right)$$

$$=3-\left(\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}\right)=3-1=2.$$

2.33. (h.192) Đặt diện tích các tam giác ABM, ACM, BCM, ABC lần lượt là $S_1; S_2; S_3; S$.

Áp dụng tính chất tỉ số diện tích hai tam giác có chung đường cao bằng tỉ số hai đáy tương ứng.



Hình 192

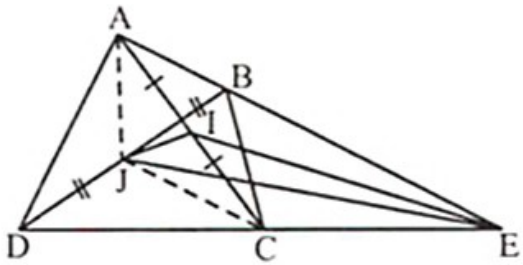
$$\frac{AM}{AD}=\frac{S_1}{S_{ABD}}=\frac{S_2}{S_{ACD}}=\frac{S_1+S_2}{S_{ABD}+S_{ACD}}=\frac{S_1+S_2}{S}$$

Tương tự, ta có : $\frac{BM}{BE}=\frac{S_1+S_3}{S}$; $\frac{CM}{CF}=\frac{S_2+S_3}{S}$

Suy ra $\frac{AM}{AD}+\frac{BM}{BE}+\frac{CM}{CF}=\frac{S_1+S_2+S_1+S_3+S_2+S_3}{S}=2$

2.34. *Bài toán phụ* : Cho tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E (h.193). Gọi I ; J là trung điểm hai đường chéo AC ; BD. Chứng minh :

$$S_{EIJ}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$



Hình 193

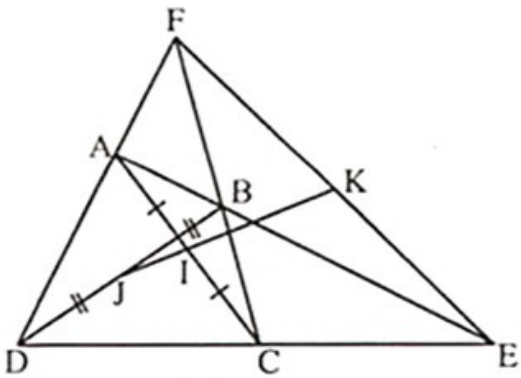
Ta có : $S_{EIJ}=S_{AEJ}-S_{AIJ}-S_{AIE}$

$\Rightarrow S_{EIJ}=S_{ABJ}+S_{BJE}-S_{AIJ}-S_{AIE}$

$=\frac{1}{2}(S_{ABD}+S_{BDE}-S_{AJC}-S_{ACE})$

$=\frac{1}{2}(S_{ADE}-S_{AJCE})=\frac{1}{2}(S_{AJD}+S_{BJC})$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$



Hình 194

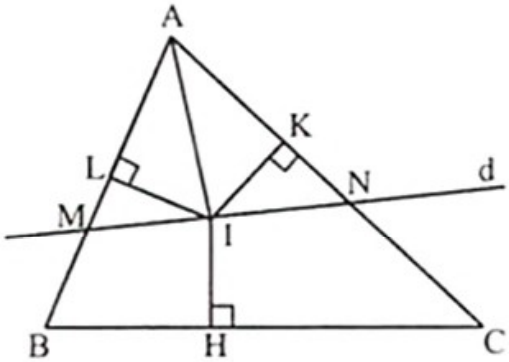
Trở lại bài toán (h.194) : Áp dụng bài toán phụ, ta có :

$$S_{EIJ} = \frac{1}{4} . S_{ABCD} ; S_{FIJ} = \frac{1}{4} . S_{ABCD} \Rightarrow S_{EIJ} = S_{FIJ}.$$

Suy ra E và F cách đều đường thẳng IJ mà E, F nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là đường thẳng IJ, suy ra IJ đi qua trung điểm K của EF.

Vậy I, J, K thẳng hàng.

2.35. (h.195) Không mất tính tổng quát giả sử d cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Giả sử đường phân giác của góc A cắt d tại I. Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB.



Hình 195

Đặt IH = x ; IK = IL = y.

Vì ΔAMN và tứ giác BMNC có cùng chu vi nên :

$$AM + AN + MN = BM + MN + NC + BC$$

Suy ra : $AM + AN = BM + CN + BC.$ (1)

Vì ΔAMN và tứ giác BMNC có cùng diện tích nên :

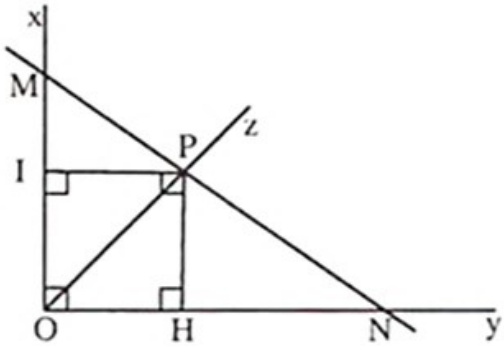
$$S_{AMI} + S_{ANI} = S_{IBM} + S_{ICN} + S_{IBC} \Rightarrow AM.y + AN.y = BM.y + CN.y + BC.x$$

$$\Rightarrow AM + AN = BM + CN + BC. \frac{x}{y} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y.$

Suy ra IH = IK = IL hay I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC.

2.36. (h.196) Kẻ PI ⊥ Ox, PH ⊥ Oy, ta có PI = PH và không đổi.



Hình 196

Ta có $S_{OPM} + S_{OPN} = S_{OMN}$, nên :

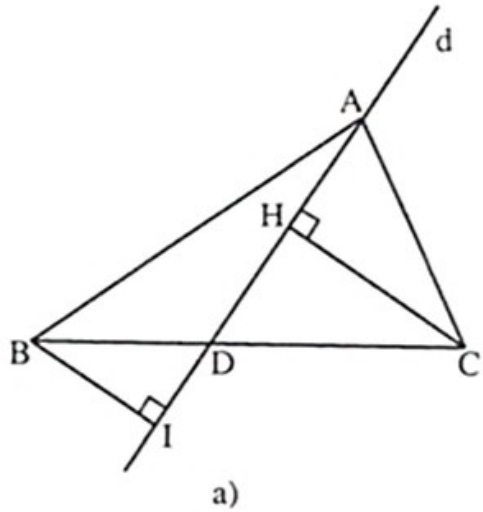
$$\frac{1}{2}OM.PI + \frac{1}{2}ON.PH = \frac{1}{2}OM.ON.$$

Chia hai vế cho $\frac{1}{2}OM.ON$, ta có :

$$\frac{PI}{ON} + \frac{PH}{OM} = 1.$$

Do PI = PH nên ta có

$$\frac{1}{ON} + \frac{1}{OM} = \frac{1}{PI} \text{ không đổi.}$$



Hình 197

2.37. Giả sử AB ≥ AC. Xét hai trường hợp :

Trường hợp 1 (h.197a). d cắt cạnh BC.

Ta có

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} = \frac{1}{2}(BI + CH)AD$$

nên BI + CH nhỏ nhất ⇔ AD lớn nhất.

Vậy nếu AB > AC thì d đi qua B.

Nếu AB = AC thì d đi qua B hoặc C.

Trường hợp 2 (h.197b). d không cắt cạnh BC.

Lấy B' đối xứng với B qua A. Giải tương tự trường hợp 1.

2.38. (h.198) Vẽ DM ⊥ AI ; DN ⊥ CK (M ∈ AI, N ∈ CK)

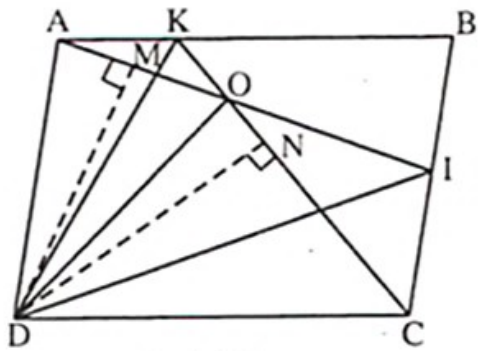
Ta có : $S_{DCK} = \frac{1}{2}.S_{ABCD}$

$$S_{ADI} = \frac{1}{2}.S_{ABCD},$$

nên $S_{DCK} = S_{ADI}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AI.DM = \frac{1}{2}.CK.DN$$

Mà AI = CK, suy ra DM = DN, suy ra D cách đều hai cạnh của $\widehat{AOC}$. Vậy OD là tia phân giác của $\widehat{AOC}$.



Hình 198

2.39. Giả sử $h_a \le h_b \le h_c$ thì $c \le b \le a$.

Mà $2.S = ax + by + cz \le ax + ay + az \Rightarrow x + y + z \ge \frac{2S}{a} = h_a$. (1)

$2.S = ax + by + cz \ge cx + cy + cz \Rightarrow x + y + z \le \frac{2S}{c} = h_c$. (2)

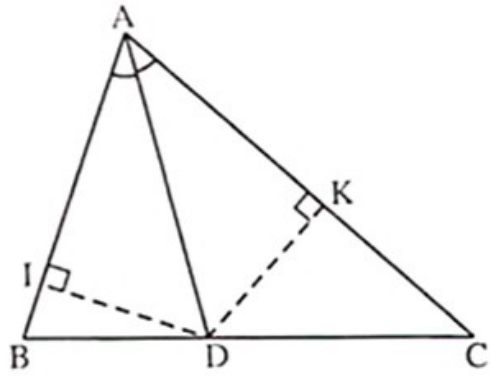
Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

2.40. (h.199) Hạ DI ⊥ AB ; DK ⊥ AC

$\Rightarrow DI = DK \Rightarrow \dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{AB}{AC}$.

Mà $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{BD}{DC}$.

Vậy $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$.



Hình 199

2.41. (h.200) Đặt diện tích các tam giác ABM, ACM, BCM lần lượt là $S_1; S_2; S_3$.

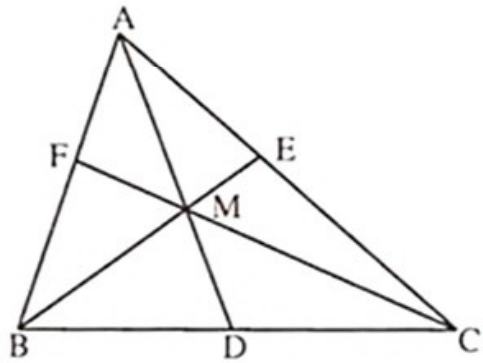
Áp dụng tính chất tỉ số diện tích hai tam giác có chung đường cao bằng tỉ số hai đáy tương ứng.

$$\frac{AF}{FB} = \frac{S_{ACF}}{S_{BCF}} = \frac{S_{AMF}}{S_{BMF}} = \frac{S_{ACF} - S_{AMF}}{S_{BCF} - S_{BMF}}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{S_2}{S_3}. \qquad (1)$$

Tương tự, ta có : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{S_1}{S_2}$; $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{S_3}{S_1}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\dfrac{AF}{FB}.\dfrac{BD}{DC}.\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{S_2}{S_3}.\dfrac{S_1}{S_2}.\dfrac{S_3}{S_1} = 1$.



Hình 200

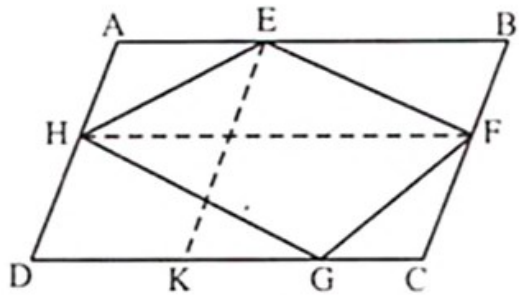
2.42. (h.201) Kẻ EK // AD (K ∈ CD)

$S_{EFKH} = S_{EFK} + S_{EKH} = \dfrac{1}{2}S_{EBK} + \dfrac{1}{2}S_{EKDA}$

$\Leftrightarrow S_{EFKH} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{EFKH} = S_{EFGH} \Leftrightarrow S_{GFH} = S_{KFH}$

$\Rightarrow$ HF // KG hay HF // CD.



Hình 201

2.43. (h.202) MB = MC nên

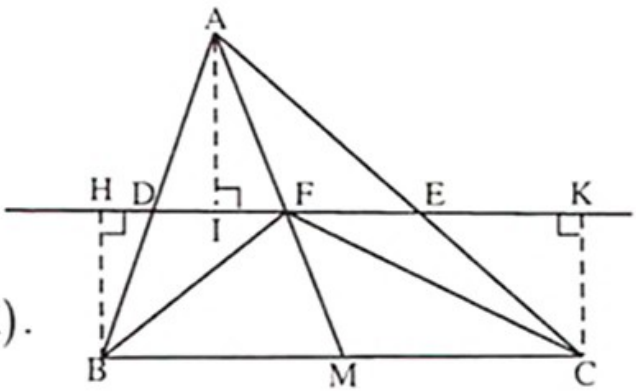
$S_{ABM} = S_{ACM}$; $S_{FBM} = S_{FCM}$

$\Rightarrow S_{ABF} = S_{ACF}$

$\Leftrightarrow S_{ADF} + S_{BDF} = S_{AEF} + S_{CEF}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}DF.(BH + AI) = \dfrac{1}{2}EF.(AI + CK)$.

Mà BH = CK, suy ra DF = EF.



Hình 202

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 1. Phép nhân các đa thức 5
Chuyên đề 2. Những hằng đẳng thức đáng nhớ 9
Chuyên đề 3. Phân tích đa thức thành nhân tử 17
Chuyên đề 4. Phép chia đa thức 22
Chuyên đề nâng cao 1. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng một số phương pháp khác 27
Chuyên đề nâng cao 2. Tính chất chia hết trên tập hợp số nguyên 36

Chương II. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 1. Tính chất cơ bản của phân thức 48
Chuyên đề 2. Phép cộng và phép trừ các phân thức đại số 53
Chuyên đề 3. Phép nhân và phép chia các phân thức đại số 59
Chuyên đề 4. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ 63
Chuyên đề nâng cao. Rút gọn biểu thức bằng phương pháp khử liên tiếp 69

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. TỨ GIÁC

Chuyên đề 1. Tứ giác. Hình thang 74
Chuyên đề 2. Đường trung bình của tam giác. Đường trung bình của hình thang 77
Chuyên đề 3. Dựng hình bằng thước và compa. Dựng hình thang 81
Chuyên đề 4. Hình thang cân. Đối xứng trục 85
Chuyên đề 5. Hình bình hành. Đối xứng tâm 89
Chuyên đề 6. Hình chữ nhật. Tính chất về khoảng cách giữa hai đường thẳng song song 94
Chuyên đề 7. Hình thoi và hình vuông 100
Chuyên đề nâng cao 1. Bài toán bất đẳng thức, cực trị với tứ giác 105
Chuyên đề nâng cao 2. Vẽ hình phụ để giải toán 108

Chương II. ĐA GIÁC - DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Chuyên đề 1. Đa giác. Đa giác đều 112
Chuyên đề 2. Diện tích đa giác 115
Chuyên đề 3. Phương pháp diện tích 120

Hướng dẫn giải - Đáp số 125
Phần Đại số 125
Phần Hình học 193

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập nội dung và sửa bản in :
HOÀNG VIỆT

Thiết kế sách :
ĐINH THỊ XUÂN DUNG

Trình bày bìa :
LƯU CHÍ ĐỒNG

Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN – CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 8 - TẬP MỘT

Mã số: T8T74H3-NBE

Số đăng kí KHXB: 59-2013/CXB/74-50/GD
In 3000 bản (QĐ in số: 19TK), khổ 17 x 24 cm,
In tại Công ty TNHH In & DVTM Phú Thịnh
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2013.