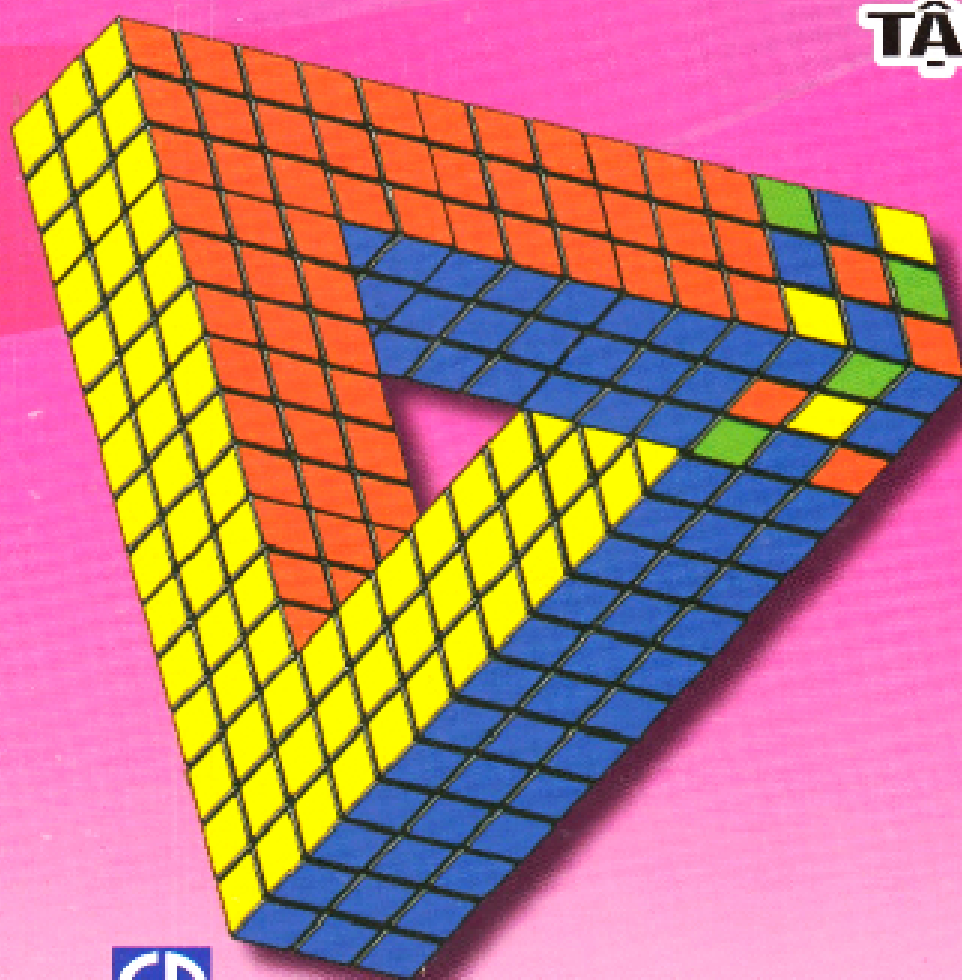


TÔN THÂN (Chủ biên)

NGUYỄN ANH HOÀNG - ĐẶNG VĂN QUẢN

CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 8

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TÔN THÂN (Chủ biên)
NGUYỄN ANH HOÀNG - ĐẶNG VĂN QUẢN

CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 8

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Phân công biên soạn :
Phần Đại số : Đặng Văn Quân
Phần Hình học : Nguyễn Anh Hoàng

LỜI NÓI ĐẦU

Để giúp các em học sinh học tập tốt môn Toán ở Trung học cơ sở (THCS) hiện nay và ở Trung học phổ thông (THPT) sau này, chúng tôi biên soạn bộ sách gồm 8 cuốn : "*Các chuyên đề chọn lọc Toán 6, 7, 8, 9 tập một và tập hai*".

Mỗi cuốn trong bộ sách có các chương tương ứng với các chương trong Sách giáo khoa Toán. Các chương đều được viết theo những chuyên đề (cơ bản và nâng cao) mà các tác giả cho rằng đó là những chuyên đề cần thiết cho việc học và hiểu sâu kiến thức của chương.

Mỗi chuyên đề gồm ba phần:

- A. *Kiến thức cần nhớ*: Phần này đưa ra những kiến thức cơ bản, những kiến thức bổ sung cần thiết để có thể giải được các bài tập, các dạng toán của chuyên đề.
- B. *Một số ví dụ*: Phần này trình bày những ví dụ chọn lọc minh hoạ cho những dạng toán điển hình của chuyên đề với cách trình bày lời giải chuẩn mực kèm theo những *nhận xét, lưu ý, bình luận*,... về phương pháp giải, về các sai lầm học sinh có thể mắc, về việc tìm tòi thêm các cách giải khác,.... Nhiều ví dụ ở phần này được trích trong các đề thi học sinh giỏi Toán ở THCS, trong các đề thi vào lớp 10 THPT chuyên.
- C. *Bài tập*: Phần này đưa ra hệ thống các bài tập được phân loại theo các dạng toán để học sinh dễ sử dụng. Hệ thống các bài tập này khá đa dạng, bao gồm các bài tập cơ bản và các bài tập nâng cao cho học sinh khá, giỏi. Nhiều bài được trích từ các đề thi học sinh giỏi Toán ở trong và ngoài nước. Mỗi cuốn sách đều cung cấp một số lượng lớn các bài tập với hướng dẫn giải khá chi tiết, minh hoạ cho phương pháp giải các dạng toán, các chuyên đề đã đề cập.

Cuối sách là phần *Hướng dẫn giải - Đáp số* cho các bài tập ở các chuyên đề. Qua những hướng dẫn giải cụ thể, học sinh sẽ nắm rõ hơn cách giải cho mỗi dạng toán.

Các kiến thức trong mỗi cuốn sách được sắp xếp từ dễ đến khó, được trình bày đơn giản, dễ hiểu, đáp ứng cho nhiều đối tượng học sinh.

Các tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã có nhiều kinh nghiệm trong việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở THCS, đó là các thầy cô giáo: PGS.TS. NGND Tôn Thân (Chủ biên bộ sách), NGƯT Bùi Văn Tuyên, NGƯT Nguyễn Ngọc Đạm, Ths. Nguyễn Đức Trường, Ths. Nguyễn Đức Tấn, Ths. Nguyễn Anh Hoàng, Ths. Đặng Văn Quân, Ths. Phạm Thị Lệ Hằng.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song bộ sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được thư góp ý của các em học sinh, các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh. Mọi ý kiến góp ý xin gửi về theo địa chỉ : *Ban Toán - Tin, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam – 187B Giảng Võ – Hà Nội.*

Hi vọng rằng, bộ sách sẽ là tài liệu tham khảo thiết thực, hữu ích đối với các em học sinh THCS, các thầy cô giáo dạy Toán và bạn đọc yêu thích Toán.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Mở đầu về phương trình

Phương trình một ẩn là phương trình có dạng $P(x) = Q(x)$ (x là ẩn), trong đó vế trái $P(x)$ và vế phải $Q(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x .

- Số x_0 gọi là *ng nghiệm* của phương trình nếu $P(x_0) = Q(x_0)$ là một đẳng thức đúng.
- Một phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ..., nhưng cũng có thể không có nghiệm nào (vô nghiệm). *Giải phương trình* là tìm tất cả các nghiệm (hoặc tìm *tập nghiệm*) của phương trình đó.
- Hai phương trình được gọi là *tương đương* nếu chúng có tập nghiệm bằng nhau (kể cả bằng tập rỗng). Quy tắc biến một phương trình thành một phương trình tương đương với nó được gọi là quy tắc *biến đổi tương đương*.

1.2. Phương trình bậc nhất một ẩn

a) *Định nghĩa*: Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là *phương trình bậc nhất một ẩn*.

b) *Hai quy tắc biến đổi tương đương*:

- Quy tắc chuyển vế: Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
- Quy tắc nhân với một số: Ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế của một phương trình với (cho) cùng một số khác 0.

c) *Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn*:

Ta có: $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ (quy tắc chuyển vế)

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \text{ (chia hai vế cho } a \neq 0 \text{).}$$

Vậy phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b = 0$ luôn có một nghiệm duy nhất là

$$x = -\frac{b}{a}.$$

2. Kiến thức Nâng cao

a) Phương trình có dạng bậc nhất một ẩn: $ax + b = 0$.

– Với $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -\frac{b}{a}$.

– Với $a = 0$, phương trình có dạng: $0x = -b$

- Nếu $b = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm.

- Nếu $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Với phương trình chứa tham số m , giải và biện luận phương trình là giải phương trình đó tùy theo các trường hợp về giá trị của m .

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Xét xem một số có là nghiệm của phương trình hay không

Ví dụ 1. Hãy xét xem $x = -3$ có phải là nghiệm của mỗi phương trình sau hay không?

a) $2x - 5 = -14 - x$;

b) $\frac{2}{3}x - 7 = -3x$;

c) $\frac{6}{x} - 5 = 2x + 1$;

d) $x^2 - 4 = 2x + 11$.

Giải

a) Thay $x = -3$ vào phương trình, ta được:

$$2.(-3) - 5 = -14 - (-3)$$

$$\Leftrightarrow -11 = -11: \text{ là một đẳng thức đúng.}$$

Vậy $x = -3$ là nghiệm của phương trình.

b) Thay $x = -3$ vào phương trình, ta được:

$$\frac{2}{3}.(-3) - 7 = -3.(-3)$$

$\Leftrightarrow -9 = 9$: là một đẳng thức sai.

Vậy $x = -3$ không là nghiệm của phương trình.

c) Thay $x = -3$ vào phương trình, ta được:

$$\frac{6}{-3} - 5 = 2 \cdot (-3) + 1$$

$\Leftrightarrow -7 = -5$: là một đẳng thức sai.

Vậy $x = -3$ không là nghiệm của phương trình.

d) Thay $x = -3$ vào phương trình, ta được:

$$(-3)^2 - 4 = 2 \cdot (-3) + 11$$

$\Leftrightarrow 5 = 5$: là một đẳng thức đúng.

Vậy $x = -3$ là nghiệm của phương trình.

Nhận xét:

Để xét xem một số có là nghiệm của phương trình hay không, ta thay số đó vào phương trình. Nếu kết quả là một đẳng thức đúng thì số đã cho là nghiệm; trái lại, số đã cho không phải là nghiệm.

Ví dụ 2. Tìm giá trị của m , biết rằng $x = 5$ là nghiệm của phương trình:

$$2x + m^2(x - 1) = 19.$$

Giải

Vì $x = 5$ là nghiệm của phương trình $2x + m^2(x - 1) = 19$, nên:

$$2 \cdot 5 + m^2(5 - 1) = 19$$

$$\Leftrightarrow 10 + 4 \cdot m^2 = 19$$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow m = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } m \in \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}.$$

Dạng 2. Giải phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3x-2}{5} = \frac{4-7x}{3};$

b) $2x(x-5)+21=x(2x+1)-12.$

Giải

$$\text{a) } \frac{3x-2}{5} = \frac{4-7x}{3} \Leftrightarrow 3(3x-2) = 5(4-7x)$$

$$\Leftrightarrow 9x - 6 = 20 - 35x$$

$$\Leftrightarrow 9x + 35x = 20 + 6$$

$$\Leftrightarrow 44x = 26$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{22}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{13}{22}$.

$$\text{b) } 2x(x-5) + 21 = x(2x+1) - 12$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 21 = 2x^2 + x - 12$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x - 2x^2 - x = -12 - 21$$

$$\Leftrightarrow -11x = -33$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{3\}$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{x+98}{2} + \frac{x+96}{4} + \frac{x+65}{35} = \frac{x+3}{97} + \frac{x+5}{95} + \frac{x+49}{51};$$

$$\text{b) } \frac{x-91}{37} + \frac{x-86}{42} + \frac{x-78}{50} + \frac{x-49}{79} = 4.$$

Nhận xét:

Nếu thực hiện phép quy đồng mẫu số thì ta thấy phép tính khá cồng kềnh và số lớn. Nếu quan sát quy luật của các cặp số ở tử và mẫu của các phân số thì ta thấy như sau:

– Ở câu a), tổng của số trên tử và số dưới mẫu của các phân số bằng nhau:

$$98 + 2 = 96 + 4 = 65 + 35 = 3 + 97 = 5 + 95 = 49 + 51.$$

– Ở câu b), hiệu của số trên tử và số dưới mẫu của các phân số bằng nhau:

$$-91 - 37 = -86 - 42 = -78 - 50 = -49 - 79.$$

Để khai thác quy luật này, ta cộng thêm 1 vào mỗi phân số ở câu a) và trừ mỗi phân số ở câu b) đi 1 đơn vị.

Giải

a) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x+98}{2} + 1 \right) + \left(\frac{x+96}{4} + 1 \right) + \left(\frac{x+65}{35} + 1 \right) = \\ & = \left(\frac{x+3}{97} + 1 \right) + \left(\frac{x+5}{95} + 1 \right) + \left(\frac{x+49}{51} + 1 \right) \\ & \Leftrightarrow \frac{x+100}{2} + \frac{x+100}{4} + \frac{x+100}{35} = \frac{x+100}{97} + \frac{x+100}{95} + \frac{x+100}{51} \\ & \Leftrightarrow (x+100) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{35} - \frac{1}{97} - \frac{1}{95} - \frac{1}{51} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow x + 100 = 0 \\ & \Leftrightarrow x = -100. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-100\}$.

b) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-91}{37} - 1 \right) + \left(\frac{x-86}{42} - 1 \right) + \left(\frac{x-78}{50} - 1 \right) + \left(\frac{x-49}{79} - 1 \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x-128}{37} + \frac{x-128}{42} + \frac{x-128}{50} + \frac{x-128}{79} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-128) \cdot \left(\frac{1}{37} + \frac{1}{42} + \frac{1}{50} + \frac{1}{79} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow x - 128 = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 128. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 128$.

Dạng 3. Xét xem hai phương trình có tương đương hay không

Ví dụ 5. Hai phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

a) $2x = 6$ và $(x-3)(x^2+1) = 0$;

b) $x^2 - 4 = 0$ và $x + 2 = 0$.

Giải

a) Phương trình $2x = 6$ có tập nghiệm là $S_1 = \{3\}$.

Phương trình $(x-3)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$, nên có tập nghiệm

là $S_2 = \{3\}$.

Vì $S_1 = S_2$ nên hai phương trình đã cho là tương đương.

b) Ta có: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm là $S_3 = \{-2; 2\}$.

Phương trình $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$, có tập nghiệm là $S_4 = \{-2\}$.

Vì $S_3 \neq S_4$ nên hai phương trình đã cho không tương đương.

Nhận xét:

Ở câu b) ta có thể giải thích như sau: Vì $x=2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ (do $2^2 - 4 = 0$) nhưng không là nghiệm của phương trình $x+2=0$ (do $2+2 \neq 0$), nên hai phương trình không tương đương.

Ví dụ 6. Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$x - m = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad mx - 9 = 0 \quad (2)$$

Giải

Phương trình (1): $x - m = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = m$. Vì hai phương trình tương đương nên $x = m$ cũng là nghiệm của phương trình (2), tức là: $m \cdot m = 9 \Leftrightarrow m^2 = 3^2 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Thử lại:

- Với $m = 3$, ta có phương trình (1): $x - 3 = 0$ và phương trình (2): $3x - 9 = 0$ có cùng tập nghiệm là $\{3\}$. Vậy $m = 3$ thỏa mãn.
- Với $m = -3$, ta có phương trình (1): $x + 3 = 0$ và phương trình (2): $(-3)x - 9 = 0$ có cùng tập nghiệm là $\{-3\}$. Vậy $m = -3$ thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu là -3 và 3 .

Nhận xét:

Lời giải trên dựa vào tính chất: Hai phương trình tương đương khi và chỉ khi mọi nghiệm của phương trình này cũng là nghiệm của phương trình kia. Ngoài cách làm này ta có thể giải thích như sau:

Vì (2) là phương trình có dạng bậc nhất nên để (2) tương đương với (1), tức là có một nghiệm duy nhất bằng m , thì (2) phải là phương trình bậc nhất ($m \neq 0$)

và có nghiệm $x = m$. Ưu điểm của cách này là chúng ta không phải thử lại các giá trị của m mà chỉ cần kiểm tra điều kiện $m \neq 0$.

Dạng 4. Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$

Ví dụ 7. Giải và biện luận phương trình: $(m - 3)x = m^2 - 3m$.

Giải

Ta có: $(m - 3)x = m^2 - 3m \Leftrightarrow (m - 3)x = m(m - 3)$.

+ Nếu $m - 3 \neq 0$, tức $m \neq 3$, thì phương trình có nghiệm duy nhất là:

$$x = \frac{m(m - 3)}{m - 3} = m.$$

+ Nếu $m - 3 = 0$ tức $m = 3$, thì ta có phương trình: $0.x = 0$, đúng với mọi x .

Vậy, nếu $m \neq 3$ thì phương trình có tập nghiệm là $\{m\}$;

nếu $m = 3$ thì phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 8. Cho phương trình $m(m - 1)x = m^2 + 3m + 2(x + 1)$. (1)

Tìm m để phương trình (1):

a) Có nghiệm duy nhất.

b) Vô nghiệm.

Giải

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (m^2 - m)x - 2x = m^2 + 3m + 2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x = m^2 + 3m + 2$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(m - 2)x = (m + 1)(m + 2).$$

a) Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$(m + 1)(m - 2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq -1 \text{ và } m \neq 2.$$

b) Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (m + 1)(m - 2) = 0 \\ (m + 1)(m + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Nhận xét: Phương pháp giải bài toán tìm m để phương trình thỏa mãn điều kiện về số nghiệm:

- Biến đổi đưa về phương trình về dạng bậc nhất: $ax + b = 0$ (*)
- Áp dụng một trong các kết quả sau:
- Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$.
- Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$
- Phương trình (*) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

C. BÀI TẬP

3.1. Xét xem $x = 4$ có là nghiệm của mỗi phương trình sau hay không?

a) $2(3x - 1) - 7 = 15 - (x - 4)$;

b) $x(3 - 4x) - 5 = 1 - x^3$.

3.2. Tìm m để $x = 1,5$ là nghiệm của phương trình:

$$m^2(2x - 3) - 4x + m = 5.$$

3.3. Chứng minh rằng phương trình: $2mx - 5 = -x + 6m - 2$ luôn có một nghiệm x không phụ thuộc vào m .

3.4. Giải các phương trình sau:

a) $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$;

b) $3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300$.

3.5. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3x+2}{2} - \frac{3x+1}{6} = 2x + \frac{5}{3}$;

b) $x - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} = 7 + \frac{x-1}{3}$;

c) $\frac{5x+2}{6} - \frac{8x-1}{3} = \frac{4x+2}{5} - 5$.

3.6. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{7} + \frac{x+4}{4} + 6 = 0$;

$$b) \frac{x+14}{200} + \frac{x+27}{187} + \frac{x+105}{109} = \frac{x+200}{14} + \frac{x+187}{27} + \frac{x+109}{105};$$

$$c) \frac{x-342}{15} + \frac{x-323}{17} + \frac{x-300}{19} + \frac{x-273}{21} = 10.$$

3.7. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x+97}{125} + \frac{x-63}{35} = \frac{x-7}{21} + \frac{x-77}{49};$$

$$b) \frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} = \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9}.$$

3.8. Giải phương trình:

$$\frac{x}{2000} + \frac{x+2}{2002} + \frac{x+4}{2004} + \dots + \frac{x+12}{2012} = 7.$$

3.9. Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$2x+3=0 \text{ và } (2x+3)(mx-1)=0.$$

3.10. Giải và biện luận các phương trình sau:

$$a) (1-m)x = m^2 - 1;$$

$$b) (m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 9.$$

3.11. Cho phương trình $(4m^2 - 25)x - 5 = 2m$.

a) Giải phương trình với $m = 5$.

b) Tìm m để phương trình vô nghiệm.

3.12. Cho phương trình $(4m^2 - 9)x = 2m^2 + m - 3$. Tìm m để phương trình:

a) Có nghiệm duy nhất.

b) Có vô số nghiệm.

3.13. Giải phương trình ẩn x sau:

$$\frac{a+b-x}{c} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{c+a-x}{b} + \frac{4x}{a+b+c} = 1.$$

3.14. Giải phương trình ẩn x sau:

$$\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}.$$

Chuyên đề 2

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Phương trình tích là phương trình có dạng: $A(x).B(x)...C(x) = 0$ (1)
- Để giải phương trình (1) ta giải các phương trình $A(x) = 0$; $B(x) = 0$; ...; $C(x) = 0$, rồi lấy hợp tất cả các nghiệm của chúng.

Trong Chuyên đề này ta thường vận dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Giải phương trình tích

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau:

- a) $(2x - 7)(4 - 5x) = 0$;
- b) $8x(3x - 5) = 6(3x - 5)$.

Giải

$$\text{a) } (2x - 7)(4 - 5x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 = 0 \\ 4 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{7}{2}; \frac{4}{5} \right\}$.

$$\text{b) } 8x(3x - 5) = 6(3x - 5) \Leftrightarrow 8x(3x - 5) - 6(3x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 5)(8x - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 0 \\ 8x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{5}{3}; \frac{3}{4} \right\}$.

Lưu ý: Không được chia hai vế của phương trình cho $3x - 5$, vì như vậy sẽ làm mất nghiệm $x = \frac{5}{3}$ của phương trình. Nếu muốn chia ta phải xét trường hợp $3x - 5 = 0$ trước.

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 9 = 49$;

b) $(x^2 + 3x + 2)^2 = (x^2 - x - 2)^2$.

Giải

a) $x^2 - 6x + 9 = 49 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 7^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 - 7^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3 - 7)(x - 3 + 7) = 0 \Leftrightarrow (x - 10)(x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-4; 10\}$.

b) $(x^2 + 3x + 2)^2 = (x^2 - x - 2)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)^2 - (x^2 - x - 2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [(x^2 + 3x + 2) - (x^2 - x - 2)][(x^2 + 3x + 2) + (x^2 - x - 2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 4)(2x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow 8x(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-1; 0\}$.

Nhận xét:

Có thể giải các phương trình trên theo biến đổi sau:

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b.$$

Dạng 2. Giải phương trình đa thức bậc cao quy về phương trình tích

Ví dụ 11. Giải các phương trình sau:

a) $(12x^2 - 3)(x + 3) + (2x^2 + 7x + 3)(x - 3) = 0$;

b) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

Giải

a) Ta có phương trình tương đương:

$$3(2x-1)(2x+1)(x+3) + (2x+1)(x+3)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x+3)[3(2x-1) + (x-3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x+3)(7x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -3 \\ x = \frac{6}{7} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{1}{2}; -3; \frac{6}{7}\right\}$.

$$\text{b) } x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 8x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 2x(x-1) - 8(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-2; 1; 4\}$.

$$\text{Ví dụ 12. Giải phương trình } 64x^3 = (x-2)^3 + (3x+2)^3. \quad (1)$$

Giải

Phương trình (1) tương đương với

$$(4x)^3 = [(x-2) + (3x+2)][(x-2)^2 - (x-2)(3x+2) + (3x+2)^2]$$

$$\Leftrightarrow (4x)^3 = 4x(7x^2 + 12x + 12) \Leftrightarrow 4x[(4x)^2 - (7x^2 + 12x + 12)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(9x^2 - 12x - 12) = 0 \Leftrightarrow 12x(3x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{0; -\frac{2}{3}; 2\right\}$.

Nhận xét:

Vì $(x-2) + (3x+2) = 4x$, nên phương trình có dạng:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3.$$

Áp dụng hằng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, ta suy ra:

$3ab(a+b) = 0$, tức là: $3(x-2)(3x+2)(4x) = 0$. Thật nhanh gọn !

Dạng 3. Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt ẩn phụ là phương pháp dùng một ẩn mới (sau gọi là *ẩn phụ*) thay cho một biểu thức của ẩn cũ. Giải bài toán bằng phương pháp đặt ẩn phụ thường có các bước sau:

- Biến đổi phương trình để làm xuất hiện các nhóm hạng tử chứa ẩn giống nhau.
- Đặt nhóm hạng tử giống nhau bằng ẩn mới. Thay vào phương trình đã cho ta được một phương trình theo ẩn mới (đơn giản hơn phương trình ban đầu hoặc đã biết cách giải).
- Giải phương trình theo ẩn mới.
- Với mỗi giá trị tìm được của ẩn mới, thay vào biểu thức đặt ẩn ta tìm được các giá trị tương ứng của ẩn ban đầu.

Ví dụ 13. Giải phương trình $(x-1)(x+2)(x-6)(x-3) = 34$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ngữ, ĐHNN-ĐHQG HN, 2000)

Giải

Ta có phương trình:

$$[(x-1)(x-3)][(x+2)(x-6)] = 34$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x - 12) = 34$$

Đặt $t = x^2 - 4x + 3$, ta có: $t(t-15) = 34$

$$\Leftrightarrow t^2 - 15t - 34 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-17) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 17 \end{cases}$$

- Với $t = -2$, ta có: $x^2 - 4x + 3 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = -1$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = -1: \text{ vô nghiệm.}$$

– Với $t = 17$, ta có: $x^2 - 4x + 3 = 17 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 18$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 18 \Leftrightarrow x - 2 = \pm \sqrt{18} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{18}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{2 - \sqrt{18}; 2 + \sqrt{18}\}$.

Nhận xét:

Có thể áp dụng phương pháp trên để giải phương trình tổng quát sau đây:

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e, \text{ với } a + b = c + d.$$

Ví dụ 14. Giải phương trình

$$(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 2x^2.$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ngữ, ĐHNN-ĐHQG HN, 2005)

Giải

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, nên chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x} \cdot \frac{x^2 - 2x + 3}{x} = 2$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{x} - 3\right) \left(x + \frac{3}{x} - 2\right) = 2.$$

Đặt $t = x + \frac{3}{x} - 3$, ta có:

$$t(t + 1) = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

– Với $t = 1$, ta có: $x + \frac{3}{x} - 3 = 1$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

– Với $t = -2$, ta có: $x + \frac{3}{x} - 3 = -2$

$$\Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{1; 3\}$.

Nhận xét:

Có thể áp dụng phương pháp trên để giải phương trình tổng quát sau đây:

$$(x^2 + ax + c)(x^2 + bx + c) = dx^2, \text{ với } a, b, c, d \text{ là các số đã cho.}$$

Ví dụ 15. Giải phương trình $(6-x)^4 + (x-8)^4 = 16$. (1)

Giải

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x-7+1)^4 + (x-7-1)^4 = 16$$

$$\text{Đặt } t = x - 7, \text{ ta có } (t+1)^4 + (t-1)^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow (t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1) + (t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1) = 16$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 16$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

– Với $t = 1$, ta có $x - 7 = 1 \Leftrightarrow x = 8$.

– Với $t = -1$, ta có $x - 7 = -1 \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{6; 8\}$.

C. BÀI TẬP

3.15. Giải các phương trình sau:

a) $(x-6)(2x-5)(3x+9) = 0$;

b) $2x(x-3) + 5(x-3) = 0$;

c) $(x^2-4) - (x-2)(3-2x) = 0$.

3.16. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x = -7$:

$$(2m-5)x - 2m^2 + 8 = 43.$$

3.17. Giải các phương trình sau:

a) $(2x-1)^2 - (2x+1)^2 = 0$;

b) $\frac{1}{27}(x-3)^3 - \frac{1}{125}(x-5)^3 = 0$.

3.18. Giải các phương trình sau:

a) $125x^3 - (2x+1)^3 - (3x-1)^3 = 0$;

b) $(x-3)^3 + (x+1)^3 = 8(x-1)^3$.

3.19. Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$;

b) $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$.

3.20. Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = 0$;

b) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 15x + 56) + 8 = 0$.

3.21. Giải phương trình sau:

$$(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) - 9x^2 = 0.$$

3.22. Giải các phương trình sau:

a) $(x+6)^4 + (x+8)^4 = 272$;

b) $(5-x)^4 + (2-x)^4 = 17$.

3.23. Giải phương trình

$$x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2.$$

3.24. Giải phương trình

$$5x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0.$$

(Để thi vào lớp 10 chuyên ngữ, ĐHNN-ĐHQG HN, 2005)

3.25. Giải phương trình

$$(x^2 + 11x + 12)(x^2 + 9x + 20)(x^2 + 13x + 42) = 36(x^2 + 11x + 30)(x^2 + 11x + 31).$$

Chuyên đề 3

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

- *Bước 1*: Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình.
- *Bước 2*: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.
- *Bước 3*: Giải phương trình vừa nhận được.
- *Bước 4: (Kiểm tra và kết luận)* Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn ĐKXĐ chính là nghiệm của phương trình đã cho.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu bằng phương pháp biến đổi tương đương

Ví dụ 16. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0;$

b) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{5x-2}{4-x^2}.$

Giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq 2$.

Khi đó: $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x(x-2)} + \frac{2x}{x(x-2)} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2) + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}: \text{thỏa mãn ĐKXĐ.}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{2}{3}.$

b) ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó: } \frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} &= \frac{5x-2}{4-x^2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} + \frac{5x-2}{x^2-4} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x-2) - x(x+2) + (5x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - x^2 - 2x + 5x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với ĐKXD ta có phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \pm 2$.

Chú ý:

Khi khử mẫu ta thu được một phương trình mà tập nghiệm của nó có thể chứa tập nghiệm ban đầu.

Chẳng hạn: Khử mẫu của phương trình $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, ta được: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$,

tức là có tập nghiệm $\{-1; 1\}$. Trong khi đó tập nghiệm của phương trình ban đầu chỉ là $\{-1\}$.

Vì thế, khử mẫu không phải là phép biến đổi tương đương, ta sử dụng kí hiệu " $\Rightarrow$ " cho phép biến đổi này. Phương trình thu được gọi là *phương trình hệ quả*.

Ví dụ 17. Giải phương trình

$$1 + \frac{1}{2+x} = \frac{12}{x^3+8}.$$

Giải

ĐKXD: $x \neq -2$.

$$\text{Khi đó: } 1 + \frac{1}{2+x} = \frac{12}{x^3+8}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{x^3+8}{(x+2)(x^2-2x+4)} + \frac{x^2-2x+4}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)} \\
&\Leftrightarrow x^3+8+x^2-2x+4 = 12 \\
&\Leftrightarrow x^3+x^2-2x = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Kết hợp với ĐKXĐ ta có tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 1\}$.

Ví dụ 18. Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+12x+35} + \frac{1}{x^2+16x+63} = \frac{1}{5}.$$

Giải

Phân tích các mẫu thành nhân tử, ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+7)} + \frac{1}{(x+7)(x+9)} = \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{2}{(x+3)(x+5)} + \frac{2}{(x+5)(x+7)} + \frac{2}{(x+7)(x+9)} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

ĐKXĐ: $x \neq -1; -3; -5; -7; -9$.

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+9} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+9} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+9}{(x+1)(x+9)} - \frac{x+1}{(x+1)(x+9)} = \frac{2(x+1)(x+9)}{5(x+1)(x+9)}$$

$$\Leftrightarrow (x+9) - (x+1) = \frac{2(x+1)(x+9)}{5}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-11 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn ĐKXĐ})$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-11; 1\}$.

Nhận xét:

Trong lời giải trên ta sử dụng phương pháp tách hạng tử. Phương pháp này dựa trên biến đổi sau đây:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right), \text{ với } a \neq b.$$

Dạng 2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 19. Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} = \frac{18}{x^2 + 2x + 1}.$$

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \neq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \neq 0 \\ x^2 + 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3) \neq 0 \\ (x+1)^2 + 1 \neq 0 \\ (x+1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Đặt $t = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, ta có:

$$\frac{1}{t-4} + \frac{18}{t+1} = \frac{18}{t} \text{ (với } t > 0 \text{ và } t \neq 4)$$

$$\Rightarrow t(t+1) + 18t(t-4) = 18(t-4)(t+1)$$

$$\Leftrightarrow 19t^2 - 71t = 18t^2 - 54t - 72$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 17t + 72 = 0 \Leftrightarrow (t-8)(t-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=8 \\ t=9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{– Với } t=8, \text{ ta có: } (x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow x+1 = \pm \sqrt{8} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{8}.$$

$$\text{– Với } t=9, \text{ ta có: } (x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x+1 = \pm 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}$$

Kết hợp với ĐKXĐ ta có tập nghiệm của phương trình là:

$$S = \{-4; -1 - \sqrt{8}; -1 + \sqrt{8}; 2\}.$$

Ví dụ 20. Giải phương trình

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1.$$

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 4x^2 - 8x + 7 \neq 0 \\ 4x^2 - 10x + 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-1)^2 + 3 \neq 0 \\ 4\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, nên chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức trong vế trái cho $x \neq 0$, ta được:

$$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}} + \frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}} = 1.$$

Đặt $t = 4x + \frac{7}{x} - 9$, ta được: $\frac{4}{t+1} + \frac{3}{t-1} = 1$

$$\Rightarrow 4(t-1) + 3(t+1) = (t-1)(t+1)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 7t = 0 \Leftrightarrow t(t-7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=7 \end{cases}$$

- Với $t = 0$, ta có: $4x + \frac{7}{x} - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{31}{16} = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

- Với $t = 7$, ta có: $4x + \frac{7}{x} - 9 = 7 \Rightarrow 4x^2 - 16x + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2x-7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\}$.

Nhận xét:

Khi đặt ẩn phụ, ta phải sử dụng các hạng tử chứa ẩn cũ giống nhau (gọi là "*phần cứng*"). Ngoài ra, ta có thể cộng, trừ thêm một hằng số bất kì (gọi là "*phần mềm*"). Chẳng hạn: Trong cách đặt ẩn của lời giải ví dụ trên:

$t = 4x + \frac{7}{x} - 9$ thì $4x + \frac{7}{x}$ là "*phần cứng*", còn (-9) là "*phần mềm*". Ta có thể

thay đổi phần mềm, cụ thể, ta có thể đặt:

$$t = 4x + \frac{7}{x} - 8 \text{ hay } t = 4x + \frac{7}{x} - 10 \text{ hay } t = 4x + \frac{7}{x} + 2012, \dots$$

Tuy nhiên, ta thường chọn cách đặt sao cho các bước tính sau được đơn giản nhất.

Ví dụ 21. Giải phương trình

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40 \quad (1)$$

Giải

ĐKXĐ: $x \neq -3$.

$$\text{Khi đó, (1)} \Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot \frac{3x}{x+3} + \frac{(3x)^2}{(x+3)^2} + 2x \cdot \frac{3x}{x+3} = 40$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{x^2}{x+3} = 40$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{x^2}{x+3} - 40 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x^2}{x+3}, \text{ ta có: } t^2 + 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t+10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -10 \end{cases}$$

$$\text{– Với } t = 4, \text{ ta có: } \frac{x^2}{x+3} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (Thoả mãn ĐKXĐ)}$$

$$\text{– Với } t = -10, \text{ ta có: } \frac{x^2}{x+3} = -10 \Rightarrow x^2 + 10x + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 + 5 = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm là $S = \{-2; 6\}$.

C. BÀI TẬP

3.26. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{3}{2x-1} + 1 = \frac{2x-1}{2x+1};$$

$$\text{b) } \frac{x+5}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x+5}.$$

3.27. Giải phương trình:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 1.$$

3.28. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{5}{x^2+x-6} - \frac{2}{x^2+4x+3} = \frac{-3}{2x-1};$$

$$\text{b) } \frac{4x^2+16}{x^2+6} = \frac{3}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+3} + \frac{7}{x^2+5}.$$

3.29. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4};$$

$$\text{b) } \frac{x^2+2x+7}{(x+1)^2+2} = x^2+2x+4.$$

3.30. Giải phương trình

$$\frac{2x}{3x^2-x+2} - \frac{7x}{3x^2+5x+2} = 1;$$

3.31. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = 13 \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x} \right);$$

$$\text{b) } x(x-1) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = 0.$$

3.32. Giải phương trình

$$\left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 = 90.$$

3.33. Giải phương trình

$$20 \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2 - 5 \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 + 48 \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

(Để thi vào lớp 10 chuyên ngữ, ĐHNN-ĐHQG HN, 1998)

Chuyên đề 4
GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH
LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1. Lập phương trình:

- Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu thị các đại lượng chưa biết qua ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. (Kiểm tra và trả lời) Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Toán chuyển động

Ví dụ 22. Một xe du lịch khởi hành từ A để đến B. Nửa giờ sau, một xe tải xuất phát từ B để về A. Xe tải đi được 1 giờ thì gặp xe du lịch. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng xe du lịch có vận tốc lớn hơn xe tải là 10 km/h và quãng đường AB dài 90 km .

Bảng tóm tắt:

	Quãng đường (km)	Vận tốc (km/h)	Thời gian gặp nhau (h)
Xe du lịch	$(x + 10) \cdot 1,5$	$x + 10$	1,5
Xe tải	$x \cdot 1$	x	1

Giải

Gọi vận tốc của xe tải là x , đơn vị: km/h , điều kiện: $x > 0$.

Khi đó ta có:

Vận tốc của xe du lịch là $x + 10 \text{ (km/h)}$.

Thời gian xe du lịch đi từ A đến lúc gặp xe tải là: $0,5 + 1 = 1,5$ (h)

Quãng đường xe du lịch và xe tải đi được đến lúc gặp nhau lần lượt là $(x + 10).1,5$ và $x.1$ (km).

Vì hai xe đi ngược chiều nên quãng đường AB là tổng quãng đường của hai xe đi được. Ta có phương trình

$$(x + 10).1,5 + x.1 = 90$$

$$\Leftrightarrow 2,5x = 75$$

$$\Leftrightarrow x = 30 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc của xe du lịch và xe tải lần lượt là 40 (km/h) và 30 (km/h).

Nhận xét:

Các bài toán chuyển động gồm ba đại lượng tham gia là quãng đường (S), vận tốc (v), thời gian (t) với quan hệ như sau:

$$S = vt; v = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{v}.$$

Ở ví dụ trên ta có thể sử dụng công thức tính thời gian gặp nhau của chuyển

động ngược chiều, cùng lúc: $t = \frac{S^*}{v_1 + v_2}$, trong đó:

– v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của xe du lịch và xe tải: $v_2 = v_1 - 10$.

– S^* là khoảng cách giữa hai xe: $S^* = 90 - 0,5.v_1$ (km)

$$\Rightarrow 1 = \frac{90 - 0,5v_1}{v_1 + (v_1 - 10)} \Rightarrow 2v_1 - 10 = 90 - 0,5v_1 \Rightarrow v_1 = 40. \text{ Từ đó } v_2 = 30.$$

Ví dụ 23. Một bè nửa trôi tự do và một ca nô đồng thời rời bến A để xuôi dòng sông. Ca nô xuôi dòng được 96 km thì ngay lập tức quay trở về A, cả đi lẫn về mất 14 giờ. Khi ca nô còn cách A 24 km thì gặp bè nửa. Tìm vận tốc của dòng nước và vận tốc riêng của ca nô.

(Để thi vào lớp 10 chuyên Toán, 1986)

Bảng tóm tắt (Tính đến thời điểm ca nô gặp lại bè nứa)

		Quãng đường (km)	Vận tốc (km/h)	Thời gian (h)
Ca nô	Xuôi dòng	96	$x + y$	$\frac{96}{x + y}$
	Ngược dòng	72	$x - y$	$\frac{72}{x - y}$
Bè nứa		24	y	$\frac{24}{y}$

Giải

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước lần lượt là x và y , đơn vị: km/h , điều kiện: $x > y > 0$.

Khi đó, ta có:

Vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô theo thứ tự là $x + y$ (km/h) và $x - y$ (km/h). Vận tốc của bè nứa bằng vận tốc của dòng nước và bằng y (km/h).

Quãng đường ca nô ngược dòng đến khi gặp bè nứa là:

$$96 - 24 = 72 \text{ (km)}.$$

Thời gian ca nô xuôi dòng và ngược dòng lần lượt là: $\frac{96}{x + y}$ (h) và $\frac{72}{x - y}$ (h).

Thời gian bè nứa trôi đến khi gặp ca nô là: $\frac{24}{y}$ (h).

Vì ca nô và bè nứa cùng xuất phát từ A nên thời gian chuyển động tới khi gặp

lại bằng nhau. Ta có phương trình: $\frac{96}{x + y} + \frac{72}{x - y} = \frac{24}{y}$.

Chia mẫu của hai vế cho y , ta được: $\frac{4}{\frac{x}{y} + 1} + \frac{3}{\frac{x}{y} - 1} = 1$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$ ($t > 1$), ta có: $\frac{4}{t + 1} + \frac{3}{t - 1} = 1$

$$\Leftrightarrow 4(t - 1) + 3(t + 1) = (t - 1)(t + 1)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 7t = 0 \Leftrightarrow t(t - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 & \text{(loại)} \\ t = 7 & \text{(thỏa mãn)} \end{cases}$$

Với $t = 7$, ta có: $x = 7y$.

Mặt khác, vì tổng thời gian đi và về của ca nô là 14 giờ nên ta có:

$$\frac{96}{x+y} + \frac{96}{x-y} = 14 \Rightarrow \frac{48}{8y} + \frac{48}{6y} = 7 \Rightarrow \frac{6}{y} + \frac{8}{y} = 7 \Rightarrow \frac{14}{y} = 7 \Rightarrow y = 2.$$

Từ đó suy ra: $x = 14$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 14km/h, vận tốc dòng nước là 2km/h.

Nhận xét:

Khi xét chuyển động (vận tốc riêng v_1) trên một vật chuyển động khác (vận tốc riêng v_2), chẳng hạn: ca nô đi trên sông có dòng chảy, người đi bộ trên toa tàu, ... ta sử dụng công thức *cộng vận tốc* sau:

$$v_{xuôi} = v_1 + v_2 \quad \text{và} \quad v_{ngược} = v_1 - v_2.$$

Dạng 2. Toán công việc

Ví dụ 24. Một công việc được giao cho hai người. Người thứ nhất có thể làm xong công việc một mình trong $\frac{2}{5}$ giờ. Lúc đầu, người thứ nhất làm một mình và sau 8 phút 40 giây người thứ hai cùng làm. Hai người làm chung trong $\frac{11}{90}$ giờ thì hoàn thành công việc. Hỏi nếu làm một mình thì người thứ hai cần bao lâu để hoàn thành công việc ?

Giải

Đổi đơn vị:

$$\frac{2}{5} \text{ giờ} = 24 \text{ phút}; 8 \text{ phút } 40 \text{ giây} = \frac{26}{3} \text{ phút}; \frac{11}{90} \text{ giờ} = \frac{22}{3} \text{ phút}.$$

Gọi thời gian làm một mình xong việc của người thứ hai là x (phút), điều kiện $x > \frac{22}{3}$.

Biểu thị khối lượng công việc bằng 1, ta có:

Năng suất của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là: $\frac{1}{24}; \frac{1}{x}$ (công việc / phút). Năng suất làm chung của hai người là $\frac{1}{24} + \frac{1}{x}$ (công việc / phút).

Khối lượng công việc người thứ nhất làm một mình là $\frac{1}{24} \cdot \frac{26}{3} = \frac{13}{36}$ (công việc). Khối lượng công việc của hai người làm chung là $\frac{22}{3} \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{x} \right)$ (công việc).

Theo đề ra, ta có phương trình $\frac{13}{36} + \frac{22}{3} \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{x} \right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{22}{3} \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{x} \right) = \frac{23}{36} \Leftrightarrow \frac{1}{24} + \frac{1}{x} = \frac{23}{264} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{22} \Rightarrow x = 22$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nếu làm riêng, người thứ hai cần làm trong 22 phút để hoàn thành công việc.

Nhận xét:

Toán về công việc gồm có ba đại lượng: khối lượng công việc (V), năng suất (N), thời gian (t) với quan hệ như sau:

$$V = N \cdot t; N = \frac{V}{t}; t = \frac{V}{N}.$$

Khi làm xong công việc thì khối lượng công việc được biểu thị bằng 1.

Với bài toán làm chung, năng suất chung bằng tổng năng suất của mỗi người.

Ví dụ 25. Một bể có gắn 3 vòi nước: 2 vòi chảy vào và một vòi tháo ra (vòi tháo ra đặt ở đáy bể). Biết rằng nếu chảy một mình, vòi thứ nhất chảy 8 giờ đầy bể, vòi thứ hai chảy 6 giờ đầy bể và vòi thứ ba tháo 4 giờ thì cạn một bể đầy. Bể đang cạn, người ta mở đồng thời vòi thứ nhất và vòi thứ hai trong 2 giờ rồi mở tiếp vòi thứ ba. Hỏi sau bao lâu từ lúc mở vòi thứ ba thì bể đầy?

Giải

Gọi thời gian từ lúc mở vòi thứ ba đến khi bể đầy là x (giờ), điều kiện: $x > 0$.

Biểu thị dung tích của bể bằng 1, ta có:

Năng suất của ba vòi lần lượt là: $\frac{1}{8}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}$ (bể / giờ).

Năng suất chung của vòi thứ nhất và vòi thứ hai là: $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$ (bể / giờ). Năng

suất chung của ba vòi là $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ (bể / giờ).

Sau 2 giờ, hai vòi thứ nhất và thứ hai chảy được: $2 \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{12}$ (bể).

Sau x giờ, lượng nước trong bể là $x \cdot \frac{1}{24}$ (bể).

Theo đề ra, ta có phương trình: $\frac{7}{12} + \frac{x}{24} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{24} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy thời gian từ lúc mở vòi ba đến lúc bể đầy là 10 giờ.

Dạng 3. Toán có nội dung Số học

Ví dụ 26. Tìm hai số tự nhiên sao cho khi lấy tổng, hiệu (số lớn trừ số nhỏ), tích, thương (số lớn chia số nhỏ) của hai số đó cộng lại ta được kết quả là 245.

Giải

Gọi số nhỏ là x ($x \in \mathbb{N}^*$). Vì thương của số lớn và số nhỏ là số tự nhiên nên số lớn chia hết cho số nhỏ. Vì vậy ta gọi số lớn là kx , với $k \in \mathbb{N}$.

Theo đề ra, ta có: $(kx + x) + (kx - x) + kx \cdot x + k = 245$

$$\Leftrightarrow kx^2 + 2kx + k = 245$$

$$\Leftrightarrow k(x+1)^2 = 5 \cdot 7^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \in U(5 \cdot 7^2) \Rightarrow (x+1)^2 = 1^2 \text{ hoặc } (x+1)^2 = 7^2.$$

$$\text{– Nếu } (x+1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{– Nếu } (x+1)^2 = 7^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -8 \end{cases} \Rightarrow x = 6 \text{ (vì } x \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow k = 5.$$

Vậy hai số cần tìm là 6 và 30.

Ví dụ 27. Tìm một số tự nhiên, biết rằng nếu bỏ đi ba chữ số tận cùng của nó thì được một số mới có lập phương bằng đúng số phải tìm.

Giải

Gọi số cần tìm là $\overline{xabc}$, với $0 \leq a, b, c \leq 9$ và $x \in \mathbb{N}^*$.

Nếu bỏ đi ba chữ số tận cùng thì số còn lại là x .

Theo đề ra, ta có: $x^3 = \overline{xabc} = 1000x + \overline{abc}$.

Nếu số phải tìm có 4 chữ số thì $0 < x < 10 \Rightarrow x^3 < 1000$, mà $1000x + \overline{abc} > 1000$ nên trường hợp này không xảy ra.

Nếu số phải tìm có 6 chữ số trở lên thì $x \geq 100 \Rightarrow x^3 \geq 1000000$, mà $\overline{xabc} < 1000000$ nên các trường hợp này không xảy ra.

Vậy số phải tìm chỉ có thể có 5 chữ số, tức là x có 2 chữ số.

Vì $x^3 = 1000x + \overline{abc} > 1000x \Rightarrow x^2 > 1000 \Rightarrow x > 31$.

Mặt khác, nếu $x \geq 33$ thì:

$$\begin{aligned}\overline{abc} &= x^3 - 1000x = x^3 - 33x^2 + 33x^2 - 33^2x + 89x \\ &= x^2(x - 33) + 33x(x - 33) + 89x \geq 89.33 = 2937 \\ &\Rightarrow \overline{abc} > 1000: \text{ vô lí.}\end{aligned}$$

Vậy $31 < x < 33 \Rightarrow x = 32$. Từ đó suy ra $\overline{abc} = 32^3 - 1000.32 = 768$.

Thử lại ta có: $32^3 = 32768$ là đúng.

Vậy số cần tìm là 32768.

Dạng 4. Toán có nội dung Hình học

Ví dụ 28. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 132 m. Nếu tăng chiều dài thêm 8 m và giảm chiều rộng đi 4 m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 52 m^2 . Tính kích thước của hình chữ nhật.

Giải

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x (m), điều kiện: $0 < x < 66$.

Khi đó, ta có:

Chiều rộng của hình chữ nhật là $66 - x$ (m).

Diện tích của hình chữ nhật là $x(66 - x) \text{ (m}^2\text{)}$.

Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật sau khi tăng, giảm lần lượt là $x + 8$; $(66 - x) - 4 = 62 - x$ (m). Diện tích của hình chữ nhật khi đó là

$$(x + 8).(62 - x) \text{ (m}^2\text{)}.$$

Theo đề ra, ta có phương trình

$$(x + 8)(62 - x) = x(66 - x) + 52$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 54x + 496 = -x^2 + 66x + 52$$

$$\Leftrightarrow 12x = 444 \Leftrightarrow x = 37 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 37(m); 29 (m).

Dạng 5. Các dạng toán khác

Ví dụ 29. Bạn A hỏi bạn B: "Bố mẹ bạn năm nay bao nhiêu tuổi?". B trả lời: "Bố tôi hơn mẹ tôi 4 tuổi. Trước đây khi tổng số tuổi của bố mẹ tôi là 104 thì tuổi của ba anh em chúng tôi là 14, 10 và 6. Hiện nay tổng số tuổi của bố mẹ tôi gấp hai lần tổng số tuổi của ba anh em tôi". Tính xem năm nay tuổi của bố và mẹ bạn B là bao nhiêu?

(Đề thi HSG miền Bắc, 1969)

Giải

Gọi số năm kể từ "trước đây" đến thời điểm hiện tại là x (năm), điều kiện: $x > 0$.

Khi đó:

Tổng số tuổi của bố và mẹ bạn B hiện nay là $104 + 2x$ (tuổi).

Tổng số tuổi của ba anh em bạn B hiện nay là

$$14 + 10 + 6 + 3x = 3x + 30 \text{ (tuổi)}.$$

Theo đề ra, ta có phương trình $104 + 2x = 2(3x + 30)$

$$\Leftrightarrow 4x = 44 \Leftrightarrow x = 11 \text{ (thỏa mãn)}$$

Suy ra tổng số tuổi của bố và mẹ bạn B hiện nay là $104 + 2 \cdot 11 = 126$ (tuổi).

Vì bố bạn B hơn mẹ bạn B 4 tuổi nên tuổi của bố bạn B là

$$(126 + 4) : 2 = 65 \text{ (tuổi)}$$

và tuổi của mẹ bạn B là $65 - 4 = 61$ (tuổi).

Nhận xét:

Thông thường, khi đề bài yêu cầu tìm đại lượng nào ta sẽ chọn ẩn là đại lượng đó (gọi là cách chọn ẩn *trực tiếp*). Tuy nhiên, trong một số bài toán ta lại chọn ẩn không phải là đại lượng cần tìm (gọi là cách chọn ẩn *gián tiếp*), như trong lời giải trên. Đôi khi, ta còn chọn thêm ẩn là các đại lượng liên quan khác trong bài (gọi là cách chọn thêm *ẩn giả*). Chẳng hạn, với ví dụ trên, ta gọi x là số tuổi của mẹ bạn B hiện nay, a là số năm từ "trước đây" đến hiện tại (a là *ẩn giả*). Thời điểm "trước đây" tuổi mẹ và bố bạn B lần lượt là $x - a$ và $x - a + 4$. Ta có

$$(x - a) + (x - a + 4) = 104 \text{ hay } x = a + 50 \quad (1)$$

Thời điểm hiện tại, tổng số tuổi ba anh em là

$$14 + 10 + 6 + 3a = 3a + 30$$

$$\text{Ta có: } x + (x + 4) = 2(3a + 30) \Leftrightarrow 2x = 6a + 56 \Leftrightarrow x = 3a + 28 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a + 50 = 3a + 28 \Rightarrow a = 11 \Rightarrow x = 61 \dots$

Sở dĩ a gọi là ẩn giả là vì a không phải là đại lượng cần tìm. Ta sử dụng thêm ẩn này nhằm mục đích diễn đạt các giả thiết của bài toán được dễ hiểu nhất.

Ví dụ 30. Một cửa hàng ngày chủ nhật tăng giá tất cả các mặt hàng thêm 20%. Sang ngày thứ hai, cửa hàng giảm giá tất cả các mặt hàng 20%. Một người mua hàng tại cửa hàng đó trong ngày thứ hai phải trả tất cả là 24000 đồng. Hỏi người đó vẫn mua các sản phẩm như vậy nhưng vào thời điểm trước ngày chủ nhật thì phải trả bao nhiêu tiền? Nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu?

Giải

Gọi số tiền người mua hàng phải trả nếu mua trước ngày chủ nhật là x (đồng), điều kiện: $x > 0$.

Nếu mua hàng vào ngày chủ nhật thì số tiền người đó phải trả là:

$$x + 20\%x = 1,2x \text{ (đồng)}$$

Vì sang thứ hai cửa hàng giảm 20% nên số tiền người đó đã trả là:

$$1,2x - 20\%.(1,2x) = 0,96x \text{ (đồng)}.$$

Theo đề ra, ta có phương trình: $0,96x = 24000$

$$\Rightarrow x = 25000 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy nếu mua trước ngày chủ nhật người đó phải trả 25000 đồng, nhiều hơn so với ngày thứ hai là 1000 đồng.

Chú ý:

Sai lầm thường gặp khi giải bài toán này là lập luận rằng vì hôm trước tăng 20%, hôm sau giảm 20% nên giá trở lại mức ban đầu. Nguyên nhân ở đây là: tăng 20% là tăng 20% giá của ngày thứ bảy, giảm 20% là giảm 20% giá của ngày chủ nhật (giá này cao hơn giá ngày thứ bảy).

C. BÀI TẬP

3.34. Một phân số có tử bé hơn mẫu là 11. Nếu tăng tử lên 3 đơn vị và giảm mẫu đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{3}{4}$. Tìm phân số ban đầu.

3.35. Tổng hai chữ số của một số có hai chữ số là 12, biết rằng chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 4. Tìm số đó.

- 3.36. Tìm một số có 5 chữ số đối xứng dạng $\overline{abcba}$ sao cho tổng các chữ số của nó bằng $\overline{bb}$ và $\frac{c}{2} < a < c$.
- 3.37. Nếu giảm chiều dài của một hình chữ nhật đi 2.4 cm và tăng chiều rộng lên 30% thì diện tích của hình chữ nhật đó tăng 4%. Tìm chiều dài ban đầu của hình chữ nhật.
- 3.38. Tổng số tuổi của hai anh em hiện nay là 63. Tuổi của người anh hiện nay gấp đôi số tuổi của người em lúc người anh bằng tuổi của người em hiện nay. Tính số tuổi của hai anh em hiện nay.
- 3.39. Hai thùng đựng dầu: Thùng thứ nhất có 120 lít dầu, thùng thứ hai có 90 lít dầu. Sau khi lấy ra ở thùng thứ nhất một lượng dầu gấp ba lần lượng dầu lấy ra ở thùng thứ hai thì lượng dầu còn lại trong thùng thứ hai gấp đôi lượng dầu còn lại trong thùng thứ nhất. Hỏi đã lấy ra bao nhiêu lít dầu ở mỗi thùng ?
- 3.40. Một canô tuần tra đi xuôi dòng từ A đến B hết 1 giờ 20 phút và ngược dòng từ B về A hết 2 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là 3 km/h.
- 3.41. Lúc 7 giờ sáng, một người đi xe đạp khởi hành từ A với vận tốc 10 km/h. Sau đó lúc 8 giờ 40 phút, một người khác đi xe máy từ A đuổi theo với vận tốc 30 km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ.
- 3.42. Hai người đi bộ khởi hành ở hai địa điểm cách nhau 4,18 km, đi ngược chiều nhau để gặp nhau. Người thứ nhất mỗi giờ đi được 5,7 km. Người thứ hai mỗi giờ đi được 6,3 km nhưng xuất phát sau người thứ nhất 4 phút. Hỏi người thứ hai đi trong bao lâu thì gặp người thứ nhất ?
- 3.43. Lúc 6 giờ, một ô tô xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình 40 km/h. Khi đến B, người lái xe làm nhiệm vụ giao nhận hàng trong 30 phút rồi cho xe quay trở về A với vận tốc trung bình 30 km/h. Tính quãng đường AB, biết rằng ô tô về đến A lúc 10 giờ cùng ngày.
- 3.44. Hai xe máy khởi hành lúc 7 giờ sáng từ A để đến B. Xe máy thứ nhất chạy với vận tốc 30 km/h, xe máy thứ hai chạy với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy thứ nhất là 6 km/h. Trên đường đi xe thứ hai dừng lại nghỉ 40 phút rồi lại tiếp tục chạy với vận tốc cũ. Tính chiều dài quãng đường AB, biết cả hai xe đến B cùng lúc.
- 3.45. Một ô tô tải đi từ A đến B với vận tốc 30 km/h. Một lúc sau một xe con rời A với vận tốc 40 km/h dự định sẽ đuổi kịp xe tải tại B. Nhưng đi nửa quãng đường AB thì xe con tăng vận tốc thêm 5 km/h nên sau đó 1 giờ đã đuổi kịp xe tải. Tính quãng đường AB.

- 3.46. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành trong 12 ngày. Hai đội làm chung với nhau trong 4 ngày thì đội thứ nhất được điều đi làm việc khác, đội thứ hai làm nốt phần công việc còn lại trong 10 ngày. Hỏi đội thứ hai nếu làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó ?
- 3.47. Một tổ sản xuất theo kế hoạch mỗi ngày phải sản xuất 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó không những tổ đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày mà còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm ?
- 3.48. Một tổ may áo theo kế hoạch mỗi ngày phải may 30 áo. Nhờ cải tiến kỹ thuật, tổ đã may được mỗi ngày 40 áo nên đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày và ngoài ra còn may thêm được 20 chiếc áo nữa. Tính số áo mà tổ đó phải may theo kế hoạch.
- 3.49. Một tổ sản xuất dự định hoàn thành công việc trong 10 ngày. Thời gian đầu, họ làm mỗi ngày 120 sản phẩm. Sau khi làm được một nửa số sản phẩm được giao, nhờ hợp lý hoá một số thao tác, mỗi ngày họ làm thêm được 30 sản phẩm nữa so với mỗi ngày trước đó, do vậy tổ đã hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày. Tính số sản phẩm mà tổ sản xuất được giao.
- 3.50. Hai tổ sản xuất cùng làm chung công việc thì hoàn thành trong 2 giờ. Hỏi nếu làm riêng một mình thì mỗi tổ phải hết bao nhiêu thời gian mới hoàn thành công việc, biết khi làm riêng tổ một hoàn thành sớm hơn tổ hai là 3 giờ.
- 3.51. Một bể nước có hai vòi: Vòi I ở miệng bể chảy vào mạnh gấp bốn lần vòi II ở phía dưới tháo nước ra. Nếu bể cạn và mở cả hai vòi cùng lúc thì sau 2 giờ 45 phút bể đầy. Hỏi vòi II phải đặt ở độ cao bao nhiêu so với chiều cao của bể, biết rằng nếu mở riêng vòi I thì bể đang cạn sẽ đầy sau 2 giờ 30 phút.

Chuyên đề nâng cao

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là nghiệm nguyên của phương trình $f(x, y) = 0$ nếu $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ và $f(x_0, y_0) = 0$.
- Giải phương trình nghiệm nguyên là tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đó.

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Phương pháp "tách phần nguyên"

Ví dụ 31. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$12x - 7y = 45 \quad (1)$$

Giải

Vì $12x \div 3$ và $45 \div 3$ nên $7y \div 3 \Rightarrow y \div 3$, vì $(7, 3) = 1$.

Giả sử $y = 3k$, với $k \in \mathbb{Z}$, ta có: $12x - 7 \cdot 3k = 45 \Leftrightarrow 4x - 7k = 15$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7k + 15}{4} = \frac{8k + 16 - k - 1}{4} = (2k + 4) - \frac{k + 1}{4}.$$

Để $x \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{k + 1}{4} \in \mathbb{Z}$, hay $k + 1 = 4n$, với $n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow k = 4n - 1.$$

Từ đó, ta có:

$$x = 2(4n - 1) + 4 - n = 2 + 7n \quad \text{và} \quad y = 3(4n - 1) = -3 + 12n.$$

Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên $(x; y)$ xác định bởi công thức

$$\begin{cases} x = 2 + 7n \\ y = -3 + 12n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (\text{gọi là công thức nghiệm nguyên tổng quát}).$$

Nhận xét:

Dạng tổng quát của phương trình (1) là $ax + by = c$ (*) (trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$).

Các bước tìm nghiệm nguyên của phương trình ():*

- ① Rút gọn các hệ số, đưa về $(a, b, c) = 1$ và nhận xét về tính chia hết của các hạng tử (nếu có).
- ② Biểu thị một ẩn qua ẩn còn lại với lưu ý sau: Nếu $lal < |b|$ thì tính x theo y , trái lại thì tính y theo x .
- ③ Tách phần nguyên và lập luận cho phần dư thuộc $\mathbb{Z}$.

Lập lại các bước trên cho đến khi tìm được công thức nghiệm nguyên tổng quát.

Chú ý:

Nếu phương trình (*) với $(a, b, c) = 1$ có nghiệm nguyên thì $(a, b) = 1$. Điều đó có nghĩa là:

Nếu phương trình (*) có $(a, b, c) = 1$ và $(a, b) \neq 1$ thì phương trình này không có nghiệm nguyên.

Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình (*) (gọi là *nghiệm riêng*), thì công thức nghiệm nguyên tổng quát của (*) là:

$$\begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 32. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$y(x-1) = x^2 + 2 \quad (2)$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, ĐH KHTN – ĐHQG HN, 2000)

Giải

Nhận thấy $x = 1$ không thỏa mãn phương trình.

Với $x \neq 1$, phương trình (2) $\Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(x^2 - 1) + 3}{x - 1} = (x + 1) + \frac{3}{x - 1}.$$

Để $y \in \mathbb{Z}$ thì $x - 1 \in U(3)$. Ta có bảng giá trị sau

$x - 1$	-3	-1	1	3
x	-2	0	2	4
y	-2	-2	6	6

Vậy phương trình (2) có bốn nghiệm nguyên là $(-2; -2)$, $(0; -2)$, $(2; 6)$ và $(4; 6)$.

2. Phương pháp phân tích thành nhân tử và sử dụng ước số

Ví dụ 33. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$3xy - 5x - 2y = 3 \quad (3)$$

Giải

Ta có (3) $\Leftrightarrow x(3y - 5) - 2y = 3$

$$\Leftrightarrow 3x(3y - 5) - 2 \cdot 3y = 9 \quad (\text{nhân hai vế với } 3)$$

$$\Leftrightarrow 3x(3y - 5) - 2(3y - 5) = 9 + 10$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)(3y - 5) = 19.$$

$$\Rightarrow 3x - 2, 3y - 5 \in U(19).$$

Ta có bảng sau:

$3x - 2$	-19	-1	1	19
$3y - 5$	-1	-19	19	1
x	$-\frac{17}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	7
y	$\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{3}$	8	2

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm nguyên là $(1; 8)$ và $(7; 2)$.

Nhận xét:

Dạng tổng quát của phương trình (3) là: $axy + bx + cy = d$ (***) (trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$).

*Cách giải phương trình (**):*

$$x(ay + b) + cy = d \Leftrightarrow ax(ay + b) + cay = da$$

$$\Leftrightarrow ax(ay + b) + c(ay + b) = da + cb \Leftrightarrow (ax + c)(ay + b) = ad + bc.$$

$$\Rightarrow ax + c, ay + b \in U(ad + bc) \dots$$

Ví dụ 34. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 - 10xy - 11y^2 = 13 \quad (4)$$

Giải

$$\text{Ta có (4)} \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 10xy - 10y^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) - 10y(x + y) = 13$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - 11y) = 13$$

$$\Rightarrow x + y, x - 11y \in U(13).$$

Ta có bảng sau:

$x + y$	-13	-1	1	13
$x - 11y$	-1	-13	13	1
x	-12	-2	2	12
y	-1	1	-1	1

Vậy phương trình (4) có bốn nghiệm nguyên là $(-12; -1)$, $(-2; 1)$, $(2; -1)$ và $(12; 1)$.

Nhận xét:

Dạng tổng quát của phương trình (4) là: $ax^2 + (a+b)xy + by^2 = c$, với cách biến đổi về dạng tích như sau:

$$ax^2 + axy + bxy + by^2 = c \Leftrightarrow ax(x+y) + by(x+y) = c$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(ax+by) = c.$$

$$\Rightarrow x+y, ax+by \in U(c) \dots$$

3. Phương pháp sử dụng tính chẵn lẻ

Ví dụ 35. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 - 2y^2 = 5 \quad (4)$$

Giải

Ta có (4) $\Leftrightarrow x^2 = 2y^2 + 5 \Rightarrow x^2$ là số lẻ $\Rightarrow x$ là số lẻ.

Giả sử $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ thì: $(2k+1)^2 - 2y^2 = 5 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k - 2y^2 = 4$

$$\Leftrightarrow 2k^2 + 2k - y^2 = 2 \Rightarrow y^2 \text{ là số chẵn} \Rightarrow y \text{ chẵn.}$$

Giả sử $y = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ thì $2k^2 + 2k - 4n^2 = 2 \Leftrightarrow k^2 + k - 2n^2 = 1$

$$\Leftrightarrow k(k+1) = 2n^2 + 1$$

Vì vế trái là số chẵn với mọi $k \in \mathbb{Z}$ và vế phải là số lẻ với mọi $n \in \mathbb{Z}$ nên không có k, n thỏa mãn.

Vậy phương trình (4) không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 36. Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình

$$x^y + 1 = z \quad (5)$$

Giải

Vì $x, y \geq 2$ nên $z \geq 2^2 + 1 = 5$ và do đó z là số lẻ.

$$\Rightarrow x^y = z - 1 \text{ là số chẵn} \Rightarrow x \text{ chẵn} \Rightarrow x = 2 \text{ (vì } x \text{ là số nguyên tố).}$$

Khi đó: $z = 2^y + 1$.

Nếu y là số lẻ thì $z = 2^y + 1 \div (2+1)$ hay $z \div 3 \Rightarrow z$ là hợp số (loại).

Nếu y là số chẵn thì $y = 2$ và do đó $z = 2^2 + 1 = 5$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình (5) có một nghiệm nguyên tố duy nhất là $(2; 2; 5)$.

4. Phương pháp đánh giá

Ví dụ 37. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (6)$$

Vì vai trò của x, y, z là như nhau, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả

sử $1 < x \leq y \leq z$, do đó: $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x \leq 3. \text{ Vậy } x \in \{2; 3\}.$$

$$\text{– Nếu } x = 2 \text{ thì } \frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow 2 \leq y \leq 4. \text{ Vậy } y \in \{2; 3; 4\}.$$

$$+ \text{ Nếu } y = 2 \text{ thì } \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \text{không có } z \text{ thỏa mãn (loại)}$$

$$+ \text{ Nếu } y = 3 \text{ thì } \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow z = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } y = 4 \text{ thì } \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow z = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{– Nếu } x = 3 \text{ thì } \frac{2}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow 3 \leq y \leq 3 \Rightarrow y = 3, \text{ do đó } z = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Đối vai trò của x, y, z ta có 10 nghiệm nguyên dương của phương trình (6):

$(2; 3; 6), (2; 4; 4), (3; 3; 3), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2), (4; 2; 4), (4; 4; 2).$

Ví dụ 38. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 = y^2 + \sqrt{y+1} \quad (7)$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, ĐH KHTN – ĐHQG HN, 2001)

Giải

Điều kiện: $y \geq -1$.

- Nếu $y = -1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- Nếu $y > 0$ thì $y + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} < y+1 < 2y+1$

Ta có: $y^2 < x^2 = y^2 + \sqrt{y+1} < y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$

$\Rightarrow y < |x| < y+1$: không có $x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình (7) có bốn nghiệm nguyên là $(1; -1)$, $(-1; -1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$.

5. Phương pháp xuống thang và đồng dư

Ví dụ 39. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$19x^2 + 28y^2 = 729 \quad (8)$$

Giải

Vì $729 \div 3$ nên $19x^2 + 28y^2 \div 3 \Leftrightarrow (18x^2 + 27y^2) + (x^2 + y^2) \div 3$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) \div 3 \Rightarrow \begin{cases} x \div 3 \\ y \div 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x_1 \\ y = 3y_1 \end{cases} \quad (x_1, y_1 \in \mathbb{Z})$$

Thay vào (8), ta có: $19x_1^2 + 28y_1^2 = 81 \quad (8')$

Lập luận tương tự như trên, ta có: $\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ y_1 = 3y_2 \end{cases} \quad (x_2, y_2 \in \mathbb{Z})$

Thay vào (8'), ta có: $19x_2^2 + 28y_2^2 = 9 \quad (8'')$

Lập luận tương tự như trên, ta có: $\begin{cases} x_2 = 3x_3 \\ y_2 = 3y_3 \end{cases} \quad (x_3, y_3 \in \mathbb{Z})$

Thay vào (8''), ta có: $19x_3^2 + 28y_3^2 = 1$: phương trình này không có nghiệm nguyên $(x_3; y_3)$.

Vậy phương trình (8) không có nghiệm nguyên.

Nhận xét:

1. Cách giải trên có tên gọi là *phương pháp xuống thang*: Nếu $(x; y)$ là nghiệm nguyên của (8) thì $(x_1; y_1) = \left(\frac{x}{3}; \frac{y}{3}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của (8), tương tự

$(x_2; y_2) = \left(\frac{x_1}{3}; \frac{y_1}{3}\right) = \left(\frac{x}{3^2}; \frac{y}{3^2}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của (8), ... Cứ lặp lại như vậy cho đến khi chỉ ra được phương trình vô nghiệm hoặc chỉ có một nghiệm duy nhất.

2. Ngoài cách làm trên, ta có thể sử dụng đồng dư để giải như sau:

Giả sử $(x; y)$ là nghiệm nguyên của (8), ta có:

$$19x^2 + 28y^2 \equiv 729 \pmod{4} \Leftrightarrow 19x^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 - x^2 \equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow -x^2 \equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow x^2 \equiv -1 \pmod{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \equiv 3 \pmod{4}: \text{điều này không thể xảy ra!}$$

(Vì nếu x chẵn thì $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$, còn nếu x lẻ thì $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$)

Vậy phương trình (8) không có nghiệm nguyên.

C. BÀI TẬP

3.52. Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $6x - 8y = 9$;

b) $11x + 18y = 120$;

c) $17x - 39y = 4$.

3.53. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

a) $40x - 31y = 1$;

b) $11x + 8y = 73$.

3.54. Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^2 - (y+2)x + 3 - y = 0.$$

3.55. Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $xy - 4 = 2x + 3y$;

b) $5xy + x + 2y = 7$.

3.56. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$4(x+y) = 3xy - 8.$$

3.57. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 7.$$

3.58. Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình

$$y^2 - 2x^2 = 1.$$

3.59. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x + y).$$

(Để thi vào lớp 10 chuyên, ĐH KHTN – ĐHQG HN, 1994).

3.60. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3.$$

3.61. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 7 = y^2.$$

3.62. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^3 + x^2 + x + 1 = y^3.$$

3.63. Chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$x^2 - 3y^2 = 17.$$

3.64. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^3 = 2y^3 + 4z^3.$$

Chương IV BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 1

LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ CÁC PHÉP TOÁN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b; a \leq b; a \geq b$) được gọi là *bất đẳng thức*; a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.
- Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c, \forall c.$$

- Khi nhân (chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với (cho) một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

$$a > b \Leftrightarrow ac > bc, \forall c > 0.$$

- Khi nhân (chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với (cho) một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

$$a > b \Leftrightarrow ac < bc, \forall c < 0.$$

- Tính chất bắc cầu: Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. So sánh hai số, hai biểu thức

Ví dụ 1. Cho $x < y$, hãy so sánh:

- $x - y$ và 0 .
- $-2x + 3$ và $-2y + 3$.
- $x + y$ và $2x; 2y$.

Giải

a) Từ $x < y$, cộng hai vế với $(-y)$, ta được:

$$x + (-y) < y + (-y)$$

$$\Leftrightarrow x - y < 0.$$

b) Từ $x < y$, nhân hai vế với (-2) , ta được:

$$x \cdot (-2) > y \cdot (-2) \text{ hay } -2x > -2y.$$

Cộng hai vế với 3, ta được:

$$-2x + 3 > -2y + 3.$$

c) Từ $x < y$, cộng hai vế với y , ta được:

$$x + y < y + y \Leftrightarrow x + y < 2y \quad (1)$$

Từ $x < y$, cộng hai vế với x , ta được:

$$x + x < y + x \Leftrightarrow 2x < x + y \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $2x < x + y < 2y$.

Nhận xét:

Từ câu a) ta có quy tắc chuyển vế vẫn đúng đối với bất đẳng thức:

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

$$a + b < c + d \Leftrightarrow a - d < c - b, \dots$$

Từ câu c) ta có:

Phương pháp *làm trội*: $x \leq y \Rightarrow x + y \leq 2y$.

Phương pháp *làm giảm*: $x \leq y \Rightarrow x + y \geq 2x$.

Ví dụ 2. Hãy so sánh x và y , nếu:

a) $-7x + 13 \geq -7y + 13$.

b) $11x - 1 > 11y + 2$.

Giải

a) Từ $-7x + 13 \geq -7y + 13$ suy ra: $-7x \geq -7y$ (cộng hai vế với -13)

$$\Rightarrow x \leq y \text{ (chia hai vế cho } -7).$$

Vậy $x \leq y$.

b) Vì $2 > -1$ nên $11y + 2 > 11y - 1$.

Lại có: $11x - 1 > 11y + 2$, theo tính chất bắc cầu:

$$11x - 1 > 11y - 1$$

$$\Rightarrow 11x > 11y \text{ (cộng hai vế với } 1)$$

$$\Rightarrow x > y \text{ (chia hai vế cho } 11)$$

Vậy $x > y$.

Ví dụ 3. Cho $a < b; c < d$, hãy so sánh $a + c$ và $b + d$.

Giải

$$\text{Ta có: } a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad (1)$$

$$c < d \Rightarrow c + b < d + b \quad (2)$$

Từ (1) và (2), theo tính chất bắc cầu, ta có: $a + c < b + d$.

Nhận xét:

Từ kết quả ví dụ trên ta có quy tắc sau: *Khi cộng các vế tương ứng của hai bất đẳng thức cùng chiều, ta được một bất đẳng thức cùng chiều với hai bất đẳng thức đã cho.*

Ví dụ 4. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn: $a < b; c < d$. Hãy so sánh ac và bd .

Giải

$$\text{Từ } a < b \text{ và } c > 0, \text{ ta có: } ac < bc \quad (1)$$

$$\text{Từ } c < d \text{ và } b > 0, \text{ ta có: } cb < db \quad (2)$$

Từ (1) và (2), theo tính chất bắc cầu, ta có: $ac < bd$.

Nhận xét:

Từ kết quả ví dụ trên ta có quy tắc sau: *Khi nhân các vế tương ứng của hai bất đẳng thức cùng chiều, các vế đều dương, ta được một bất đẳng thức cùng chiều với hai bất đẳng thức đã cho.*

Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 5. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Xét hiệu: } 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0, \forall a, b.$$

$$\text{Vậy } 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Nhận xét:

– Để chứng minh $A > B$ ta xét hiệu $A - B$ và chứng tỏ $A - B > 0$.

– Bất đẳng thức (1) có thể viết lại như sau:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$$

$$\text{và } (1.a + 1.b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2).$$

Kết quả tổng quát của bất đẳng thức này được chứng minh trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 6. Cho bốn số a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$(a.b + c.d)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \quad (2)$$

đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$ hay $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (với $bd \neq 0$).

Giải

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 \leq a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2$$

$$\Leftrightarrow 2abcd \leq a^2d^2 + c^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi a, b, c, d nên bất đẳng thức (2) cũng đúng với mọi a, b, c, d .

Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$ hay $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Lưu ý. Khi b hoặc $d = 0$, hiển nhiên (2) trở thành đẳng thức; ở đây ta xét $b, d \neq 0$.

Nhận xét:

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng phương pháp *biến đổi tương đương* để chứng minh bất đẳng thức: Dùng các phép biến đổi tương đương để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Bất đẳng thức (2) có tên gọi là *bất đẳng thức Bunhiacôpski* cho hai cặp, bốn số: (a, c) và (b, d) .

Ví dụ 7. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $-1 \leq a, b, c \leq 4$ và $a + 2b + 3c \leq 4$. Chứng minh rằng $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 36$.

Giải

$$\text{Vì } -1 \leq a \leq 4 \text{ nên } \begin{cases} a+1 \geq 0 \\ a-4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (a+1)(a-4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 3a + 4 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = -1$ hoặc $a = 4$.

$$\text{Chúng minh tương tự, ta cũng có: } b^2 \leq 3b + 4 \Rightarrow 2b^2 \leq 6b + 8 \quad (2)$$

$$\text{và } c^2 \leq 3c + 4 \Rightarrow 3c^2 \leq 9c + 12 \quad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 3(a + 2b + 3c) + 24 \leq 3 \cdot 4 + 24$$

$$\Rightarrow a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 36 \text{ (đpcm).}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} (a+1)(a-4)=0 \\ (b+1)(b-4)=0 \\ (c+1)(c-4)=0 \\ a+2b+3c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=-1 \end{cases}$$

Nhận xét:

Bất đẳng thức trong ví dụ trên là một *bất đẳng thức có điều kiện*, nó chỉ là bất đẳng thức khi thỏa mãn điều kiện đi kèm là: $-1 \leq a, b, c \leq 4$ và $a + 2b + 3c \leq 4$.

Ví dụ 8. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$a < b + c \Leftrightarrow a^2 < ab + ca \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có: } b^2 < bc + ab \quad (2)$$

$$c^2 < ca + bc \quad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức (1), (2) và (3), ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Nhận xét:

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng các bất đẳng thức quen biết, đó là bất đẳng thức tam giác. Cách làm này gọi là phương pháp sử dụng *bất đẳng thức trung gian* – một phương pháp phổ biến trong chứng minh bất đẳng thức.

C. BÀI TẬP

4.1. Cho $x \geq y$, hãy so sánh:

a) $-8x + 7$ và $-8y + 7$.

b) $9x - 1$ và $9y - 1$.

4.2. Hãy so sánh x và y , nếu:

a) $-19x - 37 \leq -19y - 37$.

b) $-23x - 2 > -23y + 3$.

4.3. So sánh số x và 0 nếu:

a) $5x < 9x$.

b) $-7x \leq 2x$.

4.4. Cho $a > b, c > d$. Hãy so sánh $ac + bd$ và $ad + bc$.

4.5. Chứng minh rằng với mọi x ta luôn có:

a) $\frac{15}{4x^2 - 12x + 19} \leq \frac{3}{2}$.

b) $\frac{4x + 3}{x^2 + 1} \leq 4$.

4.6. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

4.7. Chứng minh rằng với mọi x ta đều có:

$$x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 1 > 0.$$

4.8. Cho hai số thực a, b . Chứng minh rằng:

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, với $a, b \geq 0$.

b) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

c) $(a+b)^2 \geq 4ab$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

4.9. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$.

4.10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

4.11. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

4.12. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}.$$

4.13. Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d, e ta có:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, 2001)

4.14. Cho $a > b > c > 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 > a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3.$$

(Đề thi vào lớp 10 khối phổ thông, ĐHSP TP. Hồ Chí Minh, 2007)

4.15. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn: $a + b = 1$. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$;

b) $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$;

c) $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

4.16. Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta có

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

Chuyên đề 2

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất phương trình một ẩn

- Bất phương trình một ẩn là bất phương trình có dạng $f(x) > g(x)$ (hoặc $f(x) < g(x)$; $f(x) \geq g(x)$; $f(x) \leq g(x)$), trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là hai biểu thức của biến x .

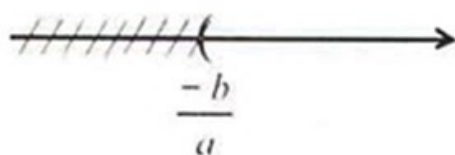
- Số x_0 gọi là *ng nghiệm* của bất phương trình $f(x) > g(x)$ nếu thay x_0 vào ta được $f(x_0) > g(x_0)$ là một khẳng định đúng. *Giải bất phương trình* là tìm tất cả các nghiệm hay tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.
- Hai bất phương trình được gọi là *tương đương* khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Phép biến đổi một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương gọi là *phép biến đổi tương đương*.
Một số quy tắc biến đổi tương đương thường dùng là:
- Chuyển vế: $f(x) + h(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) - h(x)$.
- Nhân (chia):
 $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) > g(x).h(x)$, nếu $h(x) > 0$ với mọi x .
 $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) < g(x).h(x)$, nếu $h(x) < 0$ với mọi x .

2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn:

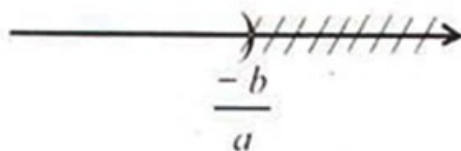
- Bất phương trình một ẩn là bất phương trình có dạng: $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$), trong đó: a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.
- Giải bất phương trình: $ax + b > 0$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow ax > -b$

- + Nếu $a > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.



- + Nếu $a < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.



- + Nếu $a = 0$ thì (1) trở thành: $0x > -b$
- Nếu $b \leq 0$ thì (1) vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Xét xem một số có là nghiệm của bất phương trình hay không

Ví dụ 9. Xét xem $x = -3$ có là nghiệm của bất phương trình sau hay không ?

$$\text{a) } \frac{2x-5}{3} + 3 > \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

$$\text{b) } -4x^2 + \frac{x+6}{3} \leq \frac{2}{3}x - 10 \quad (2)$$

Giải

a) Thay $x = -3$ vào bất phương trình (1), ta được:

$$\frac{2 \cdot (-3) - 5}{3} + 3 > \frac{1}{-3+1} \Leftrightarrow \frac{-11}{3} + 3 > \frac{1}{-2} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} > \frac{-1}{2} : \text{ là một khẳng định sai.}$$

Vậy $x = -3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Thay $x = -3$ vào bất phương trình (2), ta được:

$$-4 \cdot (-3)^2 + \frac{-3+6}{3} \leq \frac{2}{3} \cdot (-3) - 10$$

$$\Leftrightarrow -36 + 1 \leq -2 - 10$$

$$\Leftrightarrow -35 \leq -12 : \text{ là một khẳng định đúng.}$$

Vậy $x = -3$ là nghiệm của bất phương trình (2).

Nhận xét:

Để xét xem một số có là nghiệm của một bất phương trình hay không ta thay số đó vào vị trí của ẩn trong bất phương trình. Nếu kết quả thu được là một khẳng định đúng thì số đã đó là nghiệm của bất phương trình. Trái lại, số đó không là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 10. Tìm m để $x = 7$ là nghiệm của bất phương trình:

$$\frac{(m-1)x}{x-2} - 3 > 2x - 24.$$

Giải

Vì $x = 7$ là nghiệm của bất phương trình nên ta có:

$$\frac{(m-1) \cdot 7}{7-2} - 3 > 2 \cdot 7 - 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1) \cdot 7}{5} > -7$$

$$\Leftrightarrow m - 1 > -5$$

$$\Leftrightarrow m > -4.$$

Vậy điều kiện cần tìm của m là $m > -4$.

Dạng 2. Giải bất phương trình

Ví dụ 11. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x - 7 > 8 - x$;

b) $\frac{1-3x}{2} - 3 \leq x - \frac{x+1}{4}$.

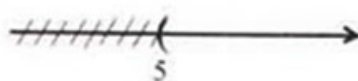
Giải

a) $2x - 7 > 8 - x \Leftrightarrow 2x + x > 8 + 7$

$$\Leftrightarrow 3x > 15$$

$$\Leftrightarrow x > 5.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$.



b) $\frac{1-3x}{2} - 3 \leq x - \frac{x+1}{4} \Leftrightarrow 2(1-3x) - 12 \leq 4x - (x+1)$

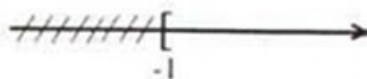
$$\Leftrightarrow 2 - 6x - 12 \leq 4x - x - 1$$

$$\Leftrightarrow -6x - 4x + x \leq -1 - 2 + 12$$

$$\Leftrightarrow -9x \leq 9$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.



Ví dụ 12. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 - 6x + 7 < 0$;

b) $\frac{4x-3}{x+2} > 5$.

Giải

a) Ta có: $3x^2 - 6x + 7 < 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 6x + 3) + 4 < 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 4 < 0$.

Mặt khác: $3(x-1)^2 + 4 > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên không có giá trị nào của x thỏa mãn bất phương trình.

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

b) Ta có: $\frac{4x-3}{x+2} > 5 \Leftrightarrow \frac{4x-3}{x+2} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{4x-3-5(x+2)}{x+2} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-x-13}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+13}{x+2} < 0$.

Suy ra $x+13$ và $x+2$ trái dấu, mà $x+13 > x+2$ nên:

$$\begin{aligned} x+13 > 0 > x+2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+13 > 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -13 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -13 < x < -2. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $-13 < x < -2$.



***Chú ý:** Nếu $a < x < b$ thì ta nói x thuộc *khoảng* từ a đến b và viết là $x \in (a; b)$. Áp dụng, trong ví dụ trên ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-13; -2)$.

Dạng 3. Giải và biện luận bất phương trình

Ví dụ 13. Giải và biện luận bất phương trình:

$$(m-1)x - 3 > x + m \tag{1}$$

Giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (m-2)x > m+3$

– Nếu $m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, thì (1) trở thành: $0x > 5 \Rightarrow$ vô nghiệm.

– Nếu $m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$, thì $(1) \Leftrightarrow x > \frac{m+3}{m-2}$.

– Nếu $m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$, thì $(1) \Leftrightarrow x < \frac{m+3}{m-2}$.

Kết luận:

- Nếu $m = 2$ thì bất phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $m > 2$ thì bất phương trình (1) có nghiệm là $x > \frac{m+3}{m-2}$.
- Nếu $m < 2$ thì bất phương trình (1) có nghiệm là $x < \frac{m+3}{m-2}$.

Ví dụ 14. Giải và biện luận bất phương trình:

$$x - m \geq \frac{3(x+2)}{m} - 5 \quad (2)$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (2) &\Leftrightarrow x - m + 5 - \frac{3x+6}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{mx - m^2 + 5m - 3x - 6}{m} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-3)x - (m^2 - 5m + 6)}{m} \geq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{- Nếu } m > 0 \text{ thì ta có: } (m-3)x - (m^2 - 5m + 6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)x \geq (m-2)(m-3) \quad (4)$$

+ Nếu $m = 3$ thì (4) trở thành: $0x \geq 0$, nghiệm đúng với mọi x .

$$\text{+ Nếu } m > 3 \text{ thì } (4) \Leftrightarrow x \geq \frac{(m-2)(m-3)}{m-3} \Leftrightarrow x \geq m-2.$$

$$\text{+ Nếu } 0 < m < 3 \text{ thì } (4) \Leftrightarrow x \leq \frac{(m-2)(m-3)}{m-3} \Leftrightarrow x \leq m-2.$$

$$\text{- Nếu } m < 0 \text{ thì ta có: } (m-3)x - (m^2 - 5m + 6) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)x \leq (m-2)(m-3) \Leftrightarrow x \geq \frac{(m-2)(m-3)}{m-3} \Leftrightarrow x \geq m-2$$

(vì $m-3 < 0$)

Kết luận:

- Nếu $m > 3$ hoặc $m < 0$ thì (2) có nghiệm là $x \geq m-2$.
- Nếu $m = 3$ thì (2) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $0 < m < 3$ thì (2) có nghiệm là $x \leq m-2$.
($m = 0$ thì bất phương trình không có nghĩa).

C. BÀI TẬP

4.17. Xét xem $x = -6$ có là nghiệm của bất phương trình sau hay không ?

a) $1 - 5x \leq x^2 - 4$;

b) $\frac{2}{7x-4} > \frac{1}{14-x^2}$.

4.18. Tìm m để $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình:

a) $\frac{x-13}{5} - m < 2x - \frac{m-x}{10}$;

b) $4x^2 - (m-1)x + 2 - m \geq 0$.

4.19. Giải các bất phương trình sau:

a) $1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$;

b) $\frac{(2x-1)^2}{2} - \frac{(1-3x)^2}{3} \leq x(2-x)$.

4.20. Chứng minh rằng bất phương trình $(x+6)(8-x) < 0$ không có nghiệm x mà $-6 \leq x \leq 8$.

4.21. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x+3}{x+2} \geq 1$;

b) $\frac{4-x}{x-9} - \frac{1}{x-1} > 0$.

4.22. Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình sau:

$$2x+1 > 3x-4 \text{ và } (x-1)^2 \leq (2x-3)^2.$$

4.23. Giải bất phương trình:

$$\frac{x+12}{2000} + \frac{x+15}{1997} > \frac{x+34}{1978} + \frac{x+26}{1986}.$$

4.24. Giải và biện luận bất phương trình:

a) $mx+4 \geq 2x+m^2$;

b) $(m+4)x < m^2 + 2m - 8$.

4.25. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $m^2x \geq 9x + m^2 + 3m$.

b) $m^3(x+2) \leq m^2(x-1)$.

4.26. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm:

$$(m^2 + m + 1)x + 3m \geq (m^2 + 2)x + 5m - 1.$$

4.27. Giải và biện luận bất phương trình:

$$\frac{x+3}{m} + m > x + 4.$$

4.28. Tìm m để hai bất phương trình: $x - 7 \leq 0$ và $mx \geq m + 1$ có một nghiệm chung duy nhất.

4.29. Tìm m để hai bất phương trình sau không có nghiệm chung:

$$\frac{8}{3-x} > 1 \quad \text{và} \quad x \geq 3 - mx.$$

4.30. Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương:

$$(m-1)x - m + 3 > 0 \quad \text{và} \quad (m+1)x - m + 2 > 0.$$

Chuyên đề nâng cao 1

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giá trị tuyệt đối

$$\text{Với } a \in \mathbb{R}, \text{ ta có: } |a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

2. Dấu của nhị thức bậc nhất

a) *Định nghĩa*: Nhị thức bậc nhất của x là biểu thức có dạng $f(x) = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

Số $x_0 = -\frac{b}{a}$, thỏa mãn $f(x_0) = 0$, gọi là nghiệm của nhị thức bậc nhất $f(x)$.

b) *Quy tắc dấu*: Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ cùng dấu với a khi $x > x_0$ và trái dấu với a khi $x < x_0$. Cụ thể:

– Nếu $a > 0$ thì $f(x) > 0, \forall x > x_0$ và $f(x) < 0, \forall x < x_0$.

x	$x_0 = -\frac{b}{a}$		
$f(x) = ax + b$	-	0	+

– Nếu $a < 0$ thì $f(x) < 0, \forall x > x_0$ và $f(x) > 0, \forall x < x_0$.

x	$x_0 = -\frac{b}{a}$		
$f(x) = ax + b$	+	0	-

* Quy tắc dấu ở trên có nội dung thường được nhớ là "*phải cùng, trái khác*", tức là bên *phải* nghiệm x_0 thì $f(x)$ *cùng dấu* với a , bên *trái* nghiệm x_0 thì $f(x)$ *khác dấu* với a .

II. CÁC DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG

1. **Dạng 1:** $|P(x)| = k$ (trong đó $P(x)$ là biểu thức của x , k là một số cho trước)

* *Phương pháp giải:*

– Nếu $k < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

– Nếu $k = 0$ thì ta có $|P(x)| = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$

– Nếu $k > 0$ thì ta có $|P(x)| = k \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = k \\ P(x) = -k \end{cases}$

Ví dụ 15. Giải phương trình

$$\frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3.$$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3 \Leftrightarrow 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{15}{4} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2} : \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \pm \frac{10}{3}.$$

- Trường hợp 1: $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{17}{6} \Leftrightarrow x = \frac{34}{9}.$

- Trường hợp 2: $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = -\frac{23}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{46}{9}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{46}{9}; \frac{34}{9} \right\}.$

Ví dụ 16. Tìm m để phương trình $|2 - 3x| - 1 = 2m - 7$ có nghiệm duy nhất.

Giải

Ta có: $|2 - 3x| - 1 = 2m - 7 \Leftrightarrow |2 - 3x| = 2m - 6.$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$

Vậy điều kiện của m là $m = 3$ (khi đó nghiệm duy nhất của phương trình là $x = \frac{2}{3}$).

2. Dạng 2: $|A(x)| = |B(x)|$

* *Cách giải:*

$$|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases}$$

Ví dụ 17. Giải phương trình

$$\left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| = 0.$$

Giải

Ta có: $\left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| = \left| \frac{1}{2}x + 5 \right|$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = \pm \left(\frac{1}{2}x + 5 \right).$$

$$\text{– Trường hợp 1: } \Leftrightarrow \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{2}x + 5 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x = \frac{25}{6} \Leftrightarrow x = \frac{100}{9}.$$

$$\text{– Trường hợp 2: } \Leftrightarrow \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}x - 5 \Leftrightarrow \frac{11}{8}x = -\frac{35}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{140}{33}.$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm là } S = \left\{ -\frac{140}{33}; \frac{100}{9} \right\}.$$

3. Dạng 3: $|A(x)| = B(x)$

* **Cách 1:** Mọi x mà $B(x) < 0$ đều không thỏa mãn phương trình nên ta có cách giải sau:

$$\text{Xét phương trình: } |A(x)| = B(x) \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } B(x) \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{Khi đó, (1) trở thành } |A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases}$$

Giải các phương trình và kiểm tra điều kiện (*).

* **Cách 2:** Bỏ dấu giá trị tuyệt đối bằng cách chia khoảng giá trị

– Nếu $A(x) \geq 0$ thì (1) trở thành: $A(x) = B(x)$.

Giải phương trình và kiểm tra điều kiện $A(x) \geq 0$.

– Nếu $A(x) < 0$ thì (1) trở thành: $-A(x) = B(x)$.

Giải phương trình và kiểm tra điều kiện $A(x) < 0$.

Ví dụ 18. Giải phương trình

$$|2x - 6| = x + 1 \quad (1)$$

Giải

Cách 1:

$$\text{Điều kiện: } x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

$$\text{Khi đó, (1) } \Leftrightarrow 2x - 6 = \pm (x + 1)$$

$$\text{– Trường hợp 1: } 2x - 6 = x + 1 \Leftrightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn } x \geq -1)$$

$$\text{– Trường hợp 2: } 2x - 6 = -x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn } x \geq -1)$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm là } S = \left\{ 7; \frac{5}{3} \right\}.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$$

– Trường hợp 1: Nếu $x \geq 3$ thì phương trình (1) trở thành:

$$2x - 6 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq 3)$$

– Trường hợp 2: Nếu $x < 3$ thì phương trình (1) trở thành:

$$-2x + 6 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện } x < 3)$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ 7; \frac{5}{3} \right\}$.

Nhận xét:

Ưu điểm của cách 1 là các trường hợp dùng chung một điều kiện, điều này hạn chế được sự nhầm lẫn trong bước kiểm tra. Tuy nhiên, đối với một số phương trình, cách 2 lại là sự lựa chọn bắt buộc (như các phương trình thuộc dạng 4 sau đây).

4. Dạng 4: Phương trình chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối

$$|A(x)| + |B(x)| = C(x)$$

* Cách giải:

- Lập bảng xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- Căn cứ bảng xét dấu, chia từng khoảng để giải phương trình (kiểm tra điều kiện tương ứng).

Ví dụ 19. Giải phương trình

$$|x + 1| + |x - 3| = 2x - 1 \quad (2)$$

Giải

$$\text{Ta có: } |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{nếu } x < -1 \end{cases} \text{ và } |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng sau:

x	-1	3
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$
$ x-3 $	$-x+3$	$x-3$

+ Trường hợp 1: Nếu $x < -1$ thì phương trình (2) trở thành:

$$-x-1-x+3=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \text{ (không thỏa mãn } x < -1 \text{)}.$$

+ Trường hợp 2: Nếu $-1 \leq x \leq 3$ thì phương trình (2) trở thành:

$$x+1-x+3=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn } -1 \leq x \leq 3 \text{)}.$$

+ Trường hợp 3: Nếu $x > 3$ thì phương trình (2) trở thành:

$$x+1+x-3=2x-1$$

$$\Leftrightarrow 0x = 1: \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 20. Giải phương trình:

$$\left|x + \frac{1}{1.3}\right| + \left|x + \frac{1}{3.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.7}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{97.99}\right| = 50x$$

Giải

Nhận thấy vế trái không âm với mọi x nên điều kiện cần để x là nghiệm của phương trình là vế phải không âm, tức là: $50x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Khi đó các biểu thức trong tất cả các dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái đều dương. Vì vậy phương trình trở thành:

$$\left(x + \frac{1}{1.3}\right) + \left(x + \frac{1}{3.5}\right) + \dots + \left(x + \frac{1}{97.99}\right) = 50x$$

$$\Leftrightarrow 49x + \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{97.99}\right) = 50x$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{97.99}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{49}{99} \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq 0)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{49}{99}$.

5. Dạng 5: $|A(x)| + |B(x)| = |A(x) + B(x)|$

**Cách giải:*

Vì $|A(x) + B(x)| \leq |A(x)| + |B(x)|$ nên phương trình tương đương với điều kiện xảy ra đẳng thức: $A(x).B(x) \geq 0$.

Ví dụ 21. Giải phương trình sau:

$$|5x + 1| + |3 - 2x| = |4 + 3x|.$$

Giải

Ta có: $|4 + 3x| = |(5x + 1) + (3 - 2x)| \leq |5x + 1| + |3 - 2x|, \forall x \in \mathbb{R}$

do đó $|5x + 1| + |3 - 2x| = |4 + 3x| \Leftrightarrow (5x + 1)(3 - 2x) \geq 0$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\frac{1}{5} \qquad \qquad \qquad \frac{3}{2}$			
$5x + 1$	-	0	+	+
$3 - 2x$	+		+	0 -
$(5x + 1)(3 - 2x)$	-	0	+	0 -

Từ bảng xét dấu, ta có: $(5x + 1)(3 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$ (hay gọn

hơn là $S = \left[-\frac{1}{5}; \frac{3}{2} \right]$).

Nhận xét:

Trong lời giải trên, ta đã sử dụng quy tắc xét dấu của nhị thức bậc nhất. Ngoài ra, ta có thể giải theo cách sau đây:

$$\begin{aligned}(5x+1)(3-2x) &\geq 0 \Leftrightarrow 2(5x+1)5(3-2x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (10x+2)(10x-15) \leq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Trong hai số $10x+2$ và $10x-15$ phải có một số bằng không hoặc hai số đó trái dấu. Mà $10x+2 > 10x-15$, nên:

$$10x+2 \geq 0 \geq 10x-15$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x+2 \geq 0 \\ 10x-15 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 22. Giải bất phương trình:

$$|x+3|+|3x-1|+|2x-1|=3.$$

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } |x+3|+|3x-1|+|2x-1| &= |x+3|+|-3x+1|+|2x-1| \\ &\geq |(x+3)+(-3x+1)|+|2x-1| = |-2x+4|+|2x-1| \\ &\geq |(-2x+4)+(2x-1)| = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Do đó, phương trình tương đương với điều kiện xảy ra đẳng thức:

$$\begin{aligned}\begin{cases} (x+3)(-3x+1) \geq 0 \\ (-2x+4)(2x-1) \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+9)(3x-1) \leq 0 \\ (2x-4)(2x-1) \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9 \geq 0 \geq 3x-1 \\ 2x-4 \leq 0 \leq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9 \geq 0 \\ 3x-1 \leq 0 \\ 2x-4 \leq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq \frac{1}{3} \\ x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{không có } x \text{ thỏa mãn.}\end{aligned}$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

C. BÀI TẬP

Giải các phương trình sau (4.31 – 4.40):

4.31. a) $|2x - 5| = 4$;

b) $\frac{3}{4} - |2x + 1| = \frac{7}{8}$.

4.32. a) $6,5 - \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2$;

b) $\frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2}$.

4.33. a) $|2x - 3| - |3x + 2| = 0$;

b) $|7x + 1| - |5x + 6| = 0$.

4.34. a) $\left| \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| = |4x - 1|$;

b) $\left| \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \right| - \left| \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \right| = 0$.

4.35. a) $\left| \frac{1}{2}x \right| = 3 - 2x$;

b) $|5x| = x - 12$.

4.36. a) $|2x - 5| = x + 1$;

b) $|7 - 2x| + 7 = 2x$.

4.37. a) $|x + 5| - |1 - 2x| = x$;

b) $|x - 2| + |x - 3| + |x - 4| = 2$.

4.38. a) $4|3x - 1| + |x| - 2|x - 5| + 7|x - 3| = 12$;

b) $3|x + 4| - |2x + 1| - 5|x + 3| + |x - 9| = 5$.

4.39. a) $\left| x + \frac{1}{1.2} \right| + \left| x + \frac{1}{2.3} \right| + \left| x + \frac{1}{3.4} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{99.100} \right| = 100x$;

b) $\left| x + \frac{1}{1.5} \right| + \left| x + \frac{1}{5.9} \right| + \left| x + \frac{1}{9.13} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{397.401} \right| = 101x$.

4.40. a) $\left|2x - 1\right| + \frac{1}{2} = \frac{4}{5};$

b) $\left|x^2 + 2\right| \left|x - \frac{1}{2}\right| = x^2 + 2.$

4.41. Tìm x, y thỏa mãn:

a) $|3 - 2x| + |4y + 5| = 0;$

b) $|x - y| + \left|y + \frac{9}{25}\right| \leq 0.$

4.42. Tìm x, y thỏa mãn:

a) $(x + y)^{2012} + 2013|y - 1| = 0;$

b) $2(x - 5)^4 + 5|2y - 7|^5 = 0.$

4.43. Giải các phương trình sau:

a) $|x + 5| + |3 - x| = 8;$

b) $2|x - 3| + |2x + 5| = 11.$

4.44. Giải các phương trình sau:

a) $|x + 1| + |2x - 3| = |3x - 2|;$

b) $|5 - x| + 3|x - 3| = 2.$

Chuyên đề nâng cao 2

BẤT ĐẲNG THỨC

VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

A. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP

1. Phương pháp biến đổi tương đương

Nội dung của phương pháp này là dùng các phép biến đổi tương đương đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức đã được khẳng định là đúng.

Ví dụ 23. Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

Giải

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi a, b, c nên bất đẳng thức (1) đúng với mọi a, b, c .

Đẳng thức xảy ra khi $a - b = b - c = c - a = 0$ hay $a = b = c$.

Ví dụ 24. Cho $m, n > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n} \quad (2)$$

Giải

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow n(m+n)a^2 + m(m+n)b^2 \geq mn(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow mna^2 + n^2a^2 + m^2b^2 + mnb^2 \geq mna^2 + 2mnab + mnb^2$$

$$\Leftrightarrow n^2a^2 - 2mnab + m^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (na - mb)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức (2) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $na - mb = 0$ hay $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$.

Chú ý:

Bất đẳng thức (2) là một dạng đặc biệt của bất đẳng thức Schwarz sau đây:
Với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, ta có:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$.

2. Phương pháp phản chứng

Nội dung của phương pháp là : Để chứng minh một khẳng định là đúng ta giả sử ngược lại khẳng định đó sai. Sau đó bằng suy luận và các kết quả đã biết ta đưa đến một điều mâu thuẫn. Để không xảy ra điều mâu thuẫn này thì điều giả sử là sai, tức là khẳng định ban đầu là đúng.

Ví dụ 25. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 = x - y$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 < 1$.

(Để thi vào 10 chuyên Chu Văn An và Hà Nội – Amsterdam, 1994)

Giải

Từ giả thiết ta có: $x > y > 0$.

Giả sử $x^2 + y^2 \geq 1$, ta có: $x^3 + y^3 = x - y \leq (x - y)(x^2 + y^2)$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \leq x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$$

$$\Leftrightarrow xy^2 - x^2y - 2y^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy(y - x) + (-2y^3) \geq 0 : \text{ vô lí, vì } y - x < 0 \text{ và } -2y^3 < 0.$$

Điều vô lí này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai !

Vậy $x^2 + y^2 < 1$.

Ví dụ 26. Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x + y + xy \leq 1 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $|x| \leq 2, |y| \leq 2$.

(Để thi vào lớp 10 chuyên, ĐH KHTN – ĐHQG HN, 2000)

Giải

Vì vai trò của x và y là như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $|x| \leq 2$, việc chứng minh $|y| \leq 2$ được thực hiện tương tự.

Giả sử phản chứng rằng $|x| > 2$, ta có:

– Nếu $x > 2$ thì từ (1) ta có: $y \leq 1 - x < -1 \Rightarrow xy < -2$.

– Nếu $x < -2$ thì từ (1) ta có: $y \geq -1 - x > 1 \Rightarrow xy < -2$.

Do vậy nếu $|x| > 2$ thì $xy < -2$. Mặt khác, $x + y \leq 1$ nên suy ra:

$$x + y + xy < -1 : \text{mâu thuẫn với (2) !}$$

Mâu thuẫn đó chứng tỏ điều giả sử là sai, tức là phải có $|x| \leq 2$. (dpcm)

3. Sử dụng bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Cơ sở của phương pháp này là hai bất đẳng thức sau:

$$i) |x| \geq 0, \forall x \text{ và } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$ii) |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \text{ và } |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

Ví dụ 27. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{21|4x + 6| + 33}{3|4x + 6| + 5}.$$

Giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{(21|4x + 6| + 35) - 2}{3|4x + 6| + 5} = 7 - \frac{2}{3|4x + 6| + 5}.$$

$$\text{Vì } 3|4x + 6| + 5 \geq 5, \forall x \text{ nên } \frac{2}{3|4x + 6| + 5} \leq \frac{2}{5}, \forall x$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3|4x + 6| + 5} \geq -\frac{2}{5}, \forall x \Rightarrow 7 - \frac{2}{3|4x + 6| + 5} \geq 7 - \frac{2}{5}, \forall x$$

$$\text{hay } P \geq \frac{33}{5}, \forall x.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{33}{5} \text{ khi } |4x + 6| = 0 \text{ hay } x = -\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 28. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = -3|x - 4| + 8 - 3x.$$

Giải

$$\text{Ta có: } |x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{nếu } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{nếu } x < 4 \end{cases}$$

$$- \text{Nếu } x \geq 4 \text{ thì } Q = -3(x - 4) + 8 - 3x = -6x + 20.$$

$$\text{Mặt khác, vì } x \geq 4 \text{ nên } -6x \leq -24 \Rightarrow -6x + 20 \leq -24 + 20$$

$$\text{hay } Q \leq -4.$$

– Nếu $x < 4$ thì $Q = -3(-x + 4) + 8 - 3x = -4$.

Kết hợp hai trường hợp, ta có: $Q \leq -4$, với mọi x .

Vậy $Q_{\max} = -4$ khi $x = 4$.

Ví dụ 29. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = |3x - 7| + |3x + 2| + 8.$$

Giải

Ta có: $|3x - 7| + |3x + 2| = |-3x + 7| + |3x + 2| \geq |(-3x + 7) + (3x + 2)| = 9$, với mọi x .

Do đó $M \geq 9 + 8 = 17$, với mọi x .

Vậy $M_{\min} = 17$ khi $(-3x + 7)(3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow (3x - 7)(3x + 2) \leq 0$,

mà $3x - 7 < 3x + 2$ nên $3x - 7 \leq 0 \leq 3x + 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$.

4. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy

Với hai số không âm a, b bất kì ta luôn có:

$$\textcircled{1} \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(Trung bình cộng của hai số không âm lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng)

$$\textcircled{2} \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \text{ hoặc } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Trên đây là bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, $\textcircled{1}$ gọi là dạng có căn và $\textcircled{2}$ gọi là dạng không căn. Bất đẳng thức này còn được mở rộng cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) như sau:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \dots a_n$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Sau đây là một số kỹ thuật tiêu biểu sử dụng bất đẳng thức Cauchy trong bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

❶ Kỹ thuật sử dụng trực tiếp

Ví dụ 30. Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 2$. Chứng minh rằng:

$$a + b \geq 2.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\frac{1}{a^2}; \frac{1}{b^2}$ ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}} = \frac{2}{ab}$$

Kết hợp với giả thiết, ta có: $2 \geq \frac{2}{ab} \Rightarrow ab \geq 1$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a, b ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (2)$$

Kết hợp với (1), ta có: $a + b \geq 2$. (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi cả (1) và (2) đều xảy ra dấu bằng, hay $a = b = 1$.

Nhận xét:

Trong ví dụ trên ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy với kỹ thuật đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân. Kỹ thuật này được áp dụng với bất đẳng thức có dạng tổng lớn hơn tích hoặc với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng tổng.

Ví dụ 31. Cho hai số không âm a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 6.$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ngữ, ĐHNN – ĐHQG HN, 2008)

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $3a$ và $a + 2b$ ta có:

$$a\sqrt{3a(a+2b)} \leq a \cdot \frac{3a + (a+2b)}{2} = 2a^2 + ab \quad (1)$$

Tương tự, ta có: $b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 2b^2 + ab$ (2)

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2) ta có:

$$a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 2(a^2 + b^2) + 2ab \leq 4 + 2ab$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a và b ta có:

$$4 + 2ab \leq 4 + (a^2 + b^2) \leq 4 + 2 = 6$$

Từ đó suy ra: $a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 6$ (đpcm)

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} 3a = a + 2b \\ 3b = b + 2a \\ a^2 + b^2 = 2 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Nhận xét:

Trong ví dụ trên ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy với kỹ thuật đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng. Kỹ thuật này được áp dụng với bất đẳng thức có dạng tích nhỏ hơn tổng hoặc với bài toán tìm giá trị lớn nhất của biểu thức dạng tích.

❷ Kỹ thuật tách nghịch đảo

Từ bất đẳng thức Cauchy, ta có: $a + \frac{1}{a} \geq 2$, với mọi $a > 0$.

Để áp dụng kết quả này, với mỗi hạng tử a , ta tạo ra hạng tử nghịch đảo $\frac{1}{a}$ và sử dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Ví dụ 32. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng

$$a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3.$$

Giải

$$\text{Ta có: } P = a + \frac{1}{b(a-b)} = (a-b) + b + \frac{1}{b(a-b)}.$$

(vì $a > b > 0$ nên $P > 0$).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$P^3 = \left[(a-b) + b + \frac{1}{b(a-b)} \right]^3 \geq 3^3 \cdot (a-b) \cdot b \cdot \frac{1}{b(a-b)} = 3^3$$

Suy ra: $P \geq 3$. (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $a - b = b = \frac{1}{b(a-b)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Nhận xét:

Vì phân thức $\frac{1}{b(a-b)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a-b}$, nên ta tách hạng tử a thành hai hạng tử là b và $a-b$.

Ví dụ 33. Với $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = 3x^2 + \frac{2}{x^3}.$$

Giải

Ta có: $Q = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}$. Vì $x > 0$ nên $Q > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$Q^5 = \left(x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)^5 \geq 5^5 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^3} = 5^5$$

$\Rightarrow Q \geq 5$, với mọi $x > 0$.

Vậy $Q_{\min} = 5$ khi $x^2 = x^2 = x^2 = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}$ hay $x = 1$.

③ Kỹ thuật ghép cặp

Ví dụ 34. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

(Đề thi HSG 9, TP Hồ Chí Minh, 2009)

Giải

Vì $a, b, c > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c \quad (2)$$

$$\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a \quad (3)$$

Cộng ba bất đẳng thức (1), (2), (3) vế với vế ta được:

$$2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geq 2a + 2b + 2c \text{ hay } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{ab}{c} = \frac{bc}{a} = \frac{ca}{b}$ hay $a = b = c$.

Nhận xét:

Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức cần chứng minh là như nhau (ta nói chúng có tính chất *đối xứng luân phiên* hay *đối xứng vòng tròn*) nên ta có thể ghép mỗi hạng tử trong vế trái lần lượt với từng hạng tử còn lại. Đó là nội dung của kỹ thuật *ghép cặp* hay còn gọi là *ghép đối xứng*.

④ Kỹ thuật nhân thêm hằng số

Ví dụ 35. Với $x \geq 9$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x-9}}{5x}$.

Giải

$$\text{Ta có: } P^2 = \frac{x-9}{25x^2} \Rightarrow 9P^2 = \frac{9(x-9)}{25x^2}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: } 9(x-9) \leq \left[\frac{9+(x-9)}{2} \right]^2 = \frac{x^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } 9P^2 \leq \frac{\frac{x^2}{4}}{25x^2} = \frac{1}{100} \Rightarrow P^2 \leq \left(\frac{1}{30} \right)^2 \Rightarrow P \leq \frac{1}{30}, \text{ với mọi } x \geq 9.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{1}{30} \text{ khi } 9 = x - 9 \text{ hay } x = 18 \text{ (thỏa mãn).}$$

Nhận xét:

Sau khi tính P^2 , việc nhân thêm hằng số 9 rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy giúp ta đạt hai mục đích: triệt tiêu (-9) ở tử và tạo ra x^2 để rút gọn với mẫu.

5. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Ví dụ 36. Cho $a + b = 2$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 \geq 2$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho 2 cặp số $(1; 1)$ và $(a; b)$ ta có:

$$(1.a + 1.b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2)$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết, ta có: } 2^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2 \quad (1)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho 2 cặp số $(1; 1)$ và $(a^2; b^2)$ ta có:

$$(1.a^2 + 1.b^2)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^4 + b^4)$$

$$\text{Kết hợp với (1), ta có: } 2^2 \leq (a^2 + b^2)^2 \leq 2(a^4 + b^4) \Rightarrow a^4 + b^4 \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = b \\ a^2 = b^2 \end{cases}$ hay $a = b$.

Kết hợp với giả thiết ta có: $a = b = 1$.

Ví dụ 37. Cho $36x^2 + 16y^2 = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = y - 2x + 5.$$

Giải

$$\text{Ta có: } (y - 2x)^2 = (-2x + y)^2 = \left[\frac{1}{3} \cdot (-6x) + \frac{1}{4} \cdot (4y) \right]^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho 2 cặp số $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$ và $(-6x; 4y)$, ta có:

$$(y - 2x)^2 \leq \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right] \cdot [(-6x)^2 + (4y)^2] = \frac{5^2}{3^2 \cdot 4^2} \cdot (36x^2 + 16y^2) = \frac{5^2}{4^2}.$$

$$\text{Suy ra } |y - 2x| \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq y - 2x \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \leq y - 2x + 5 \leq \frac{25}{4} \text{ hay } \frac{15}{4} \leq P \leq \frac{25}{4}.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{25}{4} \text{ khi } \begin{cases} -18x = 16y \\ y - 2x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{5} \\ y = \frac{9}{20} \end{cases}$$

$$\text{và } P_{\min} = \frac{15}{4} \text{ khi } \begin{cases} -18x = 16y \\ y - 2x = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{-9}{20} \end{cases}$$

B. BÀI TẬP

4.45. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 < a^3 + b^3 + c^3.$$

4.46. Cho $0 \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1.$$

(Để thi vào lớp 10 chuyên, ĐH KHTN – ĐHQG HN, 1998)

4.47. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{15|x+1|+32}{6|x+1|+8}.$$

4.48. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = 3|x-1|+4-3x.$$

4.49. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = |x+3|+|2x-5|+|x-2|.$$

4.50. Cho $2x+y=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$D = |2x+3|+|5-y|+2.$$

4.51. Cho $0 < a, b, c < 2$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai:

$$a(2-b) > 1; b(2-c) > 1; c(2-a) > 1.$$

4.52. Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 < c^2.$$

(Để thi vào lớp 10 chuyên Thái Bình, 2007)

4.53. Cho các số dương a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐH Sư phạm Hà Nội, 1998)

4.54. Cho $a, b > c$ và $c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

(Đề thi HSG 9 Tp. Hồ Chí Minh, 2002)

4.55. Cho $a > b \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3.$$

4.56. Với $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{3x^4 + 16}{x^3}.$$

4.57. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc.$$

4.58. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{c+2a} \right).$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ngữ, ĐHNN – ĐHQG Hà Nội, 2007)

4.59. Cho $a, b \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

4.60. Cho $a^2 + b^2 + 9 = 6a + 4b$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = 3a + 4b.$$

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Chuyên đề 1

ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tỷ số của hai đoạn thẳng

Định nghĩa: Tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

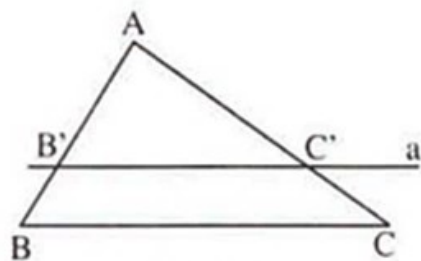
2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Định nghĩa: Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

3. Định lý Ta-lét trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Hình 3.1

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$, điểm E thuộc đoạn thẳng AD sao cho $AE = 2DE$. Gọi I là giao điểm của BE và AC.

Tính tỷ số $\frac{AI}{IC}$

$$\frac{AI}{IC}$$

Nhận xét: Để xuất hiện các đoạn thẳng tỉ lệ ta vận dụng định lý Ta-lét nên cần vẽ thêm đường thẳng song (DN//BI). Mặt khác ta phải khéo léo vận dụng các

tỷ số đã cho và áp dụng hệ thức $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}$.

Giải

Qua D kẻ đường thẳng song song với BI cắt AC tại N, áp dụng định lí Ta-lét:

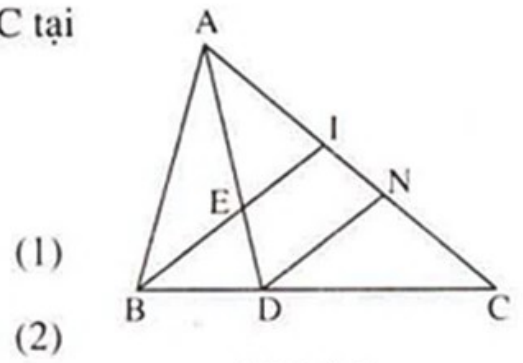
Trong $\triangle AND$, $EN \parallel DN$ nên: $\frac{AI}{IN} = \frac{AE}{ED} = 2$

(vì $AE = 2ED$);

Trong $\triangle BCI$, $BI \parallel DN$ nên $\frac{IN}{IC} = \frac{BD}{BC} = \frac{2}{5}$

(vì $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BD}{2} = \frac{DC}{3} = \frac{BD+DC}{2+3} = \frac{BC}{5}$)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{AI}{IN} \cdot \frac{IN}{IC} = 2 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AI}{IC} = \frac{4}{5}$.



Hình 3.2

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AM, các tia BI, CI lần lượt cắt các cạnh AC, AB tại D và E. Chứng minh rằng: $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$.

Nhận xét: Để chứng minh hai tỉ số $\frac{AE}{AB}; \frac{AD}{AC}$ bằng nhau ta chứng minh chúng cùng bằng một tỉ số trung gian. Muốn áp dụng định lí Ta-lét phải làm xuất hiện đường thẳng song song, ở đây để ý M là trung điểm của BC nên nghĩ đến việc tạo ra hình bình hành để có các cạnh đối song song.

Giải

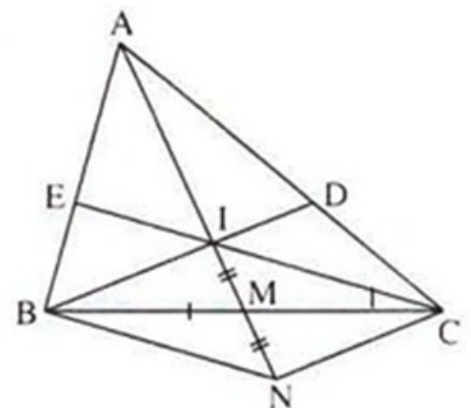
Dựng N là điểm đối xứng của I qua M, do M là trung điểm BC nên tứ giác BICN là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường). Suy ra $CI \parallel BN$ và $BI \parallel CN$.

Áp dụng định lí Ta-lét cho:

$\triangle ABN$, $EN \parallel BI$ nên $\frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AN}$;

$\triangle ACN$, $ID \parallel CN$ nên $\frac{AI}{AN} = \frac{AD}{AC}$.

Do đó $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$.



Hình 3.3

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM và trọng tâm G. Một đường thẳng (d) bất kỳ qua G cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại H và K. Khi (d) thay đổi qua G, chứng tỏ rằng các tổng $\frac{AB}{AH} + \frac{AC}{AK}$ và $\frac{BH}{AH} + \frac{CK}{AK}$ có giá trị không đổi.

Nhận xét:

Dự đoán: Khi (d) // BC thì $\frac{AB}{AH} = \frac{AM}{AG} = \frac{AC}{AK} = \frac{3}{2}$ nên $\frac{AB}{AH} + \frac{AC}{AK} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

và $\frac{BH}{AH} = \frac{GM}{AG} = \frac{CK}{AK} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{BH}{AH} + \frac{CK}{AK} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Do (d) là đường thẳng bất kỳ qua G nên để vận dụng định lí Ta-lét ta vẽ các đường thẳng qua B, C cùng song song với (d).

Giải

Qua B và C kẻ các đường thẳng song song với (d) lần lượt cắt AM tại

E và F. Áp dụng định lí Ta-lét cho:

$$\triangle ABE, HG // BE \text{ nên } \frac{AB}{AH} = \frac{AE}{AG};$$

$$\triangle AFC, GK // FC \text{ nên } \frac{AC}{AK} = \frac{AF}{AG}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{AB}{AH} + \frac{AC}{AK} = \frac{AE + AF}{AG} \quad (1)$$

$$\text{Mà } AE = AM - ME; AF = AM + MF \Rightarrow AE + AF = 2AM$$

$$(\text{vì } \triangle BEM = \triangle CFM \text{ (g.c.g)} \Rightarrow ME = MF).$$

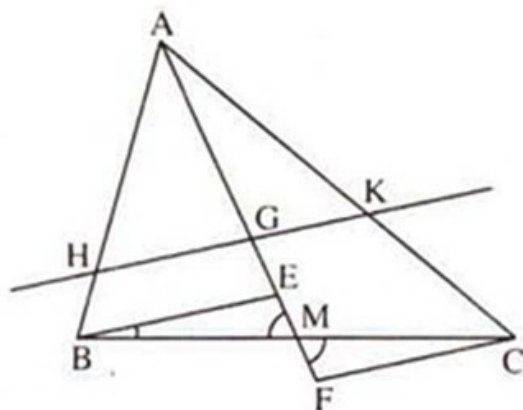
$$\text{Lại có: } AM = \frac{3}{2} AG \text{ (do G là trọng tâm } \triangle ABC). \text{ Từ (1) cho:}$$

$$\frac{AB}{AH} + \frac{AC}{AK} = \frac{2AM}{AG} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AH + BH}{AH} + \frac{AK + CK}{AK} = 3 \Rightarrow 2 + \frac{BH}{AH} + \frac{CK}{AK} = 3 \Rightarrow \frac{BH}{AH} + \frac{CK}{AK} = 1.$$

Chú ý: Quá trình giải hoàn toàn tương tự cách tính tổng $\frac{AB}{AH} + \frac{AC}{AK}$, ta có thể

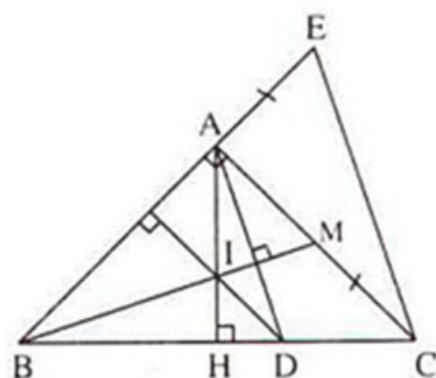
tính tổng $\frac{BH}{AH} + \frac{CK}{AK}$ nếu bài toán chỉ yêu cầu tính một trong hai tổng trên.



Hình 3.4

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của AC. Đường thẳng qua A và vuông góc với BM cắt BC tại D. Tính $\frac{DC}{DB}$.

Nhận xét: Để ý $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên đường cao AH kẻ từ A cũng là đường trung tuyến, giao điểm I của BM và AH vừa là trọng tâm $\triangle ABC$ vừa là trực tâm $\triangle ABD$. Như vậy ta làm xuất hiện DI song song với AC để vận dụng định lí Ta-lét tính tỉ số $\frac{DC}{DB}$.



Hình 3.5

Giải

Kẻ đường cao AH của $\triangle ABC$, cắt BM tại I.

Do $BI \perp AD$ nên I là trực tâm $\triangle ABD \Rightarrow DI \perp AB$

$\Rightarrow DI \parallel AC$ (vì cùng vuông góc AB).

Trong $\triangle BMC$, $DI \parallel MC$ nên: $\frac{DC}{DB} = \frac{IM}{IB}$ (định lí Ta-lét).

Mặt khác, $\triangle ABC$ cân tại A nên AH là đường trung tuyến $\Rightarrow I$ là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm).

$\Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm).

Vậy: $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$.

Chú ý: Nếu từ C ta kẻ đường thẳng song song với AD ta có cách giải khác.

Cách khác: Dựng đường thẳng qua C song song với AD cắt đường thẳng AB tại E.

Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{MAD}$ (cùng phụ với $\widehat{AMB}$), $\widehat{MAD} = \widehat{ACE}$ (so le trong, $AD \parallel CE$)

Suy ra: $\widehat{ABM} = \widehat{ACE}$. Do đó: $\triangle ABM = \triangle ACE$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AM$.

Áp dụng Ta-lét với $AD \parallel CE$: $\frac{DC}{DB} = \frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$.

C. BÀI TẬP

3.1. Cho G là trọng tâm tam giác ABC. Qua G vẽ đường thẳng song song với AB và AC cắt BC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng:

a) $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$;

b) $BD = DE = EC$.

3.2. Đường thẳng d cắt các cạnh AB, AD và đường chéo AC của hình bình hành ABCD lần lượt tại E, F và O. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AO}$.

3.3. Cho tam giác ABC. Từ điểm D trên cạnh AC kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại E. Trên tia đối của tia BA lấy điểm I sao cho $BI = DC$. Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $\frac{DK}{KI} = \frac{AB}{AC}$.

3.4. Cho tam giác ABC, gọi M là điểm bất kỳ thuộc miền trong của tam giác ABC, tia AM cắt BC tại N. Dựng hình bình hành ADME ($D \in AB, E \in AC$). Chứng minh rằng tổng $\frac{AD}{AB} + \frac{AE}{AC} + \frac{MN}{AN}$ có giá trị không đổi.

3.5. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BO, AO. Lấy điểm F trên cạnh AB sao cho tia FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K. Chứng minh rằng:

a) $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$;

b) $BE + AK \geq BC$.

3.6. Cho tứ giác ABCD, gọi O là trung điểm của cạnh BC và E là điểm đối xứng của D qua O. Một điểm M di động trên cạnh AD, đường thẳng EM cắt OA tại I. Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại K và H.

Chứng minh rằng biểu thức $\frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AH} - \frac{AD}{AM}$ có giá trị không đổi.

Chuyên đề 2

ĐỊNH LÝ ĐẢO VÀ HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ TA-LÉT

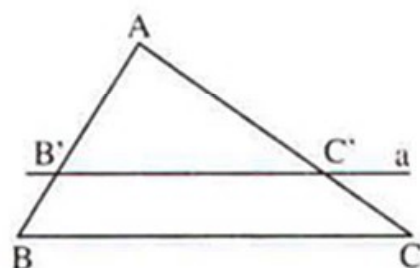
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý Ta-lét đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

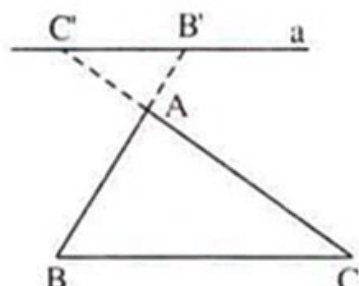
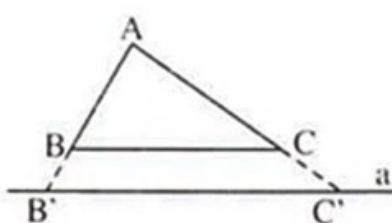
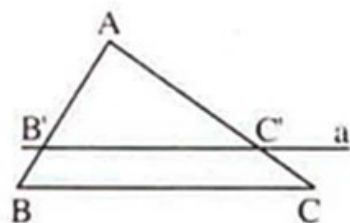
Cho tam giác ABC

$$\left[\begin{array}{l} \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \\ \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'} \\ \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} \end{array} \right] \Rightarrow a \parallel BC.$$



Hình 3.6

2. Hệ quả của định lý Ta-lét



Hình 3.7

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh (hoặc cắt phần kéo dài của hai cạnh) của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Cho tam giác ABC: $a \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A. Đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Vẽ BE $\perp$ CD tại E, gọi M là giao điểm của AD và BE. Vẽ EN $\perp$ BD tại N. Chứng minh rằng:

a) $MN \parallel AB$.

b) M là trung điểm của BE.

Nhận xét: Để chứng minh $MN \parallel AB$ ta nghĩ đến dùng định lí đảo Ta-lét.

Khi đó ta cần chứng minh $\frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DB}$. Vận dụng định lí Ta-lét để chứng minh từng tỉ số trên bằng một tỉ số trung gian.

Chứng minh M là trung điểm BE, ta dùng tính chất: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mà $b = d$ nên $a = c$.

Giải

a) Ta có $BE \perp CD$ (gt), $AC \perp BE$ (gt) $\Rightarrow BE \parallel AC$.

Xét $\triangle DAC$ có $ME \parallel AC$: $\frac{DE}{DC} = \frac{DM}{DA}$ (định lí Ta-lét).

Tương tự có $\frac{DE}{DC} = \frac{DN}{DB}$.

Xét $\triangle DBA$ có $\frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DB} \left(= \frac{DE}{DC} \right) \Rightarrow MN \parallel AB$
(định lí Ta-lét đảo).

b) Gọi F là giao điểm của AC và BD.

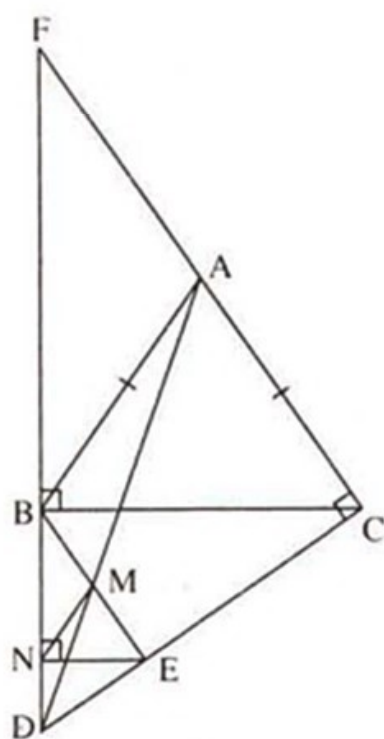
Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ABF} = \widehat{ACB} + \widehat{AFB} = 90^\circ$, mà
 $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

nên $\widehat{ABF} = \widehat{AFB} \Rightarrow \triangle ABF$ cân tại A $\Rightarrow AB = AF$.
Vậy $AC = AF (=AB)$.

$\triangle DAC$ có $ME \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{AC} = \frac{DM}{DA}$ (hệ quả của định lí Ta-lét);

$\triangle DAF$ có $MB \parallel AF \Rightarrow \frac{MB}{AF} = \frac{DM}{DA}$ (hệ quả của định lí Ta-lét).

Do đó $\frac{ME}{AC} = \frac{MB}{AF} \left(= \frac{DM}{DA} \right)$. Vậy $ME = MB$.



Hình 3.8

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt BD tại E. Đường thẳng qua B và song song với AD cắt AC ở F. Chứng minh EF song song với DC.

Nhận xét: Vận dụng định lí đảo Ta-lét để chứng minh $EF \parallel CD$, nghĩa là ta cần chứng minh: $\frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OC}$. Để ý $\triangle OAE$ và $\triangle OBC$ có $AE \parallel BC$, $\triangle OAD$ và $\triangle OFB$ có $AD \parallel BF$, khi ấy vận dụng hệ quả định lí Ta-lét ta được các tỉ số trung gian.

Dựa vào tính chất: $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}$ ta thu được điều phải chứng minh.

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

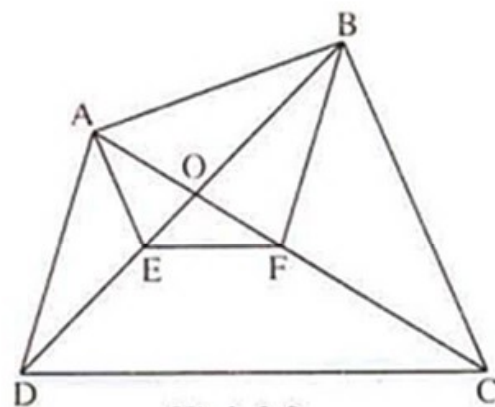
$\triangle OAE$ và $\triangle OBC$ có $AE \parallel BC$ nên:

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \text{ (hệ quả định lí Ta-lét);}$$

$\triangle OAD$ và $\triangle OFB$ có $AD \parallel BF$ nên:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OF}{OA} \text{ (hệ quả Ta-lét)}$$

Suy ra: $\frac{OE}{OB} \cdot \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OF}{OA} \Rightarrow \frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OC} \Rightarrow EF \parallel CD$ (định lí đảo Ta-lét).



Hình 3.9

Ví dụ 3: Cho hình thang $ABCD$ có AB là đáy nhỏ, gọi O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AD và BC theo thứ tự tại M, N . Chứng minh rằng: $OM = ON$.

Nhận xét: Áp dụng định lí Ta-lét và hệ quả, ta chứng minh: $\frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB}$.

Giải

Áp dụng định lí Ta-lét trong $\triangle ABD$, $OM \parallel AB$ nên:

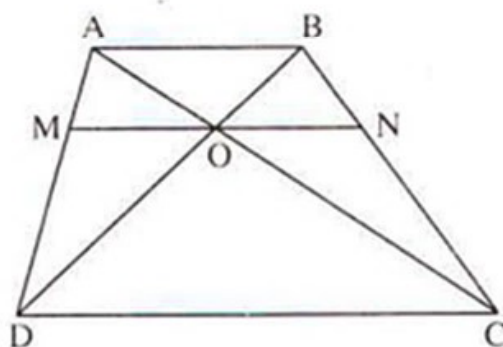
$$\frac{OM}{AB} = \frac{OD}{DB} \quad (1)$$

Trong $\triangle BDC$, $ON \parallel CD$: $\frac{OD}{DB} = \frac{NC}{BC} \quad (2)$

Theo hệ quả Ta-lét, $ON \parallel AB$ nên

$$\frac{NC}{BC} = \frac{ON}{AB} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$.



Hình 3.10

Chú ý:

1. Ta có: $\frac{ON}{CD} = \frac{OB}{DB}$. Kết hợp với (1) ta được: $\frac{OM}{AB} + \frac{ON}{CD} = \frac{OD+OB}{DB} = \frac{DB}{DB} = 1$.

Do $OM = ON$ nên ta có: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$. Từ đó ta có bài toán:

"Cho hình thang $ABCD$ có AB là đáy nhỏ, gọi O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AD và BC theo thứ tự tại M, N .

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.

2. Xét MN là đường thẳng không qua O và cắt BD, AC tại E và F . Lí luận tương tự như trên ta cũng được $ME = NF$. Từ đó ta có bài toán:

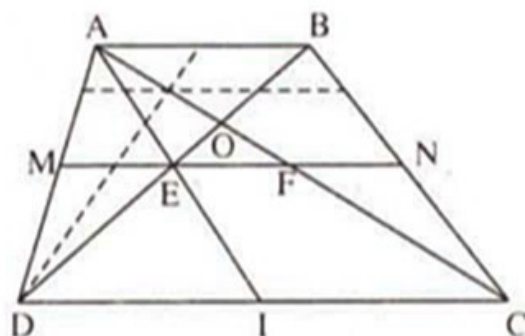
"Cho hình thang $ABCD$ có AB là đáy nhỏ. Kẻ đường thẳng bất kỳ song song với AB , cắt AD, BC, BD và AC theo thứ tự tại M, N, E, F . Chứng minh rằng $ME = NF$ ".

3. **Đặt vấn đề:** Ta xác định đường thẳng MN song song với AB , thoả mãn $ME = EF = NF$.

Gọi I là giao điểm của tia AE và CD .

Do: $\frac{ME}{DI} = \frac{EF}{IC}$ nên $ME = EF \Leftrightarrow$

$DI = IC \Leftrightarrow I$ là trung điểm CD .



Hình 3.11

Từ đó suy ra cách xác định đường thẳng MN . Ta có bài toán:

"Cho hình thang $ABCD$ có AB là đáy nhỏ. Gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh AD . Qua M kẻ đường thẳng song song với AB , cắt BC, BD và AC theo thứ tự tại N, E, F . Xác định vị trí đường thẳng MN sao cho $ME = EF = NF$ ".

Sai lầm: Đa số chỉ xác định một đường thẳng MN thoả mãn yêu cầu bài toán, bỏ qua trường hợp I là trung điểm cạnh đáy còn lại của hình thang.

Ví dụ 4: (Bổ đề Hình thang)

Chứng minh rằng trong hình thang có hai đáy không bằng nhau, đường thẳng đi qua giao điểm các đường chéo và đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên thì đi qua trung điểm của hai đáy.

Giải

Xét hình thang $ABCD$ có AB là đáy nhỏ, gọi O là giao điểm hai đường chéo,

S là giao điểm hai đường thẳng AD, BC. Đường thẳng SO cắt AB, CD lần lượt tại M, N. Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét:

$$\triangle SDN, MA \parallel DN \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{SM}{SN};$$

$$\triangle SNC, MB \parallel NC \Rightarrow \frac{MB}{NC} = \frac{SM}{SN}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AM}{DN} = \frac{MB}{NC} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{AM}{NC} = \frac{OM}{ON} = \frac{MB}{ND} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) có: } \frac{AM^2}{DN \cdot NC} = \frac{MB^2}{NC \cdot ND} \Rightarrow MA^2 = MB^2 \Rightarrow MA = MB.$$

Theo (1) ta được $NC = ND$.

Khai thác: Xét bài toán đảo của Ví dụ 4: dựng hình chỉ bằng thước kẻ.

Bài toán 1: Cho trước một đoạn thẳng AB và trung điểm M của nó, $C \notin (AB)$.

Chỉ bằng thước thẳng, hãy dựng qua điểm C một đường thẳng song song với AB.

Phân tích: Giả sử dựng được đường thẳng (d) đi qua điểm C và song song với AB.

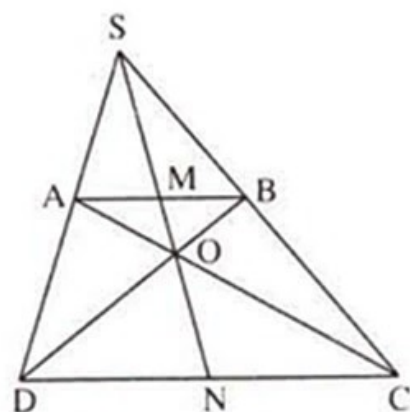
Trên phần kéo dài của tia BC, lấy một điểm S bất kỳ. Gọi giao điểm của SA

với (d) là D, AC cắt BD tại O. Theo bổ đề hình thang, đường thẳng SO đi qua điểm M, từ đó suy ra cách dựng.

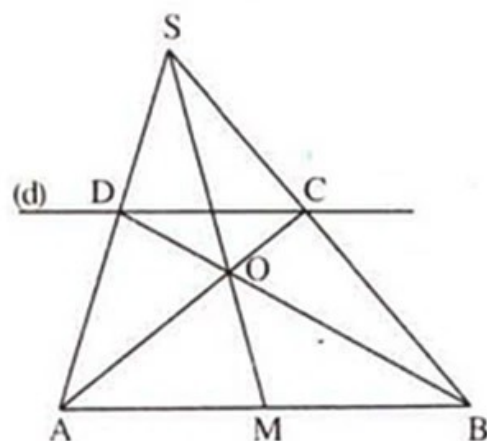
Cách dựng: Lấy điểm S như trên. Lần lượt nối AC, SM, các đường thẳng này cắt nhau tại O. Nối SA, BO, cắt nhau tại D. Đường thẳng (d) đi qua C, D chính là đường thẳng cần dựng: (d) đi qua C, (d) $\parallel$ AB.

- Kết quả của bài toán này cũng được vận dụng trong nhiều bài toán dựng hình chỉ bằng thước thẳng.

Bài toán 2: Cho hình bình hành ABCD với O là tâm. Chỉ dùng thước thẳng, qua O hãy dựng đường thẳng song song với một cạnh bất kỳ của hình bình hành ABCD.



Hình 3.12



Hình 3.13

Giải

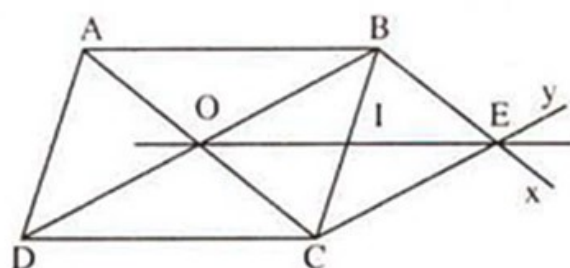
Theo giả thiết, O lần lượt là trung điểm AC, BD.

Áp dụng bài toán 1 cho đoạn thẳng AC với O là trung điểm của AC và B là điểm nằm ngoài AC, ta hoàn toàn dựng được đường thẳng Bx // AC.

Tương tự, ta cũng dựng được đường thẳng Cy // BD.

Gọi E là giao điểm của Bx, Cy, ta thấy ngay OBEC là hình bình hành.

Do đó, nếu gọi I là giao điểm của BC và OE thì I là trung điểm của BC, mặt khác O là trung điểm của BD nên OI là đường trung bình của $\triangle BCD$, $OI \parallel CD$. Suy ra OE là đường thẳng cần dựng.



Hình 3.14

Bài toán 3: Cho $\triangle ABC$. M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB. Nối AM, BN, CP cắt nhau tại I, J, K. Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } S_{AIN} = S_{BJP} = S_{CKM} = S_{IJK} \text{ thì } S_{APJI} = S_{BMKJ} = S_{CNKI}.$$

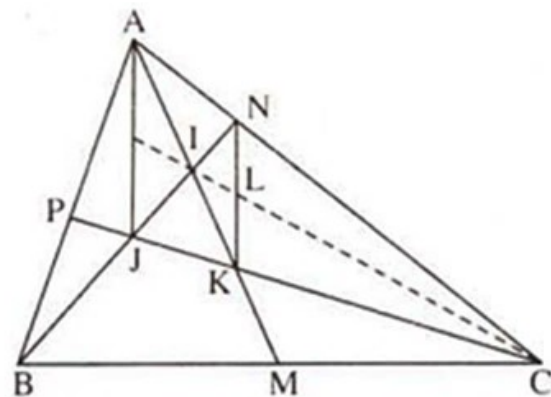
Giải

Gọi L là giao điểm của CI và NK.

$$\begin{aligned} \text{Từ } S_{AIN} = S_{IJK} &\Rightarrow S_{ANI} + S_{AIJ} = S_{IJK} + S_{AIJ} \\ &\Rightarrow S_{NAJ} = S_{KAJ}. \end{aligned}$$

Ta nhận thấy $\triangle NAJ$ và $\triangle KAJ$ có chung cạnh AJ nên khoảng cách từ N và K tới AJ là bằng nhau, dẫn đến $NK \parallel AJ$.

Xét hình thang KNAJ, có C là giao điểm của hai cạnh bên AN và JK, I là giao điểm của AK và JN. Theo "bổ đề Hình thang", CI cắt NK tại trung điểm của NK. Vậy L là trung điểm của NK (*).



Hình 3.15

$$\begin{aligned} \text{Từ (*) ta chứng minh được } S_{CIN} &= S_{CIK}, \text{ mà } S_{AIN} = S_{CKM} \Rightarrow S_{CIM} = S_{CIA} \\ &\Rightarrow IA = IM (**). \end{aligned}$$

($\triangle CIM$ và $\triangle CIA$ có chung đường cao hạ từ C tới AM).

$$\begin{aligned} \text{Từ (**)} &\Rightarrow S_{BIA} = S_{BIM} \text{ (} \triangle BIM \text{ và } \triangle BIA \text{ có chung đường cao hạ từ B tới AM)} \\ &\Rightarrow S_{BPJ} + S_{APJI} = S_{IJK} + S_{BJKM} \Rightarrow S_{APJI} = S_{BJKM} \text{ (do } S_{BPJ} = S_{IJK}). \end{aligned}$$

H, O lần lượt là trung điểm BK, AC. Qua M, P kẻ các đường thẳng song song với BK, chúng cắt AH, CH theo thứ tự tại N và Q.

a) Chứng minh rằng: $MN = PQ$;

b) Khi M, P di động trên AB, AC thì trung điểm I của MP chuyển động trên đường cố định nào?

- 3.14. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao, M là trung điểm AH. Đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt CM ở D. Chứng minh rằng tam giác DAB cân.
- 3.15. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. K là điểm trên cạnh BC. Đường thẳng qua K song song với CN cắt AB ở D, đường thẳng qua K song song với BM cắt AC ở E. Gọi I là giao điểm của KG và DE. Chứng minh rằng I là trung điểm của DE.
- 3.16. Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D là giao điểm của AM và BC, E là giao điểm của BM và CA, F là giao điểm của CM và AB. Đường thẳng qua M và song song với BC cắt DE, DF lần lượt ở K, I. Chứng minh rằng $MI = MK$.
- 3.17. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $BC = BD$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng CD. Đường thẳng qua H cắt AC, AD lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng $\widehat{DBF} = \widehat{EBC}$.
- 3.18. Cho tứ giác ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của các đường chéo BD, AC ($M \neq N$). Đường thẳng MN cắt AD, BC lần lượt ở E và F. Chứng minh rằng $AE \cdot BF = DE \cdot CF$.
- 3.19. Cho điểm M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC của hình chữ nhật ABCD. E là điểm trên tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Chứng minh rằng NM là tia phân giác của góc KNE.
- 3.20. Cho tam giác ABC, M là điểm tùy ý nằm trong tam giác. Đường thẳng qua M và trọng tâm G của tam giác cắt BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng $\frac{MA_1}{GA_1} + \frac{MB_1}{GB_1} + \frac{MC_1}{GC_1} = 3$.
- 3.21. Qua một điểm M tùy ý đã cho trên đáy lớn AB của hình thang ABCD ta kẻ các đường thẳng song song với hai đường chéo AC và BD. Các đường thẳng song song này cắt hai cạnh BC và AD lần lượt tại E và F. Đoạn EF cắt AC và BD tại I và J tương ứng.
- a) Chứng minh rằng nếu H là trung điểm của đoạn IJ thì H cũng là trung điểm của đoạn EF.
- b) Trong trường hợp $AB = 2CD$, hãy chỉ ra vị trí của điểm M trên AB sao cho $EJ = IJ = IF$.

- 3.22. Trên phần kéo dài của đường chéo AC của hình thang ABCD và phía C ta lấy điểm P tùy ý. Các đường thẳng đi qua P và các trung điểm các đáy hình thang cắt các cạnh bên AB, CD tương ứng tại M, N. Chứng minh rằng MN song song với các đáy của hình thang.
- 3.23. Cho hình bình hành ABCD. Qua một điểm S trong hình bình hành ABCD kẻ đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AD, BC tại M, P và cũng qua S kẻ đường thẳng song song với AD lần lượt cắt AB, CD tại N, Q. Chứng minh ba đường thẳng AS, BQ, DP đồng quy.
- 3.24. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC, điểm M thuộc đoạn AD. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MB, MC. Gọi E là giao điểm của DI và AB, F là giao điểm của DK và AC. Chứng minh rằng $IK \parallel EF$.
- 3.25. Cho hai điểm M, N nằm trên cạnh BC của tam giác ABC sao cho $BM = MN = NC$. Một đường thẳng song song với AC cắt các đoạn thẳng AB, AM và AN lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng $EF = 3DE$.
- 3.26. Cho hình vuông ABCD. I là điểm bất kì trên cạnh AB (I khác A và B), tia DI cắt tia CB ở E. Đường thẳng CI cắt AE tại M. Chứng minh rằng DE vuông góc với BM.

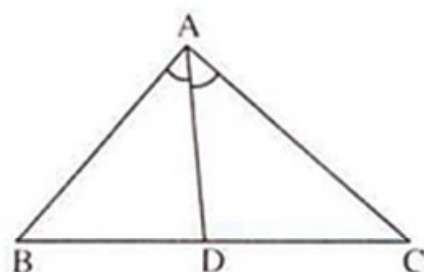
Chuyên đề 3

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Định lý:** Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

$$AD \text{ là phân giác góc } BAC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

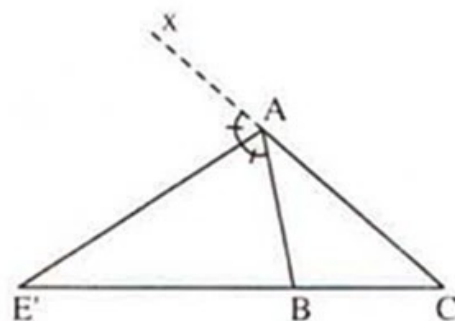


Hình 3.16

2. **Chú ý:** Định lý vẫn đúng với tia phân giác của góc ngoài của tam giác:

AE' là tia phân giác góc BAx ($AB \neq AC$)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{E'B}{E'C}.$$



Hình 3.17

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF.

Chứng minh rằng: $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$.

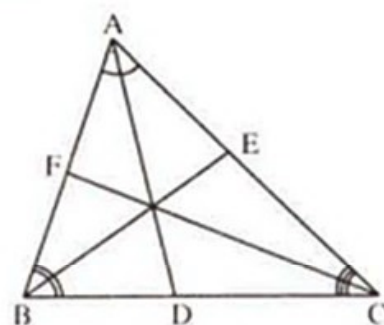
Nhận xét: Do AD, BE, CF là các đường phân giác trong $\triangle ABC$ cho ta nghĩ đến phải áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác.

Giải

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABC có:

$$\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}; \quad \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{và} \quad \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB};$$

$$\text{Suy ra: } \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$



Hình 3.18

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A, ($AB = AC = b$, $BC = a$), $\hat{A} = 36^\circ$.

Chứng minh rằng: $a^2 + ab - b^2 = 0$.

Nhận xét: $\triangle ABC$ cân tại A có góc ở đỉnh bằng 36° nên $\hat{B} = \hat{C} = 72^\circ = 2 \cdot 36^\circ$. Ta nghĩ đến kẻ phân giác góc C, rồi áp dụng tính chất phân giác để thiết lập mối quan hệ giữa a, b.

Giải

$$\triangle ABC \text{ cân tại A nên } \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 72^\circ.$$

Kẻ CD là đường phân giác của tam giác ABC

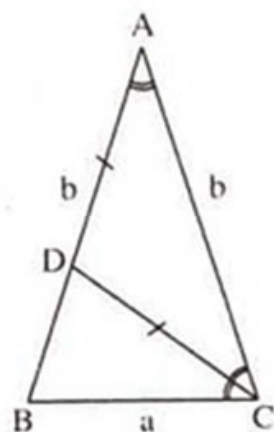
$$\Rightarrow \widehat{DCA} = \hat{A} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ADC \text{ cân tại D.}$$

$$\triangle CBD \text{ cân tại C} \Rightarrow AD = DC = BC = a,$$

áp dụng tính chất phân giác CD trong $\triangle ABC$ có:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 - ab \Rightarrow a^2 + ab - b^2 = 0.$$



Hình 3.19

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, trung tuyến BM cắt phân giác CD của góc ACB tại P.

Chứng minh rằng: $\frac{PC}{PD} - \frac{AC}{BC} = 1$.

Nhận xét: Ta có: $\frac{PC}{PD} - \frac{AC}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BC} + 1$. Mặt khác, do CD là đường

phân giác, nên theo tính chất phân giác trong $\triangle ABC$ có $\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC}$

$\Leftrightarrow \frac{DA}{DB} + 1 = \frac{AC}{BC} + 1 \Leftrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{BC} + 1$. Vậy ta cần chứng minh: $\frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}$.

Để chứng minh hai tỉ số này bằng nhau ta nghĩ đến vận dụng định lý Ta-lét, muốn vậy phải làm xuất hiện đường thẳng song song. Với suy nghĩ như trên ta có các cách giải quyết sau:

Giải

Ta có $\frac{PC}{PD} - \frac{AC}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BC} + 1$.

Theo tính chất phân giác trong $\triangle ABC$ có

$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{DA}{DB} + 1 = \frac{AC}{BC} + 1 \Leftrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{BC} + 1$.

Vậy ta cần chứng minh: $\frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}$ (1)

Cách 1: (h. 3.20) Vẽ $DK \parallel BM$ ($K \in AC$), áp dụng định lý Ta-lét

$\triangle DKC$ có $DK \parallel PM$: $\frac{PC}{PD} = \frac{MC}{MK} = \frac{MA}{MK}$

($MA = MC$, giả thiết)

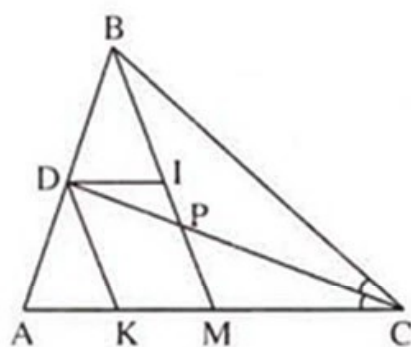
$\triangle ABM$ có $DK \parallel BM$: $\frac{MA}{MK} = \frac{AB}{DB}$.

Do đó: $\frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}$

Cách 2: Kẻ $DI \parallel AC$ ($I \in BM$),

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét có: $\frac{PC}{PD} = \frac{MC}{DI} = \frac{MA}{DI} = \frac{AB}{DB}$.

Cách 3: (h. 3.21) Kẻ $AN \parallel BM$ ($N \in CD$), vì $MA = MC$ (gt) nên $PN = PC$.



Hình 3.20

Vậy: $\frac{PC}{PD} = \frac{PN}{PD}$, mà $\frac{ND}{PD} = \frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC}$

(do $AN \parallel BP$)

Suy ra: $\frac{ND}{PD} + 1 = \frac{AC}{BC} + 1 \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{PN}{PD} = \frac{AB}{DB}$.

Cách 4: Kẻ $AH \parallel PC$ ($H \in BM$):

$\triangle AMH = \triangle CMP$ (g-c-g)

$\Rightarrow PC = AH$. Vậy $\frac{PC}{PD} = \frac{AH}{PD}$.

Do $DP \parallel AH$, áp dụng hệ quả định lý Ta-lét có:

$\frac{AH}{PD} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}$.

Cách 5: (h. 3.22) Trên tia đối của MB dựng điểm E sao cho:

$MB = ME$. Do $MA = MC$ (gt)

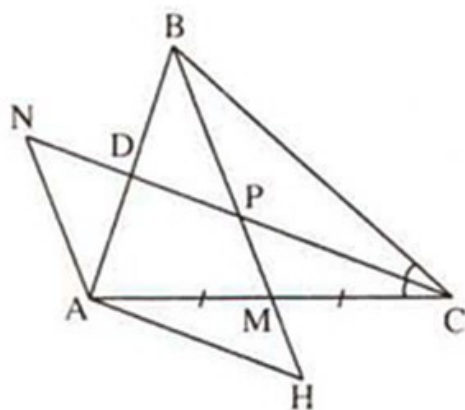
$\Rightarrow ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AB \parallel CE$ và $AB = CE$. Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét có:

$\frac{PC}{PD} = \frac{CE}{BD} = \frac{AB}{DB}$.

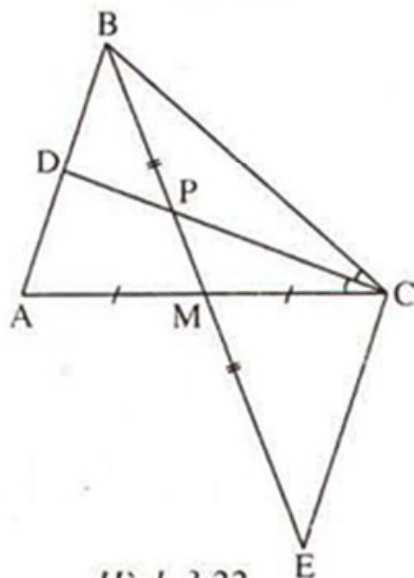
Cách 6: Kẻ $CS \parallel BM$ ($S \in AB$), vì $MA = MC$ (gt) $\Rightarrow BS = AB$.

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét có: $\frac{PC}{PD} = \frac{BS}{BD} = \frac{AB}{DB}$.

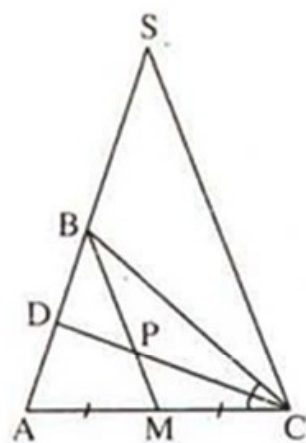
Chú ý: Ta có thể dùng phương pháp diện tích để giải, không cần vẽ thêm đường thẳng song song. Chắc chắn các bạn sẽ tìm được nhiều cách chứng minh đặc sắc hơn.



Hình 3.21



Hình 3.22



Hình 3.23

C. BÀI TẬP

3.27. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $AB = 16$ cm, $BC = 21$ cm, $CA = 32$ cm. Đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt BC lần lượt tại D và E .

a) Chứng minh B là trung điểm của EC ;

b) Tính DE .

- 3.28. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $AB = 10 \text{ cm}$, $BC = 25 \text{ cm}$, $CA = 15 \text{ cm}$. Đường phân giác trong và ngoài của góc B cắt AC lần lượt tại M và N. Tính độ dài đường trung tuyến BE của tam giác MBN.
- 3.29. Cho tam giác ABC và đường trung tuyến AD. Tia phân giác của góc ADB cắt AB ở E, tia phân giác góc ADC cắt AC tại F. Gọi K là giao điểm của AD và EF. Chứng minh rằng K là trung điểm của đoạn thẳng EF.
- 3.30. Cho hình bình hành ABCD và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Phân giác góc D cắt đường chéo AC tại I và phân giác góc C cắt đường chéo BD tại K. Chứng minh IK song song với DC.
- 3.31. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Tính số đo góc BIM.
- 3.32. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), kẻ đường cao AH, trung tuyến AM. Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh rằng:
- AB là tia phân giác của góc DAH ;
 - $BH \cdot CD = BD \cdot CH$.
- 3.33. Cho tam giác ABC, các tia phân giác trong BM và CN ($M \in AC$, $N \in AB$) cắt nhau tại D. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $2BD \cdot CD = BM \cdot CN$.
- 3.34. Cho tam giác ABC có AD, BE, CF theo thứ tự là các đường phân giác trong của các góc A, B, C. Gọi I và K theo thứ tự là các điểm đối xứng với A qua các đường thẳng BE và CF, G và H theo thứ tự là các điểm đối xứng với B và C qua đường thẳng AD. Chứng minh rằng GI song song với HK.
- 3.35. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng
- $$\widehat{CMN} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}.$$
- 3.36. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 36^\circ$. Tính $\frac{AB}{BC}$.
- 3.37. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC, x, y, z tương ứng là độ dài các đường phân giác của góc đối diện với cạnh đó. Chứng minh rằng:
- $x < \frac{2cb}{b+c}$;
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

- 3.38. Cho tam giác ABC có $AB + AC = 2BC$. I, G lần lượt là giao điểm các đường phân giác, trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $IG \parallel BC$.
- 3.39. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = b$, $BC = a$. Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}$.

Chuyên đề 4

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG.

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

KHÁI NIỆM TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Tam giác đồng dạng

a) Định nghĩa: Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:

$$\widehat{A'} = \widehat{A}; \widehat{B'} = \widehat{B}; \widehat{C'} = \widehat{C}; \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC được kí hiệu là $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ (viết theo thứ tự cặp đỉnh tương ứng).

Tỉ số các cạnh tương ứng $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$ được gọi là tỉ số đồng dạng.

b) Tính chất

Tính chất 1. Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.

Tính chất 2. Nếu $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

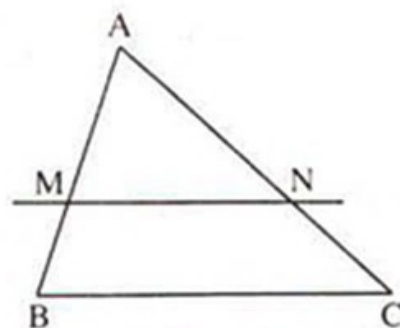
Tính chất 3. Nếu $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ và $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ thì

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC.$$

2. Định lý

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

Cho ΔABC , $MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$.



Hình 3.24

Chú ý

Định lý cũng đúng cho trường hợp đường thẳng a cắt phân kéo dài hai cạnh của tam giác và song với cạnh còn lại.

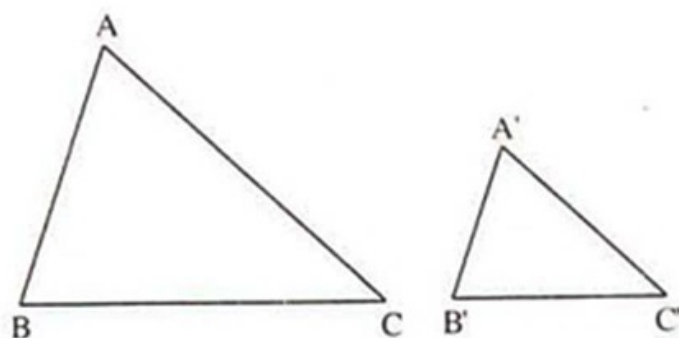
CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

* Trường hợp đồng dạng thứ nhất

Định lý: Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng:
 $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (c.c.c)



Hình 3.25

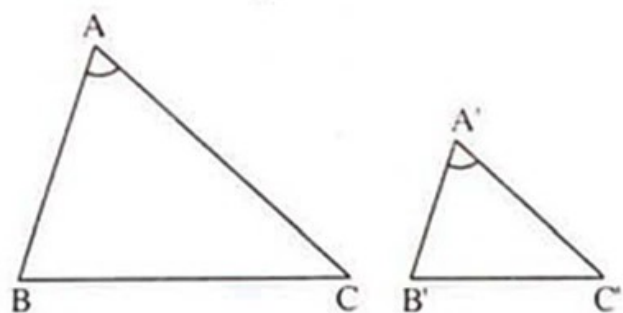
* Trường hợp đồng dạng thứ hai

Định lý: Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng:

$\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ và } \widehat{A} = \widehat{A'}$$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (c.g.c).



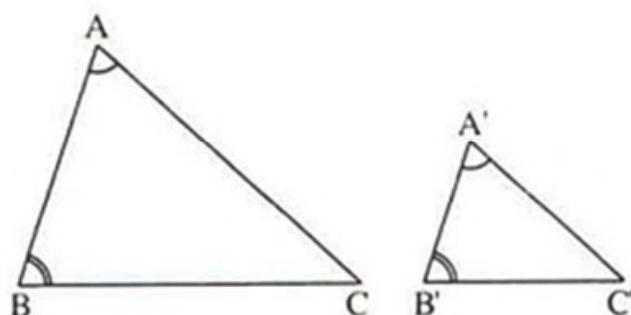
Hình 3.26

* Trường hợp đồng dạng thứ ba

Định lý: Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

$\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (g.g)



Hình 3.27

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$), O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $\triangle OAB \sim \triangle OCD$.

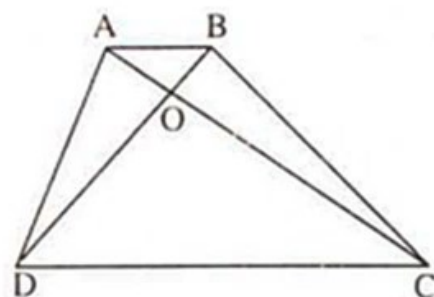
Nhận xét: $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ có $AB \parallel CD$ nên theo hệ quả định lý Ta-lét ta có các đoạn thẳng tỉ lệ, từ đó dễ nhận thấy hai tam giác đồng dạng.

Giải

Xét $\triangle OCD$ có $AB \parallel CD$ (gt) nên

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \quad (\text{Hệ quả của định lý Ta-lét}).$$

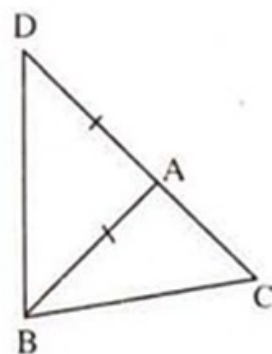
$\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ có $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$. Do đó $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ (c-c-c).



Hình 3.28

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $AB = 2,5\text{cm}$, $AC = 2\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$. Chứng minh rằng $\widehat{A} = 2\widehat{B}$.

Nhận xét: Để chứng minh $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ ta nghĩ đến $\widehat{A}$ là góc ngoài tại đỉnh của một tam giác cân. Dựng điểm D thuộc tia đối của AC sao cho: $AD = AB$, ta thấy $\widehat{A} = 2\widehat{BDA}$. Vậy ta cần chứng minh $\widehat{B} = \widehat{BDA}$ và đây là hai góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng.



Hình 3.29

Giải

Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABD} \text{ nên } \widehat{BAC} = 2\widehat{CDB} \quad (1)$$

Ta có $CD = AC + AD = 4,5\text{ cm}$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BDC$ có: $\widehat{C}$ (chung), $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD}$ (vì $\frac{2}{3} = \frac{3}{4,5}$)

$$\text{Do đó } \triangle ABC \sim \triangle BDC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CDB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$.

Ví dụ 3: Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{B} = 60^\circ$. Một đường thẳng đi qua đỉnh D không cắt hình thoi nhưng cắt các đường thẳng AB, BC lần lượt tại E, F. Gọi M là giao điểm của AF, CE. Chứng minh rằng $AD^2 = AM \cdot AF$.

Nhận xét: Hình thoi có một góc bằng 60° cho ta thấy xuất hiện hai tam giác đều, khi ấy có $AC = AD$. Vậy ta cần chứng minh $AC^2 = AM \cdot AF$, nghĩa là ta cần chứng minh $\triangle AEC \sim \triangle CAF$ và $\triangle ACM \sim \triangle AFC$.

Giải

Ta có: $BA = BC$ (cạnh hình thoi) và $\hat{B} = \hat{D} = 60^\circ$ nên $\triangle DAC$ đều

$$\Rightarrow AC = AD.$$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CDF$ có: $\widehat{AED} = \widehat{CDF}$ (đồng vị, $AB \parallel CD$),

$\widehat{ADE} = \widehat{CFD}$ (đồng vị, $AD \parallel BC$) $\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle CDF$ (g-g), suy ra

$$\frac{AE}{AD} = \frac{CD}{CF} \text{ hay } \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{CF}.$$

Xét $\triangle AEC$ và $\triangle CAF$ có: $\widehat{CAE} = \widehat{ACF}$ ($= 120^\circ$), $\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{CF}$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle CAF \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{CFA}.$$

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle AFC$ có: $\widehat{CAF}$ chung, $\widehat{ACE} = \widehat{CFA}$ (cmt)

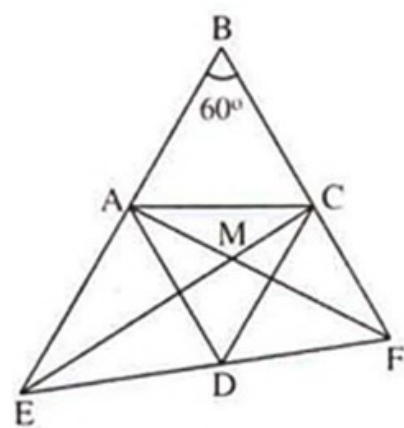
$$\Rightarrow \triangle ACM \sim \triangle AFC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow AC^2 = AM \cdot AF.$$

Vậy: $AD^2 = AM \cdot AF$.

Chú ý: Để chứng minh một đẳng thức giữa các tỉ số đoạn thẳng, ta chọn các đoạn thẳng đó là các cạnh tương ứng của hai tam giác đồng dạng. Hai tam giác cần xét nếu có một góc có tương ứng bằng nhau ta cố gắng tìm thêm một góc tương ứng khác và chứng minh chúng bằng nhau. Có thể xét hai góc tương ứng này nằm trong hai tam giác đồng dạng khác và khi ấy hai tam giác này đồng dạng theo trường hợp (c-g-c) hay (c-c-c). Các bài toán thuộc loại này yêu cầu khả năng phân tích đi lên, khai thác triệt để giả thiết của bài toán.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân tại A , M là trung điểm của BC . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên cạnh AC lấy điểm E sao cho DM là phân giác của góc BDE .

Chứng minh rằng: $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$.



Hình 3.30

Nhận xét: Điều cần chứng minh tương đương với $BD \cdot CE = BM^2$ hay $\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$,

vậy ta cần chứng minh $\triangle BMD$ và $\triangle CEM$ đồng dạng. Thông thường trong những trường hợp này hai tam giác sẽ đồng dạng theo trường hợp (g-g). Để phát hiện góc tương ứng bằng nhau ta cần để ý tính chất ba đường phân giác trong tam giác.

Giải

Xét $\triangle ADE$, AM là tia phân giác trong, DM là tia phân giác của góc ngoài tại D nên EM là tia phân giác góc ngoài tại E .

Xét tứ giác $BDEC$ có $2(\widehat{BDM} + \widehat{DBC} + \widehat{MEC}) = 360^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{DBC} + \widehat{MEC} = 180^\circ \quad (1)$$

Mặt khác, trong $\triangle BDM$ có:

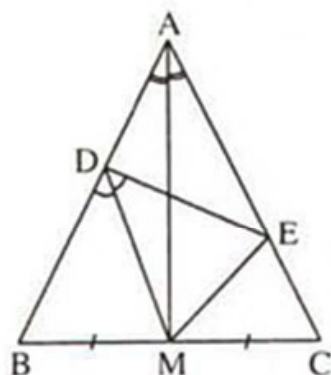
$$\widehat{BDM} + \widehat{DBC} + \widehat{DMB} = 180^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cho: $\widehat{MEC} = \widehat{DMB}$.

Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CEM$ có $\hat{B} = \hat{C}$, $\widehat{MEC} = \widehat{DMB}$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle BMD \sim \triangle CEM \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM = \frac{BC^2}{4}.$$



Hình 3.31

C. BÀI TẬP

3.40. Cho $\triangle ABC \sim \triangle HIK$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{5}$.

- Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.
- Tính chu vi $\triangle HIK$ khi chu vi $\triangle ABC$ bằng 60 cm.
- Cho biết hiệu chu vi hai tam giác trên là 90cm, tính chu vi của mỗi tam giác.

3.41. Cho tam giác ABC . Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3}$. Kẻ $MH \parallel AC$

($H \in AB$) và $MK \parallel AB$ ($K \in AC$).

- Tính MB , MC khi biết $BC = 25$ cm.
- Tính chu vi tam giác ABC khi biết chu vi tam giác KMC bằng 30 cm.
- Chứng minh rằng $HB \cdot MC = BM \cdot KM$.

- 3.42. Cho tứ giác ABCD có $AB = 8\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $CD = 20\text{cm}$, $AD = 25\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$. Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang.
- 3.43. Cho $\triangle ABD$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. Vẽ đường cao AH. Gọi M là điểm đối xứng với A qua H. Trên đoạn thẳng HM lấy điểm E bất kỳ, qua điểm D kẻ đường thẳng vuông góc với tia BE tại C và cắt AH tại F.
- a) Chứng minh rằng $AH^2 = BH \cdot HD = HE \cdot HF$;
- b) Chứng minh rằng $\frac{AF}{AE} = \frac{MF}{ME}$.
- 3.44. Cho tam giác ABC và G là điểm thuộc miền trong tam giác. Tia AG cắt BC tại K và tia CG cắt AB tại M. Biết rằng $AG = 2GK$ và $CG = 2GM$. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.
- 3.45. Cho tam giác đều ABC cạnh a, M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho DM là phân giác của góc BDE. Tính BD.CE.
- 3.46. Cho tam giác ABC đều, gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm P trên cạnh AB và điểm Q trên cạnh AC sao cho $\widehat{PMQ} = 60^\circ$. Chứng minh:
- a) Hai tam giác PBM và MCQ đồng dạng.
- b) Hai tam giác MBP và QMP đồng dạng.
- c) $\frac{S_{MPQ}}{S_{ABC}} = \frac{PQ}{2BC}$.
- 3.47. Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$, biết $\widehat{A} + \widehat{A'} = 180^\circ$ và $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Chứng minh rằng:
 $AB \cdot A'B' + AC \cdot A'C' = BC \cdot B'C'$.
- 3.48. Cho tam giác ABC đều, O là trọng tâm của tam giác và M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M không trùng với trung điểm của BC). Kẻ MP và MQ lần lượt vuông góc với AB và AC, các đường vuông góc này lần lượt cắt OB, OC tại I và K.
- a) Chứng minh tứ giác MIOK là hình bình hành ;
- b) Gọi R là giao điểm của PQ và OM. Chứng minh R là trung điểm PQ.
- 3.49. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$.
- 3.50. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm bất kỳ trên cạnh AB (I khác A và B). Tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M. Chứng minh rằng DE vuông góc với BM.

- 3.51. Trên hai cạnh AB và BC của hình vuông ABCD lấy hai điểm P và Q theo thứ tự sao cho $BP = BQ$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống CP. Chứng minh rằng $\widehat{DHQ} = 90^\circ$.
- 3.52. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác.
- Chứng minh rằng $\triangle OMN \sim \triangle HAB$, tính tỉ số đồng dạng.
 - So sánh độ dài AH và OM.
 - Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $\triangle HAG \sim \triangle OMG$;
 - Chứng minh rằng: $S_{AGH} = 2S_{AGO}$.
- 3.53. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D, trên nửa mặt phẳng bờ DC không chứa B vẽ tia Dx sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{ABC}$. Gọi E là giao điểm của tia Dx và AB. Chứng minh rằng $BC.DE = AC.AE + AB.AD$.
- 3.54. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, D là điểm thuộc cạnh AC. Từ C vẽ đường thẳng d song song với BD. Vẽ $BE \perp d$ tại E. Chứng minh $\triangle BAE \sim \triangle DBC$.
- 3.55. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của DE với AH, BC. Chứng minh rằng $MD.NE = ME.ND$.
- 3.56. Cho $\triangle ABC$ nhọn, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Từ A kẻ đường thẳng song song với BH cắt tia CH tại P và kẻ đường thẳng song song với CH cắt tia BH tại Q. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $AM \perp PQ$.
- 3.57. Hình thoi ABCD có $\hat{A} = 120^\circ$, M là điểm trên cạnh AB. Các đường thẳng DM và BC cắt nhau tại N.
- Chứng minh rằng: $AB^2 = AM.CN$;
 - Gọi E là giao điểm tia CM với AN. Tính số đo $\widehat{AEC}$.
 - Trên tia đối của tia BD lấy điểm F sao cho tia FM cắt các cạnh AD, AC lần lượt tại S và K. Chứng minh rằng $\frac{DA}{SA} + \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AK}$.
- 3.58. Cho tam giác ABC không cân. M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AMB} - \hat{C} = \widehat{AMC} - \hat{B}$. Chứng minh rằng $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

Chuyên đề 5

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

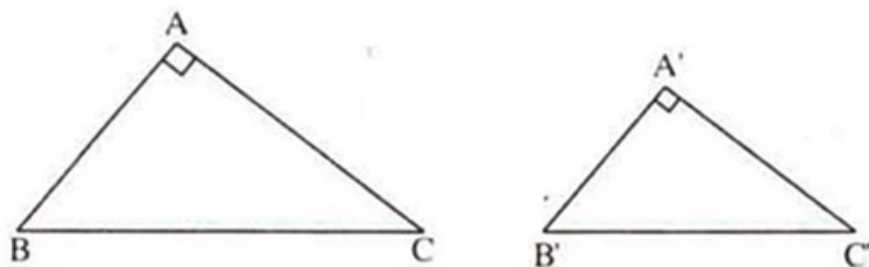
1. Áp dụng các trường hợp đồng dạng của tam giác vào tam giác vuông

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.

2. Dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng

Định lý 1: Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.



Hình 3.32

3. Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

Định lý 2: Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

Định lý 3: Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác nhọn ABC có BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H. Gọi M là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng $MH \cdot MA = MB \cdot MC$.

Nhận xét: Viết lại đẳng thức cần chứng minh thành $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MH}$. Để chứng minh đẳng thức giữa tỉ số các đoạn thẳng trên ta chứng minh $\triangle MBH \sim \triangle MAC$.

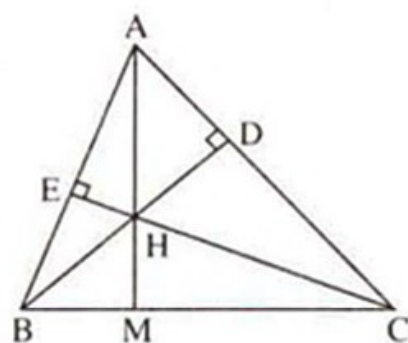
Giải:

$\triangle ABC$ có BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AM \perp BC$. Xét $\triangle MBH$ ($\widehat{BMH} = 90^\circ$) và $\triangle MAC$ ($\widehat{AMC} = 90^\circ$).

có $\widehat{MBH} = \widehat{MAC}$ (cùng phụ với góc ACB)
 $\Rightarrow \triangle MBH \sim \triangle MAC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MH}{MC} \Rightarrow MH \cdot MA = MB \cdot MC.$$



Hình 3.33

Chú ý: Nếu cho BC cố định, A là điểm bất kỳ trong mặt phẳng chứa BC sao cho $\triangle ABC$ nhọn. Khi ấy:

$$MB \cdot MC = MB(BC - MB) = -(MB^2 - BC \cdot MB)$$

$$= -(MB^2 - 2 \frac{BC}{2} \cdot MB + \frac{BC^2}{4} - \frac{BC^2}{4})$$

$$= -(MB - \frac{BC}{2})^2 + \frac{BC^2}{4} \leq \frac{BC^2}{4} \text{ (không đổi).}$$

Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MB = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC .

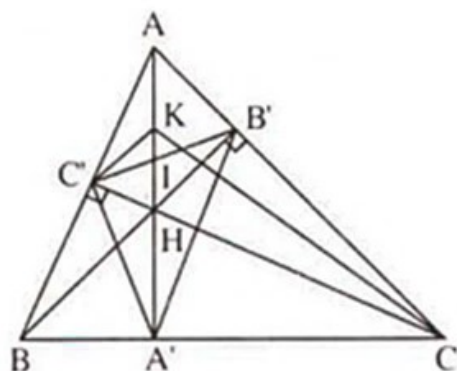
Từ đó ta có bài toán: "Cho đoạn thẳng BC cố định, A là điểm bất kỳ trong mặt phẳng chứa BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AM , BD cắt nhau tại H . Tìm vị trí của M để tích $MA \cdot MH$ đạt giá trị lớn nhất".

Ta không chỉ dừng tại đó, xét bài toán: "Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AM , H là điểm thuộc đoạn AM sao cho: $BM \cdot CM = MH \cdot MA$. Chứng minh H là trực tâm $\triangle ABC$ ".

Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle MBH \sim \triangle MAC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MAC}$, mà $\widehat{AHD} = \widehat{BHM}$ (đối đỉnh), do đó $\widehat{MAC} + \widehat{AHD} = \widehat{MBH} + \widehat{BHM} = 90^\circ$ (do $\triangle MHB$ vuông tại M) $\Rightarrow BH \perp AC$. Vậy H là trực tâm $\triangle ABC$.

Thật thú vị vì kết quả bài toán này cho ta giải quyết được nhiều bài toán HAY và KHÓ.

Bài toán: Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AA' , BB' , CC' cắt nhau tại H . K là trung điểm của AH , I là giao điểm của $B'C'$ và AH . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .



Hình 3.34

Thật vậy: $\widehat{C'KA'} = 2\widehat{C'AH} = 2\widehat{C'B'H} = \widehat{A'B'I}$
 $\Rightarrow \Delta A'KC' \sim \Delta A'B'I$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{A'K}{A'B'} = \frac{A'C'}{A'I} \Rightarrow A'I \cdot A'K = A'B' \cdot A'C' \quad (1)$$

Mà: $\Delta A'BC' \sim \Delta A'B'C$ (cùng đồng dạng với ΔABC)

$$\Rightarrow \frac{A'B}{A'B'} = \frac{A'C'}{A'C} \Rightarrow A'B \cdot A'C = A'B' \cdot A'C' \quad (2)$$

Từ (1), (2) cho: $A'I \cdot A'K = A'B \cdot A'C$. Theo kết quả bài toán trên thì I là trực tâm của ΔKBC .

Ví dụ 2: Giả sử AC là đường chéo lớn của hình bình hành $ABCD$. Từ điểm C hạ các đường vuông góc CE và CF tương ứng trên đường kéo dài của các cạnh AB và AD .

Chứng minh rằng $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

Nhận xét: Do các tam giác AEC , ACF vuông nên dễ xuất hiện tam giác đồng dạng, từ B hay D ta dựng đường thẳng vuông góc với AC .

Giả sử ta vẽ $BG \perp AC$ tại G . Thấy ngay $AB \cdot AE = AC \cdot AG$.

Vậy: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

$$\Leftrightarrow AD \cdot AF = AC^2 - AC \cdot AG = AC(AC - AG) = AC \cdot CG$$

$$\Leftrightarrow BC \cdot AF = AC \cdot CG. \text{ Ta cần chứng minh } \Delta CBG \sim \Delta ACF.$$

Giải

$$\text{Vẽ } BG \perp AC \text{ tại } G. \text{ Ta có } \Delta ABG \sim \Delta ACE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AG}{AE}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AG \quad (1)$$

Mà $AF \parallel BC \Rightarrow \widehat{GCB} = \widehat{CAF}$

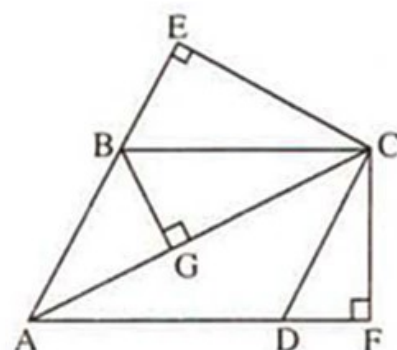
$\Rightarrow \triangle CBG \sim \triangle ACF$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CG}{AF} \Rightarrow BC \cdot AF = AC \cdot CG \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AB \cdot AE + AF \cdot BC = AC(AG + CG) = AC^2.$$

$$\text{Vậy } AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$



Hình 3.35

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc cạnh BC. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC, AB cắt AB, AC lần lượt tại D và E.

Biết $S_{BDM} = 9\text{cm}^2$, $S_{CME} = 16\text{cm}^2$. Tính diện tích tam giác ABC.

Nhận xét: Ta thấy ngay $\triangle BDM \sim \triangle BAC$, mà $S_{BDM} = 9\text{cm}^2$ nên ta cần xác định tỉ số đồng dạng. Từ $\triangle BDM \sim \triangle MEC$ và diện tích hai tam giác này đều biết nên ta tính được tỉ số đồng dạng của chúng.

Giải

Xét $\triangle BDM$ và $\triangle MEC$ có: $\widehat{DBM} = \widehat{ECM}$ (đồng vị, $ME \parallel AB$), $\widehat{DMB} = \widehat{ECM}$ (đồng vị, $MD \parallel AC$)

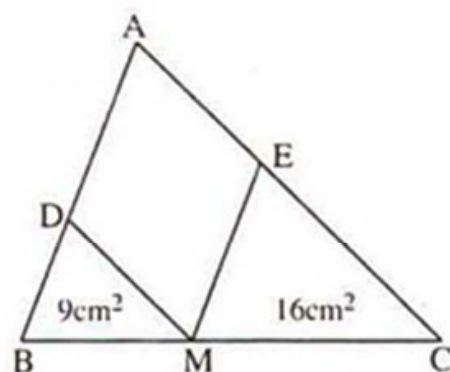
$$\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle MEC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{S_{BDM}}{S_{MEC}} = \left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MC + MB} = \frac{3}{4 + 3} \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{3}{7}.$$

Mặt khác, do $MD \parallel AC$ nên $\triangle BDM \sim \triangle BAC$

$$\Rightarrow \frac{S_{BDM}}{S_{BAC}} = \left(\frac{MB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{BAC} = \frac{49}{9} \cdot 9 = 49 (\text{cm}^2).$$



Hình 3.36

Lưu ý. 1. Ta có thể chứng minh được kết quả tổng quát: Nếu $S_{BDM} = p^2 \text{cm}^2$, $S_{MEC} = q^2 \text{cm}^2$ thì $S_{ABC} = (p + q)^2 \text{cm}^2$.

2. Không dừng ở đây, nếu xét M là điểm nằm trong tam giác, qua M ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh tam giác. Các đường thẳng tạo với các

cạnh tam giác ba tam giác có diện tích lần lượt là a^2 , b^2 , c^2 (cm^2). Khi ấy diện tích tam giác ABC là bao nhiêu?

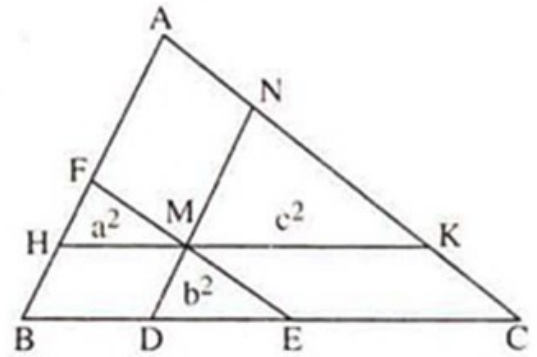
Áp dụng bài toán trên ta có:

$$\Delta AHK, M \in HK \text{ nên } S_{AHK} = (a + c)^2;$$

$$\Delta BEF, M \in EF \text{ nên } S_{BEF} = (a + b)^2;$$

$$\Delta CDN, M \in DN \text{ nên } S_{CDN} = (b + c)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } S_{ABC} &= S_{AHK} + S_{BEF} + S_{CDN} - (S_{MHF} + S_{MDE} + S_{MNK}) \\ &= (a + c)^2 + (a + b)^2 + (b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= (a + b + c)^2. \end{aligned}$$



Hình 3.37

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng H là giao điểm các đường phân giác trong ΔDEF .

b) Gọi K là giao điểm của AD và EF. Chứng minh rằng:

$$HK. AD = AK. DH.$$

Nhận xét: Để chứng minh FC là phân giác góc DFE ta chứng minh $\widehat{AFE} = \widehat{BFD}$. Dễ dàng nhận thấy cả hai góc này đều bằng $\widehat{ACB}$ thông qua hai cặp tam giác đồng dạng.

Giải

a) Xét ΔAEB và ΔAFC có: $\widehat{A}$ chung,
 $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ (cùng phụ với $\widehat{A}$)

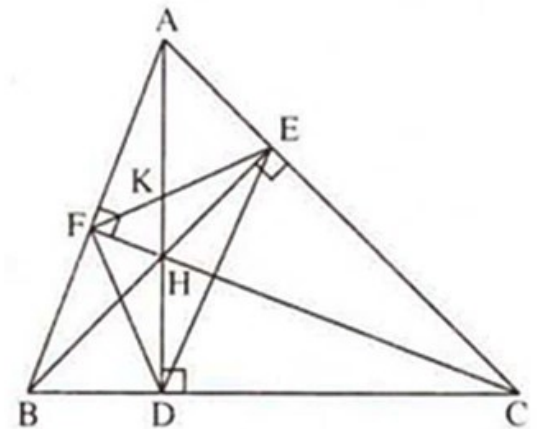
$$\Rightarrow \Delta AEB \sim \Delta AFC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}.$$

Xét ΔAEF và ΔABC có: $\widehat{A}$ chung, $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ (cmt)

$$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB} \quad (1)$$

Lý luận tương tự như trên có: $\Delta BFD \sim \Delta BCA$ (c-g-c)

$$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACB} \quad (2).$$



Hình 3.38

Từ (1), (2) cho: $\widehat{AFE} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{CFD} \Rightarrow FC$ là tia phân giác của $\widehat{DFE}$.

Tương tự: $\widehat{FDA} = \widehat{EDA} \Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\widehat{FDE}$. Vậy H là giao điểm các đường phân giác trong tam giác ABC .

Chú ý: Đây là kết quả quan trọng và thường gặp trong chương trình lớp 9.

b) Xét $\triangle KFD$ có: FH là phân giác trong tại đỉnh F , $AF \perp FH \Rightarrow FA$ là phân giác ngoài tại F của tam giác $\Rightarrow \frac{KH}{HD} = \frac{FK}{FD} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow HK \cdot AD = AK \cdot DH$,

Chú ý: Không chỉ dừng lại ở bài toán trên, nếu ta đặc biệt hoá $S_{AEF} = S_{BFD} = S_{CDE}$ thì

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 \text{ và } \triangle DBF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{DFB}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DB}{AB}\right)^2$$

$$\text{mà } S_{AEF} = S_{BFD}, \text{ do đó: } \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{DB}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DB}{AB} \Rightarrow AE = BD$$

$$\Rightarrow \triangle AEB = \triangle BDA \text{ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ABC}. \text{ Lí luận tương tự ta được } \widehat{BAC} = \widehat{ACB}.$$

Vậy $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \triangle ABC$ đều.

Từ đó ta có bài toán: "Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , biết $S_{AEF} = S_{BFD} = S_{CDE}$. Chứng minh tam giác ABC đều".

C. BÀI TẬP

3.59. Cho tam giác ABC nhọn và đường cao AH . Kẻ HI vuông góc với AB và HK vuông góc với AC .

a) Chứng minh $AH^2 = AI \cdot AB$.

b) Chứng minh $\triangle AIK \sim \triangle ACB$.

c) Đường phân giác của $\widehat{AHB}$ cắt AB tại E . Biết $\frac{EB}{AB} = \frac{2}{5}$. Tính tỉ số $\frac{BI}{AI}$.

3.60. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Kẻ BH vuông góc với CM , nối DH . Vẽ HN vuông góc với DH (N thuộc BC). Chứng minh rằng:

a) $\triangle DHC \sim \triangle NHB$.

b) $\triangle MBH \sim \triangle BCH$.

c) $NB = MB$

- 3.61. Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 6$ cm, $AB = 8$ cm và hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua D kẻ đường thẳng d vuông góc với DB, d cắt tia BC tại E.
- Chứng minh rằng $\triangle BDE \sim \triangle DCE$.
 - Kẻ CH vuông góc với DE tại H. Chứng minh $DC^2 = CH \cdot DB$.
 - Gọi K là giao điểm của OE và HC. Chứng minh K là trung điểm của HC và tính tỉ số $\frac{S_{EHC}}{S_{EDB}}$.
 - Chứng minh ba đường thẳng OE, DC, BH đồng quy.
- 3.62. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) và trung tuyến AD. Kẻ đường thẳng vuông góc với AD tại D lần lượt cắt AC tại E và AB tại F.
- Chứng minh $\triangle DCE \sim \triangle DFB$.
 - Chứng minh $AE \cdot AC = AB \cdot AF$.
 - Đường cao AH của tam giác ABC cắt EF tại I. Chứng minh
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}} = \left(\frac{AD}{AI} \right)^2.$$
- 3.63. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH, $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm.
- Chứng minh $CA^2 = CH \cdot CB$.
 - Kẻ AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$). Tính HD.
 - Trên tia đối của tia AC lấy điểm I. Kẻ AK vuông góc với BI tại K. Chứng minh $\triangle BHK \sim \triangle BIC$.
 - Cho $AI = 8$ cm. Tính diện tích tam giác BHK.
- 3.64. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB > AD$ và $AD = 5$ cm. Trên DC lấy điểm M sao cho $DM = 2$ cm. Biết góc $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
- Chứng minh $\triangle DAM \sim \triangle CMB$. Tính độ dài MC.
 - Tia phân giác góc AMB cắt AB tại E. Kẻ EK vuông góc với AB ($K \in MB$). Chứng minh $EA = EK$.
 - Tia EK cắt AM tại H, tia AK cắt BH tại N. Chứng minh MN là tia phân giác của góc BMH.
- 3.65. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), vẽ đường cao AH (H thuộc BC).
- Chứng minh $\triangle ABH$ đồng dạng với $\triangle CBA$.

b) Trên tia HC, lấy $HD = HA$. Từ D vẽ đường thẳng song song với AH cắt AC tại E. Chứng minh $CE.CA = CD.CB$.

c) Chứng minh $AE = AB$.

d) Gọi M là trung điểm của BE, chứng minh $AH.BM = AB.HM + AM.BH$.

3.66. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = m$, $CD = n$ ($n > m$). Các điểm P, Q lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho $PQ \parallel AB \parallel CD$ và $S_{ABQP} = S_{PQCD}$.

Chứng minh rằng $PQ^2 = \frac{m^2 + n^2}{2}$.

3.67. Cho tam giác ABC cân đỉnh A và H là trung điểm của cạnh BC. Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AC và O là trung điểm của HI. Chứng minh rằng $\triangle BIC \sim \triangle AOH$.

3.68. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC.

a) Chứng minh rằng $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

b) Cho biết $S_{ABC} = 2S_{ADHE}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân tại A.

3.69. Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, BC. Chứng minh rằng:

a) $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD.AE}{AB.AC}$;

b) Trong ba tam giác ADE, BDF, CEF tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC. Khi nào cả ba tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

3.70. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$), kẻ đường cao AH.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AB^2}{BH} = \frac{AC^2}{CH}$.

b) Kẻ AD là tia phân giác $\widehat{BAH}$ ($D \in BH$). Chứng minh $\triangle ACD$ cân và $DH.DC = BD.HC$

c) Tính độ dài AH trong trường hợp $S_{ABH} = 15,36 \text{ (cm}^2\text{)}$ và $S_{ACH} = 8,64 \text{ (cm}^2\text{)}$

d) Gọi M là trung điểm AB, E là giao điểm của hai đường thẳng MD và AH. Chứng minh rằng: $CE \parallel AD$.

Chuyên đề nâng cao 1

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý Ta-lét và tính chất của tam giác đồng dạng cho phép ta: Lập một tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng, tính độ dài các đoạn thẳng (dựa vào dãy tỉ số đồng dạng), chứng minh hai góc bằng nhau (góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng), chứng minh một hệ thức giữa các đoạn thẳng, một biểu thức có giá trị không đổi, giải một số bài toán về chu vi và diện tích tam giác, giải bài toán dựng hình...

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông góc tại A. Từ điểm D trên cạnh huyền BC kẻ DE vuông góc với AB và DF vuông góc với AC.

Chứng minh hệ thức:

$$EA \cdot EB + FA \cdot FC = DB \cdot DC.$$

Giải:

Tứ giác AEDF có ba góc vuông ($\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$) nên là hình

chữ nhật $\Rightarrow DE = FA, DF = EA$.

Do $DE \parallel CA$ (vì cùng vuông góc AB) nên:

$$\triangle EBD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{DB}{BC} \text{ hay } \frac{EB}{AB} = \frac{FA}{AC} = \frac{DB}{BC}.$$

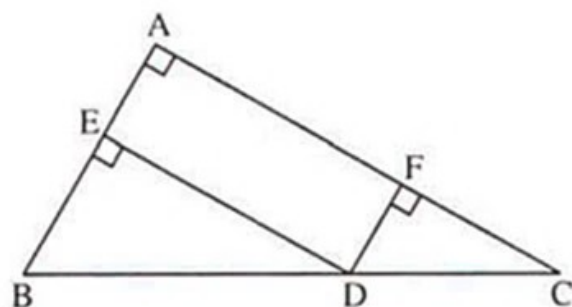
$$\text{Tương tự, } \triangle FDC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{DC}{BC} \text{ hay } \frac{EA}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{DC}{BC}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{EA \cdot EB}{AB^2} = \frac{FA \cdot FC}{AC^2} = \frac{BD \cdot DC}{BC^2} \text{ hay } \frac{EA \cdot EB + FA \cdot FC}{AB^2 + AC^2} = \frac{BD \cdot DC}{BC^2}.$$

Theo định lý Py-ta-go trong $\triangle ABC$ vuông tại A: $AB^2 + AC^2 = BC^2$,

do đó $EA \cdot EB + FA \cdot FC = BD \cdot DC$.

Chú ý: Thật thú vị nếu vận dụng định lý Py-ta-go kết hợp với hằng đẳng thức ta có cách giải sau:



Hình 3.39

$$\begin{aligned}
 AB^2 + AC^2 = BC^2 &\Rightarrow (EA + EB)^2 + (FA + FC)^2 = (DB + DC)^2 \\
 &\Rightarrow EA^2 + EB^2 + 2EA \cdot EB + FA^2 + FC^2 + 2FA \cdot FC \\
 &= DB^2 + DC^2 + 2DB \cdot DC \quad (1)
 \end{aligned}$$

Mặt khác: $EB^2 + FA^2 = EB^2 + ED^2 = BD^2$ và $EA^2 + FC^2 = DF^2 + FC^2 = DC^2$.

$$(1) \Rightarrow 2(EA \cdot EB + FA \cdot FC) = 2DB \cdot DC \Rightarrow EA \cdot EB + FA \cdot FC = BD \cdot DC.$$

– Không dừng tại đây ta nhận thấy: $BD + DC = BC$ không đổi, nên tích $BD \cdot DC$ đạt giá trị lớn nhất khi $BD = DC$, nghĩa là D là trung điểm BC .

– Từ đó ta có bài toán: "Cho tam giác ABC vuông góc tại A . Từ điểm D bất kỳ trên cạnh huyền BC kẻ DE vuông góc với AB và DF vuông góc với AC . Xác định vị trí của điểm D để tích $EA \cdot EB + FA \cdot FC$ đạt giá trị lớn nhất".

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 80^\circ$, $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB + AC}$. Chứng minh rằng $\hat{B} = 60^\circ$.

Giải

Vẽ AD là đường phân giác của góc BAC của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC}.$$

$$\text{Mà } \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB + AC} \text{ (gt), do đó } \frac{DB}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

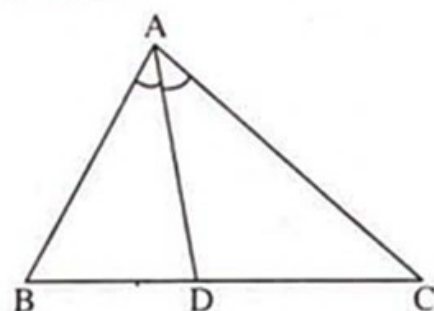
$$\text{Xét } \triangle BAD \text{ và } \triangle BCA \text{ có } \hat{B} \text{ (chung) và } \frac{DB}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

$$\text{Do đó } \triangle BAD \sim \triangle BCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCA}. \text{ Mà } \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 40^\circ \text{ nên}$$

$$\widehat{BCA} = 40^\circ.$$

$$\triangle ABC \text{ có } \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ \Rightarrow 80^\circ + \widehat{ABC} + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ.$$



Hình 3.40

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC , AD là đường phân giác ngoài. Chứng minh rằng

$$AD^2 = DB \cdot DC - AB \cdot AC.$$

Giải

Trên tia DA lấy điểm E , sao cho $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$.

Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (vì AD là tia phân giác của $\widehat{CAx}$,
 $\widehat{A_3} = \widehat{A_2}$ (đối đỉnh)

Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3}$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có: $\widehat{A_3} = \widehat{A_1}$, $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$.

Do đó $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ (g.g)

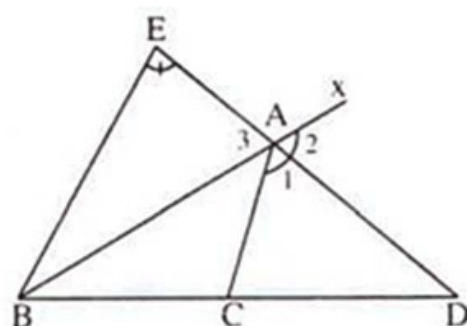
$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE$$

$$\Rightarrow AB.AC = AD(DE - AD) = AD.DE - AD^2.$$

$\triangle ACD$ và $\triangle BED$ có: $\widehat{ACD} = \widehat{BED}$, $\widehat{ADC}$ (chung) $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle BED$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DC}{DE} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow AD.DE = DB.DC.$$

$$\text{Vậy: } AB.AC = DB.DC - AD^2 \Rightarrow AD^2 = DB.DC - AB.AC.$$



Hình 3.41

Ví dụ 4: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $AB.CD + BC.AD \geq AC.BD$.

Giải:

Trên nửa mặt phẳng bờ CD có chứa A vẽ tia Dx sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$,

vẽ tia Cy sao cho $\widehat{DCy} = \widehat{ACB}$. Gọi I là giao điểm của Dx và Cy.

$$\triangle IDC \sim \triangle BAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{ID}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{IC}{BC}$$

$$\Rightarrow AC.ID = AB.CD \text{ và } \frac{IC}{CD} = \frac{BC}{AC}.$$

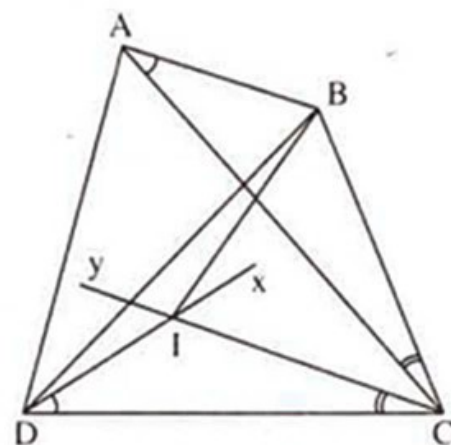
$$\triangle IBC \sim \triangle DAC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{IB}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC.IB = BC.AD.$$

Mà: $IB + ID \geq BD$,

do vậy: $AC.BD \leq AC(IB + ID) = AC.IB + AC.ID = AB.CD + BC.AD$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ I nằm giữa B và D $\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Ghi chú: Bất đẳng thức vừa chứng minh có tên là **bất đẳng thức Ptô-lê-mê**.



Hình 3.42

Ví dụ 5: Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng các tam giác cân ABM, BCN, CAP có các góc ở đỉnh lần lượt là $\widehat{AMB} = \alpha$, $\widehat{BNC} = \beta$, $\widehat{APC} = \gamma$ thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$.

Chứng minh rằng tam giác MNP có số đo ba góc là $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$.

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ NC không chứa B dựng điểm E sao cho $\widehat{CNE} = \widehat{APC}$, $NE = NC$.

Khi đó $NB = NC = NE$. Gọi Nx là tia đối của tia NE;

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \widehat{BEC} &= \widehat{BEN} + \widehat{NEC} = \frac{1}{2} \widehat{BNx} + \frac{1}{2} \widehat{CNx} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{BNC}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì: } \widehat{BNC} + \widehat{CNE} + \widehat{BNE} = 360^\circ,$$

$$\widehat{AMB} + \widehat{BNC} + \widehat{APC} = 360^\circ, \widehat{CNE} = \widehat{APC}$$

$$\text{nên } \widehat{AMB} = \widehat{BNE}.$$

$$\triangle MBA \sim \triangle NBE \text{ (hai tam giác cân có } \widehat{AMB} = \widehat{BNE} \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BE}, \widehat{MBA} = \widehat{NBE}$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{MBN} = \widehat{MBA} + \widehat{ABN} = \widehat{NBE} + \widehat{ABN} = \widehat{ABE},$$

$$\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BE} \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BE}, \text{ suy ra}$$

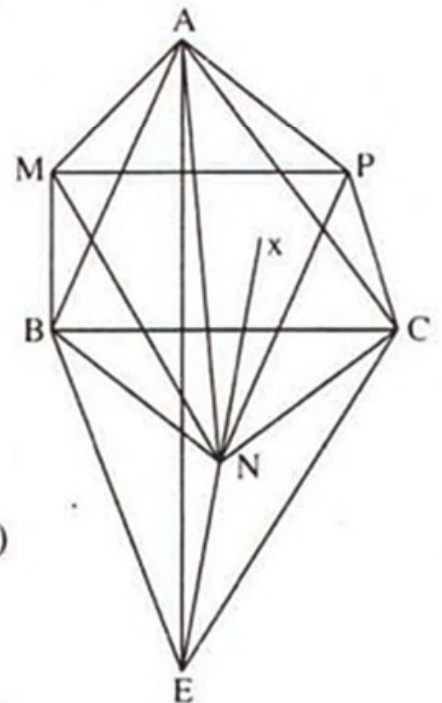
$$\triangle BMN \sim \triangle BAE \Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{BEA}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự có } \widehat{CNP} = \widehat{CEA}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{BEA} + \widehat{CEA} = \widehat{BNM} + \widehat{CNP} \text{ và } \widehat{BEC} = \frac{1}{2} \widehat{BNC};$$

$$\text{Suy ra } \widehat{PNM} = \frac{1}{2} \widehat{BNC} = \frac{\beta}{2}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự có } \widehat{PMN} = \frac{\alpha}{2}, \widehat{MPN} = \frac{\gamma}{2}.$$



Hình 3.43

C. BÀI TẬP

- 3.71. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC lần lượt vẽ các đường thẳng vuông góc với BC, CA, AB tại D, E, F. Trên các tia MD, ME, MF lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $\frac{MA'}{BC} = \frac{MB'}{CA} = \frac{MC'}{AB}$.

Chứng minh rằng M là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

- 3.72. Cho tam giác ABC ($BC = a, AC = b, AB = c$), I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$.

- 3.73. Cho tam giác cân ABC, $\hat{A} = 20^\circ$, $AB = AC = b$, $BC = a$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

- 3.74. Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy hai điểm D, E sao cho $BD = CE$.

Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

- 3.75. Cho các điểm M, N, P thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$ cân tại A sao cho tứ giác MNAP là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{OMP} = \widehat{AMN}$.

- 3.76. Cho tam giác ABC. Gọi AM và AD lần lượt là đường trung tuyến và đường phân giác của tam giác ABC. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N. Chứng minh rằng $\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

- 3.77. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC vẽ $MD \perp BC$ tại D, $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp AB$ tại F. Trên các tia MD, ME, MF lần lượt lấy các điểm I, K, L sao cho $\frac{MI}{BC} = \frac{MK}{AC} = \frac{ML}{AB}$. Chứng minh rằng M là trọng tâm của tam giác IKL.

- 3.78. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 3AB$. Trên cạnh AC lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Chứng minh rằng: $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^\circ$.

- 3.79. Cho hình bình hành ABCD và điểm M nằm trong hình bình hành. Giả sử $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$. Chứng minh rằng $\widehat{MDC} = \widehat{MBC}$.

- 3.80. Cho tứ giác ABCD, trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ và $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} < 180^\circ$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AB, CD. Chứng minh rằng

$$AC^2 = CD \cdot CE - AB \cdot AE.$$

Chuyên đề nâng cao 2

ĐỊNH LÝ MÊ-NÊ-LA-UYT, ĐỊNH LÝ XÊ-VA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bài toán 1: Cho tam giác ABC, một đường thẳng d không đi qua các đỉnh tam giác, cắt các đường thẳng BC, AC, AB thứ tự ở A', B', C'. Chứng minh rằng

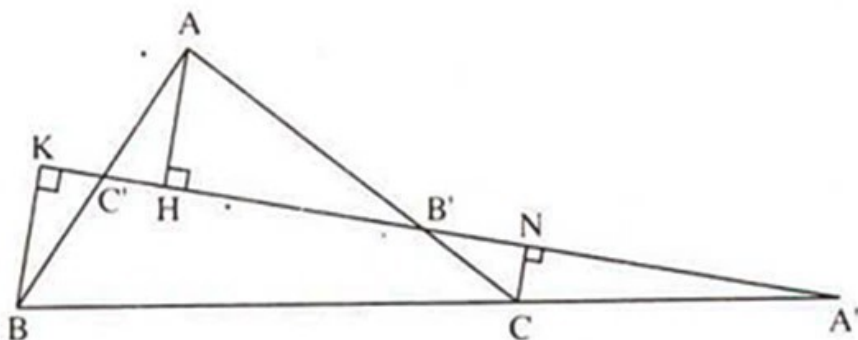
$$\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

Giải

Kẻ AH, BK, CN cùng vuông góc với đường thẳng d. Suy ra: AH // BK // CN.

Theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{B'A}{B'C} = \frac{AH}{CN}$, $\frac{A'C}{A'B} = \frac{CN}{BK}$, $\frac{C'B}{C'A} = \frac{BK}{AH}$

Do đó: $\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = \frac{AH}{CN} \cdot \frac{CN}{BK} \cdot \frac{BK}{AH} = 1.$



Hình 3.44

Chú ý: Đảo lại ta cũng có: " Nếu các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, AC, AB sao cho trong ba điểm A', B', C' có đúng một điểm, hoặc cả ba điểm nằm ngoài $\triangle ABC$ và thỏa mãn: $\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1$ thì ba điểm A', B', C' thẳng hàng (bạn đọc tự chứng minh).

Các định lý thuận và đảo trên mang tên **Mênêlauyt (Ménélaus)**.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC. Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AC, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy ở O. Chứng minh rằng:

$$\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

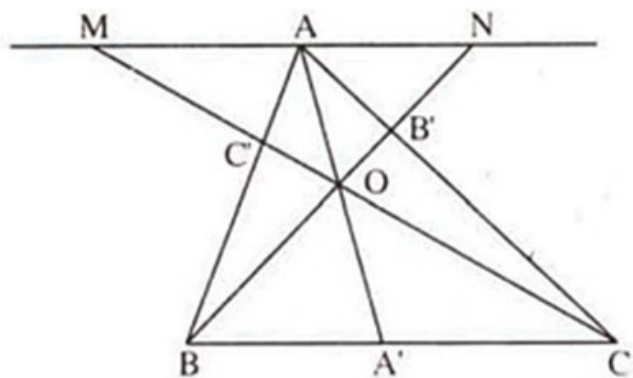
Giải

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt CC', BB' thứ tự ở M, N.

Theo định lí Ta-lét ta có:

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{AN}{BC} \quad (1)$$

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{BC}{AM} \quad (2)$$



Hình 3.45

Cũng theo định lí Ta-lét:

$$\frac{CA'}{MA} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B}{AN} \text{ nên } \frac{CA'}{A'B} = \frac{MA}{AN} \quad (3)$$

Nhân các đẳng thức (1), (2), (3) theo từng vế ta được:

$$\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = \frac{AN}{BC} \cdot \frac{MA}{AN} \cdot \frac{BC}{AM} = 1.$$

Chú ý: Đảo lại ta cũng có: " Nếu các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AC, AB của $\triangle ABC$ sao cho $\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1$ thì các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy."

Hoặc: "Nếu các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, AC, AB chứa các cạnh của $\triangle ABC$ sao cho trong ba điểm A', B', C' có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác và $\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1$ thì các đường thẳng AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc song song với nhau".

Các định lí thuận và đảo trên mang tên Xêva (Céva).

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, M là điểm bất kỳ trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt các cạnh BC, CA, AB tại N, P, Q. Gọi R là giao điểm của PQ và BC. Chứng minh rằng $\frac{NB}{NC} = \frac{RB}{RC}$.

Giải

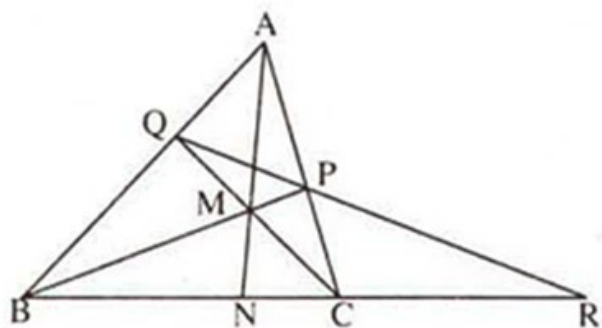
Xét $\triangle ABC$ có các đường thẳng AN, BP, CQ đồng quy nên theo định lí Xê va có:

$$\frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \quad (1)$$

Xét $\triangle ABC$ có P, Q, R thẳng hàng nên theo định lí Mê-nê-la-uyét ta có

$$\frac{RB}{RC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $\frac{NB}{NC} = \frac{RB}{RC}$.



Hình 3.46

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Về phía ngoài $\triangle ABC$ dựng $\triangle BCO$ vuông cân ở O . AB cắt CO ở E , AC cắt BO ở F . Kẻ $EN \parallel FM$ (N thuộc tia AC và M thuộc tia AB). MN cắt BC ở Q . Chứng minh AO vuông góc với OQ .

Giải

Lấy C' đối xứng với B qua O , E' thuộc tia OB sao cho $OE' = OE$, F' thuộc tia đối của OC sao cho $OF' = OF$; $E'C$ cắt $F'C'$ ở A' . Ta chứng minh OA vuông góc và bằng với OA' .

Thật vậy, dễ thấy: $BE = E'C$ ($\triangle OEB = \triangle OE'C$)

$$\Rightarrow \triangle BEC = \triangle CE'C' \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{E'CC'}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'CC'} \text{ (tính chất kề bù).}$$

Tương tự, $CF = C'F'$ ($\triangle OCF = \triangle OC'F'$)

$$\Rightarrow \triangle BCF = \triangle CC'F' \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{CC'F'}$$

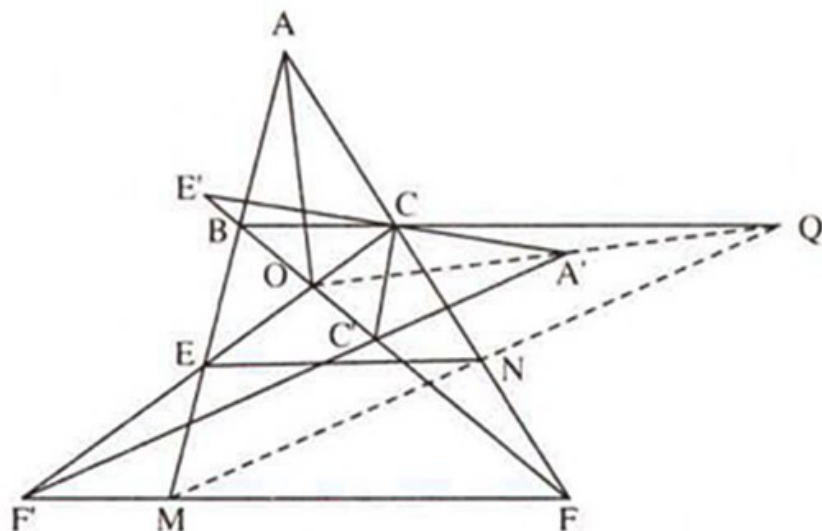
$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{A'C'C} \text{ (tính chất kề bù).}$$

$$\text{Vậy } \triangle ABC = \triangle A'CC' \text{ (g.c.g)} \Rightarrow \triangle OBA = \triangle OCA' \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'OC} \Rightarrow OA \text{ vuông góc với } OA' \text{ (vì } OB \text{ vuông góc với } OC).$$

Ta cần chứng minh ba đường thẳng BC , OA' và MN đồng quy.

Đặt $OB = OC = x$, $OE = OE' = y$. Gọi Q là giao điểm của OA' và BC . Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyét cho $\triangle E'BC$ với cát tuyến $OA'Q$, ta suy ra được:



Hình 3.47

$$\frac{QC}{QB} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{A'E'}{A'C} = 1 \quad (1)$$

Từ các kết quả trên ta suy ra

$$A'C = AB, A'E' = AE \text{ và } \frac{A'E'}{A'C} = \frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{QC}{QB} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{AN}{AC} = 1 \quad (3)$$

Gọi Q' là giao điểm của MN với BC . Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyét trong $\triangle ABC$ với cát tuyến MNQ' , ta có: $\frac{Q'C}{Q'B} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NA}{NC} = \frac{Q'C}{Q'B} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{NA}{NC}$ (4)

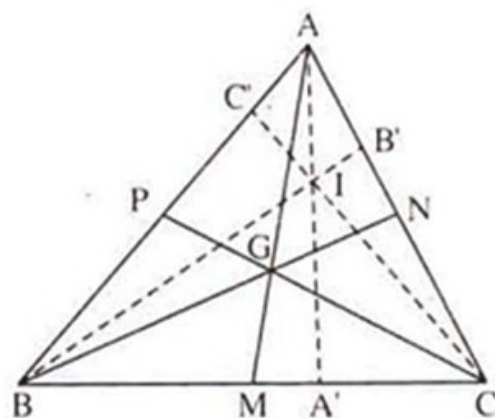
Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyét trong $\triangle AEC$ với cát tuyến FOB , ta suy ra $\frac{FC}{FA} = \frac{BE}{BA} \cdot \frac{x}{y} = \frac{CN}{CA} \cdot \frac{x}{y}$, đem thế vào (4) ta có: $\frac{Q'C}{Q'B} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{AN}{AC} = 1$ (5)

Từ (3) và (5) suy ra Q trùng với Q' , kết thúc chứng minh.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC , I là điểm nằm trong tam giác. Các tia AI , BI , CI lần lượt cắt BC , AC , AB tại A' , B' và C' . Xác định vị trí của I để tích $AB' \cdot CA' \cdot BC'$ có giá trị lớn nhất.

Giải

Kẻ AM , CP , BN là ba đường trung tuyến của $\triangle ABC$ cắt nhau tại G .



Hình 3.48

$$\text{Ta có: } AB' \cdot B'C \leq \left(\frac{AB' + B'C}{2} \right)^2 = AN^2.$$

$$\text{Tương tự: } CA' \cdot A'B \leq CM^2; BC' \cdot C'A \leq BP^2$$

$$\text{Suy ra: } (AB' \cdot CA' \cdot BC')(B'C \cdot A'B \cdot C'A) \leq (AN \cdot CM \cdot BP)^2.$$

$$\text{Theo định lí Ceva ta có } \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1, \text{ do đó}$$

$$AB' \cdot CA' \cdot BC' = B'C \cdot A'B \cdot C'A.$$

$$\text{Vậy: Tích } AB' \cdot CA' \cdot BC' \text{ có giá trị lớn nhất là } AN \cdot CM \cdot BP = \frac{AC \cdot BC \cdot AB}{8} \text{ khi}$$

A', B', C' thứ tự trùng với trung điểm các cạnh $BC, CA, AB \Leftrightarrow I \equiv G$.

C. BÀI TẬP

- 3.81. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm BC, đường phân giác trong BE và đường phân giác ngoài tại C của tam giác cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng E, M, F thẳng hàng.
- 3.82. Cho tam giác ABC, đường phân giác BE, CF và đường phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh rằng E, F, D thẳng hàng.
- 3.83. Trên các cạnh AB và AC của một tam giác ABC vuông tại A, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABEF và ACGI. BG cắt đường cao AH tại O. Chứng minh rằng C, O, E thẳng hàng.
- 3.84. Cho tứ giác ABCD. Hai đường thẳng song song với đường chéo AC, lần lượt cắt các cạnh BA, BC, DA, DC theo thứ tự tại G, H, E và F (các giao này không trùng với trung điểm các cạnh tứ giác). Chứng minh rằng các đường thẳng GE, HF, BD đồng quy.
- 3.85. Trên đường trung tuyến AD của tam giác ABC lấy điểm K sao cho $AK = 3KD$; BK cắt AC tại P. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABP và BCP.
- 3.86. Cho tam giác ABC, một điểm K trên AB sao cho $\frac{AK}{KB} = \frac{1}{2}$, một điểm L trên BC sao cho $\frac{CL}{LB} = 2$. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AL và CK. Tìm diện tích tam giác ABC, biết diện tích của tam giác BQC bằng 2012 (đơn vị diện tích).
- 3.87. Trên hai cạnh AB, AC của tam giác đều ABC lấy hai điểm E, D sao cho: $\frac{BE}{EA} = \frac{1}{2}$; $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$. Các đường thẳng BD và CE cắt nhau tại O. Chứng minh rằng $\widehat{AOC} = 90^\circ$.
- 3.88. Cho tam giác ABC, một điểm E trên cạnh AB, một điểm F trên cạnh AC và đường cao AM. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để MA là tia phân giác của góc EMF là ba đoạn thẳng AM, BF, CE đồng quy.
- 3.89. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài $\triangle ABC$ dựng $\triangle BCO$ vuông cân ở O. AB cắt CO ở E, AC cắt BO ở F, kẻ $EG \parallel BC \parallel FF'$ (G thuộc tia BO và F' thuộc tia CO). F'G cắt BC ở Q. Chứng minh AO vuông góc với OQ.
- 3.40. Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối AB và CD, AD và BC thứ tự cắt nhau tại M, N. Chứng minh rằng các trung điểm I, J, K của AC, BD, MN thẳng hàng.

Chương IV HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG - HÌNH CHÓP ĐỀU

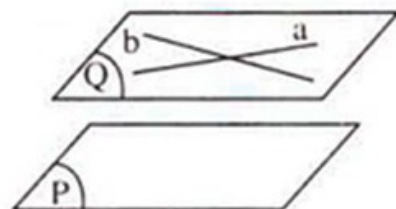
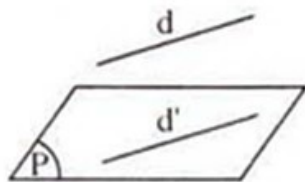
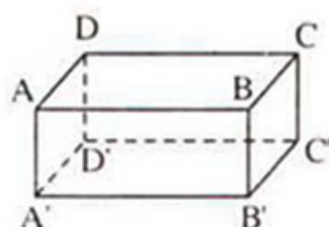
Chuyên đề 1 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

- Hình hộp chữ nhật là hình có 6 mặt đều là những hình chữ nhật.
Hình hộp chữ nhật có 6 mặt; 8 đỉnh và 12 cạnh.
Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là những hình vuông.
- Qua ba điểm không thẳng hàng có một và chỉ một mặt phẳng.
- Trong không gian, hai đường thẳng a và b gọi là *song song* với nhau nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
Với hai đường thẳng phân biệt a, b trong không gian, chúng có thể cắt nhau, hoặc song song với nhau hoặc không cùng nằm trong một mặt phẳng nào.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì chúng không có điểm chung.
Một đường thẳng d không thuộc mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng d' thuộc mặt phẳng (P) thì d song song với mặt phẳng (P) .

$$\left. \begin{array}{l} d \not\subset mp(P) \\ d' \subset mp(P) \\ d // d' \end{array} \right\} \Rightarrow d // mp(P)$$



Hình 4.1

6. Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

- Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm đó và gọi là *giao tuyến* của hai mặt phẳng.
- Nếu mặt phẳng (Q) chứa hai đường thẳng a; b cắt nhau mà a và b cùng song song với mặt phẳng (P) thì $mp(Q) // mp(P)$.

II. THỂ TÍCH HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

1. Nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng a vuông góc với mp (P).

$$\left. \begin{array}{l} b, c \subset mp(P) \\ b \text{ cắt } c \\ a \perp b \\ a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp mp(P)$$

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mp (P) tại A thì đường thẳng a vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A của mp (P).
- Nếu đường thẳng a thuộc mp(P) và a vuông góc với mp (Q) thì mp (P) vuông góc với mp (Q).

$$\left. \begin{array}{l} a \subset mp(P) \\ a \perp mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow mp(P) \perp mp(Q)$$

2. Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

$S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao).

Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}.$$

– Đối với hình lập phương cạnh a:

$$S_{xq} = 4a^2; S_{tp} = 6a^2.$$

3. Thể tích hình hộp chữ nhật:

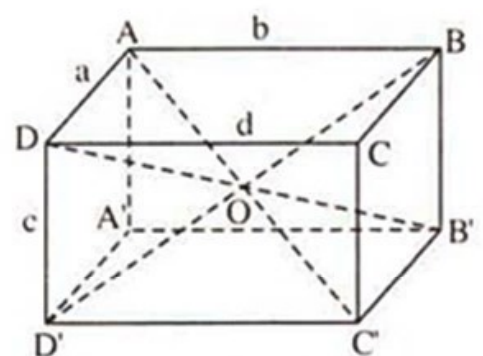
$$V = a.b.c \text{ (a; b; c là ba kích thước).}$$

Đối với hình lập phương cạnh a thì thể tích là $V = a^3$.

4. Trong hình hộp chữ nhật:

- 4 đường chéo đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.
- Bình phương của mỗi đường chéo bằng tổng các bình phương của ba kích thước:

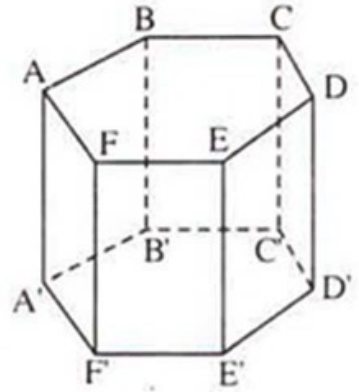
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



Hình 4.2

III. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

1. Hình lăng trụ đứng có hai đáy là hai đa giác bằng nhau, các mặt bên là những hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
2. Các cạnh bên của hình lăng trụ đứng song song với nhau và cùng vuông góc với hai mặt đáy. Độ dài cạnh bên gọi là *chiều cao* của lăng trụ đứng.
3. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.



Hình 4.3

IV. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

1. Diện tích xung quanh của lăng trụ đứng bằng tổng diện tích các mặt bên:

$$S_{xq} = 2ph \text{ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao)}$$

2. Diện tích toàn phần của lăng trụ đứng bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}.$$

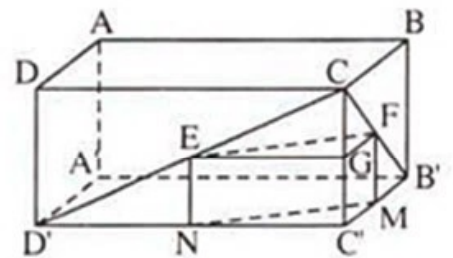
3. Thể tích lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao:

$$V = S.h \text{ (S là diện tích đáy; h là chiều cao).}$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F, G, M, N lần lượt là trung điểm của CD' , CB' , CC' , $B'C'$, $C'D'$. Chứng minh rằng:

- a) EFMN là hình bình hành.
- b) $CC' \parallel mp(EFMN)$.
- c) $mp(EFG) \parallel mp(ABCD)$.



Hình 4.4

Nhận xét:

- Vận dụng các định lý về điều kiện để đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song.
- Áp dụng các kiến thức cơ bản trong hình học phẳng về quan hệ song song và các tính chất của các tứ giác đặc biệt.

Giải

a) Trong tam giác $B'CD'$ có EF là đường trung bình nên $EF \parallel B'D'$ và $EF = \frac{1}{2}B'D'$.

Tương tự, trong tam giác $B'C'D'$ có $MN \parallel B'D'$ và $MN = \frac{1}{2}B'D'$.

Do đó: $EF \parallel MN$ và $EF = MN$. Vậy $EFMN$ là hình bình hành.

b) Trong tam giác $CC'B'$ có FM là đường trung bình nên $FM \parallel CC'$, mà $FM \subset mp(EFMN)$ nên $CC' \parallel mp(EFMN)$.

c) Ta có: $FG \parallel BC \Rightarrow FG \parallel mp(ABCD)$; $GE \parallel CD \Rightarrow GE \parallel mp(ABCD)$.

Vì FG và GE cùng thuộc $mp(EFG)$; FG cắt GE tại G nên:

$mp(EFG) \parallel mp(ABCD)$.

Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 16$, $AD = 12$, $AA' = 25$.

a) Chứng minh $ACC'A'$; $BDD'B'$ là các hình chữ nhật.

b) Kiểm tra lại công thức tính độ dài đường chéo của hình hộp.

c) Tính diện tích toàn phần của hình hộp.

Nhận xét: Vận dụng các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

– Áp dụng các kiến thức cơ bản trong hình học phẳng về quan hệ song song và các tính chất của các tứ giác đặc biệt, định lý Py-ta-go, định lý Ta-lét để tính độ dài các đoạn thẳng.

Giải

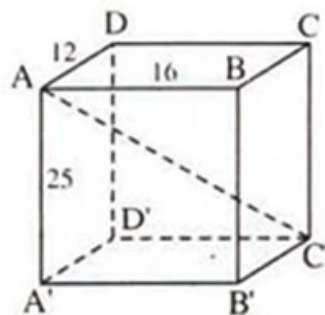
a) Ta có: $AA' \parallel CC'$; $AA' = CC'$; $AA' \perp A'C'$ (do $AA' \perp mp(A'B'C'D')$) nên $ACC'A'$ là hình chữ nhật. Chứng minh tương tự, $BDD'B'$ là hình chữ nhật.

b) Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$$\begin{aligned} AC'^2 &= AA'^2 + A'C'^2 = AA'^2 + BD^2 \text{ (vì } BD = A'C') \\ &= AA'^2 + AB^2 + AD^2. \end{aligned}$$

c) Ta có: $S_{xq} = 2ph = 2(12 + 16).25 = 1400$ (đvdt)

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 1400 + 2.12.16 = 1784 \text{ (đvdt)}.$$



Hình 4.5

Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F, G, M, N lần lượt là trung điểm của CD' ; CB' ; CC' ; $B'C'$; $C'D'$. Chứng minh rằng:

- a) $CC' \perp mp(EFG)$; b) $mp(EFG) \perp mp(CC'D')$.

Nhận xét: Vận dụng các định lí về điều kiện để đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song; đường thẳng vuông góc mặt phẳng; hai mặt phẳng vuông góc.

– Áp dụng các kiến thức cơ bản trong hình học phẳng về quan hệ song song; quan hệ vuông góc và các tính chất của các tứ giác đặc biệt.

Giải

a) (h.4.4) $CC' \perp B'C'$, mà $B'C' \parallel GF$ nên $CC' \perp GF$. (1)

$CC' \perp D'C'$ mà $D'C' \parallel GE$ nên $CC' \perp GE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CC' \perp mp(EFG)$.

b) Ta có $CC' \subset mp(CC'D') \Rightarrow mp(EFG) \perp mp(CC'D')$.

Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $\widehat{AC'A'} = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình hộp.

Nhận xét: Vận dụng các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

Giải

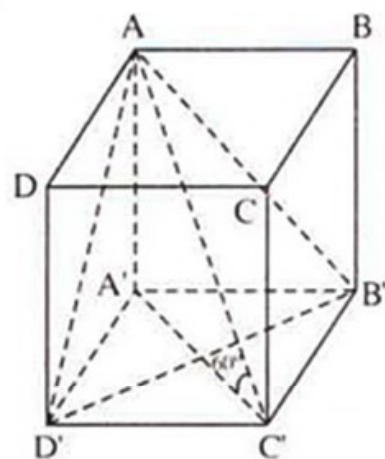
Tam giác vuông $AA'C'$ có $\widehat{AC'A'} = 60^\circ$ nên:

$$\widehat{C'AA'} = 30^\circ \Rightarrow A'C' = \frac{1}{2}AC' \Rightarrow AC' = 2a\sqrt{2}.$$

$$AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{8a^2 - 2a^2} = a\sqrt{6}.$$

Diện tích xung quanh của hình hộp là: $S_{xq} = 4a^2\sqrt{6}$.

Thể tích của hình hộp là: $V = a^2 \cdot a\sqrt{6} = a^3\sqrt{6}$.



Hình 4.6

Ví dụ 5: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC , ABB' , $A'B'C'$, $A'C'C$. Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

Nhận xét: Xác định lăng trụ đứng từ đó suy ra các quan hệ song song và vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Giải

Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và A'C'.

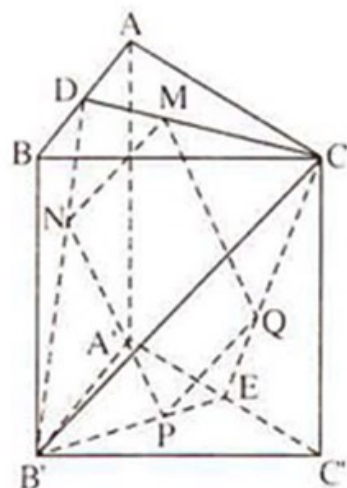
Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác, ta có:

$$\frac{DM}{DC} = \frac{1}{3}; \quad \frac{DN}{DB'} = \frac{1}{3}. \quad \text{Do đó: } \frac{DM}{DC} = \frac{DN}{DB'} = \frac{1}{3} \text{ suy}$$

$$\text{ra: } MN \parallel B'C \text{ và } \frac{MN}{B'C} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Tương tự: } PQ \parallel B'C \text{ và } \frac{PQ}{B'C} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$ nên MNPQ là hình bình hành.



Hình 4.7

Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi, $AB = 8\text{cm}$; $\widehat{BAD} = \widehat{ACA'} = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của lăng trụ.

Nhận xét: Vận dụng các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng.

– Áp dụng các kiến thức cơ bản trong hình học phẳng về quan hệ song song; quan hệ vuông góc và các tính chất của các tứ giác đặc biệt, định lý Py-ta-go, định lý Ta-lét để tính độ dài các đoạn thẳng.

Giải

Tam giác ABD có $AB = AD$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, suy ra:

$$AO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2AO = 8\sqrt{3}.$$

Tam giác A'AC có $\widehat{A'AC} = 90^\circ$; $\widehat{ACA'} = 60^\circ$ nên:

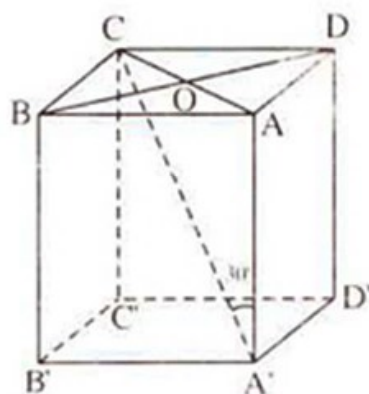
$$A'C = 2AC = 16\sqrt{3} \Rightarrow AA' = \frac{A'C\sqrt{3}}{2} = 24.$$

Diện tích xung quanh của lăng trụ là

$$S_{xq} = 4.AB.AA' = 4.8.24 = 768 (\text{cm}^2).$$

Diện tích toàn phần của lăng trụ là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 768 + 2 \cdot \frac{AC.BD}{2} = 768 + 2 \cdot \frac{8\sqrt{3}.8}{2} = 768 + 64\sqrt{3} (\text{cm}^2).$$



Hình 4.8

C. BÀI TẬP

- 4.1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và $B'C'$. Chứng minh $MN \parallel mp(A'C'D)$.
- 4.2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCD'A')$ và $(ADC'B')$.
- 4.3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông; chiều cao hình hộp bằng h , $\widehat{B'AD'} = 60^\circ$. Tính diện tích toàn phần của hình hộp.
- 4.4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB , $C'D'$. Chứng minh rằng các đường thẳng AC' , BD' , CA' , DB' , MN đồng quy.
- 4.5. Một hình hộp chữ nhật có tổng ba kích thước bằng 24(cm) và diện tích toàn phần bằng $376 \text{ (cm}^2\text{)}$. Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật đó.
- 4.6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB:AD:AA' = 3:4:5$ và đường chéo AC bằng 5cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình hộp chữ nhật.
- 4.7. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' , $B'C'$. Chứng minh $MN \parallel mp(BA'C')$.
- 4.8. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Gọi O và O' là tâm các mặt đáy. Chứng minh rằng:
- $OO' \perp mp(A'B'C'D')$;
 - $mp(AA'C'C) \perp mp(BB'D'D)$.
- 4.9. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' , CC' và G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh $mp(BA'N)$ song song với $mp(MC'G)$.
- 4.10. Một hình hộp chữ nhật có kích thước đáy 82 cm x 70 cm và chiều cao 60cm. Người ta xếp vào bên trong những hình hộp có đáy là hình vuông cạnh 10 cm, chiều cao 59 cm, theo chiều đứng của hình hộp.
- Tính số hình hộp nhỏ có thể xếp được.
 - Tính thể tích hộp không sử dụng.
- 4.11. Một lăng trụ đều có tổng số mặt, số đỉnh, số cạnh là 26. Diện tích xung quanh là 200cm^2 , chiều cao là 10cm. Tính thể tích của lăng trụ?
- 4.12. Trong các hình hộp chữ nhật có độ dài đường chéo bằng nhau và bằng d, hãy tìm hình hộp có diện tích toàn phần lớn nhất.

Chuyên đề 2

HÌNH CHÓP ĐỀU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

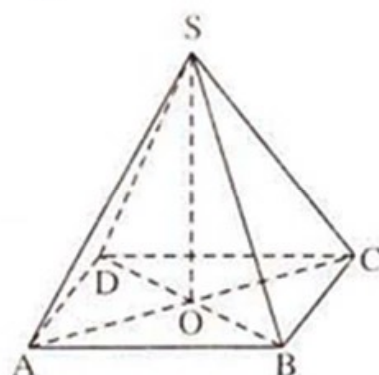
I. HÌNH CHÓP ĐỀU – HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

1. Hình chóp có đáy là một đa giác phẳng, các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh. Người ta gọi tên hình chóp theo tên đa giác đáy.

2. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đáy.

* Trong hình chóp đều:

- Các cạnh bên bằng nhau.
- Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
- Chiều cao của mỗi mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp.



Hình 4.9

3. Cắt một hình chóp đều bằng mặt phẳng song song với mặt phẳng đáy. Phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy là một *hình chóp cắt đều*.

* Hình chóp cắt đều có các mặt bên là các hình thang cân.

* Chiều cao của mỗi hình thang cân (mặt bên) gọi là trung đoạn của hình chóp cắt đều.

II. DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU, HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Công thức tính diện tích và thể tích:

- Kí hiệu: p và p' là nửa chu vi các đáy
 d là trung đoạn, h là chiều cao
 S_{xq} là diện tích xung quanh
 S_{tp} là diện tích toàn phần
 B và B' là diện tích các đáy
 V là thể tích.

	Diện tích xung quanh	Diện tích toàn phần	Thể tích
Hình chóp đều	$S_{xq} = p.d$	$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = p.d + B$	$V = \frac{1}{3} B.h$
Hình chóp cụt đều	$S_{xq} = (p + p') . d$	$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy lớn} + S_{đáy nhỏ}$ $= (p + p')d + B + B'$	

Thể tích của hình chóp cụt: $V_{ch,c} = \frac{1}{3} h.(B + B' + \sqrt{BB'})$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

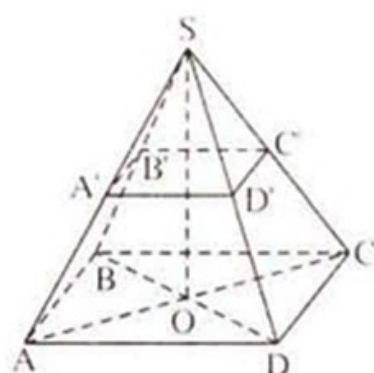
Ví dụ 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD .

a) Chứng minh $mp(ABCD)$ song song với $mp(A'B'C'D')$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh $SO \perp mp(A'B'C'D')$.

Nhận xét: Hai mặt phẳng song song khi mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau và song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia.

– Đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng còn lại.



Hình 4.10

Giải

a) Ta có $A'B' \parallel AB$; $C'D' \parallel CD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông, suy ra $A'B' \parallel C'D'$. Do đó A', B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.

Tương tự, $A'D' \parallel AD$. Vậy $mp(ABCD) \parallel mp(A'B'C'D')$.

b) $mp(ABCD) \parallel mp(A'B'C'D')$ nên $SO \perp mp(A'B'C'D')$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC . Chứng minh $ABC.MNP$ là hình chóp cụt tam giác đều.

Nhận xét: Để chứng minh một hình là hình chóp cụt đều, ta cần:

- Chứng minh hai mặt đáy là các đa giác đều thuộc hai mặt phẳng song song.
- Chứng minh các mặt bên là hình thang cân.

Giải

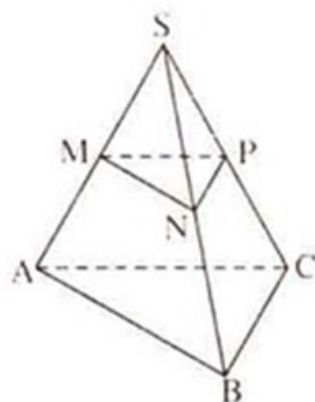
Ta có: $AB \parallel MN$; $BC \parallel NP$ nên $mp(MNP) \parallel mp(ABC)$ và ΔMNP là tam giác đều.

Mặt khác, $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên:

$$SA = SB = SC.$$

Suy ra $\widehat{SAB} = \widehat{SBA}$, do đó $AMNB$ là hình thang cân.

Tương tự, $BNPC$; $AMPC$ là các hình thang cân. Vậy $ABC.MNP$ là hình chóp cắt tam giác đều.



Hình 4.11

Ví dụ 3: Một hình chóp cắt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đáy bằng a và $2a$, đường cao của mặt bên bằng a .

a) Tính diện tích xung quanh;

b) Tính cạnh bên, đường cao của hình chóp cắt đều.

Nhận xét: Áp dụng các công thức tính diện tích đã nêu trong phần kiến thức cần nhớ.

Giải

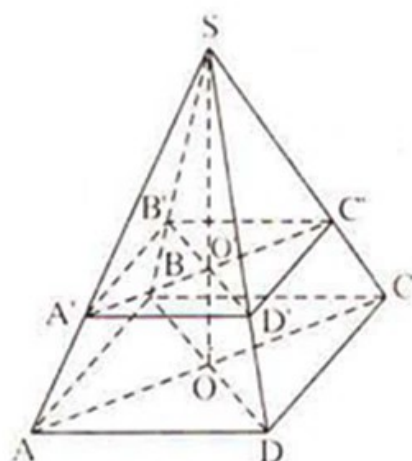
a) Diện tích xung quanh của hình chóp cắt đều:

$$S_{xq} = (p + p') \cdot d = (4a + 2a) \cdot a = 6a^2.$$

b) Khai triển hình chóp cắt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân $ABB'A'$. Vẽ đường cao $A'H$ và $B'K$.

$$\text{Ta có: } AH = BK = \frac{AB - A'B'}{2} = \frac{a}{2},$$

$$AA' = \sqrt{AH^2 + HA'^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Hình 4.12

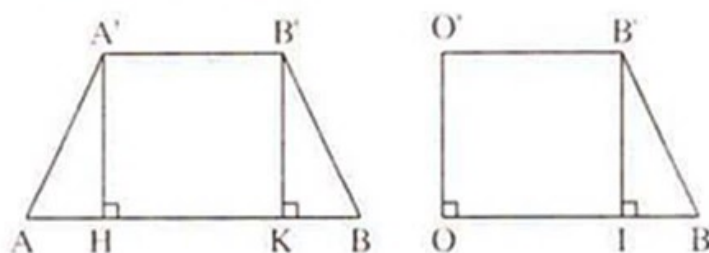
Trong hình thang vuông $OBB'O'$ vẽ đường cao $B'I$, ta có:

$$OB = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2}; \quad O'B' = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$BI = OB - O'B' = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy đường cao hình chóp cắt là

$$B'I = \sqrt{B'B^2 - BI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 4.13

Ví dụ 4: Cho một hình trụ bê tông như hình vẽ gồm phần trên là một hình hộp chữ nhật, phần dưới là hình chóp cắt tứ giác đều. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của MA', MB', MC', MD'. Biết AA' = 4; AB = 5; OI = IJ; SJ = 12. Tính thể tích của trụ bê tông.

Nhận xét: Áp dụng các công thức tính thể tích đã nêu trong phần kiến thức cần nhớ.

Giải

Gọi V là thể tích trụ bê tông; V_1 là thể tích hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'; V_2 là thể tích hình chóp tứ giác đều S.A'B'C'D'; V_3 là thể tích hình chóp tứ giác đều S.MNPQ. Ta có $V = V_1 + V_2 - V_3$. Theo đề bài ta có: AA' = IJ = OI = 4 $\Rightarrow$ SO = 4.

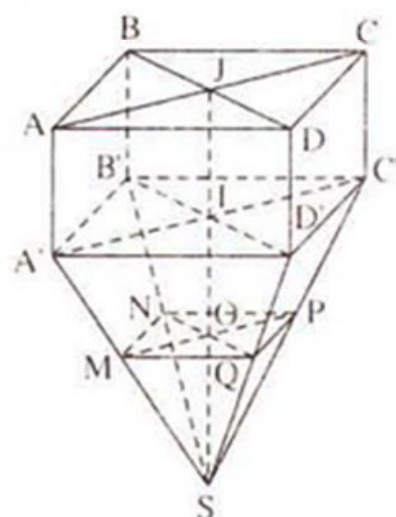
Vì M; N; P; Q lần lượt là trung điểm của SA', SB', SC', SD'

nên MN = NP = PQ = QM = 2,5.

$$V_1 = 5.5.4 = 100(\text{đvtt}); V_2 = \frac{1}{3}.5.5.8 = \frac{200}{3}(\text{đvtt}),$$

$$V_3 = \frac{1}{3}.2.5.2.5.4 = \frac{25}{3}(\text{đvtt}), \text{ từ đó}$$

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = 100 + \frac{200}{3} - \frac{25}{3} = \frac{475}{3}(\text{đvtt}).$$



Hình 4.14

C. BÀI TẬP

- 4.13. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các mặt bên là các tam giác đều; cạnh AB = 10cm; O là trung điểm AC. Tính SO.
- 4.14. Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEH có AB = 9 (cm), cạnh bên SA = 15 (cm). Tính chiều cao của hình chóp.
- 4.15. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A. $SB \perp mp(ABC)$. Biết SA = 25 cm; AB = 20 cm; AC = 15 cm.
- Chứng minh $AB \perp AC$;
 - Chứng minh $SA \perp AC$;
 - Tính SB; SC; BC.
- 4.16. Tính thể tích của Kim tự tháp Chéphren (Ai cập) có dạng hình chóp tứ giác đều, đáy có độ dài 217m và chiều cao 138m.

- 4.17. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt SAB ; SBC ; SAC là các tam giác vuông tại S và $AB = 3 \text{ cm}$; $SA = 2 \text{ cm}$; $AC = 4 \text{ cm}$.
- Chứng minh $SA \perp mp(SBC)$;
 - Tính diện tích xung quanh của hình chóp;
 - Tính thể tích của hình chóp.
- 4.18. Một hình chóp cắt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng a ; cạnh đáy nhỏ bằng b , chiều cao bằng $\frac{ab}{a+b}$. So sánh diện tích xung quanh và tổng diện tích hai đáy.
- 4.19. Cho hình chóp cắt tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy lớn là 20 cm ; cạnh đáy nhỏ là 12 cm , diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy.
- Tính diện tích toàn phần của hình chóp cắt.
 - Tính đường cao của mặt bên.
- 4.20. Cho hình chóp cắt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $AB = 10 \text{ cm}$, đáy nhỏ $A'B' = 6 \text{ cm}$, mặt bên $ACC'A'$ là hình thang cân có $\widehat{ACC'} = 45^\circ$. Tính diện tích xung quanh của hình chóp.
- 4.21. Nếu cạnh đáy của một hình chóp tứ giác đều tăng gấp đôi, còn chiều cao của nó giảm đi một nửa thì thể tích của nó thay đổi như thế nào?
- 4.22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, các cạnh còn lại đều bằng 1 .
- Chứng minh rằng tam giác SAC vuông ;
 - Tìm giá trị lớn nhất của $V_{S.ABCD}$.
- 4.23. Cạnh bên của hình chóp tam giác đều bằng a . Chứng minh rằng diện tích xung quanh của hình chóp không vượt quá $\frac{3a^2}{2}$.
- 4.24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC và $SA \perp mp(ABC)$. Gọi I là trung điểm BC .
- Chứng minh $mp(SAI) \perp mp(SBC)$;
 - Chứng minh rằng đường thẳng $d \perp mp(SBC)$ tại trực tâm của ΔSAC thì đi qua trực tâm của tam giác ABC ;
 - Gọi K là trung điểm của SB . Chứng minh rằng khi S chạy trên đường thẳng $xy \perp mp(ABC)$ tại A thì đường thẳng CK nằm trong một mặt phẳng cố định.
- 4.25. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh bằng $3a$ và cạnh bên SA bằng $2a$. Tính độ dài đường cao của hình chóp.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 1

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

3.1.

- a) Có.
- b) Không.

3.2. $m = 11$.

3.3. $x = 3$ là nghiệm của phương trình: $2mx - 5 = -x + 6m - 2$, không phụ thuộc vào m .

3.4.

- a) $x = \frac{1}{7}$.
- b) $x = 3$.

3.5.

- a) $x = \frac{7}{8}$.
- b) $x = 10$.
- c) $x = 2$.

3.6.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{7} + \frac{x+4}{4} + 6 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{15} + 1 \right) + \left(\frac{x+2}{7} + 2 \right) + \left(\frac{x+4}{4} + 3 \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x+16}{15} + \frac{x+16}{7} + \frac{x+16}{4} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+16) \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow x = -16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{x+14}{200} + \frac{x+27}{187} + \frac{x+105}{109} &= \frac{x+200}{14} + \frac{x+187}{27} + \frac{x+109}{105} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{x+14}{200} + 1 \right) + \left(\frac{x+27}{187} + 1 \right) + \left(\frac{x+105}{109} + 1 \right) &= \\
 &= \left(\frac{x+200}{14} + 1 \right) + \left(\frac{x+187}{27} + 1 \right) + \left(\frac{x+109}{105} + 1 \right) \\
 \Leftrightarrow (x+214) \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{187} + \frac{1}{109} \right) &= (x+214) \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{27} + \frac{1}{105} \right) \\
 \Leftrightarrow x &= -214.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{x-342}{15} + \frac{x-323}{17} + \frac{x-300}{19} + \frac{x-273}{21} &= 10 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{x-342}{15} - 1 \right) + \left(\frac{x-323}{17} - 2 \right) + \left(\frac{x-300}{19} - 3 \right) + \left(\frac{x-273}{21} - 4 \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-357) \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 357.
 \end{aligned}$$

3.7.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{x+97}{125} + \frac{x-63}{35} &= \frac{x-7}{21} + \frac{x-77}{49} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{x+97}{125} - 1 \right) + \left(\frac{x-63}{35} + 1 \right) &= \left(\frac{x-7}{21} - 1 \right) + \left(\frac{x-77}{49} + 1 \right) \\
 \Leftrightarrow (x-28) \left(\frac{1}{125} + \frac{1}{35} \right) &= (x-28) \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{49} \right) \\
 \Leftrightarrow x &= 28. \\
 \text{b) } \frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} &= \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{13} + 1 \right) + \left(\frac{2x+45}{15} - 1 \right) &= \left(\frac{3x+8}{37} + 1 \right) + \left(\frac{4x+69}{9} - 1 \right) \\
 \Leftrightarrow (x+15) \left(\frac{1}{13} + \frac{2}{15} \right) &= (x+15) \left(\frac{3}{37} + \frac{4}{9} \right) \\
 \Leftrightarrow x &= -15.
 \end{aligned}$$

3.8. $x = 2000$.

3.9. $m = 0$ hoặc $m = -\frac{2}{3}$.

Chú ý: Để hai phương trình tương đương thì phương trình $mx - 1 = 0$ hoặc vô nghiệm ($m = 0$), hoặc có nghiệm $x = -\frac{3}{2}$ ($m = -\frac{2}{3}$).

3.10.

a) $(1-m)x = m^2 - 1 \Leftrightarrow -(m-1)x = (m-1)(m+1)$

+ Nếu $m = 1$ thì $0x = 0 \Rightarrow$ phương trình nghiệm đúng với mọi x .

+ Nếu $m \neq 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = -m - 1$.

b) $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 9 \Leftrightarrow (m-2)(m-3)x = (m+3)(m-3)$

+ Nếu $m = 2$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m = 3$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $m \neq 2$ và $m \neq 3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m+3}{m-2}$.

3.11. Xét phương trình: $(4m^2 - 25)x - 5 = 2m$.

a) Khi $m = 5$ phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{5}$.

b) Phương trình $(2m-5)(2m+5)x = 2m+5$ vô nghiệm khi và chỉ khi $2m-5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

3.12. Phương trình: $(4m^2 - 9)x = 2m^2 + m - 3$

$\Leftrightarrow (2m-3)(2m+3)x = (m-1)(2m+3)$

a) Phương trình có nghiệm duy nhất khi $(2m-3)(2m+3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm \frac{3}{2}$.

b) Phương trình có vô số nghiệm khi $\begin{cases} (2m-3)(2m+3) = 0 \\ (m-1)(2m+3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

3.13.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } & \frac{a+b-x}{c} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{c+a-x}{b} + \frac{4x}{a+b+c} = 1 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a+b-x}{c} + 1 \right) + \left(\frac{b+c-x}{a} + 1 \right) + \left(\frac{c+a-x}{b} + 1 \right) + \left(\frac{4x}{a+b+c} - 4 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & [(a+b+c) - x] \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b+c} \right) = 0 \end{aligned}$$

+ Nếu $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b+c}$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x .

+ Nếu $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{4}{a+b+c}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = a + b + c$.

3.14.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x-a}{bc} - \frac{2}{a} \right) + \left(\frac{x-b}{ca} - \frac{2}{b} \right) + \left(\frac{x-c}{ab} - \frac{2}{c} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a+b+c)x - a^2 - 2bc - b^2 - 2ca - c^2 - 2ab}{abc} = 0 \\ \Leftrightarrow & (a+b+c)x = (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

+ Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $a + b + c \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất: $x = a + b + c$.

Chuyên đề 2

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

3.15. Kí hiệu S là tập nghiệm của phương trình.

a) $S = \left\{ 6; \frac{5}{2}; -3 \right\}.$

b) $S = \left\{ -\frac{5}{2}; 3 \right\}.$

c) $S = \left\{ 2; \frac{1}{3} \right\}.$

- 3.16. Phương trình $(2m-5)x - 2m^2 + 8 = 43$ có nghiệm $x = -7$ khi
 $(2m-5)(-7) - 2m^2 + 8 = 43 \Leftrightarrow 2m^2 + 14m = 0 \Leftrightarrow m(m+7) = 0$
 $\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 7$.

3.17.

- a) $x = 0$.
 b) $x = 0$.

3.18.

a) $125x^3 - (2x+1)^3 - (3x-1)^3 = 0$.

Đặt $\begin{cases} a = 2x+1 \\ b = 3x-1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 5x$

Ta có: $(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 0 \Leftrightarrow 2ab(a+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a+b = 0 \end{cases}$

Tương ứng ta có $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{3}; x = 0$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 0\right\}$.

b) $S = \{3; -1; 1\}$.

3.19.

a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$.

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

b) $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2 - 2x + 3) = 0$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1; -3\}$.

Chú ý: $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 = 0$: vô nghiệm.

3.20.

a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24 = 0$

Đặt $t = x^2 + 5x + 5$, ta có: $(t-1)(t+1) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5$.

$$+ \text{ Với } t = 5, \text{ ta có: } x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = -5, \text{ ta có: } x^2 + 5x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = 0 : \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \{0; -5\}$.

$$b) (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 15x + 56) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+7)(x+8) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x - 7)(x^2 + 6x + 16) + 8 = 0$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 6x - 7, \text{ ta có: } t(t-9) + 8 = 0.$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 1 \text{ ta có: } x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 17$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 17 \Leftrightarrow x+3 = \pm\sqrt{17} \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{17}.$$

$$+ \text{ Với } t = 8 \text{ ta có: } x^2 + 6x - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 24$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 24 \Leftrightarrow x+3 = \pm\sqrt{24} \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{24}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-3 \pm \sqrt{17}; -3 \pm \sqrt{24}\}$.

3.21. Giải các phương trình sau:

$$a) (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) - 9x^2 = 0.$$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) - 9 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = 2x + \frac{1}{x} + 1, \text{ ta có: } (t-4)(t+4) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5.$$

$$+ \text{ Với } t = 5 \text{ ta có: } 2x + \frac{1}{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x + 1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$+ \text{ Với } t = -5 \text{ ta có: } 2x + \frac{1}{x} + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 6x + 1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{7}{4}} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{4}}.$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm là: } S = \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{4}} \right\}.$$

3.22.

$$a) (x+6)^4 + (x+8)^4 = 272.$$

$$\text{Đặt } t = x + 7, \text{ ta có: } (t-1)^4 + (t+1)^4 = 272$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 272$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 270 = 0 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 + 9 = 144 \Leftrightarrow (t^2 + 3)^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3 = 12 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3.$$

$$+ \text{ Nếu } t = 3 \text{ thì } x = -4.$$

$$+ \text{ Nếu } t = -3 \text{ thì } x = -10.$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm là: } S = \{-4; -10\}.$$

$$b) (5-x)^4 + (2-x)^4 = 17.$$

$$\text{Giải tương tự câu a) ta có tập nghiệm của phương trình là } S = \{3; 4\}.$$

3.23.

$$\text{Ta có: } x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 \Leftrightarrow x^5 - 1 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là } x = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Chú ý: } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= \left(x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} \right) + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{4} + x + 1 \right) \\ &= \left(x^2 + \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^2 > 0, \forall x; \end{aligned}$$

hoặc chứng minh bằng phản chứng, không thể xảy ra $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

3.24. Ta có: $5x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + \left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 = -4x^3.$$

Gọi a là số sao cho $a^3 = 4$ (ở lớp 9 ta gọi a là căn bậc ba của 4), ta có:

$$(x+2)^3 = -a^3 x^3 = (-ax)^3$$

$$\Leftrightarrow x+2 = -ax \Leftrightarrow x = \frac{-2}{a+1}.$$

3.25. Ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 + 11x + 12)(x^2 + 9x + 20)(x^2 + 13x + 42) &= \\ &= 36(x^2 + 11x + 30)(x^2 + 11x + 31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x^2 + 11x + 12)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) &= \\ &= 36(x+5)(x+6)(x^2 + 11x + 31) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x+6) \left[(x^2 + 11x + 12)(x+4)(x+7) - 36(x^2 + 11x + 31) \right] = 0$$

Ta có 3 trường hợp:

$$* x+5=0 \Leftrightarrow x=-5.$$

$$* x+6=0 \Leftrightarrow x=-6.$$

$$* (x^2 + 11x + 12)(x+4)(x+7) - 36(x^2 + 11x + 31) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 11x + 12)(x^2 + 11x + 28) - 36(x^2 + 11x + 31) = 0$$

Đặt $t = x^2 + 11x + 12$, ta có: $t(t+16) - 36(t+19) = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 20t - 684 = 0 \Leftrightarrow (t-38)(t+18) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=38 \\ t=-18 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 38 \text{ ta có: } x^2 + 11x - 26 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -13 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = -18 \text{ ta có: } x^2 + 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-5; -6; 2; -13\}$.

Chuyên đề 3

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MÃU

3.26.

$$a) \frac{3}{2x-1} + 1 = \frac{2x-1}{2x+1}.$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó ta có phương trình: } 3(2x+1) + (2x-1)(2x+1) = (2x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6x + 3 + 4x^2 - 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 6x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm là } S = \left\{-\frac{1}{6}\right\}.$$

$$b) \frac{x+5}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x+5} \quad (2)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \notin \{3; -5\}.$$

$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow \frac{2x+34}{15} = \frac{2x+34}{(x-3)(x+5)},$$

Ta có hai trường hợp:

$$* 2x + 34 = 0 \Leftrightarrow x = -17 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$* (\text{Với } x \neq -17) 15 = (x-3)(x+5) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 31 \Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{31} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{31} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \{-17; -1 - \sqrt{31}; -1 + \sqrt{31}\}.$$

3.27. Giải phương trình: $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{(x-1)(x+3)} = 1$$

ĐKXD: $x \notin \{1; -3\}$.

Khi đó ta có phương trình:

$$(3x-1)(x+3) - (2x+5)(x-1) + 4 = (x-1)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ (loại).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

3.28.

a) $\frac{5}{x^2+x-6} - \frac{2}{x^2+4x+3} = \frac{-3}{2x-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{(x-2)(x+3)} - \frac{2}{(x+1)(x+3)} = \frac{-3}{2x-1}$$

ĐKXD: $x \notin \left\{2; -3; -1; \frac{1}{2}\right\}$

Khi đó: $\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right) - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{-3}{2x-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-3}{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1) - (x-2)(2x-1) = -3(x-2)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{36} = 0.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Trong lời giải trên ta đã sử dụng biến đổi đồng nhất sau

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right), \text{ với } a \neq b.$$

b) $\frac{4x^2+16}{x^2+6} = \frac{3}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+3} + \frac{7}{x^2+5}$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{8}{x^2+6} = \frac{3}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+3} + \frac{7}{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{x^2+1}-1\right)+\left(\frac{5}{x^2+3}-1\right)+\left(\frac{7}{x^2+5}-1\right)+\left(\frac{8}{x^2+6}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (2-x^2)\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x^2+5}+\frac{1}{x^2+6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=2$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

3.29.

$$a) \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2, t \geq 2$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t} = \frac{6}{t+1}$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 7t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vì } t \geq 2 \text{ nên } t=2. \text{ Do đó: } x^2 - 2x + 3 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1\}$.

$$b) \frac{x^2+2x+7}{(x+1)^2+2} = x^2+2x+4.$$

$$\text{Đặt } t = (x+1)^2 + 2, t \geq 2$$

$$\text{Ta có: } \frac{t+4}{t} = t+1 \Rightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } t \geq 2 \text{ nên } t=2, \text{ do đó: } (x+1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x=-1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=-1$.

$$3.30. \frac{2x}{3x^2-x+2} - \frac{7x}{3x^2+5x+2} = 1.$$

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 3x^2-x+2 \neq 0 \\ 3x^2+5x+2 \neq 0 \end{cases}$$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$\frac{2}{3x-1+\frac{2}{x}} - \frac{7}{3x+5+\frac{2}{x}} = 1$$

Đặt $t = 3x + \frac{2}{x} + 2$, ta có: $\frac{2}{t-3} - \frac{7}{t+3} = 1 \quad (t \neq \pm 3)$

$$\Leftrightarrow t^2 + 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow (t+9)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với $t = -9$ ta có: $3x + \frac{2}{x} + 2 = -9 \Rightarrow 3x^2 + 11x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{11}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{6}\right)^2 = \frac{97}{36} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{97}{36}}$$

+ Với $t = 4$ ta có: $3x + \frac{2}{x} + 2 = 4 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (x-1)^2 + 1 = 0 : \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ -\frac{11}{6} - \sqrt{\frac{97}{36}}, -\frac{11}{6} + \sqrt{\frac{97}{36}} \right\}$.

3.31.

a) $\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = 13 \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x} \right)$

ĐKXD: $x \neq 0$

Khi đó: $2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2} \right) = 13 \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x} \right)$

Đặt $t = \frac{x}{2} - \frac{3}{x}$, ta có: $2(t^2 + 3) = 13t \Leftrightarrow 2t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

+ Với $t = 6$, ta có: $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = 6 \Rightarrow x^2 - 12x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 = 42 \Leftrightarrow x = 6 \pm \sqrt{42} \text{ (thỏa mãn).}$$

+ Với $t = \frac{1}{2}$, ta có: $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-2; 3; 6 - \sqrt{42}; 6 + \sqrt{42}\}$.

b) $x(x-1) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 0$

ĐKXD: $x \neq 0$.

Khi đó: $x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \Rightarrow |t| \geq 2$

và $t^2 - 2 - t = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$

Vì $|t| \geq 2$ nên $t = 2$, do đó: $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

3.32. Giải phương trình: $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 90$.

ĐKXD: $x \neq \pm 1$.

Khi đó: $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x^2-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x^2-1} - 90 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x^2-1} - 90 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - 90 = 0$

Đặt $t = \frac{2x^2}{x^2-1}$, ta có: $t^2 - t - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -9 \end{cases}$

+ Với $t = 10$, ta có: $\frac{2x^2}{x^2-1} = 10 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$ (thỏa mãn)

+ Với $t = -9$, ta có: $\frac{2x^2}{x^2-1} = -9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{11} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{11}}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-\sqrt{\frac{5}{4}}; \sqrt{\frac{5}{4}}; -\sqrt{\frac{9}{11}}; \sqrt{\frac{9}{11}}\right\}$.

3.33. Giải phương trình: $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$

ĐKXĐ: $x \neq \pm 1.$

Vì $x = -2$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$, ta được

$$20 \cdot \left[\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} \right]^2 + 48 \cdot \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} - 5 = 0$$

Đặt $t = \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}$, ta có: $20t^2 + 48t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{10} \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$

+ Với $t = \frac{1}{10}$, ta có: $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = \frac{1}{10} \Rightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn)

+ Với $t = -\frac{5}{2}$, ta có: $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + 7x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{41}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{41}{4}} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ -\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{41}{4}}; -\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{41}{4}}; 3; \frac{2}{3} \right\}.$

Chuyên đề 4

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

3.34. $\frac{9}{20}.$

3.35. 84.

3.36. 52825.

3.37. 12 cm.

Gọi chiều dài, chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật là a, b (cm) với $a > 2,4$ và $b > 0$.

Diện tích hình chữ nhật ban đầu là: $a.b$ (cm²)

Kích thước của hình chữ nhật sau khi thay đổi là:

$$a - 2,4 \text{ (cm)} \text{ và } b + 30\%b = 1,3b \text{ (cm)}.$$

Diện tích sau khi thay đổi của hình chữ nhật là:

$$(a - 2,4).1,3b = 1,3ab - 3,12b \text{ (cm}^2\text{)}$$

Theo đề ra ta có: $1,3ab - 3,12b = ab + 4\%ab$

$$\Leftrightarrow 1,3a - 3,12 = 1,04a$$

$$\Leftrightarrow 0,26a = 3,12$$

$$\Leftrightarrow a = 12 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật ban đầu là 12 cm.

3.38. 36 tuổi và 27 tuổi.

Gọi số tuổi người em hiện nay là x (tuổi), với $0 < x \leq 31$.

Tuổi anh hiện nay là $63 - x$ (tuổi), hơn tuổi em là

$$(63 - x) - x = 63 - 2x \text{ (tuổi)}$$

Khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay, tức là x (tuổi) thì tuổi em là:

$$x - (63 - 2x) = 3x - 63 \text{ (tuổi)}$$

Theo đề ra ta có phương trình: $63 - x = 2(3x - 63)$

$$\Leftrightarrow x = 27 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy hiện nay em 27 tuổi và anh 36 tuổi.

3.39. 90 lít và 30 lít.

3.40. 15 km/h.

3.41. 9 giờ 30 phút.

3.42. 19 phút.

3.43. 60 km.

Hướng dẫn: Gọi độ dài quãng đường AB là x , lập luận để đi tới phương

trình: $\frac{x}{40} + \frac{x}{30} + \frac{1}{2} = 10 - 6$. Từ đó tìm được $x = 60$.

3.44. 120 km.

Hướng dẫn: Gọi độ dài quãng đường AB là x, lập luận để đi tới phương trình: $\frac{x}{30} = \frac{x}{36} + \frac{2}{3}$. Từ đó tìm được $x = 120$.

3.45. 120 km.

3.46. 15 ngày.

Hướng dẫn: Gọi số ngày đội thứ hai làm một mình xong công việc là x (ngày), điều kiện: $0 < x < 12$. Một ngày đội hai làm được $\frac{1}{x}$ (công việc). Vì hai đội cùng làm thì 12 ngày xong công việc nên 4 ngày hai đội làm được $4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ (công việc). Theo đề ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Giải phương trình ta được $x = 15$ (thỏa mãn).

3.47. 500 sản phẩm.

Hướng dẫn: Gọi số sản phẩm phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm), với $x > 0$. Lập luận theo thời gian dẫn tới phương trình:

$$\frac{x+13}{57} = \frac{x}{50} - 1$$

Giải phương trình ta được $x = 500$ (thỏa mãn).

3.48. 420 áo.

3.49. 1200 sản phẩm.

Hướng dẫn: Gọi số sản phẩm được giao là $2x$ (sản phẩm), với $x > 0$.

Ta có:

Số sản phẩm	Số ngày	Năng suất
$2x$	10	$\frac{x}{5}$
x	4	$\frac{x}{5} + 30$

Từ đó dẫn đến phương trình: $x = 4 \cdot \left(\frac{x}{5} + 30 \right)$.

Giải phương trình tìm được $x = 600$ (thỏa mãn).

3.50. 6 giờ và 3 giờ.

Gọi thời gian tổ hai làm một mình xong công việc là x (giờ), với $x > 2$. Thời gian tổ một là một mình xong công việc là $x + 3$ (giờ).

Năng suất của tổ một và tổ hai lần lượt là $\frac{1}{x+3}$; $\frac{1}{x}$ (công việc / giờ)

Theo đề ra ta có phương trình: $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x(x+3) = 4x+6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $x = 3$.

Vậy thời gian hoàn thành công việc một mình của tổ một và tổ hai lần lượt là 6 giờ và 3 giờ.

3.51. 2 giờ 30 phút = 2,5 giờ; 2 giờ 45 phút = $\frac{11}{4}$ giờ.

Gọi phần trăm dung tích bể phía dưới vòi II là $x\%$, với $0 < x < 100$.

Năng suất của vòi I và vòi II lần lượt là $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ (bể / giờ)

Thời gian vòi I chảy một mình cho đến khi mực nước trong bể đạt $x\%$ (tức là lúc vòi II bắt đầu có tác dụng tháo nước ra) là: $2,5 \cdot x\% = \frac{x}{40}$ (giờ) $\Rightarrow$ Thời

gian hai vòi cùng chảy đến khi đầy bể là $\frac{11}{4} - \frac{x}{40}$ (giờ).

Theo đề ra ta có phương trình: $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{11}{4} - \frac{x}{40}\right) = 1 - \frac{x}{100}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot (110 - x) = 100 - x \Leftrightarrow x = 70 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy vòi II đặt ở vị trí $\frac{7}{10}$ độ cao của bể.

Chuyên đề nâng cao

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

3.52.

a) Không có nghiệm nguyên vì $(6, 8, 9) = 1$ nhưng $(6, 8) = 2 \neq 1$.

b)
$$\begin{cases} x = 6 + 18t \\ y = 3 - 11t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

c)
$$\begin{cases} x = 14 + 39t \\ y = 6 + 17t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

3.53.

a) Công thức nghiệm tổng quát:
$$\begin{cases} x = 7 + 31t \\ y = 9 + 40t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Để x, y dương thì
$$\begin{cases} 7 + 31t > 0 \\ 9 + 40t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{7}{31} \\ t > -\frac{9}{40} \end{cases} \Rightarrow t \geq 0.$$

Vậy công thức nghiệm nguyên dương của phương trình là:

$$\begin{cases} x = 7 + 31t \\ y = 9 + 40t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{N})$$

b) Công thức nghiệm tổng quát:
$$\begin{cases} x = 3 - 8t \\ y = 5 + 11t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Để x, y dương thì
$$\begin{cases} 3 - 8t > 0 \\ 5 + 11t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < \frac{3}{8} \\ t > -\frac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow t = 0.$$

Vậy phương trình có một nghiệm nguyên dương duy nhất là $(3; 5)$.

3.54. Từ phương trình: $x^2 - (y+2)x + 3 - y = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} = x - 3 + \frac{6}{x + 1}.$$

Để $y \in \mathbb{Z}$ thì $x + 1 \in U(6)$. Ta có bảng giá trị sau:

$x + 1$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
x	-7	-4	-3	-2	0	1	2	5
y	-11	-9	-9	-11	3	1	1	3

Vậy phương trình có 8 nghiệm nguyên.

3.55.

a) $xy - 4 = 2x + 3y \Leftrightarrow (x - 3)(y - 2) = 10$

$x - 3$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
$y - 2$	-1	-2	-5	-10	10	5	2	1
x	-7	-2	1	2	4	5	8	13
y	1	0	-3	-8	12	7	4	3

b) $5xy + x + 2y = 7 \Leftrightarrow (5x + 2)(5y + 1) = 37$

$5x + 2$	-37	-1	1	37
$5y + 1$	-1	-37	37	1
x				7
y				0

3.56. $4(x + y) = 3xy - 8 \Leftrightarrow (3x - 4)(3y - 4) = 40$.

Từ đó ta tìm được 4 nghiệm tự nhiên của phương trình:

(2; 8), (3; 4), (4; 3), (8; 2).

3.57. Ta có: $2x^2 - 5xy + 3y^2 = 7 \Leftrightarrow (x - y)(2x - 3y) = 7$.

Lập bảng giá trị ta tìm được 4 nghiệm nguyên của phương trình là:

(-13; -6), (5; 12), (-5; 2), (13; 20).

3.58. Ta có: $y^2 - 2x^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow y^2$ lẻ $\Rightarrow y$ lẻ

$\Rightarrow y = 2k + 1$ (với $k \in \mathbb{Z}$)

Do đó: $(2k + 1)^2 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow 2k^2 + 2k = x^2$

$\Rightarrow x^2$ lẻ $\Rightarrow x$ lẻ.

Vì x là số nguyên tố nên $x = 2$. Thay vào phương trình ta có $y = \pm 3$.

Vậy nghiệm nguyên tố duy nhất của phương trình là (2; 3).

3.59. Ta có: $12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x + y)$

$$\Leftrightarrow 9x^2 = -3(x + y)^2 + 28(x + y)$$

Ta có: $P = -3t^2 + 28t = -3\left(t^2 - 2t \cdot \frac{14}{3} + \frac{196}{9}\right) + \frac{196}{3}$

$$= -3\left(t - \frac{14}{3}\right)^2 + \frac{196}{3} \leq \frac{196}{3} \text{ (với } t = x + y)$$

Suy ra: $9x^2 \leq \frac{196}{3} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{196}{27} \Rightarrow x^2 \leq 7 \Rightarrow x^2 \in \{0; 1; 4\}$

$$\Rightarrow x \in \{0; \pm 1; \pm 2\}.$$

Thay lần lượt các giá trị của x rồi tìm y ta có các nghiệm nguyên của phương trình là: $(0; 0)$, $(1; 8)$, $(-1; 10)$.

3.60. Xét phương trình: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3 \Leftrightarrow 3 = x\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{yz}{x}$.

Vì vai trò của x, y, z là như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \leq y \leq z$.

Ta có: $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2; \frac{yz}{x} \geq x$ nên suy ra: $3 \geq x \cdot 2 + x \Leftrightarrow 3x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$

$$\Rightarrow x = 1. \text{ Khi đó } \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = 2; \frac{yz}{x} = x \Rightarrow y = z = x.$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất là $(1; 1; 1)$.

3.61. Từ phương trình: $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 7 = y^2$

$$\text{suy ra: } y^2 = (x^2 + x)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > (x^2 + x)^2 \quad (1)$$

Ta có: $(x^2 + x + 3)^2 - y^2 = 5x^2 + 5x + 2 > 0$, với mọi x

$$\Rightarrow y^2 < (x^2 + x + 3)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $(x^2 + x)^2 < y^2 < (x^2 + x + 3)^2$

$$\Rightarrow y^2 = (x^2 + x + 1)^2 \text{ hoặc } y^2 = (x^2 + x + 2)^2.$$

+ Nếu $y^2 = (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$ thì ta có:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó $y^2 = 7^2 \Leftrightarrow y = \pm 7$.

+ Nếu $y^2 = (x^2 + x + 2)^2 = x^4 + x^2 + 4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x$ thì ta có:

$x^2 + x - 1 = 0$: không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên là $(-3; 7)$, $(-3; -7)$, $(2; -7)$, $(2; 7)$.

3.62. Giải tương tự bài 3.61 ta được 2 nghiệm nguyên của phương trình là $(0; 1)$ và $(-1; 0)$.

3.63. Phương trình: $x^2 - 3y^2 = 17 \Leftrightarrow x^2 = 3y^2 + 17$

$\Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod{3}$: điều này không xảy ra, vì:

+ Nếu $x \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{3}$

+ Nếu $x \equiv \pm 1 \pmod{3} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

3.64. Giả sử (x, y, z) là một nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^3 = 2y^3 + 4z^3 \tag{1}$$

$\Rightarrow x^3$ chẵn $\Rightarrow x$ chẵn $\Rightarrow x = 2x_1$, với $x_1 \in \mathbb{Z}$.

Thay vào (1) ta có: $4x_1^3 = y^3 + 2z^3 \Rightarrow y$ chẵn $\Rightarrow y = 2y_1$, với $y_1 \in \mathbb{Z}$.

Do đó: $2x_1^3 = 4y_1^3 + z^3 \Rightarrow z$ chẵn $\Rightarrow z = 2z_1$, với $z_1 \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Do đó: } x_1^3 = 2y_1^3 + 4z_1^3 \tag{2}$$

Từ (2) suy ra (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của (1), hay $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$ là nghiệm của phương trình (1).

Lập luận tương tự ta có $\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}, \frac{z}{2^n}\right)$ là nghiệm nguyên của phương trình (1), với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}, \frac{z}{2^n}$ là các số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = y = z = 0$.
 Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $(0; 0; 0)$.

CHƯƠNG IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 1

4.1. Với $x \geq y$:

a) $-8x + 7 \leq -8y + 7$.

b) $9x - 1 \geq 9y - 1$.

4.2.

a) $-19x - 37 \leq -19y - 37 \Rightarrow -19x \leq -19y \Rightarrow x \geq y$.

b) $-23x - 2 > -23y + 3 \Rightarrow -23x - 2 > -23y - 2 \Rightarrow x < y$.

4.3.

a) $5x < 9x \Rightarrow x > 0$.

b) $-7x \leq 2x \Rightarrow x \geq 0$.

4.4. Với $a > b, c > d$ ta xét hiệu:

$$(ac + bd) - (ad + bc) = ac - ad + bd - bc = a(c - d) - b(c - d) \\ = (a - b)(c - d) > 0.$$

Vậy $ac + bd > ad + bc$.

4.5.

a) Ta có: $4x^2 - 12x + 19 = (2x - 3)^2 + 10 \geq 10, \forall x$

$$\Rightarrow \frac{15}{4x^2 - 12x + 19} \leq \frac{15}{10} = \frac{3}{2}, \forall x.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{4x+3}{x^2+1} \leq 4 &\Leftrightarrow 4x+3 \leq 4x^2+4 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên bất đẳng thức đã cho đúng. Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$.

4.6. Với $a > b > 0$, ta xét: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$. Vậy $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

4.7. Với mọi x ta có:

$$x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 1 = x^6 + x^2(x^2 - x + 1) + 1 > 0.$$

4.8. (Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số)

a) Với $a, b \geq 0$, ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

b) $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

c) $(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

Các bất đẳng thức cuối đúng nên các bất đẳng thức đã cho là đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

4.9. Với $a, b, c > 0$.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy (bài 4.8), ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = b$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$; $\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geq 2a + 2b + 2c \Rightarrow \text{dpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{ab}{c} = \frac{bc}{a} = \frac{ca}{b} \Leftrightarrow a = b = c$.

4.10. Chứng minh tương tự bài 4.9.

4.11. Với $a, b > 0$, ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

4.12. Với $a, b > 0$, ta có: $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+ab)(1+b)^2 + (1+ab)(1+a)^2 - (1+a)^2(1+b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab(a^2 + b^2) - a^2b^2 - 2ab + 1}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab(a-b)^2 + (ab-1)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên bất đẳng thức đầu đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

4.13.

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên bất đẳng thức đầu đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

$$b) a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 4a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 + (a-2e)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên bất đẳng thức đầu đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

$$4.14. \text{ Với } a > b > c > 0, \text{ ta có: } a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 > a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3$$

$$\Leftrightarrow a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 - a^2b^3 - b^2c^3 - c^2a^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - c^2a^3 + c^3a^2 - b^2c^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2(a-b) + c^2(b^3 - a^3) + c^3(a^2 - b^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b) \left[a^2b^2 - c^2(b^2 + ab + a^2) + c^3(a+b) \right] > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-c)(b-c)(ab+bc+ca) > 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên bất đẳng thức đầu đúng.

$$4.15. \text{ Với } a, b > 0 \text{ thỏa mãn: } a + b = 1.$$

a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có:

$$(1.a + 1.b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 1 \leq 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

$$b) a^3 + b^3 = (a+b)[a^2 + b^2 - ab] = (a+b)^2 - 3ab = 1 - 3ab$$

$$\text{Mặt khác: } |ab| \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a^3 + b^3 \geq 1 - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

c) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có:

$$(1 \cdot a^2 + 1 \cdot b^2)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^4 + b^4)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

4.16. Ta có: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (\text{Xem bài 4.13.a})$$

Chuyên đề 2

4.17.

a) Có.

b) Có.

4.18.

a) $m > \frac{4}{3}$.

b) $m \geq -16$.

4.19.

a) $x < 13$.

b) $x \geq \frac{1}{12}$.

4.20.

Với mọi $-6 \leq x \leq 8$, ta có:

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x-8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+6)(8-x) \geq 0$$

$\Rightarrow$ Không có giá trị nào của x thỏa mãn $(x+6)(8-x) < 0 \Rightarrow$ đpcm.

4.21.

a) $x < -2$ hoặc $x \geq -1$.

b) $-1 < x < 1$ hoặc $5 < x < 9$.

4.22.

$$2x + 1 > 3x - 4 \Leftrightarrow x < 5.$$

$$(x - 1)^2 \leq (2x - 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hai bất phương trình có vô số nghiệm x chung thỏa mãn: $x \leq \frac{4}{3}$ hoặc $2 \leq x < 5$.

4.23. Ta có: $\frac{x+12}{2000} + \frac{x+15}{1997} > \frac{x+34}{1978} + \frac{x+26}{1986}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+12}{2000} + 1 \right) + \left(\frac{x+15}{1997} + 1 \right) > \left(\frac{x+34}{1978} + 1 \right) + \left(\frac{x+26}{1986} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2012) \left(\frac{1}{2000} + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1978} - \frac{1}{1986} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2012 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -2012.$$

4.24.

a) $mx + 4 \geq 2x + m^2 \Leftrightarrow (m - 2)x \geq (m - 2)(m + 2) \quad (1)$

+ Nếu $m = 2$ thì (1) trở thành $0.x \geq 0$, nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $m > 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x \geq m + 2$.

+ Nếu $m < 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x \leq m + 2$.

b) $(m + 4)x < m^2 + 2m - 8 \Leftrightarrow (m + 4)x < (m + 4)(m - 2) \quad (2)$

+ Nếu $m = -4$ thì (2) trở thành $0.x < 0$, vô nghiệm.

+ Nếu $m > -4$ thì (2) $\Leftrightarrow x < m - 2$.

+ Nếu $m < -4$ thì (2) $\Leftrightarrow x > m - 2$.

4.25.

a) $m^2x \geq 9x + m^2 + 3m \Leftrightarrow (m - 3)(m + 3)x \geq m(m + 3).$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (m - 3)(m + 3) = 0 \\ m(m + 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

$$b) m^3(x+2) \leq m^2(x-1) \Leftrightarrow m^2(m-1)x \leq -m^2(2m+1).$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2(m-1) = 0 \\ -m^2(2m+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

$$4.26. \text{ Ta có: } (m^2 + m + 1)x + 3m \geq (m^2 + 2)x + 5m - 1$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x \geq 2m-1.$$

$$\text{Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi } \begin{cases} m-1=0 \\ 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 1.$$

$$4.27. \text{ Ta có: } \frac{x+3}{m} + m > x+4 \text{ (với } m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-m)x + m^2 - 4m + 3}{m} > 0 \Leftrightarrow \frac{(1-m)x + (m-1)(m-3)}{m} > 0.$$

+ Nếu $m = 1$ thì bất phương trình trở thành $0x > 0$: vô nghiệm.

+ Nếu $m > 1$ thì bất phương trình trở thành: $-x + (m-3) > 0$

$$\Leftrightarrow x < m-3.$$

+ Nếu $0 < m < 1$ thì bất phương trình trở thành: $x - (m-3) > 0$

$$\Leftrightarrow x > m-3.$$

+ Nếu $m < 0$ thì bất phương trình trở thành: $x - (m-3) < 0$

$$\Leftrightarrow x < m-3.$$

* Kết luận:

- Nếu $m > 1$ hoặc $m < 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x < m-3$.

- Nếu $0 < m < 1$ thì bất phương trình có nghiệm là $x > m-3$.

- Nếu $m = 1$ thì bất phương trình vô nghiệm.

$$4.28. \text{ Bất phương trình: } x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 7 \quad (1)$$

$$\text{Xét bất phương trình: } mx \geq m+1 \quad (2)$$

+ Nếu $m = 0$ thì (2) trở thành $0x \geq 1$: vô nghiệm $\Rightarrow$ loại.

+ Nếu $m < 0$ thì $(2) \Leftrightarrow x \leq \frac{m+1}{m}$. Khi đó (1) và (2) có vô số nghiệm chung $\Rightarrow$ loại.

+ Nếu $m > 0$ thì $(2) \Leftrightarrow x \geq \frac{m+1}{m}$. Khi đó để (1) và (2) có đúng một nghiệm chung thì $\frac{m+1}{m} = 7 \Rightarrow m = \frac{1}{6}$ (thỏa mãn).

Vậy điều kiện cần tìm của m là $m = \frac{1}{6}$.

4.29. Ta có: $\frac{8}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{8}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{9-x}{x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 9$ (1)

Mặt khác: $x \geq 3 - mx \Leftrightarrow (m+1)x \geq 3$ (2)

+ Nếu $m = -1$ thì (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ thỏa mãn.

+ Nếu $m > -1$ thì $(2) \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{m+1}$. Khi đó để (1) và (2) không có nghiệm chung thì $\frac{3}{m+1} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{m+1} \geq 3 \Rightarrow m \leq \frac{-2}{3}$.

Kết hợp với $m > -1$ ta có: $-1 < m \leq \frac{-2}{3}$.

+ Nếu $m < -1$ thì $(2) \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{m+1}$. Khi đó để (1) và (2) không có nghiệm chung thì $\frac{3}{m+1} \leq 0 \Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Kết hợp các trường hợp ta có điều kiện cần tìm của m là: $m \leq \frac{-2}{3}$.

4.30.

Bất phương trình $(m-1)x - m + 3 > 0 \Leftrightarrow (m-1)x > m-3$ (1)

Bất phương trình $(m+1)x - m + 2 > 0 \Leftrightarrow (m+1)x > m-2$ (2)

*Chú ý: Ta có thể chứng minh rằng, với $a^2 + a'^2 \neq 0$, hai bất phương trình

$$ax > b; a'x > b' \text{ tương đương khi và chỉ khi } \begin{cases} aa' > 0 \\ \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \end{cases}$$

Áp dụng: Hai bất phương trình (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ \frac{m-3}{m-1} = \frac{m-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$$

Vậy điều kiện cần tìm của m là $m = 5$.

Chuyên đề nâng cao 1

4.31. Kí hiệu S là tập nghiệm của phương trình.

a) $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{9}{2} \right\}$.

b) $S = \emptyset$.

4.32. Kí hiệu S là tập nghiệm của phương trình.

a) $S = \left\{ \frac{-5}{6}; \frac{1}{6} \right\}$.

b) $S = \left\{ \frac{-9}{20}; \frac{11}{20} \right\}$.

4.33. Kí hiệu S là tập nghiệm của phương trình.

a) $S = \left\{ \frac{1}{5}; -5 \right\}$.

b) $S = \left\{ \frac{-7}{12}; \frac{5}{12} \right\}$.

4.34. Các phương trình có tập nghiệm tương ứng là:

a) $S = \left\{ \frac{1}{11}; \frac{3}{5} \right\}$.

b) $S = \left\{ \frac{164}{25}; \frac{116}{75} \right\}$.

4.35. Kí hiệu S là tập nghiệm của phương trình.

a) $S = \left\{ \frac{6}{5} \right\}$.

b) $S = \emptyset$.

4.36.

a) Tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{4}{3}; 6 \right\}$.

b) Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geq \frac{7}{2}$.

4.37.

a) $|x + 5| - |1 - 2x| = x$ (1)

x	-5			$\frac{1}{2}$
$ x + 5 $	$-x - 5$	0	$x + 5$	$x + 5$
$ 1 - 2x $	$1 - 2x$	$1 - 2x$	0	$2x - 1$
Phương trình (1)	$0x = 6$ (vô nghiệm)	$3x + 4 = x$ $\Leftrightarrow x = -2$ (thỏa mãn)	$-x + 6 = x$ $\Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn)	

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-2; 3\}$.

b) Tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.

4.38. Giải tương tự bài 4.37.a)

a) Tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{5}{8} \right\}$.

b) Tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{-32}{9}; 0 \right\}$.

4.39.

a) $x = \frac{99}{100}$.

b) $x = \frac{100}{401}$.

4.40.

a) Tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{7}{20}; \frac{13}{20} \right\}$.

b) Tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{-1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$.

4.41.

$$\text{a) } \forall \begin{cases} |3-2x| \geq 0 \\ |4y+5| \geq 0 \end{cases} \text{ (với mọi } x, y) \text{ nên } |3-2x| + |4y+5| \geq 0.$$

$$\text{Do đó phương trình tương đương với } \begin{cases} |3-2x| = 0 \\ |4y+5| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{b) } |x-y| + \left| y + \frac{9}{25} \right| \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y + \frac{9}{25} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9}{25} \\ y = \frac{-9}{25} \end{cases}$$

4.42.

$$\text{a) } \forall \begin{cases} (x+y)^{2012} \geq 0 \\ 2013|y-1| \geq 0 \end{cases} \text{ (với mọi } x, y) \text{ nên } (x+y)^{2012} + 2013|y-1| = 0 \text{ khi và}$$

$$\text{chỉ khi } \begin{cases} (x+y)^{2012} = 0 \\ 2013|y-1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

4.43.

$$\text{a) Ta có: } |x+5| + |3-x| \geq |(x+5) + (3-x)| = 8, \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Do đó: } |x+5| + |3-x| = 8 \Leftrightarrow (x+5)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 3.$$

b) Ta có:

$$2|x-3| + |2x+5| = |6-2x| + |2x+5| \geq |(6-2x) + (2x+5)| = 11, \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Do đó: } 2|x-3| + |2x+5| = 11 \Leftrightarrow (6-2x)(2x+5) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{2} \leq x \leq 3.$$

4.44.

$$\text{a) } |x+1| + |2x-3| = |3x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$b) |5-x|+3|x-3|=2 \Leftrightarrow |x-3|+|5-x|+2|x-3|=2.$$

$$\text{Ta có: } |x-3|+|5-x|+2|x-3| = (|3-x|+|5-x|)+2|x-3| \\ \geq |8-2x|+|2x-6| \geq 2, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó: } |x-3|+|5-x|+2|x-3|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(5-x) \geq 0 \\ (8-2x)(2x-6) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 5 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{3\}$.

Chuyên đề nâng cao 2

$$4.45. \text{ Ta có: } a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 < a^3 + b^3 + c^3.$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2 - a^3 + b(c-a)^2 - b^3 + c(a-b)^2 - c^3 < 0$$

$$\Leftrightarrow a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a-b)^2 - c^2] < 0$$

$$\Leftrightarrow a(b-c-a)(b-c+a) + b(c-a-b)(c-a+b) + \\ + c(a-b-c)(a-b+c) < 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do bất đẳng thức tam giác, nên bất đẳng thức đầu đúng.

4.46. Với $0 \leq a, b, c \leq 1$ ta có:

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1-a-b-c+ab+bc+ca-abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq a+b+c-ab-bc-ca+abc \quad (1)$$

Cũng vì $0 \leq a, b, c \leq 1$ nên $abc \geq 0$ và $b \geq b^2, c \geq c^3$.

Do đó từ (1) suy ra:

$$1 \geq a+b+c-ab-bc-ca+abc \geq a+b^2+c^3-ab-bc-ca. \text{ (đpcm)}$$

$$4.47. \text{ Ta có: } A = \frac{15|x+1|+32}{6|x+1|+8} = \frac{(15|x+1|+20)+12}{6|x+1|+8} = \frac{5}{2} + \frac{6}{3|x+1|+4}.$$

$$\text{Vì } 3|x+1|+4 \geq 4, \forall x \text{ nên } \frac{6}{3|x+1|+4} \leq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \forall x.$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4, \text{ với mọi } x.$$

Vậy $A_{\max} = 4$ khi $x = -1$.

4.48. $B = 3|x-1|+4-3x$

– Nếu $x > 1$ thì $B = 3(x-1)+4-3x = 1$.

– Nếu $x \leq 1$ thì $B = 3(1-x)+4-3x = 7-6x$.

Vì $x \leq 1$ nên $-x \geq -1 \Rightarrow -6x \geq -6 \Rightarrow 7-6x \geq 1$.

Do đó $B \geq 1$.

Vậy $B \geq 1$, với mọi x và $B_{\min} = 1$ khi $x = 1$.

4.49. $C = |x+3|+|2x-5|+|x-2|$

Ta có: $C = |x+3|+|5-2x|+|x-2| \geq |8-x|+|x-2| \geq 6$, với mọi x .

Vậy $C_{\min} = 6$ khi $\begin{cases} (x+3)(5-2x) \geq 0 \\ (8-x)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 2 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{5}{2}.$

4.50. Với $2x+y=3$, ta có:

$$D = |2x+3|+|5-y|+2 = |2x+3|+|y-5|+2 \geq |2x+y-2|+2, \forall x, y.$$

$$\Rightarrow D \geq 3, \text{ với mọi } x, y.$$

Vậy $D_{\min} = 3$ khi $\begin{cases} (2x+3)(y-5) \geq 0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6-y)(y-5) \geq 0 \\ 2x=3-y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3-y \\ 5 \leq y \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq -1 \\ 5 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

4.51. Với $0 < a, b, c < 2$, giả sử cả ba bất đẳng thức $a(2-b) > 1$; $b(2-c) > 1$; $c(2-a) > 1$ đều đúng. Nhân vế với vế, ta được: $a(2-b).b(2-c).c(2-a) > 1$

$$\Leftrightarrow a(2-a).b(2-b).c(2-c) > 1$$

Mặt khác, vì $0 < a < 2$ nên $2 - a > 0$

$$\Rightarrow 0 < a(2 - a) = 1 - (a - 1)^2 \leq 1.$$

Tương tự, ta cũng có: $0 < b(2 - b) \leq 1; 0 < c(2 - c) \leq 1$

Suy ra: $a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) \leq 1$: mâu thuẫn.

Vậy có ít nhất một trong ba bất đẳng thức đã cho là sai.

4.52. Với ba số a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$, giả sử $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó:

$$2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab + bc + ca \geq 0: \text{ trái với giả thiết.}$$

Vậy $a^2 + b^2 < c^2$.

4.53. Với $a, b, c, d > 0$ ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c+d)}} \geq \frac{a}{\frac{a+(b+c+d)}{2}} = \frac{2a}{a+b+c+d}.$$

Tương tự, ta cũng có: $\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c+d};$

$$\sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d}; \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2d}{a+b+c+d}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên, vế với vế, ta được:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = b + c + d \\ b = c + d + a \\ c = d + a + b \\ d = a + b + c \end{cases}$, vô nghiệm, vì $a, b, c, d > 0$.

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

4.54. Với $a, b > c$ và $c > 0$, bất đẳng thức:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq \frac{\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}}{2} + \frac{\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}}{2} = 1. \text{ (dpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a-c}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$

4.55. Với $a > b \geq 0$, ta có:

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = (a-b) + \frac{b+1}{2} + \frac{b+1}{2} + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 4.$$

(bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương)

$$\Leftrightarrow a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3 \text{ (dpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a-b = \frac{b+1}{2} = \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

4.56. Với $x > 0$, ta có: $Q = \frac{3x^4 + 16}{x^3} = 3x + \frac{16}{x^3} = x + x + x + \frac{16}{x^3} \geq 4 \cdot 2 = 8$

Vậy $Q_{\min} = 8$ khi $x = \frac{16}{x^3} \Rightarrow x = 2.$

4.57. Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta có:

$$(b+c-a)(c+a-b) \leq \left[\frac{(b+c-a) + (c+a-b)}{2} \right]^2 = c^2$$

Tương tự, ta cũng có: $(c+a-b)(a+b-c) \leq a^2$

$$(a+b-c)(b+c-a) \leq b^2$$

Nhân ba bất đẳng thức trên, vế với vế, ta được:

$$(b+c-a)^2 (c+a-b)^2 (a+b-c)^2 \leq a^2 b^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \text{ (dpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a+b-c = b+c-a = c+a-b \Leftrightarrow a=b=c$.

4.58. Với $a, b, c > 0$, ta có: $\frac{1}{a+2b} = \frac{1}{a+b+b}$.

Mặt khác, $(a+b+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{9}{a+2b} \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$.

Tương tự, ta cũng có: $\frac{9}{b+2c} \leq \frac{1}{b} + \frac{2}{c}$; $\frac{9}{c+2a} \leq \frac{1}{c} + \frac{2}{a}$.

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$9\left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{c+2a}\right) \leq 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \text{dpcm}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

4.59. Với $a, b \geq 1$, ta có $a\sqrt{b-1} = a\sqrt{1(b-1)} \leq a \cdot \frac{1+(b-1)}{2} = \frac{ab}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2}$.

Cộng hai bất đẳng thức trên theo từng vế ta được $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ (dpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=2$.

4.60. Ta có $a^2 + b^2 + 9 = 6a + 4b \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-2)^2 = 4$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có:

$$[3(a-3) + 4(b-2)]^2 \leq (3^2 + 4^2)[(a-3)^2 + (b-2)^2] = 10^2.$$

$$\Leftrightarrow |3a + 4b - 17| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq 3a + 4b - 17 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 7 \leq 3a + 4b \leq 27 \text{ hay } 7 \leq Q \leq 27.$$

Vậy $Q_{\min} = 7$ khi $\begin{cases} \frac{a-3}{3} = \frac{b-2}{2} \\ 3a+4b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{21}{17} \\ b = \frac{14}{17} \end{cases}$

và $Q_{\max} = 27$ khi $\begin{cases} \frac{a-3}{3} = \frac{b-2}{2} \\ 3a+4b=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{81}{17} \\ b = \frac{54}{17} \end{cases}$

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG III. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Chuyên đề 1

ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC

- 3.1. a) Gọi M là giao điểm của AG với BC $\Rightarrow$ M là trung điểm của BC.

Áp dụng định lý Ta-lét :

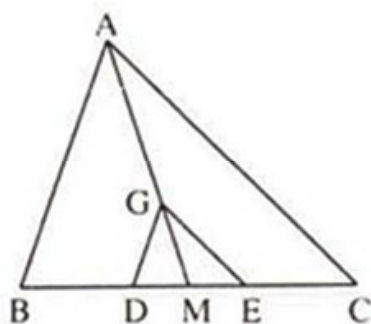
$$\triangle ABM, DG \parallel AB : \frac{BD}{BM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \text{ mà } BM = \frac{BC}{2}$$

$$\text{nên } \frac{BD}{2BM} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{b) Lí luận tương tự : } \frac{CE}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Mặt khác, } DE = BC - BD - EC = BC - \frac{1}{3}BC - \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}BC.$$

Vậy $BD = DE = EC$.



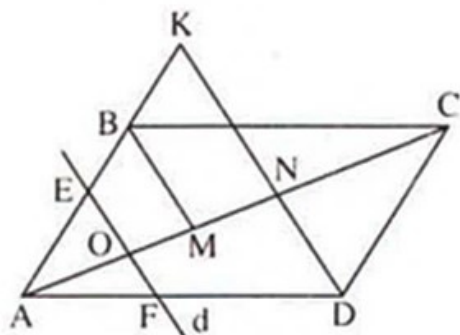
Hình 3.49

- 3.2. Qua B vẽ đường thẳng song song với d cắt AC ở M, qua D vẽ đường thẳng song song với d cắt AC ở N và cắt AB ở K. Xét $\triangle ABM$ và $\triangle CDN$ có $\widehat{BAM} = \widehat{DCN}$ ($AB \parallel CD$), $AB = CD$ (ABCD là hình bình hành); $\widehat{ABM} = \widehat{CDN}$ ($= \widehat{BKD}$) $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CDN$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = CN$;

$$\triangle ABM \text{ có } OE \parallel BM : \frac{AB}{AE} = \frac{AM}{AO} \text{ (định lý Ta-lét).}$$

$$\triangle AND \text{ có } OF \parallel DN : \frac{AD}{AF} = \frac{AN}{AO} \text{ (định lý Ta-lét).}$$

$$\text{Do đó } \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AM}{AO} + \frac{AN}{AO} = \frac{AM + AN}{AO} = \frac{AN + CN}{AO} = \frac{AC}{AO}.$$

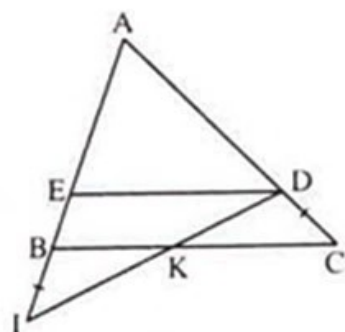


Hình 3.50

3.3. Áp dụng định lí Talét :

$$\triangle IED \text{ có } DE \parallel BK : \frac{DK}{KI} = \frac{EB}{BI} = \frac{EB}{DC} \text{ (vì : } BI = DC)$$

$$\triangle ABC \text{ có } DE \parallel BC : \frac{EB}{DC} = \frac{AB}{AC}. \text{ Suy ra : } \frac{DK}{KI} = \frac{AB}{AC}.$$



Hình 3.51

3.4. Gọi F, K là giao điểm của đường ME, MD với BC.

Áp dụng định lí Talét :

$$\triangle ABC \text{ có } DK \parallel AC \text{ nên } \frac{AD}{AB} = \frac{CK}{BC};$$

$$EF \parallel AB \text{ nên } \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}, \text{ suy ra}$$

$$\frac{MN}{AN} = \frac{FN}{BN} = \frac{NK}{NC} = \frac{FN + NK}{BN + NC} = \frac{FK}{BC} \text{ (tính chất}$$

dãy tỉ số bằng nhau)

$$\text{Suy ra : } \frac{AD}{AB} + \frac{AE}{AC} + \frac{MN}{AN} = \frac{CK}{BC} + \frac{BF}{BC} + \frac{FK}{BC} = \frac{CK + FK + BF}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

Khai thác : Tổng giá trị ba phân thức không đổi nên tích đạt giá trị lớn nhất

khi ba phân thức trên có cùng một giá trị, nghĩa là : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{AN} \Leftrightarrow$

$$\frac{CK}{BC} = \frac{BF}{BC} = \frac{FK}{BC} \Leftrightarrow CK = BF = FK \Leftrightarrow M \text{ là trọng tâm } \triangle ABC.$$

Từ đó ta có bài toán :

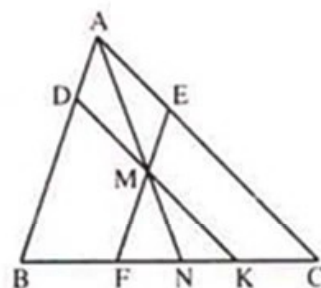
"Cho tam giác ABC, gọi M là điểm bất kỳ thuộc miền trong của tam giác ABC, tia AM cắt BC tại N. Dựng hình bình hành ADME (D ∈ AB, E ∈ AC).

Tìm vị trí của M để tích $\frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \frac{MN}{AN}$ có giá trị lớn nhất".

3.5. a) Qua A vẽ đường thẳng song song với EF, gọi I là giao điểm của đường thẳng này với BD. Qua C vẽ đường thẳng song song với EF, gọi L giao điểm của đường thẳng này với BD.

$$\triangle OAI = \triangle OCL \text{ (g.c.g)} \Rightarrow OI = OL.$$

$$\triangle BAI \text{ có } FM \parallel AI \Rightarrow \frac{BA}{BF} = \frac{BI}{BM} \text{ (định lí Ta-lét).}$$



Hình 3.52

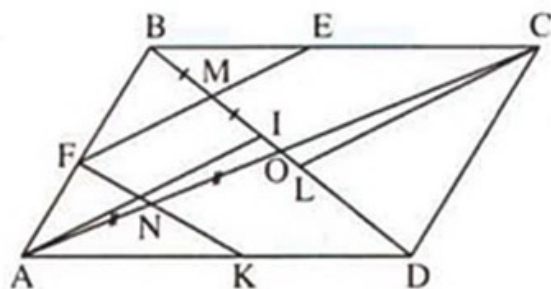
$\triangle BCL$ có $ME \parallel CL \Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BL}{BM}$ (định lí Ta-lét).

Mà $BI + BL = BO - OI + BO + OL = 2BO = 4BM$;

Do đó $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = \frac{4BM}{BM} = 4$.

b) Ta có $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$ (câu a). Tương

tự có $\frac{BA}{AF} + \frac{AD}{AK} = 4$.



Hình 3.53

Bài toán phụ : "Cho $x, y > 0$. Chứng

minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$."

Thật vậy, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (BĐT đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng bài toán phụ trên, ta có

$$\frac{1}{BF} + \frac{1}{AF} \geq \frac{4}{BF+AF} = \frac{4}{AB} \text{ và } \frac{1}{BE} + \frac{1}{AK} \geq \frac{4}{BE+AK}$$

Do đó $8 = \widehat{AEB} + \widehat{ACB} = \widehat{AEB} + \widehat{ACB}$

$$= BA \left(\frac{1}{BF} + \frac{1}{AF} \right) + BC \left(\frac{1}{BE} + \frac{1}{AK} \right) \geq BA \cdot \frac{4}{AB} + BC \cdot \frac{4}{BE+AK}$$

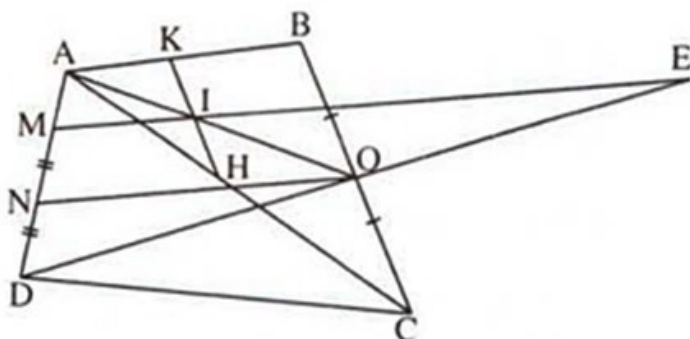
$$\Rightarrow 4 \geq \frac{4BC}{BE+AK} \Rightarrow BE + AK \geq BC.$$

3.6. Gọi N là trung điểm MD, ta có : $ON \parallel MI$,

áp dụng định lí Talét :

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AO}{AI}; \frac{AC}{AH} = \frac{AO}{AI}; \frac{AN}{AM} = \frac{AO}{AI}$$

$$\text{nên : } \frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AH} = \frac{2AO}{AI} = \frac{2AN}{AM}$$



Hình 3.54

Từ đó :

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AH} - \frac{AD}{AM} &= \frac{2AN - AD}{AM} = \frac{2AN - AN - ND}{AM} \\ &= \frac{AN - ND}{AM} = \frac{AN - NM}{AM} = \frac{AM}{AM} = 1. \end{aligned}$$

Chuyên đề 2

ĐỊNH LÝ ĐẢO VÀ HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ TA-LÉT

3.7. Đặt $S_1 = S_{OBC}$; $S_2 = S_{OAC}$; $S_3 = S_{OAB}$; $S = S_{ABC}$

Kẻ $AH \perp BC$ và $OK \perp BC \Rightarrow AH \parallel OK$.

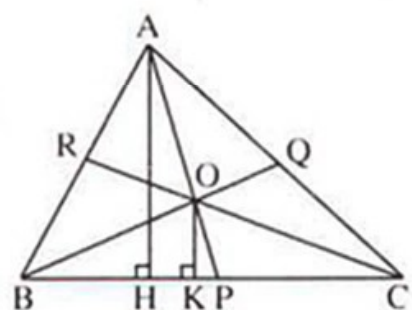
Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét trong tam giác AHP có

$$\frac{OP}{AP} = \frac{OK}{AH} = \frac{\frac{1}{2}OK \cdot BC}{\frac{1}{2}AH \cdot BC} = \frac{S_1}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{AP - OP}{AP} = \frac{S - S_1}{S} \Rightarrow \frac{OA}{AP} = \frac{S_2 + S_3}{S}$$

Lập luận tương tự ta có : $\frac{OB}{BQ} = \frac{S_1 + S_3}{S}$ và $\frac{OC}{CR} = \frac{S_1 + S_2}{S}$.

$$\text{Vậy } \frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2(S_1 + S_2 + S_3)}{S} = \frac{2S}{S} = 2.$$



Hình 3.55

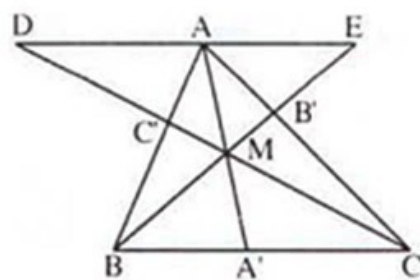
3.8. Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BB' và CC' lần lượt tại E và D.

Theo hệ quả của định lý Ta-lét

$$\frac{AM}{A'M} = \frac{AE}{BA'} = \frac{AD}{A'C} = \frac{AD + AE}{A'C + A'B} = \frac{DE}{BC};$$

$\triangle CBB'$ có $AE \parallel BC$, nên $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AE}{BC}$ (hệ quả của định lý Ta-lét);

$\triangle BCC'$ có $DA \parallel BC$, nên $\frac{AC'}{BC'} = \frac{DA}{BC}$ (hệ quả của định lý Ta-lét).



Hình 3.56

$$\text{Ta có } \frac{AB'}{CB'} + \frac{AC'}{BC'} = \frac{AE}{BC} + \frac{DA}{BC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\text{Do đó } \frac{AM}{A'M} = \frac{AB'}{CB'} + \frac{AC'}{BC'}$$

3.9. a) Ta có HM và KM lần lượt là đường trung bình của $\triangle EBC$ và $\triangle FBC$

$$\Rightarrow EH = HB; FK = KC.$$

$$\triangle AHM \text{ có } EO \parallel HM : \frac{AE}{AH} = \frac{AO}{AM};$$

$$\triangle AKM \text{ có } FO \parallel KM : \frac{AF}{AK} = \frac{AO}{AM}.$$

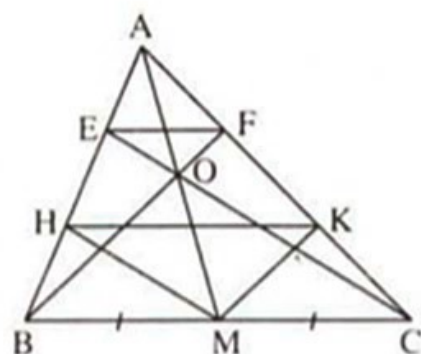
$$\text{Suy ra : } \frac{AE}{AH} = \frac{AF}{AK} \Rightarrow EF \parallel HK \text{ (định lí đảo Talét).}$$

$$\text{b) } \triangle AHM \text{ có } EO \parallel HM : \frac{MA}{MO} = \frac{HA}{HE} \Rightarrow \frac{MA}{MO} = \frac{HA}{HB} \text{ (vì } HE = HB);$$

$$\triangle AKM \text{ có } FO \parallel KM : \frac{MA}{MO} = \frac{KA}{KF} \Rightarrow \frac{MA}{MO} = \frac{KA}{KC} \text{ (vì } KF = KC).$$

$$\text{Do đó : } \frac{HA}{HB} = \frac{KA}{KC} \Rightarrow HK \parallel BC \text{ (định lí đảo Talét),}$$

mà $EF \parallel HK$ nên $EF \parallel BC$



Hình 3.57

3.10. a) $\triangle ABC$ có : $DE \parallel BC$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{EC};$

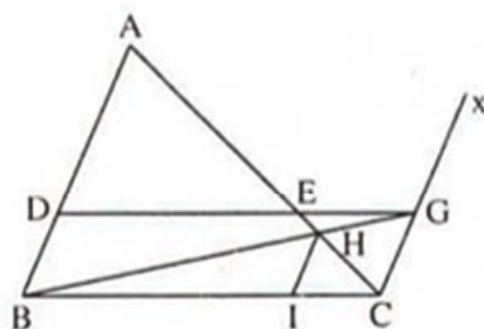
$$\triangle ADE \text{ có : } CG \parallel AD \text{ nên } \frac{DE}{EG} = \frac{AE}{EC}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{DA}{DB} = \frac{DE}{EG} \Rightarrow DA \cdot EG = DB \cdot DE.$$

b) Áp dụng hệ quả Talét có $EG \parallel BC$ nên $\frac{HC}{EH} = \frac{BH}{HG}$ và $CG \parallel AB$ nên $\frac{BH}{HG} = \frac{AH}{HC}.$

$$\text{Suy ra : } \frac{HC}{EH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow HC^2 = HA \cdot HE.$$

$$\text{c) } \frac{IH}{AB} + \frac{IH}{CG} = \frac{IC}{BC} + \frac{BI}{BC} = 1 \Rightarrow (\text{dpcm}).$$



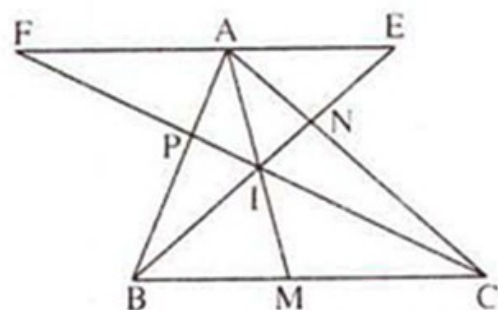
Hình 3.58

3.11. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC. Đường thẳng này cắt tia BN, tia CP lần lượt tại E và F. Ta có :

$$\frac{IA}{IM} = \frac{EF}{BC} = \frac{EA + AF}{BC} = \frac{EA}{BC} + \frac{AF}{BC} \quad (1)$$

$$\text{Lại có : } \frac{EA}{BC} = \frac{NA}{NC} \text{ và } \frac{AF}{BC} = \frac{PA}{PB} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1); (2) cho : } \frac{IA}{IM} = \frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB}.$$



Hình 3.59

3.12. Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác AOB.

Áp dụng định lý Ta-lét có :

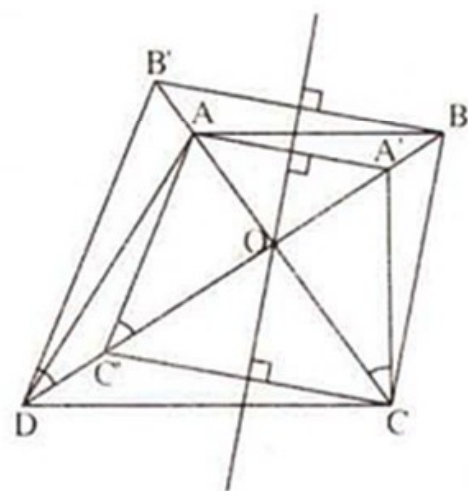
$$\frac{AO}{B'O} = \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} = \frac{C'O}{DO} \quad (\text{vì } B'O = BO, CO = C'O, \text{ tính chất đối xứng}).$$

Suy ra : $AC' \parallel B'D$ (định lý Ta-lét đảo) $\Rightarrow \widehat{AC'A'} = \widehat{BDB'}$.

Mặt khác : $\triangle AOC' = \triangle A'OC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{AC'A'} = \widehat{ACA'}$$

$$\text{Do đó : } \widehat{ACA'} = \widehat{BDB'}.$$



Hình 3.60

$$3.13. \text{ a) Từ giả thiết có : } \frac{AM}{AC} = \frac{CP}{CK} \quad (1)$$

Áp dụng định lý Ta-lét :

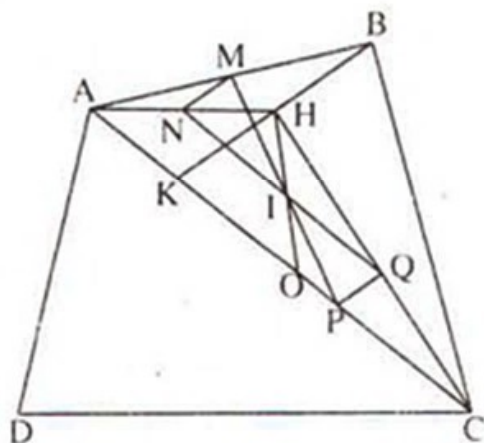
$$\frac{MN}{HB} = \frac{AM}{AB}; \frac{PQ}{HK} = \frac{CP}{CK}.$$

Từ $HK = HB$ kết hợp với (1) có : $MN = PQ$.

b) Tứ giác MNPQ là hình bình hành, I là trung điểm MP $\Rightarrow$ I cũng là trung điểm NQ.

$$\text{Lại có : } \frac{AN}{AH} = \frac{AM}{AB}; \frac{AD}{BD} = \frac{DH}{CB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cho $NQ \parallel AC$. Dựa vào bổ đề hình thang suy ra H, I, O thẳng hàng. Do đó I thuộc đoạn OH cố định.



Hình 3.61

3.14. Gọi ý : $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và M trung điểm của AH, gọi ý ta nghĩ đến điểm phụ N là giao điểm của BD và AC.

Gọi N là giao điểm của BD và AC.

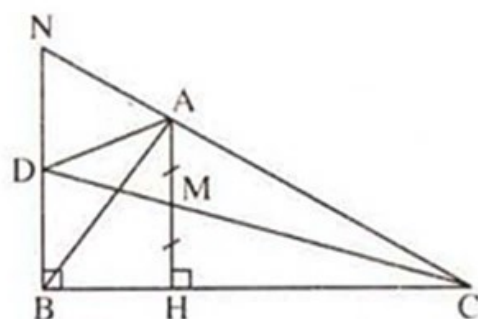
Ta có $\widehat{BAN} = 90^\circ$, Vì $NB \perp BC$ (gt), $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow NB \parallel AH$.

$\triangle BDC$ có $BD \parallel HM \Rightarrow \frac{MH}{BD} = \frac{CM}{CD}$ (hệ quả

định lí Ta-lét).

Tương tự có $\frac{AM}{DN} = \frac{CM}{CD}$. Do đó $\frac{MH}{BD} = \frac{AM}{DN}$. Mà $MH = AM$. Nên $BD = DN$.

Xét $\triangle ABN$ vuông tại A, AD là đường trung tuyến $\Rightarrow AD = DB$. Vậy tam giác DAB cân tại D.



Hình 3.62

3.15. Gọi J, F lần lượt là giao điểm của DE với GB, GC. Gọi P là giao điểm GB và KD, Q là giao điểm của GC và KE.

$\triangle DKE$ có $PJ \parallel KE \Rightarrow \frac{DE}{DJ} = \frac{DK}{DP}$.

$\triangle BNG$ có $DP \parallel NG \Rightarrow \frac{DP}{NG} = \frac{BD}{BN}$.

$\triangle BNC$ có $DK \parallel NC \Rightarrow \frac{DK}{CN} = \frac{BD}{BN}$.

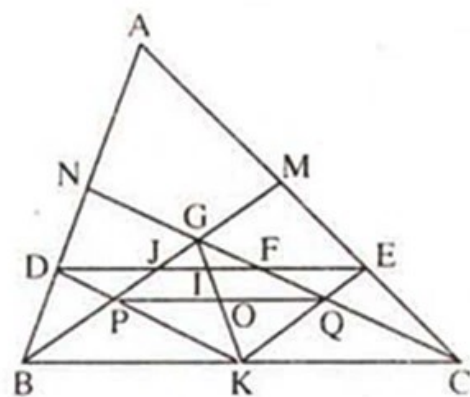
Suy ra $\frac{DK}{CN} = \frac{DP}{NG} \Rightarrow \frac{DE}{DJ} = \frac{DK}{DP} = \frac{CN}{NG} = 3$.

Tương tự $\frac{EK}{EQ} = 3$. Ta có $\frac{DK}{DP} = \frac{EK}{EQ} \Rightarrow PQ \parallel DE$.

Tứ giác PGQK có $PG \parallel KQ$ và $PK \parallel GQ$ nên nó là hình bình hành $\Rightarrow GK, PQ$ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

$\triangle DIK$ có $PO \parallel DI \Rightarrow \frac{PO}{DI} = \frac{KO}{KI}$.

Tương tự có $\frac{OQ}{IE} = \frac{KO}{KI}$. Do đó $\frac{PO}{DI} = \frac{OQ}{IE}$. Mà $PO = OQ$, vậy $DI = IE$.



Hình 3.63

3.16. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của IK với AB, AC.

$$\triangle ABD \text{ có } PM \parallel BD \Rightarrow \frac{PM}{BD} = \frac{AP}{AB}.$$

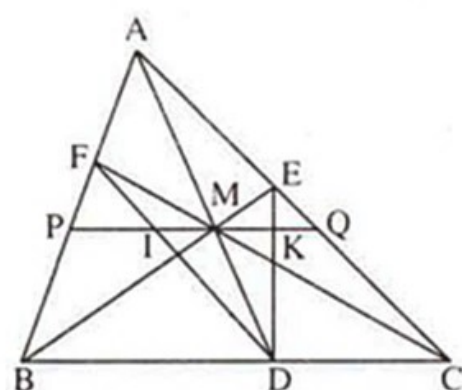
$$\triangle ABC \text{ có } PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}.$$

$$\text{Do đó } \frac{PM}{BD} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{PM}{PQ} = \frac{BD}{BC}.$$

$$\text{Tương tự có } \frac{IM}{PM} = \frac{CD}{BC}.$$

$$\text{Do đó } \frac{IM}{PQ} = \frac{PM}{PQ} \cdot \frac{IM}{PM} = \frac{BD \cdot CD}{BC^2}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự có } \frac{MK}{PQ} = \frac{BD \cdot CD}{BC^2}. \text{ Do đó } \frac{IM}{PQ} = \frac{MK}{PQ}. \text{ Vậy } IM = MK.$$



Hình 3.64

3.17. Gọi M là giao điểm của BF và CD, N là giao điểm của BE và CD, K là giao điểm của EF và AB.

$$\text{Xét } \triangle FAB \text{ có } DM \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{AB} = \frac{FD}{FA} \text{ (hệ quả của định lý Ta-lét).}$$

$$\text{Tương tự có } \frac{DH}{AK} = \frac{DM}{AB}.$$

$$\text{Do } \frac{DM}{AB} = \frac{DH}{AK} \Rightarrow DM = \frac{DH \cdot AB}{AK}.$$

Xét $\triangle ENC$ có $AB \parallel NC$

$$\Rightarrow \frac{NC}{AB} = \frac{EC}{EA} \text{ (hệ quả của định lý Ta-lét).}$$

$$\text{Tương tự có } \frac{HC}{AK} = \frac{EC}{EA}.$$

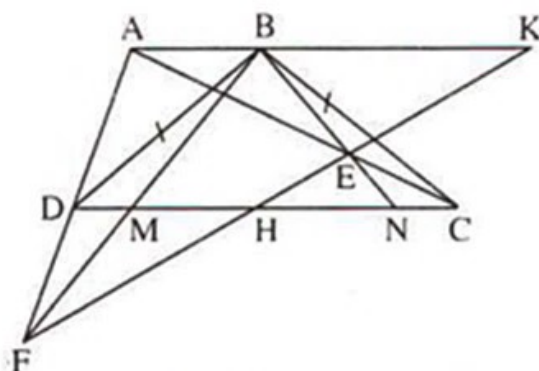
$$\text{Ta có } \frac{NC}{AB} = \frac{HC}{AK} \Rightarrow NC = \frac{HC \cdot AB}{AK}.$$

Mà $DH = HC$ (gt). Nên $DM = NC$.

$\triangle DBC$ có $DB = BC$ nên $\triangle DBC$ cân tại B.

Xét $\triangle BDM$ và $\triangle BCN$ có: $BD = BC$, $DM = NC$, $\widehat{BDM} = \widehat{BCN}$ ($\triangle DBC$ cân tại B).

Do đó $\triangle BDM = \triangle BCN$ (c.g.c). Vậy $\widehat{DBF} = \widehat{EBC}$.



Hình 3.65

3.18. Vẽ $AG \parallel BD$, $CH \parallel BD$ ($G, H \in EF$), nên $AG \parallel CH$.

Xét $\triangle EAG$ có $AG \parallel DM$,

nên $\frac{AE}{DE} = \frac{AG}{DM}$ (hệ quả của định lí Ta-let).

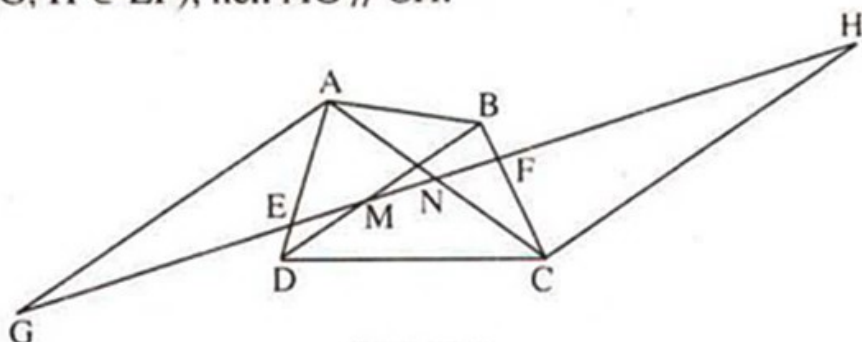
Xét $\triangle FCH$ có $BM \parallel HC$,

nên $\frac{CF}{BF} = \frac{CH}{BM}$ (hệ quả của định lí Ta-let).

Xét $\triangle NAG$ và $\triangle NCH$ có : $\widehat{ANG} = \widehat{CNH}$ (đối đỉnh) ; $NA = NC$ (gt) ; $\widehat{NAG} = \widehat{NCH}$ (vì $AG \parallel CH$).

Do đó $\triangle NAG = \triangle NCH$ (g.c.g) $\Rightarrow AG = CH$.

Mà $DM = BM$ (gt), do đó $\frac{AE}{DE} = \frac{CF}{BF}$. Vậy $AE \cdot BF = DE \cdot CF$.



Hình 3.66

3.19. Gọi O là giao điểm của MN và AC, H là giao điểm của KN và CD.

$$MO = \frac{CD}{2}, ON = \frac{AB}{2} \Rightarrow MO = ON.$$

$$\triangle KEC \text{ có } MO \parallel EC \Rightarrow \frac{MO}{CE} = \frac{KO}{KC};$$

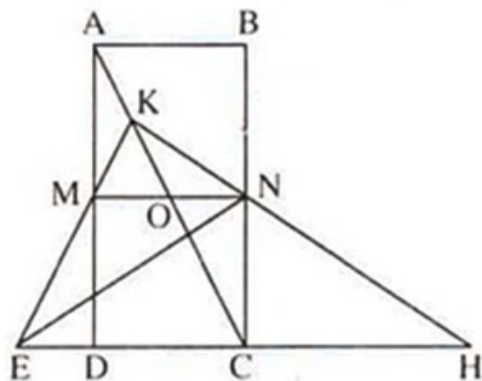
$$\triangle KCH \text{ có } ON \parallel CH \Rightarrow \frac{ON}{CH} = \frac{KO}{KC}$$

nên $CE = CH$.

$$\triangle NEH \text{ cân tại } N \Rightarrow \widehat{NEH} = \widehat{NHE}.$$

$$\text{Mà } \widehat{KNM} = \widehat{NHE}, \widehat{MNE} = \widehat{NEH};$$

$$\text{Do vậy } \widehat{KNM} = \widehat{MNE}.$$



Hình 3.67

3.20. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của AM với BC, BM với AC, CM với AB.

I là trung điểm của BC. Vẽ $MD \parallel AI$.

áp dụng hệ quả của định lí Ta-let:

$$\triangle GA_1I \text{ có } \frac{MA_1}{GA_1} = \frac{MD}{GI} \text{ và } \triangle A'AI \text{ có } \frac{MA'}{AA'} = \frac{MD}{AI}.$$

Mà $GI = \frac{1}{3} AI$ (G là trọng tâm $\triangle ABC$).

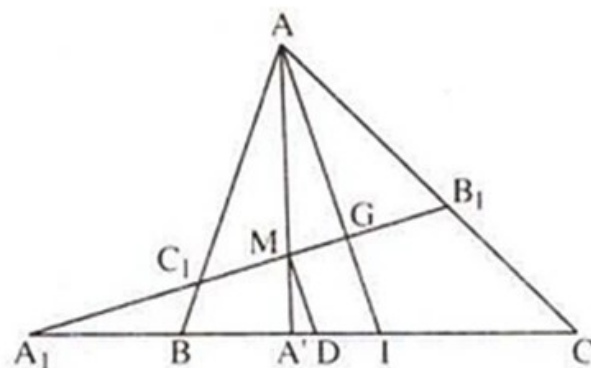
$$\text{Do đó } \frac{MA_1}{GA_1} = \frac{MD}{\frac{1}{3} AI} = 3 \cdot \frac{MA'}{AA'}$$

Chúng minh tương tự, ta có

$$\frac{MB_1}{GB_1} = 3 \cdot \frac{MB'}{BB'}, \quad \frac{MC_1}{GC_1} = 3 \cdot \frac{MC'}{CC'}$$

Ta dễ dàng chứng minh được $\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1$.

$$\text{Do đó } \frac{MA_1}{GA_1} + \frac{MB_1}{GB_1} + \frac{MC_1}{GC_1} = 3.$$



Hình 3.68

3.21. a) Gọi R là giao điểm của AC và MF, S là giao điểm của BD và ME.

$$\triangle MFE \text{ có } RI \parallel ME \text{ nên } \frac{FI}{IE} = \frac{FR}{RM} \quad (a)$$

$$\triangle AOD \text{ có } RF \parallel OD \text{ nên } \frac{FR}{OD} = \frac{AR}{AO}$$

$$\triangle ABO \text{ có } RM \parallel OB \text{ nên } \frac{RM}{OB} = \frac{AR}{AO}$$

$$\text{Suy ra } \frac{FR}{OD} = \frac{RM}{OB} \Rightarrow \frac{FR}{RM} = \frac{OD}{OB} \quad (b)$$

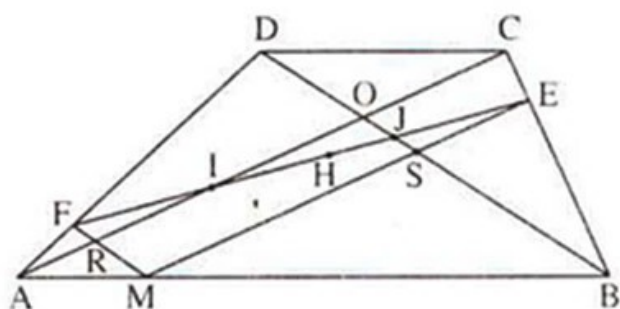
$$\text{Từ (a) và (b) có } \frac{FI}{IE} = \frac{OD}{OB}. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự có } \frac{EJ}{FJ} = \frac{OC}{OA} \quad (2)$$

$$\triangle OAB \text{ có } AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) có : } \frac{FI}{IE} = \frac{EJ}{FJ} \Rightarrow \frac{FI}{FI + IE} = \frac{EJ}{EJ + FJ} \Rightarrow FI = EJ.$$

$IH = JH$ (H là trung điểm IJ) nên $FI + IH = EJ + JH \Rightarrow HF = HE$. Vậy H là trung điểm của đoạn EF.



Hình 3.69

b) Nếu $AB = 2CD$, ta có $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$,

nên $\frac{FI}{IE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{FI}{FI+IE} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow EF = 3FI$. Tương tự $EF = 3EJ$.

Do đó $EJ = JI = IF$ với M là điểm bất kì trên đoạn thẳng AB .

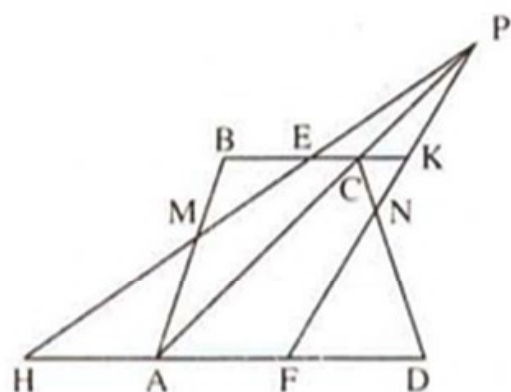
3.22. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD .

Gọi H là giao điểm của PE và AD , K là giao điểm của PF và BC .

$\triangle MBE$ có $BE \parallel HA$ nên $\frac{MB}{MA} = \frac{BE}{HA}$,

mà $\frac{EC}{HA} = \frac{BE}{HA}$.

Do đó $\frac{MB}{MA} = \frac{EC}{HA}$.



Hình 3.70

Chúng minh tương tự ta có: $\frac{NC}{ND} = \frac{CK}{AF}$.

Mặt khác, xét $\triangle PHA$ có $EC \parallel HA$ nên $\frac{PC}{PA} = \frac{EC}{HA}$.

$\triangle PAF$ có $CK \parallel AF$ nên $\frac{PC}{PA} = \frac{CK}{AF}$. Do đó $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{ND} \Rightarrow MN \parallel AD$,
 $MN \parallel BC$.

3.23. Gọi E là giao điểm của AS và BC , K là giao điểm của DP và NQ , I là giao điểm của AS và DP , I' là giao điểm của BQ và DP .

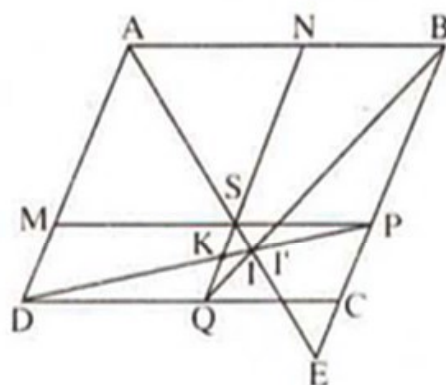
$\triangle EAB$ có $SP \parallel AB \Rightarrow \frac{ES}{AS} = \frac{EP}{BP}$.

$BP = AM$ ($ABPM$ là hình bình hành)

$\triangle SAM$ có $AM \parallel PE \Rightarrow \frac{ES}{AS} = \frac{SP}{SM}$;

$SM = DQ$ ($DMSQ$ là hình bình hành).

$\triangle SKP$ có $SP \parallel DQ \Rightarrow \frac{SP}{DQ} = \frac{SK}{KQ}$. Do đó $\frac{EP}{SK} = \frac{BP}{KQ} \Rightarrow \frac{EP}{SK} = \frac{BP}{KQ}$.



Hình 3.71

$$\Delta IKS \text{ có } SK \parallel PE \Rightarrow \frac{IP}{IK} = \frac{EP}{SK}. \text{ Nên } \frac{IP}{IK} = \frac{BP}{KQ}.$$

$$\text{Ta còn có } \frac{I'P}{I'K} = \frac{BP}{KQ} \text{ nên } \frac{IP}{IK} = \frac{I'P}{I'K} \Rightarrow \frac{IP}{IP+IK} = \frac{I'P}{I'P+I'K} \Rightarrow \frac{IP}{KP} = \frac{I'P}{KP}$$

$$\Rightarrow I \equiv I'.$$

Vậy các đường thẳng AS, BQ, DP đồng quy.

3.24. Gọi S là trung điểm của AM. SI là đường trung bình của tam giác MAB $\Rightarrow SI \parallel AB$

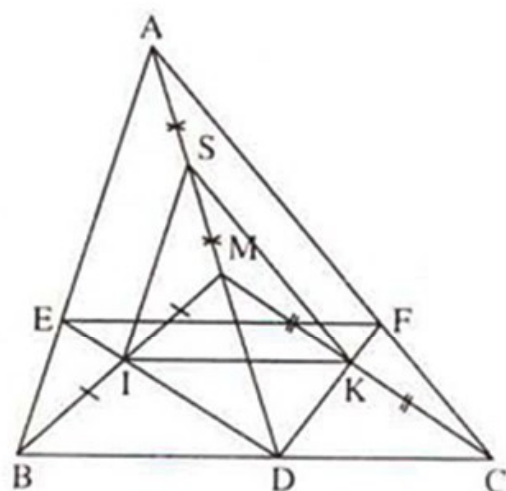
$$\Delta DAE \text{ có } SI \parallel AE \Rightarrow \frac{DI}{DE} = \frac{DS}{DA}.$$

$$\text{Tương tự có } \frac{DK}{DF} = \frac{DS}{DA}.$$

$$\text{Do đó } \frac{DI}{DE} = \frac{DK}{DF}.$$

$$\text{Xét } \Delta DEF \text{ có } \frac{DI}{DE} = \frac{DK}{DF}.$$

Suy ra $IK \parallel EF$ (định lý Ta-lét đảo).



Hình 3.72

3.25. Gọi G là giao điểm của DE và BC.

$$\text{Cách 1 : } \Delta NAC \text{ có } GF \parallel AC \Rightarrow \frac{GC}{NC} = \frac{FA}{NA}.$$

Vẽ đường thẳng qua E song song với BC cắt AB ở K, đường thẳng qua F song song với BC cắt AB ở I.

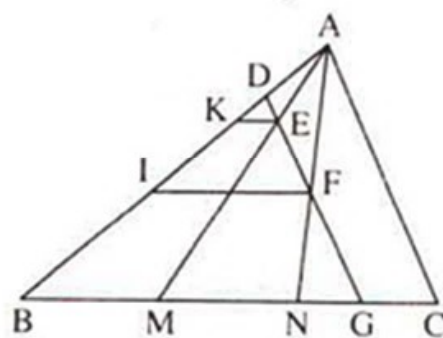
$$\Delta ABN \text{ có } IF \parallel BN \Rightarrow \frac{FA}{NA} = \frac{IF}{BN}, \text{ mà } BN =$$

$$2NC, \text{ nên } \frac{GC}{NC} = \frac{IF}{2NC} \Rightarrow IF = 2GC.$$

$$\Delta ABM \text{ có } KE \parallel MB \Rightarrow \frac{EK}{MB} = \frac{AE}{AM};$$

$$\Delta AMC \text{ có } EG \parallel AC \Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{GC}{MC};$$

$$\text{mà } MC = 2MB, \text{ do đó } \frac{EK}{MB} = \frac{GC}{2MB} \Rightarrow GC = 2EK. \text{ Vậy } IF = 4EK.$$



Hình 3.73

$$\Delta DIF \text{ có } KE // IF \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{CD+AD}{BC+AB} \Rightarrow DF = 4DE \Rightarrow EF = DF - DE = 3DE.$$

Cách 2 : ΔMAC có $GE // AC \Rightarrow \frac{GE}{AC} = \frac{MG}{MC}$; ΔNAC có $GF // AC \Rightarrow$

$$\frac{GF}{AC} = \frac{NG}{NC}; \text{ mà } MC = 2NC, \text{ do đó } \frac{EF}{AC} = \frac{MG - 2NG}{MC}.$$

$$\Delta ABC \text{ có } GD // AC \Rightarrow \frac{GD}{AC} = \frac{BG}{BC}; \Delta MAC \text{ có } GE // AC \Rightarrow \frac{GE}{AC} = \frac{MG}{MC}$$

$$\text{Do đó } \frac{3DE}{AC} = \frac{2BG - 3MG}{MC}.$$

$$\text{Mà } MG - 2NG = MG - NG - NG = MN - NG \text{ và } 2BG - 3MG = 2(BG - MG) - MG = 2BM - MG = MN + MN - MG = MN - NG.$$

$$\text{Do vậy } \frac{EF}{AC} = \frac{3DE}{AC} \Rightarrow EF = 3DE.$$

3.26. Gọi K là giao điểm của CI và AD, N là giao điểm của BM và AD.

$$\Delta IEC \text{ có } AK // EC \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{EAC} \quad (1);$$

$$\Delta ECD \text{ có } IB // CD \Rightarrow \frac{ID}{IE} = \frac{BC}{BE} \quad (2)$$

$$\Delta MBC \text{ có } NK // BC \Rightarrow \frac{BC}{KN} = \frac{MB}{MN};$$

$$\Delta MEB \text{ có } AN // BE \Rightarrow \frac{BE}{AN} = \frac{MB}{MN}.$$

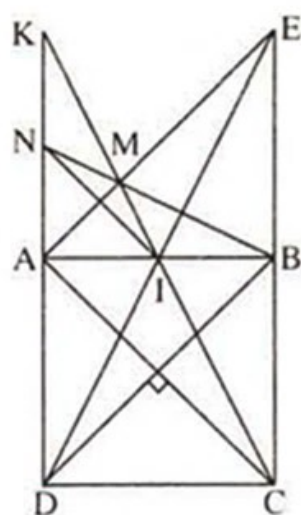
$$\text{Ta có } \frac{BC}{KN} = \frac{BE}{AN} \left(= \frac{MB}{MN} \right) \Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{KN}{AN} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) có } \frac{KI}{IC} = \frac{KN}{AN} \Rightarrow NI // AC.$$

Mà $BD \perp AC$ nên $BD \perp NI$.

ΔNBD có NI, BA là hai đường cao cắt nhau tại I $\Rightarrow$ I là trực tâm tam giác NBD.

Vậy $DE \perp BM$.



Hình 3.74

Chuyên đề 3

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

- 3.27. a) Áp dụng tính chất phân giác : $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \Rightarrow EB = \frac{1}{2} EC \Rightarrow B$ là trung điểm của EC
b) Tính được $EB = 21$ cm rồi suy ra $DE = 28$ cm.

- 3.28. Lí luận tương tự bài 3.27 ta có $NA = 10$ cm, $AM = \frac{30}{7}$ cm nên $MN = \frac{100}{7}$ cm.

Theo tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù ta có : $\widehat{MBN} = 90^\circ$. Suy ra : $BE = \frac{50}{7}$ cm (tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông MBN).

- 3.29. Áp dụng tính chất phân giác trong tam giác và định lí đảo Talét ta chứng minh được : $EF \parallel BC$.

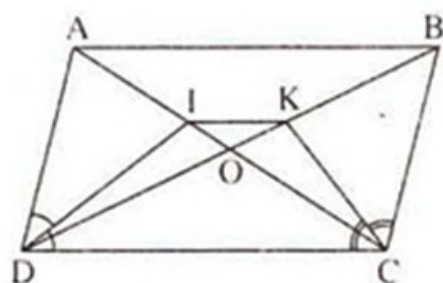
Áp dụng hệ quả Talét có : $\frac{EK}{BD} = \frac{AK}{AD} = \frac{KF}{DC}$, mà $DB = DC$ nên : $EK = KF$.

- 3.30. Áp dụng tính chất phân giác trong tam giác có :

$$\frac{IA}{IC} = \frac{DA}{DC} \text{ và } \frac{KB}{KD} = \frac{CB}{CD} \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{KB}{KD}$$

(vì $DA = BC$)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IO} = \frac{KB}{KO} \Rightarrow IK \parallel AB \parallel DC.$$



Hình 3.75

- 3.31. Tính được : $BC = 10$ cm $\Rightarrow MC = 5$ cm. áp dụng tính chất phân giác trong tam giác có :

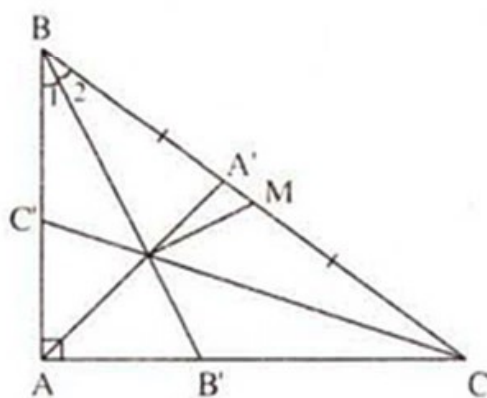
$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AB'}{3} = \frac{B'C}{5} = \frac{AC}{8} = 1 \Rightarrow AB' = 3\text{cm};$$

$$B'C = 5\text{cm}$$

$$\Rightarrow \triangle IMC = \triangle IB'C \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{IB'C}$$

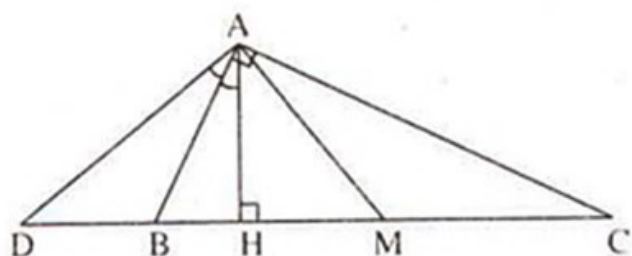
$$\Rightarrow \widehat{AB'B} = \widehat{IMB}, \text{ mà } \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BAC} = 90^\circ.$$



Hình 3.76

3.32. a) $\triangle ABC$ vuông tại A, có trung tuyến AM nên $AM = MB \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M;

Suy ra : $\widehat{MBA} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau). Vậy AB là tia phân giác $\widehat{DAH}$.



Hình 3.77

b) AB vuông góc với AC, nên AC là phân giác ngoài tại đỉnh A của $\triangle ADH$.

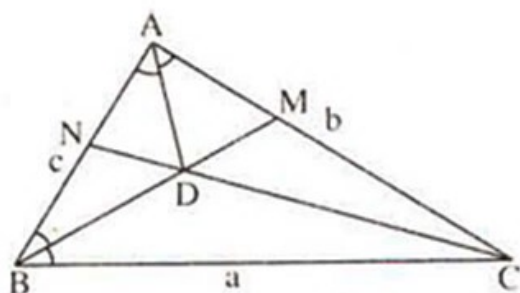
$$\text{Do đó : } \frac{BD}{BH} = \frac{AD}{AH} = \frac{CD}{CH} \Rightarrow BH \cdot CD = BD \cdot CH.$$

3.33. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Áp dụng tính chất phân giác trong tam giác ta có :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{MA}{AC} = \frac{c}{a+c}$$

$$\Rightarrow MA = \frac{bc}{a+c}.$$



Hình 3.78

Do AD là phân giác của $\widehat{BAM}$ nên :

$$\frac{BD}{DM} = \frac{AB}{MA} = \frac{c(a+c)}{bc} = \frac{a+c}{b} \Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{a+c}{a+c+b}.$$

$$\text{Lí luận tương tự có : } \frac{CD}{CN} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

$$\text{Ta có : } 2BD \cdot CD = BM \cdot CN \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{BD}{BM} \cdot \frac{CD}{CN} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(a+b)(a+c)}{(a+b+c)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại A.}$$

3.34. Theo tính chất đối xứng, có :

$$AB = AG = BI \quad (1)$$

$$AC = AH = KC \quad (2).$$

Từ giả thiết suy ra G, D, H thẳng hàng.

Do AD là phân giác trong $\triangle ABC$ nên

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB - BD}{AC - DC} \quad (3)$$

Từ (1), (2) cho

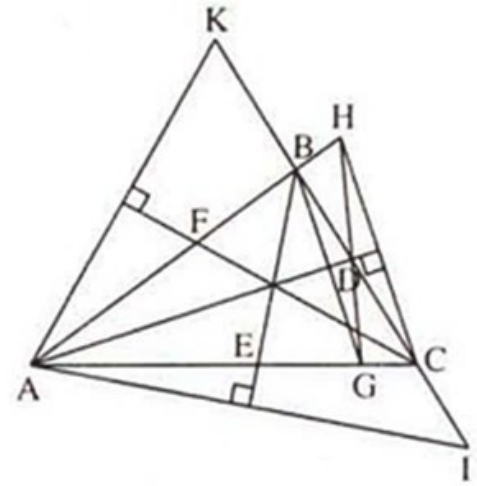
$$\frac{DI}{DK} = \frac{BI - BD}{KC - DC} = \frac{AB - BD}{AC - DC} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4) cho } \frac{DI}{DK} = \frac{AB}{AC} \quad (5)$$

Mặt khác, AD là phân giác trong $\triangle AHG$ có

$$\frac{DG}{DH} = \frac{AG}{AH} = \frac{AB}{AC} \quad (6)$$

$$\text{Từ (5), (6) cho } \frac{DI}{DK} = \frac{DG}{DH} \Rightarrow GI \parallel HK.$$



Hình 3.79

3.35. Vẽ AE là đường phân giác của tam giác ABC. Gọi F là điểm đối xứng của E qua N. Xét $\triangle ABC$ có AE là đường phân giác nên :

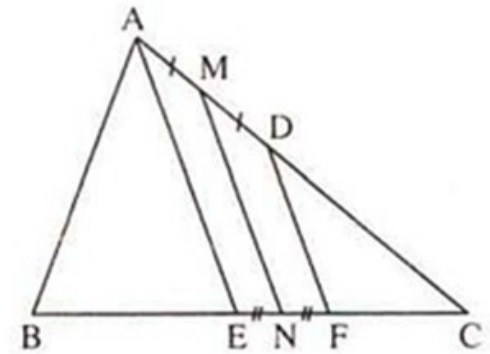
$$\frac{BE}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}.$$

Ta có $CD = AB$ (gt), $BE = CF$ (vì $BN = NC$, $EN = NF$).

Do vậy $\frac{CD}{AC} = \frac{CF}{CE}$. Suy ra $AE \parallel DF$, nên

MN là đường trung bình của hình thang AEFD ($AE \parallel DF$)

$$\Rightarrow MN \parallel AE \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{CAE} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}. \text{ Vậy } \widehat{CMN} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}.$$



Hình 3.80

3.36. $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 36^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = (180^\circ - \widehat{BAC}) : 2 = 72^\circ$.

Vẽ BD là đường phân giác của tam giác ABC.

$$\text{Ta có } \widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 36^\circ \text{ nên } \widehat{BDC} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD} = 72^\circ.$$

$$\triangle DAB \text{ có } \widehat{DAB} = \widehat{DBA} (= 36^\circ) \Rightarrow \triangle DAB \text{ cân tại D} \Rightarrow DA = DB.$$

Tương tự, $\triangle BDC$ cân tại $B \Rightarrow DB = BC$.

Vậy $DA = DB = BC$. $\triangle ABC$ có BD là đường phân giác

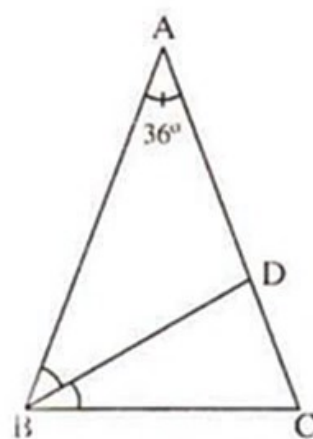
$$\Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{DA+DC}{AB+BC} = \frac{AC}{AB+BC}.$$

Ta có $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AB+BC}$

$$\Rightarrow AB \cdot BC + BC^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow \left(BC + \frac{1}{2} AB \right)^2 = \frac{5}{4} AB^2 \Rightarrow BC + \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}}{2} AB.$$

Vậy $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$



Hình 3.81

3.37. a) Qua B vẽ đường thẳng song song với AD cắt AC tại M.

Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$, $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_2$, mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (vì AD là tia phân giác $\widehat{BAC}$)

suy ra $\widehat{AMB}$, nên $\triangle ABM$ cân đỉnh A. Từ đó có $AM = AB = c$.

$\triangle ABM$ có $MB < AM + AB = 2c$.

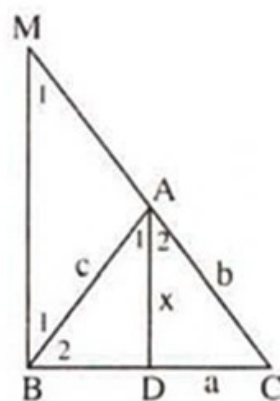
$\triangle ADC$ có $MB \parallel AD$, nên $\frac{AD}{MB} = \frac{AC}{MC}$ (hệ quả của định lý Ta-let),

do đó $AD = \frac{AC}{MC} \cdot MB < \frac{AC}{AC+AM} \cdot 2c = \frac{2bc}{b+c}$. Vậy $x < \frac{2bc}{b+c}$

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có $y < \frac{2ca}{c+a}$, $z < \frac{2ab}{a+b}$.

Do đó $\frac{1}{x} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} \right)$; $\frac{1}{y} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ và $\frac{1}{z} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)$.

Suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.



Hình 3.82

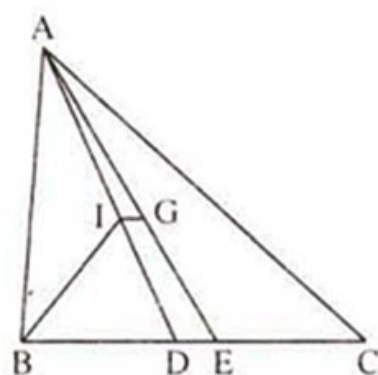
3.38. Gọi D là giao điểm của AI và BC, E là giao điểm của AG và BC.

Ta có AD là đường phân giác của tam giác ABC, BI là đường phân giác của tam giác ABD.

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{AG}{GE} = 2$;

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD+DC}{AB+AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = 2 \text{ và } \frac{AB}{BD} = \frac{AI}{ID}.$$

Ta có $\frac{AI}{ID} = \frac{AG}{GE} (= 2)$. Vậy $IG \parallel BC$.



Hình 3.83

3.39. Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC. $\triangle BAD$ cân tại B ($BA = BD$, gt) có BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow AH = \frac{AD}{2}$.

$\triangle ABC$ có BD là đường phân giác trong nên

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{DA}{b} = \frac{DC}{a} = \frac{DA+DC}{a+b} = \frac{AC}{a+b} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow DA = \frac{b^2}{a+b}.$$

$\triangle HAB$ vuông tại H, theo định lí Py-ta-go ta có $AB^2 = BH^2 + AH^2$

$$\Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2$$

$$\text{Do đó } BH^2 = b^2 - \frac{AD^2}{4} \quad (1)$$

$\triangle HBC$ vuông tại H, theo định lí Py-ta-go ta

$$\text{có } BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow BH^2 = BC^2 - HC^2$$

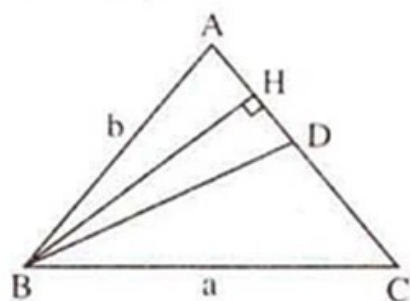
$$\Rightarrow BH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = a^2 - \left(b - \frac{AD}{2}\right)^2 \Rightarrow BH^2 = a^2 - b^2 + b \cdot AD - \frac{AD^2}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } b^2 - \frac{AD^2}{4} = a^2 - b^2 + b \cdot AD - \frac{AD^2}{4}$$

$$\Rightarrow b^2 - a^2 = b \cdot AD - b^2 \Rightarrow (b+a)(b-a) = b \cdot \widehat{BAH}$$

$$\Rightarrow (b+a)(b-a) = \frac{-ab^2}{a+b} \Rightarrow \frac{a-b}{ab} = \frac{b}{(a+b)^2} \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}.$$



Hình 3.84

Chuyên đề 4

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG.

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

3.40. a) Gọi chu vi của tam giác ABC là P_1 , chu vi của tam giác HIK là P_2 . Ta tính

$$\text{được } \frac{P_1}{P_2} = \frac{2}{5}.$$

b) $P_2 = 150 \text{ cm}.$

c) $P_1 = 60 \text{ cm}; P_2 = 150 \text{ cm}.$

3.41. a) $MB = 10 \text{ cm}; MC = 15 \text{ cm};$

b) $P_1 = 50 \text{ cm}.$

c) $\triangle HBM \sim \triangle KMC \Rightarrow \frac{HB}{KM} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow HB \cdot MC = BM \cdot KM.$

3.42. $\triangle CBA \sim \triangle ACD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{CAD}$, mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow BC \parallel AD$

3.43. a) $\triangle AHB \sim \triangle DHA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{DH} = \frac{HB}{AH}$

$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot HD$$

$$\triangle EHB \sim \triangle DHF$$
 (g.g) $\Rightarrow \frac{HE}{DH} = \frac{HB}{HF}$

$$\Rightarrow BH \cdot HD = HE \cdot HF$$

$$\text{Vậy } AH^2 = BH \cdot HD = HE \cdot HF.$$

b) Ta có: $\frac{AF}{AE} = \frac{MF}{ME} \Leftrightarrow \frac{AH + HF}{AH + HE} = \frac{HF - MH}{MH - HE}$

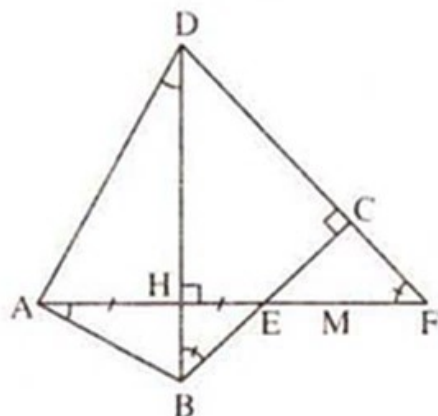
$$= \frac{HF - AH}{AH - HE} \quad (MH = AH, \text{gt})$$

$$\Leftrightarrow \frac{AH - HE}{AH + HE} + 1 = \frac{HF - AH}{AH + HF} + 1 \Leftrightarrow \frac{2AH}{AH + HE} = \frac{2HF}{AH + HF}$$

$$\Leftrightarrow AH(AH + HF) = HF(AH + HE)$$

$$\Leftrightarrow AH^2 + AH \cdot HF = AH \cdot HF + HF \cdot HE$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = HF \cdot HE \quad (\text{đúng theo kết quả câu a}).$$



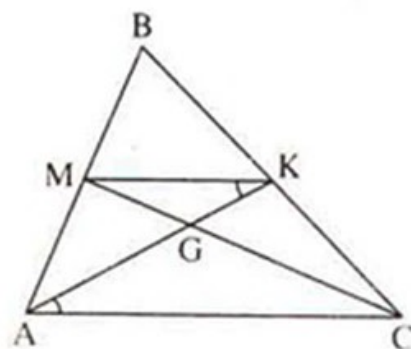
Hình 3.85

3.44. $\triangle ACG$ và $\triangle KMG$ có $\frac{MG}{CG} = \frac{KG}{AG} = \frac{1}{2}$, $\widehat{KGM} = \widehat{AGC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle ACG \sim \triangle KMG$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{KM}{AC} = \frac{MG}{CG} = \frac{KG}{AG} = \frac{1}{2} \Rightarrow KM = \frac{1}{2} AC.$$

Lại có $\widehat{GKM} = \widehat{GAC}$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên $MK \parallel AC \Rightarrow \frac{KM}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow K, M$ là trung điểm BC, AB . Vậy G là trọng tâm $\triangle ABC$.



Hình 3.86

3.45. Xét $\triangle ADE$, AM là tia phân giác trong, DM là tia phân giác của góc ngoài tại D nên EM là tia phân giác góc ngoài tại E .

Xét tứ giác $BDEC$, có $2(\widehat{BDM} + \widehat{DBC} + \widehat{MEC}) = 360^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{DBC} + \widehat{MEC} = 180^\circ \quad (1)$$

Mặt khác trong $\triangle BDM$ có :

$$\widehat{BDM} + \widehat{DBC} + \widehat{DMB} = 180^\circ. \quad (2)$$

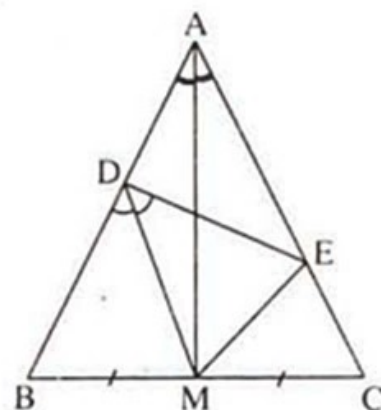
Từ (1) và (2) cho : $\widehat{MEC} = \widehat{DMB}$.

Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CEM$ có $\hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$,

$$\widehat{MEC} = \widehat{DMB} \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow \triangle BMD \sim \triangle CEM$ (gg)

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM = \frac{BC^2}{4}.$$



Hình 3.87

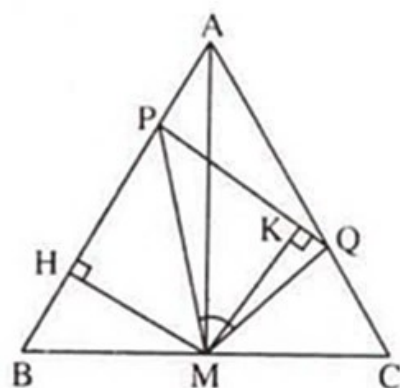
3.46. a) Ta có : $\widehat{CMP} = \widehat{CMQ} + \widehat{PMQ} = \widehat{CMQ} + 60^\circ$

$\widehat{CMP} = \widehat{BPM} + \widehat{ABC} = \widehat{BPM} + 60^\circ$ (góc ngoài tại đỉnh P của $\triangle MBP$)

$\Rightarrow \widehat{CMQ} = \widehat{BPM}$. Suy ra $\triangle PBM \sim \triangle MCQ$ (g.g).

$$b) \frac{MQ}{MP} = \frac{MC}{PB} = \frac{MB}{PB} \Rightarrow \frac{MQ}{MB} = \frac{MP}{PB}$$

$\Rightarrow \triangle PMQ \sim \triangle PBM$ (c.g.c).



Hình 3.88

$$c) S_{MPQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot MK = \frac{1}{2} PQ \cdot MH \quad (1)$$

(vì $\triangle PMQ \sim \triangle PBM$ nên $\widehat{MPB} = \widehat{MPQ}$, suy ra MP là tia phân giác của $\widehat{BPQ} \Rightarrow MH = MK$).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} 2MH \cdot BC \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) cho } \frac{S_{MPQ}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} PQ \cdot MH}{\frac{1}{2} BC \cdot 2MH} = \frac{PQ}{2BC}.$$

3.47. Dựng $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$. Từ N kẻ $NP \parallel BC$, ta có

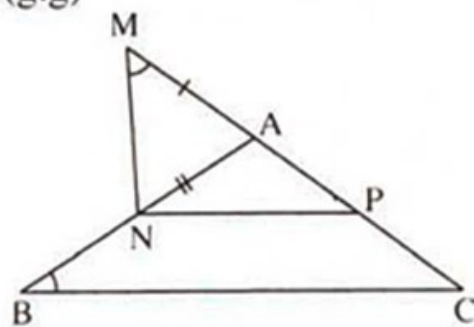
$$\triangle ANP \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AP}{AC}, \triangle NMP \sim \triangle ABC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{BC} \Rightarrow MP = \frac{MN \cdot BC}{AB} = \frac{B'C' \cdot BC}{AB}.$$

$$\text{Do } AM = A'B' = MP - AP$$

$$\Rightarrow A'B' = \frac{B'C' \cdot BC}{AB} - \frac{A'C' \cdot AC}{AB}$$

$$\text{Suy ra : } AB \cdot A'B' = BC \cdot B'C' - AC \cdot A'C'.$$



Hình 3.89

3.48. a) $\triangle ABC$ đều, O là trọng tâm nên cũng là trực tâm của tam giác $\Rightarrow OB \perp AC, OC \perp AB \Rightarrow OI \parallel MQ, OC \parallel PM$. Vậy tứ giác MIOK là hình bình hành.

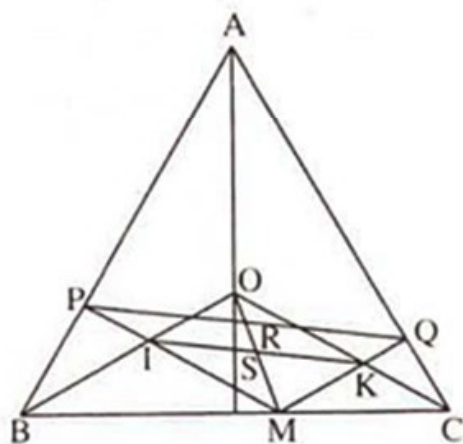
$$b) \triangle MIB \sim \triangle MKC \text{ (g.g) nên } \frac{MK}{MI} = \frac{MC}{MB};$$

$$\triangle MPB \sim \triangle MQC \text{ (g.g) nên } \frac{MQ}{MP} = \frac{MC}{MB}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{MK}{MI} = \frac{MQ}{MP} \Rightarrow IK \parallel PQ.$$

Gọi S là giao điểm của IK và OM $\Rightarrow SI = SK$.

$$\text{Ta có } \frac{SI}{PR} = \frac{SK}{RQ} = \frac{SM}{MR} \Rightarrow PR = RQ.$$

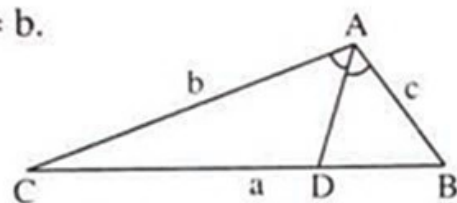


Hình 3.90

3.49. Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Đặt $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$.

Kẻ phân giác AD , có $\frac{DC}{DB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{b}{b+c}$

$$\Rightarrow DC = \frac{ab}{b+c}.$$



Hình 3.91

$$\triangle BCA \sim \triangle ACD \text{ (g.g)} : \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b(b+c)}{ab} \Rightarrow a^2 = b(b+c).$$

$$\text{Do đó với } \widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + bc \\ b^2 = c^2 + ac \end{cases} \Rightarrow a^2 = c^2 + ac + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{b+c}{a^2}.$$

$$\text{Lại có } a^2 = b(b+c) \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{b+c}{a^2}. \text{ Suy ra } \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

3.50. Trên tia đối của tia AB lấy N sao cho $AN = BE$.

Giả sử AE cắt NC , DN lần lượt tại K , L và DE cắt NC tại H .

Xét $\triangle BEA$ và $\triangle AND$ có $BE = AN$; $\widehat{ABE} = \widehat{DAN}$ ($= 90^\circ$); $AB = AD$.

$$\Rightarrow \triangle BEA = \triangle AND \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ADN}.$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BAE} + \widehat{LAD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ADL} + \widehat{LAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ALD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AL \perp DN. \text{ Tương tự } \triangle BCN = \triangle CDE \Rightarrow CN \perp DE.$$

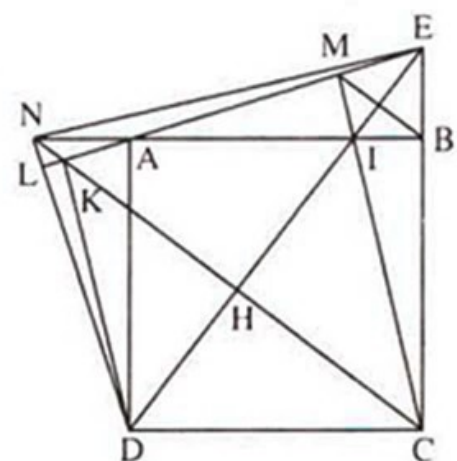
$\triangle DEN$ có EL và NH là hai đường cao $\Rightarrow K$ là trực tâm $\triangle EDN \Rightarrow DK \perp NE$.

$\triangle CEN$ có NB và EH là hai đường cao $\Rightarrow I$ là trực tâm $\triangle CEN \Rightarrow CI \perp NE$.

$$DK \perp NE; CI \perp NE \Rightarrow DK \parallel CI$$

$$\triangle EKD \sim \triangle EMI \text{ nên } \frac{EI}{ED} = \frac{EM}{EK}, \triangle EDC \sim \triangle EIB \text{ nên } \frac{EI}{ED} = \frac{EB}{EC},$$

$$\triangle EKC \text{ có } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow BM \parallel CK. \text{ Mà } DE \perp CK \Rightarrow DE \perp BM.$$



Hình 3.92

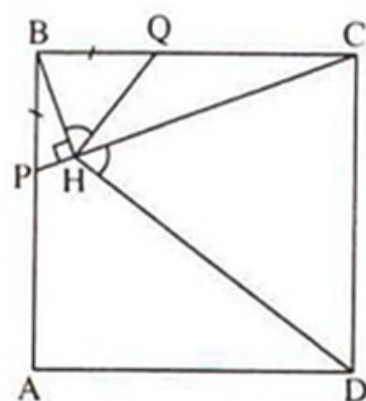
3.51. $\triangle BHP \sim \triangle CHB$ (g.g) nên $\frac{BH}{BP} = \frac{CH}{CB} = \frac{BH}{BQ}$.

Lại có $\frac{CH}{CB} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow \frac{BH}{BQ} = \frac{CH}{CD}$.

Mà $\widehat{QBH} = \widehat{HPB} = \widehat{DCH} \Rightarrow \triangle DHC \sim \triangle QHB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{QHB}$.

Do đó : $\widehat{DHQ} = \widehat{CHB} = 90^\circ$.



Hình 3.93

3.52. a) $\triangle OMN \sim \triangle HAB$ (g.g) có tỉ số đồng dạng $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$.

b) $\frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 2OM$.

c) $\triangle HAG \sim \triangle OMG$ (c.g.c).

d) Từ câu c) cho $\widehat{AGH} = \widehat{MGO}$
 $\Rightarrow H, G, O$ thẳng hàng.

Ta có : $\frac{GH}{GO} = \frac{GA}{GM} = 2 \Rightarrow GH = 2GO$.

Suy ra $S_{AGH} = \frac{1}{2} AK \cdot HG = \frac{1}{2} AK \cdot 2OG$

$= 2S_{AGO}$ ($AK \perp HO$).

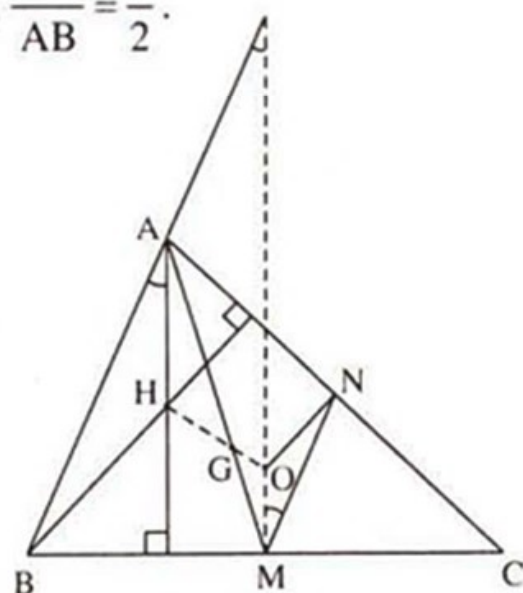
Nhận xét : * Nếu đề bài chỉ yêu cầu chứng minh ba điểm H, G, O thẳng hàng thì đây trở thành bài toán khó (đường thẳng qua ba điểm này gọi là đường thẳng Ôle)

* Ta có thể chứng minh $S_{AGH} = 2S_{AGO}$ bằng cách khác không thông qua ba điểm H, G, O thẳng hàng.

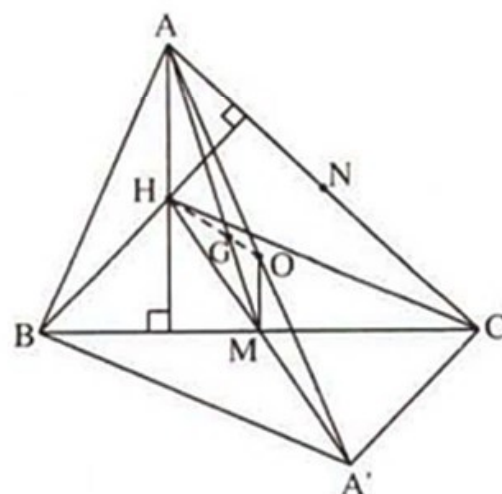
Thật vậy : Dựng A' là đối xứng của A qua O. Ta dễ dàng chứng minh tứ giác BHCA' là hình bình hành và M là trung điểm của BC và $A'H$.

$S_{AGH} = \frac{1}{2} AG \cdot HH'$, $S_{AGO} = \frac{1}{2} AG \cdot OO'$ (1)

(kẻ HH' và OO' cùng vuông góc với AG)



Hình 3.94



Hình 3.95

$S_{AHM} = S_{AMA'}$ (do AM là đường trung tuyến trong $\triangle AHA'$).

$S_{AMA'} = 2 S_{AMO}$ (do MO là đường trung tuyến trong $\triangle AMA'$)

$$\Rightarrow S_{AHM} = 2 S_{AMO} \Rightarrow \frac{1}{2} AM \cdot HH' = 2 \cdot \frac{1}{2} AM \cdot OO' \Rightarrow HH' = 2OO' \quad (2)$$

Từ (1), (2) cho : $S_{AGH} = 2S_{AGO}$.

3.53. Vẽ đường thẳng qua E song song với BC cắt AC ở F.

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

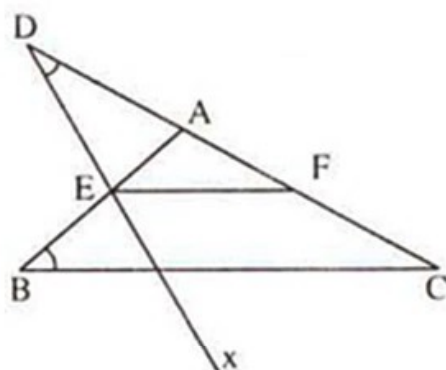
(định lí Ta-lét).

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EDF$ có : $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$,
 $\widehat{ACB}$ (chung).

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} \Rightarrow BC \cdot DE = AB \cdot DF.$$

Vậy : $BC \cdot DE = AB \cdot DF = AB(AD + AF)$

$$= AB \left(AD + \frac{AE \cdot AC}{AB} \right) = AB \cdot AD + AC \cdot AE \quad \left(\text{vì } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF = \frac{AE \cdot AC}{AB} \right).$$



Hình 3.96

3.54. Vẽ $BF \parallel AC$, $F \in EC$.

Tứ giác BDCF là hình bình hành vì $BF \parallel AC$ và $FC \parallel BD$ (gt)

$$\Rightarrow DC = BF \text{ và } \widehat{BDC} = \widehat{BFC}$$

Xét $\triangle ABD$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) và $\triangle EBF$ ($\widehat{E} = 90^\circ$) có :

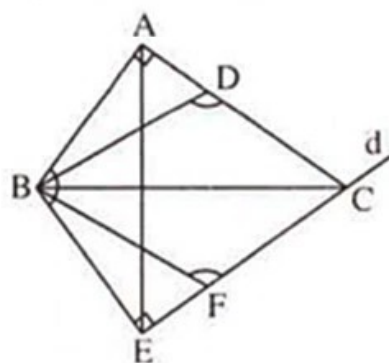
$$\widehat{ADB} = \widehat{EFB} \text{ (vì } \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = \widehat{EFB} + \widehat{BFC} = 180^\circ),$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle EBF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BA}{BE} = \frac{BD}{BF}$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{BE}{BF}.$$

$$\text{Từ đó } \frac{BA}{BD} = \frac{BE}{DC} \text{ (vì } BF = DC).$$

Ta có $BD \parallel EC$, $BE \perp EC \Rightarrow BE \perp BD$.



Hình 3.97

Xét $\triangle BAE$ và $\triangle DBC$ có $\widehat{ABE} = \widehat{BDC}$ (cùng bù với góc DCF); $\frac{BA}{BD} = \frac{BE}{DC}$.

Do đó $\triangle BAE \sim \triangle DBC$ (c.g.c).

3.55. Gọi K là giao điểm của AH và BC, $AK \perp BC$.

$$\triangle DBC \sim \triangle KAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CD}{CK} = \frac{CB}{CA}.$$

$$\triangle CDK \sim \triangle CBA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{CKD} = \widehat{CAB}.$$

Tương tự có $\widehat{BKE} = \widehat{CAB}$.

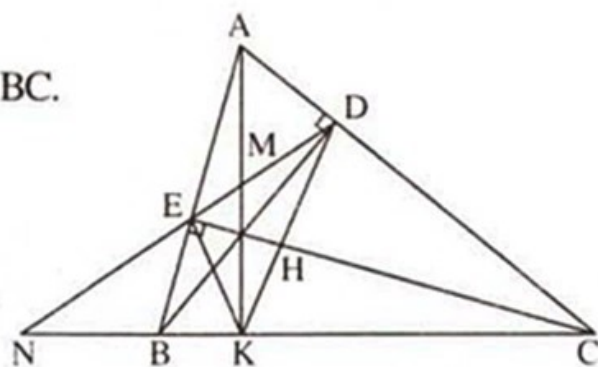
Ta có $\widehat{CKD} = \widehat{BKE} (= \widehat{CAB})$

$$\Rightarrow 90^\circ - \widehat{CKD} = 90^\circ - \widehat{BKE} \Rightarrow \widehat{MKD} = \widehat{MKE}.$$

Gọi Kx là tia đối của tia KD có $\widehat{DKC} = \widehat{BKx}$ (đối đỉnh), mà $\widehat{DKC} = \widehat{BKE}$.

$$KM, KN \text{ là các đường phân giác trong, ngoài của } \triangle KDE \Rightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{ND}{NE}.$$

Vậy : $MD \cdot NE = ME \cdot ND$.



Hình 3.98

3.56. Gọi K là giao điểm của AH và PQ;

I là giao điểm của AM và PQ.

Vì $AP \parallel HQ$, $AQ \parallel PH$ nên tứ giác APHQ là hình bình hành và K là trung điểm của AH, PQ.

Mặt khác : $AC \perp BE$, $AB \perp CF$ nên $AC \perp AP$ và $AB \perp AQ$.

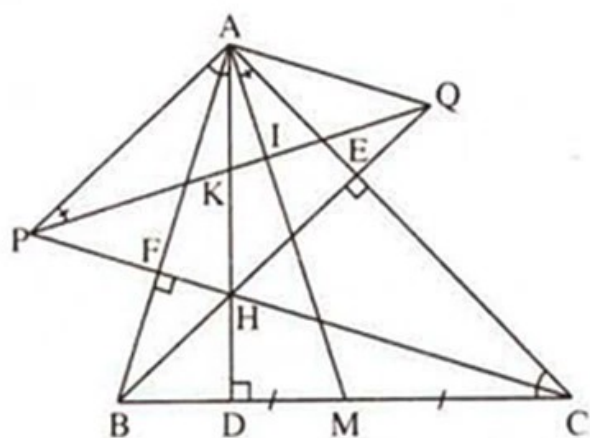
$$\triangle ABC \sim \triangle PHA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{AP}{AH} \Rightarrow \frac{CA}{2CM} = \frac{AP}{2AK}.$$

$$\text{Do đó } \frac{CA}{CM} = \frac{AP}{AK} \Rightarrow \triangle APK \sim \triangle CAM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{KPA}.$$

$$\text{Ta có } \widehat{CAP} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{MAC} + \widehat{MAP} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KPA} + \widehat{MAP} = 90^\circ,$$

nghĩa là $\triangle AIP$ vuông tại I, suy ra $AM \perp PQ$.



Hình 3.99

Chuyên đề 5

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

3.59. a) $\triangle AIH \sim \triangle AHB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH^2 = AI \cdot AB$.

b) Lí luận tương tự, ta có $\triangle AKH \sim \triangle AHC \Rightarrow AH^2 = AK \cdot AC$.

Suy ra $AI \cdot AB = AK \cdot AC$

hay $\frac{AI}{AC} = \frac{AK}{AB}$, mà $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \triangle AIK \sim \triangle ACB$ (c.g.c).

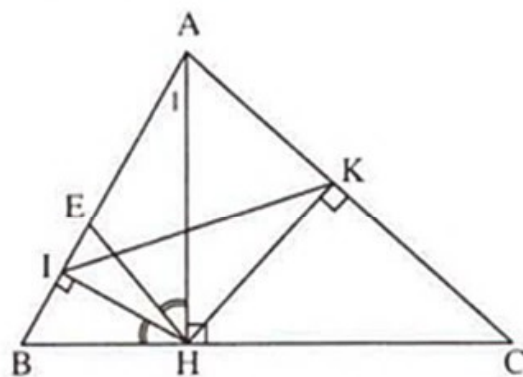
c) Ta có: $\frac{EB}{AB} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{EB}{2} = \frac{AB}{5} = \frac{AB - EB}{5 - 2} = \frac{EA}{3}$

$\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{2}{3}$. Mà $\frac{EB}{EA} = \frac{HB}{HA}$ (tính chất phân giác của $\triangle AHB$)

nên $\frac{HB}{HA} = \frac{2}{3}$. Ta có $\triangle HBI \sim \triangle AHI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BI}{HI} = \frac{HI}{AI} = \frac{HB}{AH}$, do đó

$\frac{BI}{HI} \cdot \frac{HI}{AI} = \frac{HB}{AH} \cdot \frac{HB}{AH} = \left(\frac{HB}{HA}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Vậy $\frac{BI}{AI} = \frac{4}{9}$.



Hình 3.102

3.60. a) Xét $\triangle DHC$ và $\triangle NHB$, ta có: $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_3$ (cùng phụ với $\widehat{H}_2$);

$\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$ (cùng phụ với $\widehat{C}_2$) $\Rightarrow \triangle DHC \sim \triangle NHB$ (g.g).

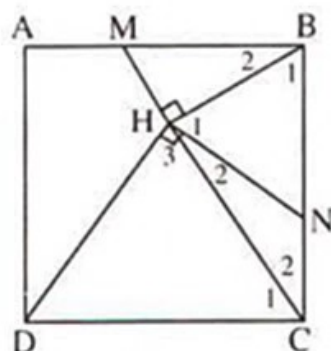
b) Xét $\triangle MBH$ và $\triangle BCH$, ta có: $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$ (cùng phụ với $\widehat{B}_1$)

$\widehat{MHB} = \widehat{BHC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle MBH \sim \triangle BCH$ (g.g).

c) $\triangle DHC \sim \triangle NHB \Rightarrow \frac{DC}{NB} = \frac{HC}{HB}$;

$\triangle BCH \sim \triangle MBH \Rightarrow \frac{HC}{HB} = \frac{BC}{MB}$.

Suy ra $\frac{DC}{NB} = \frac{BC}{MB}$ hay $NB = MB$ (vì $DC = BC$).



Hình 3.103

$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{F}$ hay $\triangle AIF$ cân tại I.

Do đó $IA = IF$

(1)

Ta lại có $\widehat{IAE} = \widehat{IEA}$ (cùng phụ với hai góc $\hat{F} = \hat{A}_2$) $\Rightarrow \triangle AIE$ cân tại I nên $IA = IE$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $IE = IF$ nên AI là đường trung tuyến của $\triangle AEF$.

$$\text{Do đó } \frac{S_{ABC}}{S_{AEF}} = \left(\frac{BC}{EF} \right)^2 = \left(\frac{2AD}{2AI} \right)^2 = \left(\frac{AD}{AI} \right)^2.$$

3.63. a) $\triangle CHA \sim \triangle CAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CA^2 = CH.CB$

b) $BC = 25 \text{ cm}; CA^2 = CH.CB \Rightarrow CH = 16 \text{ cm}.$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ (tính chất phân giác của } \triangle ABC) \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{25}{7}.$$

$$\text{Suy ra : } DB = \frac{75}{7} \text{ cm và } DC = \frac{100}{7} \text{ cm ;}$$

$$HD = BD - BH = \frac{75}{7} - 9 = \frac{12}{7} \text{ (cm).}$$

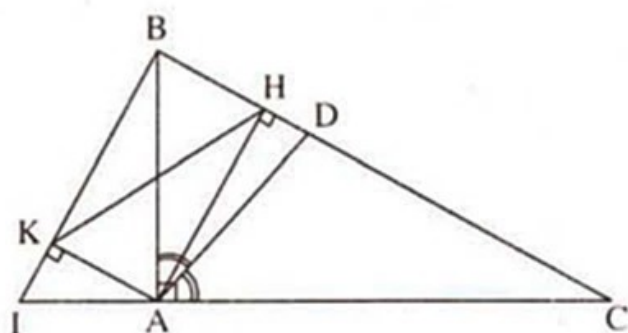
c) $\triangle BKA \sim \triangle BAI$ (g.g) $\Rightarrow BA^2 = BK.BI.$

$\triangle BHA \sim \triangle BAC$ (g.g) $\Rightarrow BA^2 = BH.BC.$

Suy ra $BK.BI = BH.BC$ nên $\frac{BK}{BC} = \frac{BH}{BI}$ và $\widehat{IBC}$ chung $\Rightarrow \triangle BHK \sim \triangle BIC$ (c.g.c).

d) $BI^2 = AB^2 + AI^2 \Rightarrow BI = 17 \text{ cm}; S_{BIC} = \frac{1}{2}.BA.IC = \frac{1}{2}.15.28 = 210 \text{ (cm}^2\text{)}.$

$$\frac{S_{BHK}}{S_{BIC}} = \left(\frac{BH}{BI} \right)^2 = \left(\frac{9}{17} \right)^2 = \frac{81}{289} \Rightarrow S_{BHK} = \frac{81}{289} S_{BIC} = \frac{81}{289}.210 \approx 59 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 3.106

3.64. a) $\triangle ADM \sim \triangle MCB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{MC} = \frac{DM}{CB}$ hay $\frac{5}{MC} = \frac{2}{5}.$

Vậy $MC = 12,5 \text{ cm}.$

b) $\triangle BMA \sim \triangle BEK$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{EK}{EB}$$

mà $\frac{MA}{MB} = \frac{EA}{EB}$ (tính chất phân giác

của $\triangle AMB$). Suy ra $\frac{EK}{EB} = \frac{EA}{EB}$.

Vậy $EK = EA$.

c) $\triangle HAN \sim \triangle HBM$ (g.g)

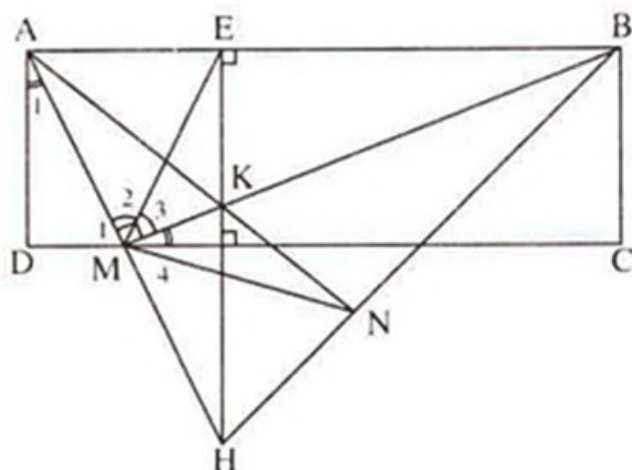
$$\Rightarrow \frac{HN}{HM} = \frac{HA}{HB} \text{ và } \widehat{AHB} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle HNM \sim \triangle HAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{M}_4 = \widehat{ABH}.$$

Chứng minh tương tự, $\triangle AME \sim \triangle ABH \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{ABH}$. Suy ra $\widehat{M}_4 = \widehat{M}_2$,

do đó $\widehat{BMN} = \widehat{M}_3$ (cùng phụ với hai góc $\widehat{M}_4 = \widehat{M}_2$). Mà $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$ (vì ME là tia phân giác $\widehat{AMB}$)

$$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{M}_4. \text{ Vậy MN là tia phân giác góc } \frac{x(7-x)}{x^2-16} + \frac{2+x}{x+4} = \frac{1}{x-4}.$$



Hình 3.107

3.65. a) $\triangle ABH \sim \triangle CBA$ (g.g).

b) $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow CE \cdot CA = CD \cdot CB.$$

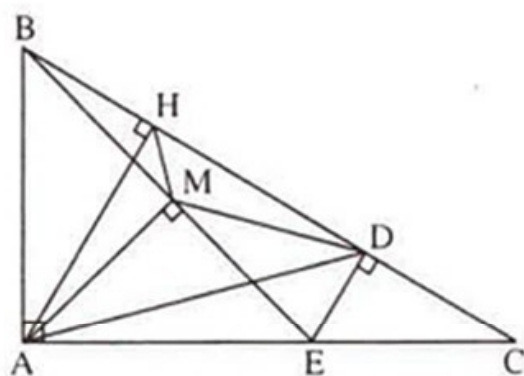
c) $\triangle CAB \sim \triangle CHA \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{HA}{HC} \quad (1)$$

$$AH \parallel ED \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{HD}{HC} = \frac{HA}{HC} \text{ (HD = AH) (2). Từ (1) và (2) có } \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AC}.$$

Vậy $AE = AB$.

d) $\triangle HAD$ vuông cân tại H, HM là đường trung trực của AD $\Rightarrow$ HM là đường phân giác của góc AHD $\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{HMD} = 45^\circ$; $\triangle MAE$ vuông tại M



Hình 3.108

$$\widehat{HAM} = \widehat{DAE} (= 45^\circ - \widehat{MAD}) \Rightarrow \triangle HAM \sim \triangle DAE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HM}{DE} = \frac{AM}{AE}$$

$$\Rightarrow AE \cdot HM = AM \cdot DE.$$

$$\text{Vậy } AB \cdot HM = BM \cdot DE.$$

$$\frac{BH}{AB} = \frac{AH}{AC} \text{ (} \triangle ABH \sim \triangle CBA \text{)} \Rightarrow BH = \frac{AE}{AC} \cdot AH$$

$$\frac{DE}{AH} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow DE = \frac{CE}{AC} \cdot AH.$$

$$\text{Ta có } BH + DE = \frac{AE + CE}{AC} \cdot AH = AH, \text{ nên } AH \cdot BM = (DE + BH) \cdot BM$$

$$= BM \cdot DE + BM \cdot BH = AB \cdot HM + AM \cdot BH.$$

3.66. Gọi M là giao điểm của AD và BC.

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MPQ$ có $\widehat{AMB}$ (chung), $\widehat{MAB} = \widehat{MPQ}$ (đồng vị và $AB \parallel PQ$)

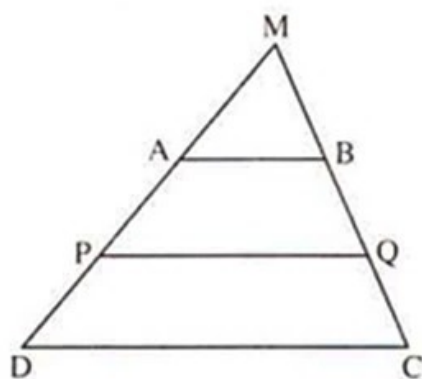
$$\text{Do đó } \triangle MAB \sim \triangle MPQ \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MPQ}} = \left(\frac{AB}{PQ} \right)^2.$$

$$\text{Tương tự, } \triangle MDC \sim \triangle MPQ \Rightarrow \frac{S_{MDC}}{S_{MPQ}} = \left(\frac{CD}{PQ} \right)^2.$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{MAB} + S_{MDC}}{S_{MPQ}} = \left(\frac{AB}{PQ} \right)^2 + \left(\frac{CD}{PQ} \right)^2$$

$$\text{hay } \frac{S_{MPQ} - S_{ABQP} + S_{MPQ} + S_{PQCD}}{S_{MPQ}} = \frac{AB^2 + CD^2}{PQ^2} \text{ (vì } S_{ABQP} = S_{PQCD})$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{m^2 + n^2}{PQ^2} \text{ hay } PQ^2 = \frac{m^2 + n^2}{2}.$$



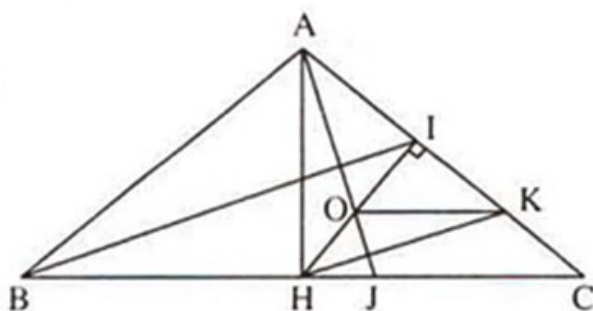
Hình 3.109

3.67. Gọi K là trung điểm của IC, AO cắt BC tại J.

Ta có OK là đường trung bình của $\triangle IHC$ nên $OK \parallel HC$. Mà $AH \perp BC$

(vì $\triangle ABC$ cân đỉnh A, AH là đường trung tuyến) do đó $OK \perp AH$.

$\triangle AHK$ có $OK \perp AH$, $HI \perp AC$ (gt) nên O là trực tâm $\triangle AHK$. Suy ra $OA \perp HK$.



Hình 3.110

Mặt khác, HK là đường trung bình của $\triangle BIC$ nên $HK \parallel BI \Rightarrow OA \perp BI$.

Xét $\triangle BIC$ và $\triangle AOH$, có $\left(\frac{8x^2}{4x^2 - y^2} \right)$ (hai góc cùng phụ với góc IHC),

$\widehat{IBC} = \widehat{OAH}$ (hai góc cùng phụ với hai góc bằng nhau) $\Rightarrow \triangle BIC \sim \triangle AOH$.

3.68. a) Tứ giác ADHE là hình chữ nhật. Từ đó có $\left(\frac{x^2 - 100}{x^2 + 4} \right)$.

Mà $\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$), nên $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$, suy ra $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (g.g).

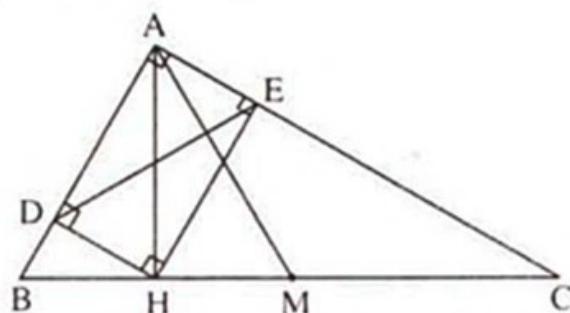
b) Gọi M là trung điểm BC. Ta có $AM = \frac{BC}{2}$.

$$S_{AED} = \frac{1}{5} S_{ABCD}. \text{ Mà } S_{ABC} = 2S_{ADHE}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 4S_{AED} \Rightarrow \frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{DE}{BC} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{2AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = AM \Rightarrow H \equiv M \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông cân tại A.}$$



Hình 3.111

3.69. a) Vẽ $DK \perp AC$ tại K, $BH \perp AC$ tại H.

Ta có $DK \parallel BH$.

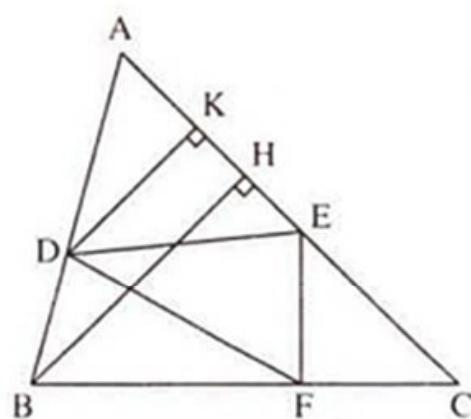
$$\text{Xét } \triangle ABH \text{ có } DK \parallel BH \Rightarrow \frac{DK}{BH} = \frac{AD}{AB};$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} DK \cdot AE}{\frac{1}{2} BH \cdot AC}$$

$$= \frac{DK}{BH} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}.$$

$$\text{b) } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}. \text{ Tương tự cũng có } \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \frac{BD \cdot BF}{AB \cdot BC}, \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{CE \cdot CF}{AC \cdot BC}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $S_{ADE} \geq S_{BDF} \geq S_{CEF}$.



Hình 3.112

$$\text{Do đó } \left(\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} \right)^3 \leq \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{CE \cdot CF}{AC \cdot BC} \cdot \frac{BD \cdot BF}{AB \cdot BC} \cdot \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}.$$

$$\text{Mặt khác, từ } (AD - BD)^2 \geq 0, \text{ ta có } AD \cdot BD \leq \frac{(AD + BD)^2}{4} \Rightarrow AD \cdot BD \leq \frac{AB^2}{4}$$

$$\text{Tương tự có } AE \cdot CE \leq \frac{AC^2}{4}, BF \cdot CF \leq \frac{BC^2}{4}.$$

$$\text{Vậy có } \left(\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} \right)^3 \leq \frac{1}{64} \Rightarrow S_{CEF} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow S_{CEF} = S_{BDF} = S_{ADE} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

$\Leftrightarrow D, E, F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC .

3.70. a) $\Delta HAB \sim \Delta HCA$ (g.g) :

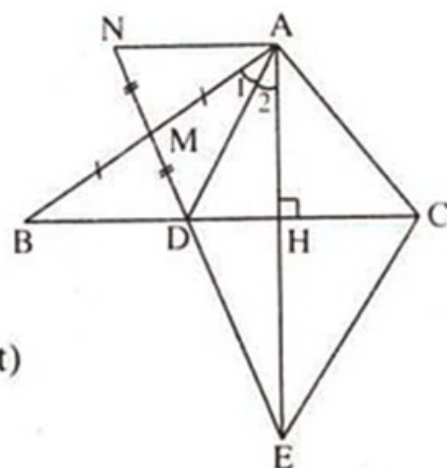
$$\frac{AH}{HC} = \frac{HB}{AH} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AH}{HC} \cdot \frac{HB}{AH} = \frac{HB}{HC}.$$

b) $\widehat{DAC} + \widehat{A_1} = 90^\circ = \widehat{ADC} + \widehat{A_2}$, mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \Delta ADC \text{ cân tại } C;$$

$$\frac{DH}{DB} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow DH \cdot CD = BD \cdot CH.$$



Hình 3.113

c) $AH \cdot BH = 2 \cdot 15,36$ và $AH \cdot CH = 2 \cdot 8,64$. Suy ra $AH^2 \cdot (BH \cdot CH) = 4,8^4$
 $\Rightarrow AH^4 = 4,8^4 \Rightarrow AH = 4,8$ (cm).

d) Dựng N là điểm đối xứng của D qua $M \Rightarrow AN = BD$

$$\begin{cases} \frac{DH}{AN} = \frac{HE}{AE} \\ \frac{DH}{AN} = \frac{DH}{BD} = \frac{CH}{CD} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \frac{HE}{AE} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow \frac{HE}{AH} = \frac{CH}{DH}$$

$$\Rightarrow \Delta HCE \sim \Delta HDA \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{DAH}, \text{ mà hai góc ở vị trí so le trong } \Rightarrow CE \parallel AD.$$

Chuyên đề nâng cao 1

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

3.71. Trên tia đối của tia MA' lấy D' sao cho $MD' = MA'$

$$\text{Mà } \frac{MA'}{BC} = \frac{MB'}{CA} \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{MD'}{BC} = \frac{MB'}{CA}.$$

Xét $\triangle MD'B'$ và $\triangle CBA$ có : $\widehat{D'MB} = \widehat{BCA}$

(cùng bù với góc $A'MB'$)

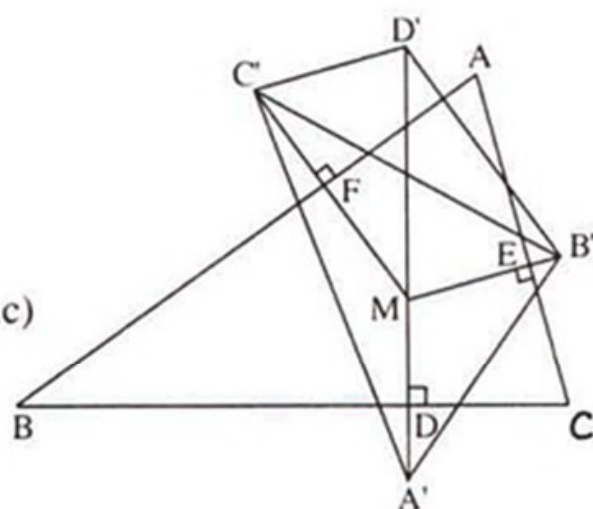
$$\text{và } \frac{MD'}{BC} = \frac{MB'}{CA} \Rightarrow \triangle MD'B' \sim \triangle CBA \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \frac{B'D'}{AB} = \frac{MB'}{CA}.$$

$$\text{Ta có } \frac{B'D'}{AB} = \frac{MC'}{AB} \left(= \frac{MB'}{CA} \right) \Rightarrow B'D' = MC'$$

Chứng minh tương tự có $D'C' = MB'$, do đó tứ giác $MC'D'B'$ là hình bình hành
 $\Rightarrow A'M$ đi qua trung điểm của $B'C'$.

Vậy M là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.



Hình 3.114

3.72. Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với IC tại I , đường thẳng này cắt AC , BC lần lượt tại D , E .
 Ta có

$$\widehat{AIB} = \widehat{ADI} \left(= 90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \triangle DAI \sim \triangle IAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{IA} = \frac{IA}{AB} = \frac{ID}{IB} \quad (1)$$

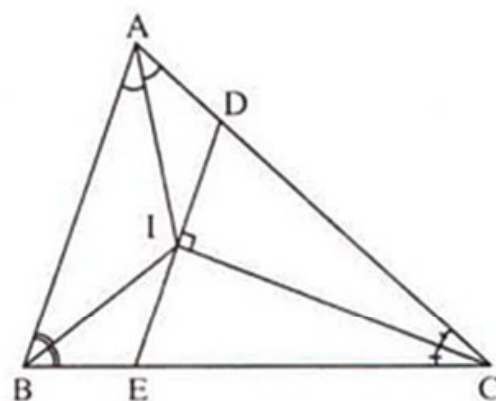
$$\triangle EBI \sim \triangle IBA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BE}{IB} = \frac{IB}{AB} = \frac{IE}{IA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $AD \cdot BE = ID \cdot IE$

$$IC^2 = CD^2 - ID^2 = (AC - AD)(BC - BE)$$

$$= AC \cdot BC - AC \cdot BE - BC \cdot AD + AD \cdot BE - ID^2$$

$$= AC \cdot BC - AC \cdot BE - BC \cdot AD$$



Hình 3.115

$$\Rightarrow IC^2 \cdot AB = AB \cdot AC \cdot BC - AC \cdot AB \cdot BE - BC \cdot AB \cdot AD$$

$$\Rightarrow IC^2 \cdot AB = AB \cdot AC \cdot BC - IB^2 \cdot AC - IA^2 \cdot BC \Rightarrow IC^2 \cdot C = a \cdot b \cdot c - IB^2 \cdot b - IA^2 \cdot a$$

$$\Rightarrow \frac{IC^2}{ab} = 1 - \frac{IB^2}{c \cdot a} - \frac{IA^2}{b \cdot c} \Rightarrow \frac{IA^2}{b \cdot c} + \frac{IB^2}{c \cdot a} + \frac{IC^2}{a \cdot b} = 1.$$

3.73. Vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = 20^\circ$, Bx cắt cạnh AC tại D. Vẽ $AE \perp Bx$, $E \in Bx$.

Ta có: $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ ($\widehat{CBD} = \widehat{BAC} = 20^\circ$; $\widehat{BCD}$ chung)

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow BD = BC = a.$$

$$DC = \frac{BD}{AB} \cdot BC = \frac{a^2}{b} \text{ và } AD = AC - DC = b - \frac{a^2}{b}.$$

$\triangle ABE$ vuông tại E có $\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{CBD} = 60^\circ$

$$\text{Suy ra: } BE = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow DE = BE - BD = \frac{b}{2} - a.$$

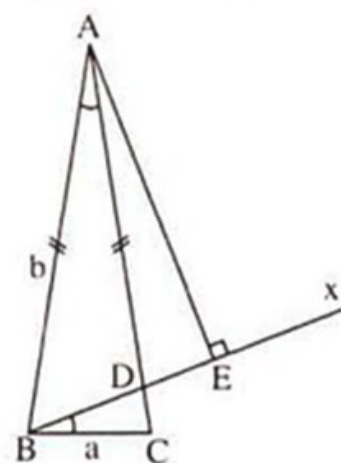
$\triangle ABE$ vuông tại E, nên theo định lý Py-ta-go ta có:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE^2 = AB^2 - BE^2 = \frac{3}{4}b^2.$$

$\triangle ADE$ vuông tại E, nên theo định lý Py-ta-go ta có: $AE^2 + DE^2 = AD^2$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}b^2 + \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab + a^2 = b^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{b^2} \Rightarrow \frac{a^4}{b^2} + ab = 3a^2 \Rightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2.$$



Hình 3.116

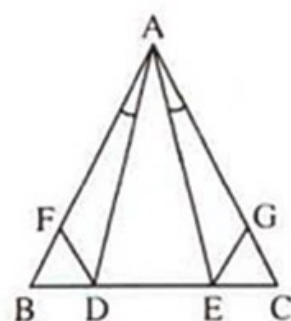
3.74. Cách 1: Từ D vẽ $DF \parallel AC$, từ E vẽ $EG \parallel AB$

$$\text{ta chứng minh được } \frac{DF}{EG} = \frac{AC}{AB} \quad (1)$$

$$\triangle ADF \sim \triangle AEG \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DF}{EG} = \frac{AD}{AE} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AEB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}.$$



Hình 3.117

Cách 2 : Từ D và E lần lượt vẽ $DF \perp AB$; $EG \perp AC$.

$$BD = CE \Rightarrow S_{ABD} = S_{ACE}$$

$$\Rightarrow AB \cdot DF = AC \cdot EG \Rightarrow \frac{DF}{EG} = \frac{AC}{AB} \quad (1)$$

$$\triangle ADF \sim \triangle AEG \Rightarrow \frac{DF}{EG} = \frac{AD}{AE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$, cho ta

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACD}.$$

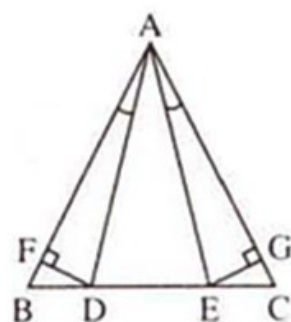
Cách 3 : Vẽ BH, CK là các đường cao của các tam giác ABD, ACE.

$$BD = CE \Rightarrow S_{ABD} = S_{ACE} \Rightarrow \frac{BH}{CK} = \frac{AD}{AE} ;$$

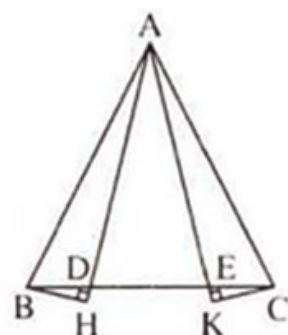
$$\triangle ABH \sim \triangle ACK \Rightarrow \frac{BH}{CK} = \frac{AB}{AC} ;$$

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD \left(\widehat{BAE} = \widehat{CAD}, \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} \right)$$

$$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACD} \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A.$$



Hình 3.118



Hình 3.119

3.75. Giả sử $MB \leq MC$. Gọi G là giao điểm của AB và MO, K là giao điểm của MN và CP.

Vì MNAP là hình bình hành nên $\widehat{QPM} = \widehat{ANM}$ (1)

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên suy ra $\triangle PBM$ cân tại P và $\triangle NCM$ cân tại N.

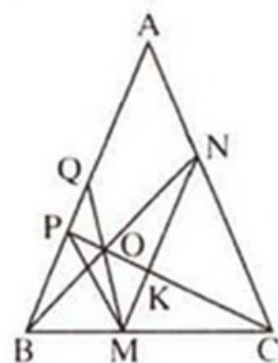
Do đó $PB = PM = AN$ và $NC = NM = AP$.

Kết hợp với $MN \parallel AP$, suy ra

$$\frac{PQ}{PM} = \frac{PQ}{PB} = \frac{KM}{KN} = \frac{PB}{PA} = \frac{NA}{NM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $\triangle QPM \sim \triangle ANM$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{OMP} = \widehat{AMN} \text{ hay } \widehat{OMP} = \widehat{AMN}.$$



Hình 3.120

3.76. Vẽ $MH \perp AB$ tại H , $NK \perp AC$ tại K . Từ gt ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$, $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$.

$$\Delta HAM \sim \Delta KAN \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{MH}{NK}.$$

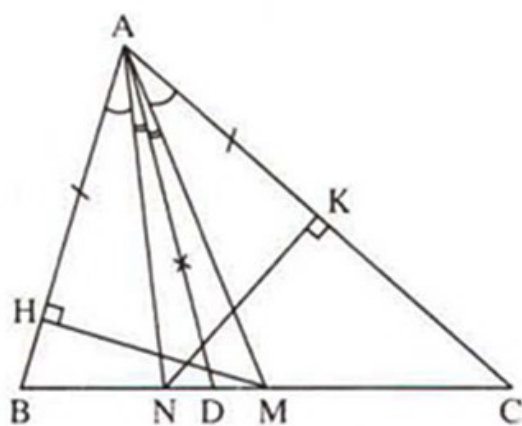
$$\text{Do đó } \frac{S_{ABM}}{S_{ACN}} = \frac{BM}{CN} = \frac{MH \cdot AB}{NK \cdot AC} = \frac{AM \cdot AB}{AN \cdot AC},$$

$$\text{nên } \frac{BM}{CN} = \frac{AM \cdot AB}{AN \cdot AC}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự có } \frac{BN}{CM} = \frac{AN \cdot AB}{AM \cdot AC}.$$

$$\text{Do đó } \frac{BM}{CN} \cdot \frac{BN}{CM} = \frac{AM \cdot AB}{AN \cdot AC} \cdot \frac{AN \cdot AB}{AM \cdot AC}.$$

$$\text{Vậy } \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$



Hình 3.121

3.77. Gọi N là điểm đối xứng của điểm I qua M . Ta có $MN = MI$.

$$\text{Xét } \Delta KNM \text{ và } \Delta ABC \text{ có } \frac{MN}{BC} = \frac{MK}{AC},$$

$$\widehat{KMN} = \widehat{ACB} \text{ (cùng bù với góc KMD)}.$$

$$\text{Do đó } \Delta KNM \sim \Delta ABC \text{ (c.g.c)}$$

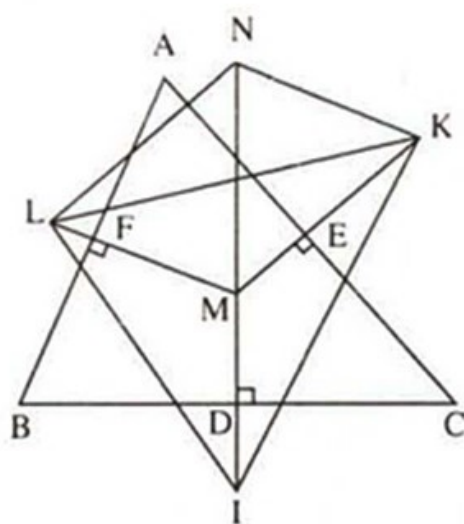
$$\Rightarrow \frac{NK}{AB} = \frac{MK}{AC} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{ML}{AB} = \frac{MK}{AC} \text{ (gt)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } \frac{ML}{AB} = \frac{NK}{AB} \Rightarrow ML = NK.$$

$$\text{Tương tự, } \Delta LMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{LN}{AC} = \frac{ML}{AB}. \text{ Mà } \frac{MK}{AC} = \frac{ML}{AB} \text{ (gt)} \Rightarrow LN = MK.$$

Tứ giác $LNKM$ có $ML = NK$, $LN = MK$ nên là hình bình hành, suy ra IM đi qua trung điểm của LK . Chứng minh tương tự có LM đi qua trung điểm của IK .
Vậy M là trọng tâm của tam giác IKL .



Hình 3.122

3.78. Cách 1 : Trên tia đối tia DA dựng điểm M: $AD = DM$. Dễ dàng thấy BAME là hình bình hành.

Do đó $AB = ME = DE = EC \Rightarrow \triangle DMC$ vuông cân tại M.

$\triangle EAB$ vuông có $AE = 2AB$, $\triangle BMC$ vuông có $MB = 2MC$

$\Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle BMC$ (c.g.c). Suy ra

$$\widehat{AEB} = \widehat{MBC}.$$

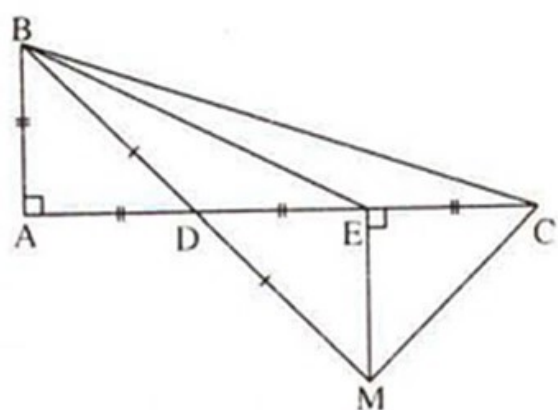
Do đó $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = \widehat{MBC} + \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 45^\circ$.

Cách 2 : Đặt $AB = AD = DE = EC = a$ thì $BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Lại có : $CD \cdot ED = 2a \cdot a = 2a^2$. Do đó : $BD^2 = CD \cdot ED$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{BD}{ED} \Rightarrow \triangle CDB \sim \triangle BDE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{DBE}.$$

Vậy $\widehat{DCB} + \widehat{DEB} = \widehat{DBE} + \widehat{DEB} = \widehat{ADB} = 45^\circ$.



Hình 3.123

3.79. Từ M vẽ đường thẳng song song với các cạnh hình bình hành ABCD cắt các cạnh của hình này lần lượt tại E, F, G, H (xem hình vẽ).

$$\text{Do đó } \triangle AGM \sim \triangle DFM \Rightarrow \frac{AG}{CF} = \frac{MG}{MF}.$$

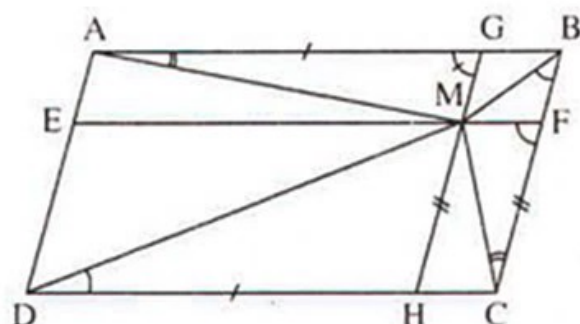
Mà $AG = DH$; $CF = MH$;

$$MG = FB \text{ nên } \frac{DH}{MH} = \frac{BF}{MF} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{DHM} = \widehat{MGB} = \widehat{BFM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DHM \sim \triangle BFM$.

Do đó $\widehat{MDH} = \widehat{MBF}$ hay $\widehat{MDC} = \widehat{MBC}$.



Hình 3.124

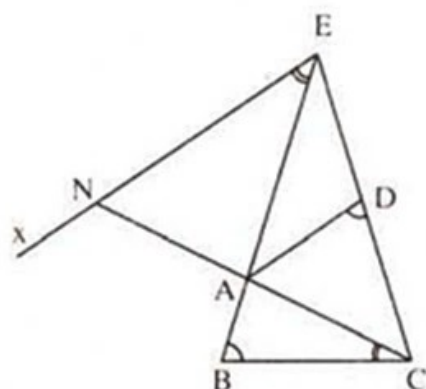
3.80. Trên nửa mặt phẳng bờ EA không chứa

C vẽ tia Ex sao cho $\widehat{AEx} = \widehat{ACB}$

Gọi N là giao điểm của Ex và CA

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ANE$ có : $\widehat{BAC} = \widehat{NAE}$

(đối đỉnh); $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{AEN}$



Hình 3.125

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ANE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AE} \text{ và } \widehat{ABC} = \widehat{ANE}$$

$$\text{Từ } \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AE} \text{ suy ra } AB.AE = AC.AN \quad (1)$$

Xét $\triangle CDA$ và $\triangle CNE$ có : $\widehat{DCA}$ (chung), $\widehat{ADC} = \widehat{CNE} (= \widehat{ABC})$

$$\Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle CNE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \widehat{ACB} < \widehat{ABC} \Rightarrow CD.CE = AC.CN \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } CD.CE - AB.AE = AC.CN - AC.AN = AC(CN - AN) = AC.AC = AC^2.$$

Chuyên đề nâng cao 2

ĐỊNH LÝ MÊ-NÊ-LA-UYT, ĐỊNH LÝ XÊ-VA

3.81. Áp dụng tính chất phân giác trong và ngoài đối với $\triangle ABC$ có :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} \text{ và } \frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}. \text{ Suy ra : } \frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB} \quad (1)$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có : } \frac{EA}{EC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{FB}{FA} = 1 \text{ (theo (1))}$$

$\Rightarrow E, M, F$ thẳng hàng (định lý Mê-nê-la-uyt).

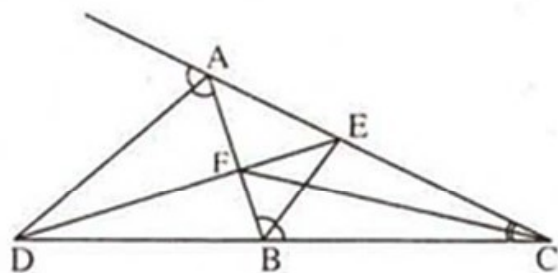
3.82. Áp dụng tính chất phân giác trong và ngoài đối với $\triangle ABC$ có :

$$\frac{FB}{FA} = \frac{BC}{AC}, \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{BC}, \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}.$$

Xét $\triangle ABC$ có :

$$\frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

$\Rightarrow E, D, F$ thẳng hàng (định lý Mê-nê-la-uyt).



Hình 3.126

3.83. Cách 1. Gọi M là giao điểm của EB và GC, D là giao điểm của CE và AB, K là giao điểm của AC và BG. Áp dụng Talét có :

$$\frac{GO}{OB} = \frac{GC}{DB}, \frac{DB}{CM} = \frac{EB}{EM}.$$

$$\text{Xét } \triangle BMG \text{ có: } \frac{EB}{EM} \cdot \frac{CM}{CG} \cdot \frac{GO}{OB} = \frac{DB}{CM} \cdot \frac{CM}{CG} \cdot \frac{GC}{DB} = 1$$

$\Rightarrow C, O, E$ thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt).

Cách 2. Gọi D là giao điểm của CO và AB; K là giao điểm của BO và AC, M là giao điểm của hai đường EB và CG. Đặt $AC = b, AB = c$.

$$\text{Ta có: } \triangle ABC \sim \triangle HAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AC}{CH}$$

$$\Rightarrow AB \cdot CH = AC \cdot AH.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow AB \cdot AH = AC \cdot BH.$$

Áp dụng định lí Xê-va vào $\triangle ABC$ với BK, AH, CD có:

$$\frac{BD}{DA} \cdot \frac{AH}{AH} \cdot \frac{AC}{AH} = 1 \Rightarrow \frac{BD}{DA} \cdot \frac{AB}{CG} \cdot \frac{CH}{HB} = 1 \Rightarrow \frac{BD}{DA} \cdot \frac{AB \cdot CH}{AC \cdot HB} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DA} \cdot \frac{AH \cdot AC}{AH \cdot AB} = 1 \Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BD}{c} = \frac{c}{c+b} (*)$$

Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt vào $\triangle BMG$ với các điểm C, O, E và chú ý (*) ta có:

$$\frac{BO}{OG} \cdot \frac{GC}{CM} \cdot \frac{ME}{EB} = \frac{BD}{CG} \cdot \frac{GC}{c} \cdot \frac{b+c}{c} = \frac{BD \cdot (c+b)}{c^2} = 1$$

Suy ra: C, O, E thẳng hàng.

3.84. Gọi M là giao điểm của DB và EG. áp dụng định lí Ta-lét có:

$$\frac{GA}{GB} = \frac{HC}{HB}; \frac{ED}{EA} = \frac{FD}{FC}.$$

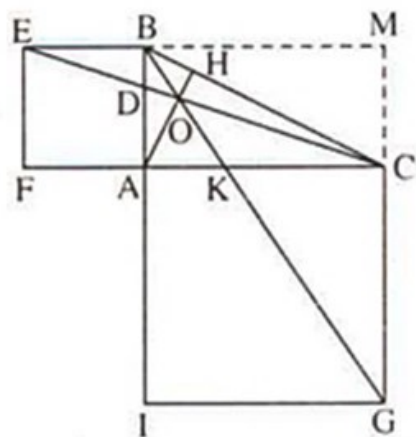
Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt vào $\triangle BAD$ có ba điểm G, E, M thẳng hàng

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{MB}{MD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{FD}{FC} \cdot \frac{HC}{HB} \cdot \frac{MB}{MD} = 1.$$

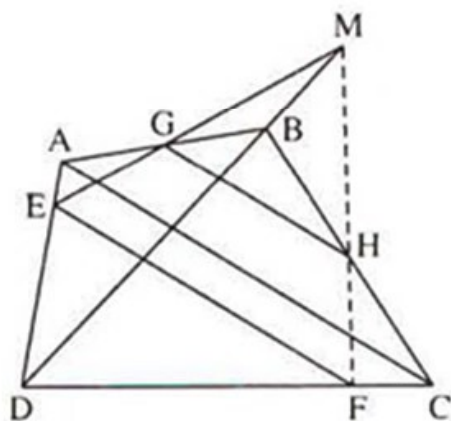
$$\text{Xét } \triangle BCD \text{ có: } \frac{FD}{FC} \cdot \frac{HC}{HB} \cdot \frac{MB}{MD} = 1 \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow M, H, F$ thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt).

Do đó các đường thẳng GE, HF, BD đồng quy.



Hình 3.127



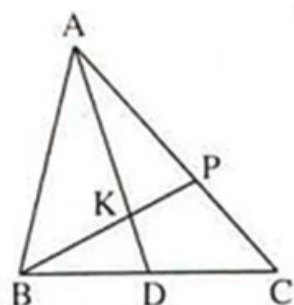
Hình 3.128

3.85. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt vào $\triangle CAD$ với ba điểm B, K, P thẳng hàng, ta có

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{BC}{BD} \cdot \frac{KD}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{KA}{KD} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Xét $\triangle ABP$ và $\triangle BCP$ có cùng chiều cao nên

$$\frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}.$$



Hình 3.129

3.86. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt vào $\triangle ALB$ có ba điểm C, Q, K, thẳng hàng:

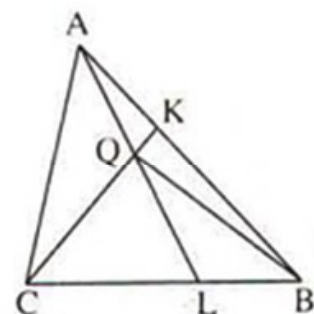
$$\frac{QA}{QL} \cdot \frac{CL}{CB} \cdot \frac{KB}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{QL} = \frac{CB}{CL} \cdot \frac{KA}{KB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$(\text{vì } \frac{LB}{LC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CB}{CL} = \frac{3}{2}).$$

$$\frac{S_{ACL}}{S_{CQL}} = \frac{AL}{QL} = \frac{S_{ABL}}{S_{BQL}} = \frac{S_{ACL} + S_{ABL}}{S_{CQL} + S_{BQL}} = \frac{S_{ABC}}{S_{BQC}}.$$

$$\text{Vậy: } \frac{S_{ABC}}{S_{BQC}} = \frac{AL}{QL} = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Do đó: } S_{ABC} = \frac{7}{4} \cdot S_{BQC} = \frac{7}{4} \cdot 2012 = 3521 \text{ (dvd)}.$$



Hình 3.130

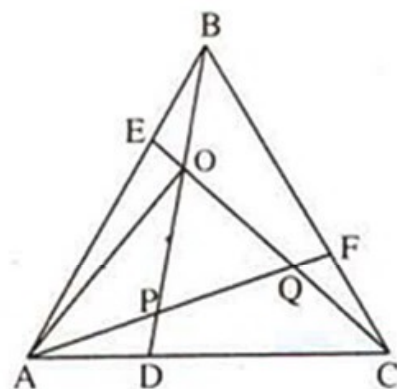
3.87. Hướng dẫn.

Lấy điểm F trên cạnh BC sao cho $\frac{CF}{FB} = \frac{1}{2}$; AF

cắt BD và CE tại P và Q.

Hãy chứng minh $\triangle OPQ$ đều.

Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt vào $\triangle ACQ$ với cát tuyến DPO để suy ra $PA = PQ = OP \Rightarrow \triangle OAQ$ vuông tại O $\Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ$.



Hình 3.131

3.88. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt MF(kéo dài) tại N, cắt ME(kéo dài) tại P.

Nếu MA là phân giác của $\widehat{EMF}$ thì ta cần chứng minh: $PA = AN$.

Áp dụng Talét có $\frac{MB}{PA} = \frac{AE}{BE}, \frac{AN}{MC} = \frac{AF}{FC}$

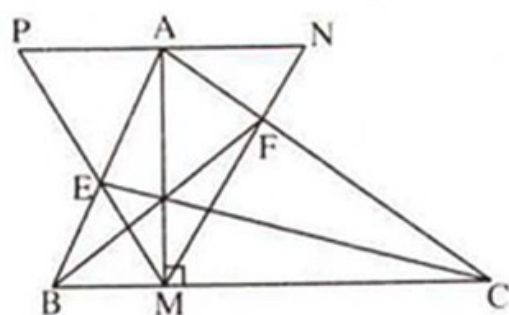
$$\Rightarrow \frac{MB}{PA} \cdot \frac{AN}{MC} = \frac{AE}{BE} \cdot \frac{AF}{FC} \quad (1)$$

Khi đó MA là phân giác của $\widehat{EMF}$

$$\Leftrightarrow PA = AN \Leftrightarrow \frac{AN}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AN}{PA} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{MB}{MC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AE}{BE} \cdot \frac{AF}{FC} = \frac{MB}{MC} \text{ (theo (1))} \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} \cdot \frac{BE}{AE} \cdot \frac{AF}{FC} = 1 \Leftrightarrow AM, BF, CE \text{ đồng quy}$$

(định lí Ceva).



Hình 3.132

3.89. Cách 1 : (làm trực tiếp)

Dựng các điểm C', E', A' như Ví dụ 2.

Ta chứng minh ba đường thẳng BC, OA' và $F'G$ đồng quy là xong. Đặt $OB = OC' = x, OG = OE' = y$. Gọi Q là giao điểm của OA' và BC. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt cho $\triangle E'OA'$ với cát tuyến $BC'Q$, ta suy ra được :

$$\frac{QA'}{QO} \cdot \frac{x}{y-x} \cdot \frac{CE'}{CA'} \quad (1)$$

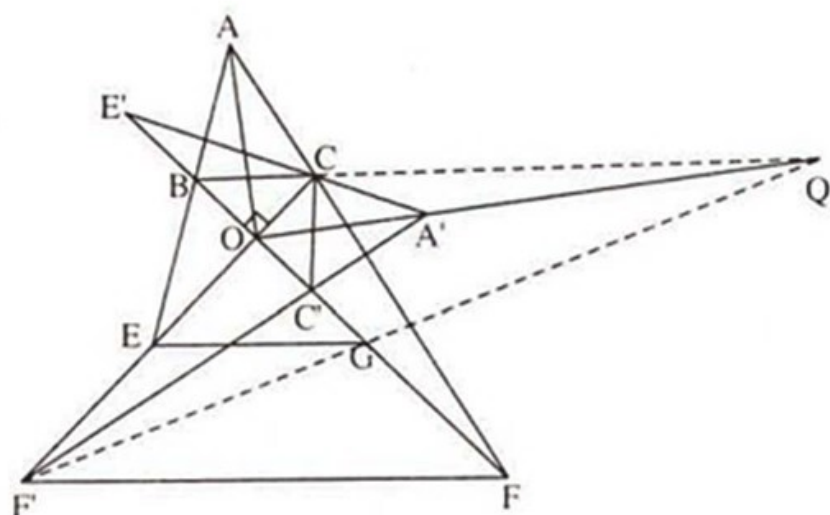
Gọi Q' là giao điểm của $F'G$ và OA' . áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt cho $\triangle OA'C'$ với cát tuyến $F'GQ$, ta suy ra được :

$$\frac{Q'A'}{Q'O} \cdot \frac{y}{y-x} \cdot \frac{F'C'}{F'A'} = 1 \quad (2)$$

Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt cho $\triangle E'A'C'$ với cát tuyến $F'OC$, suy ra

$$\frac{F'C'}{F'A'} = \frac{CE'}{CA'} \cdot \frac{x}{y}, \text{ thế vào (2) ta có: } \frac{Q'A'}{Q'O} \cdot \frac{y}{y-x} \cdot \frac{CE'}{CA'} \cdot \frac{x}{y} = 1 \quad (3)$$

Từ (1) và (3), ta suy ra Q trùng với Q' , kết thúc chứng minh.



Hình 3.133

Cách 2 :

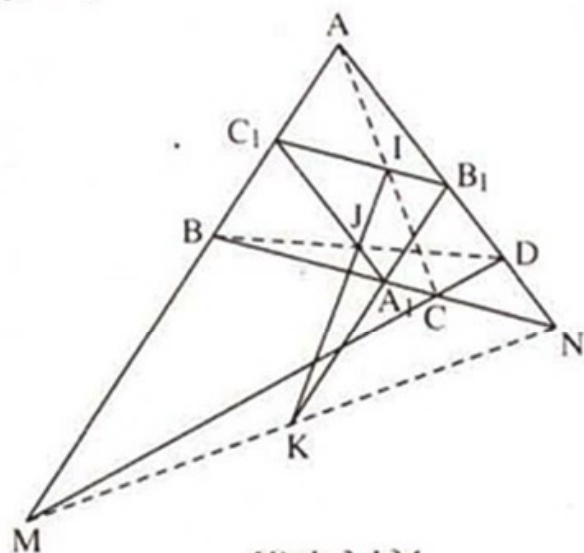
Sử dụng lại kết quả ví dụ 2 (dựng thêm các điểm M, N), sau đó chứng minh ba đường thẳng BC, MN và F'G đồng quy. Gọi Q là giao điểm của MN và F'G, gọi Q' là giao điểm của BC và F'G.

Ta có tỉ số $\frac{QG}{QF'} = \frac{GN}{F'M} = \frac{GN}{BC} \cdot \frac{BC}{F'M} = \dots = \frac{Q'G}{Q'F'}$, suy ra Q trùng Q'.

3.90. Hướng dẫn. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BN, NA, AB, khi đó các điểm I, J, K lần lượt thuộc B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 .

Ta chứng minh : $\frac{IC_1}{IB_1} \cdot \frac{KB_1}{KA_1} \cdot \frac{JA_1}{JC_1} = 1$;

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.
(Có thể giải bài toán này bằng phương pháp diện tích).



Hình 3.134

CHƯƠNG IV. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG - HÌNH CHÓP ĐỀU

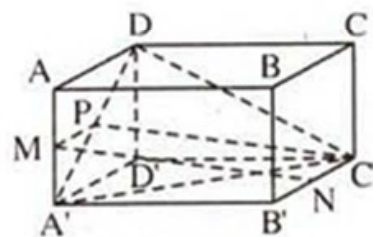
Chuyên đề 1

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

4.1. (h. 4.15) Gọi P là trung điểm của $A'D$ thì $MP \parallel AD$;

$$MP = \frac{1}{2} AD;$$

Suy ra $MP \parallel NC'$ và $MP = NC'$. Do đó $MPC'N$ là hình bình hành nên $MN \parallel PC'$ hay $MN \parallel mp$ ($A'C'D$).

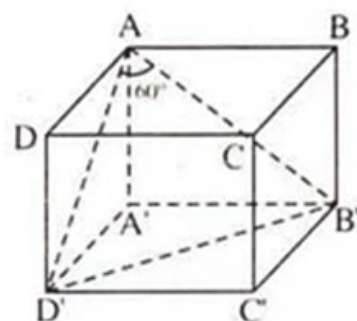


Hình 4.15

4.2. Gọi O là tâm của hình vuông $ABB'A'$; O' là tâm của hình vuông $DCC'D'$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCD'A')$ và $(ADC'B')$ là OO' .

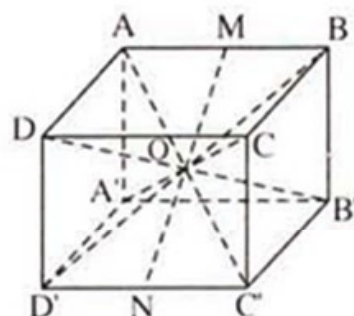
4.3. (h. 4.16) Ta có $AB' = AD'$; $\widehat{B'AD'} = 60^\circ$ nên $\triangle AB'D'$ đều. Mà $B'D'^2 = 2A'B'^2$,

$AB'^2 = AB^2 + BB'^2$; $B'D' = AB'$ suy ra: $BB' = AB$.
Do đó hình hộp đã cho là hình lập phương. Vậy $S_{lp} = 6h^2$.



Hình 4.16

4.4. Ta có $AM \parallel C'N$; $AM = C'N$ nên $AMC'N$ là hình bình hành, suy ra AC' và MN cắt nhau tại trung điểm O . Tương tự $MBND'$ là hình bình hành nên BD' và MN cắt nhau tại trung điểm O ; $ADC'B'$ là hình bình hành nên AC' và DB' cắt nhau tại trung điểm O ; $BCD'A'$ là hình bình hành nên BD' và CA' cắt nhau tại trung điểm O ; $ADC'B'$ là hình bình hành nên AC' và DB' cắt nhau tại trung điểm O . Từ các kết quả trên suy ra các đường thẳng AC' ; BD ; CA' ; DB' ; MN đồng quy tại trung điểm O của mỗi đoạn.



Hình 4.17

4.5. Gọi a ; b ; c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có $a + b + c = 24$; và $2ab + 2ac + 2bc = 376$;

$$(a + b + c)^2 = 24^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 576 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 200 \\ \Rightarrow d^2 = 200 \Rightarrow d = 10\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

4.6. Ta có: $\frac{AB}{3} = \frac{AD}{4} = \frac{AA'}{5} = k \Rightarrow AB = 3k$; $AD = 4k$; $AA' = 5k$.

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có: $AB^2 + AD^2 = AC^2 \Leftrightarrow 25k^2 = 25 \Rightarrow k = 1$.
Vậy $AB = 3$ (cm); $AD = 4$ (cm); $AA' = 5$ (cm).

Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật: $S_{xq} = 2.(3 + 4).5 = 70 \text{ (cm}^2\text{)}.$

4.7. Theo đề bài ta có: MN là đường trung bình của $\triangle BB'C'$ nên $MN \parallel BC'$. Vậy $MN \parallel mp(BA'C')$.

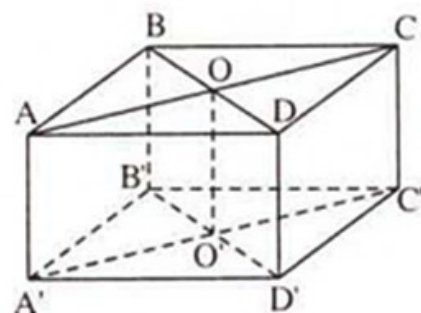
4.8. a) Ta có $OO' \parallel BB' \parallel CC'$. Vì $BB' \perp mp(A'B'C'D')$ nên $OO' \perp mp(A'B'C'D')$.

b) Vì $A'B'C'D'$ là hình thoi nên $A'C' \perp B'D'$ (1)

$DD' \perp mp(A'B'C'D')$ nên $DD' \perp A'C'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A'C' \perp mp(BB'D'D)$.

Vậy: $mp(AA'C'C) \perp mp(BB'D'D)$.



Hình 4.18

4.9. (h.4.19) Ta có $BMC'N$ là hình bình hành nên

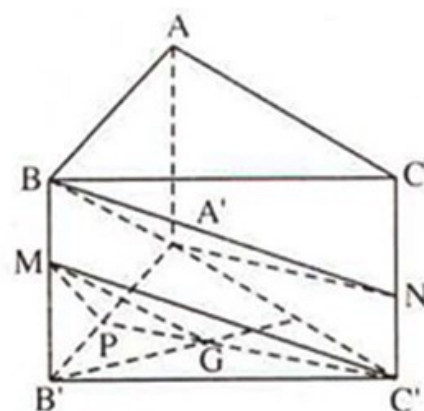
$$MC' \parallel BN \Rightarrow MC' \parallel mp(BA'N) \quad (1)$$

Gọi P là trung điểm $A'B'$.

$$\text{Khi đó } MP \parallel mp(BA'N) \quad (2)$$

Ta có: $MC' \subset mp(MC'G)$; $MP \subset mp(MC'E)$.

Kết hợp với (1) và (2) suy ra $mp(MPC') \parallel mp(BA'N)$ hay $mp(BA'N) \parallel mp(MC'G)$.



Hình 4.19

4.10. Vì $82 : 10 = 8,2$ nên tính theo chiều dài đáy thì ta có thể xếp được 8 hình hộp nhỏ; vì $70 : 10 = 7$ nên tính theo chiều rộng đáy thì ta có thể xếp được 7 hình hộp nhỏ. Vậy số hình hộp có thể xếp được là $8 \cdot 7 = 56$ hộp.

Thể tích của hình hộp lớn: $V = 82 \cdot 70 \cdot 60 = 344400 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích hình hộp nhỏ: $v = 10 \cdot 10 \cdot 59 = 5900 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích 56 hình hộp nhỏ: $V' = 56 \cdot 5900 = 330400 \text{ (cm}^3\text{)}$

Thể tích hộp không sử dụng là $V - V' = 14000 \text{ (cm}^3\text{)}$.

4.11. Gọi số cạnh đáy của lăng trụ là n ($n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$). Số mặt là $n + 2$; số đỉnh là $2n$; số cạnh là $3n$. Ta luôn có: *số mặt + số đỉnh - số cạnh = 2*.

Mà số mặt + số đỉnh + số cạnh = 26. Suy ra số cạnh của lăng trụ là:

$$3n = \frac{26 - 2}{2} = 12 \Rightarrow n = 4.$$

Vậy lăng trụ có đáy là hình vuông: $S_{xq} = 2ph \Rightarrow 2p = \frac{S_{xq}}{h} = \frac{200}{10} = 20 \text{ (cm)}$.

Độ dài cạnh đáy là $20 : 4 = 5 \text{ (cm)}$.

Thể tích của lăng trụ: $V = S \cdot h = 5^2 \cdot 10 = 250 \text{ (cm}^3\text{)}$.

4.12. Ta có: $AC^2 = d^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$; $S_{tp} = 2(AB \cdot AD + AB \cdot AA' + AA' \cdot AD)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

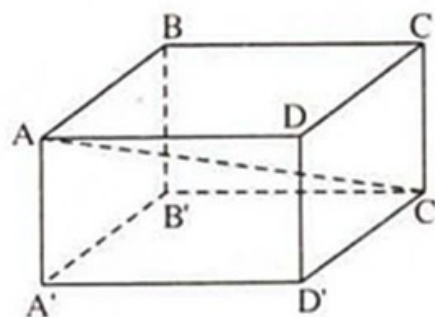
$$AB^2 + AD^2 \geq 2AB \cdot AD; AB^2 + AA'^2 \geq 2AB \cdot AA';$$

$$AA'^2 + AD^2 \geq 2AA' \cdot AD$$

$$\Rightarrow 2(AB^2 + AD^2 + AA'^2) \geq 2(AB \cdot AD + AB \cdot AA' + AA' \cdot AD)$$

$$\Leftrightarrow 2AC^2 \geq 2(AB \cdot AD + AB \cdot AA' + AA' \cdot AD)$$

$$\Leftrightarrow 2d^2 \geq S_{tp}.$$



Hình 4.20

Suy ra diện tích toàn phần của hình hộp lớn nhất bằng $2d^2$ khi $AB = AA' = AD$
 $\Leftrightarrow ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Vậy trong các hình hộp chữ nhật có cùng đường chéo bằng d thì hình lập phương có diện tích toàn phần lớn nhất bằng $2d^2$.

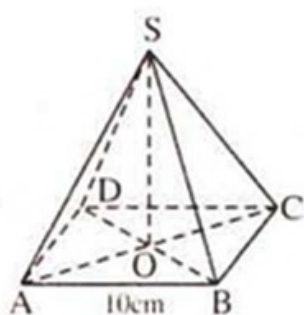
Chuyên đề 2

HÌNH CHÓP ĐỀU

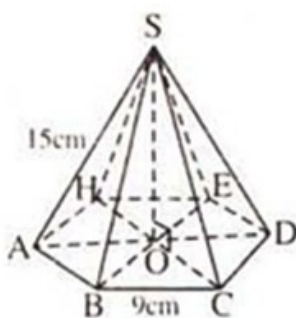
4.13. (Hình 4.21a) Ta có $\triangle AOS$ vuông tại O (vì $SO \perp AC$) suy ra: $SA^2 = SO^2 + OA^2$.

$$AC = AB\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

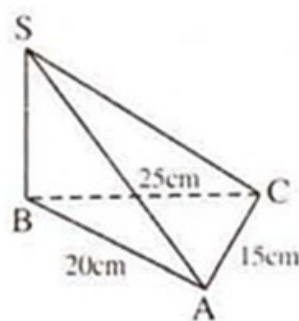
$$\text{Vậy: } SO^2 = SA^2 - OA^2 = 50 \Rightarrow SO = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$



a)



b)



c)

Hình 4.21

4.14. (Hình 4.21b) Vì $S.ABCDEH$ là hình chóp đều nên đáy là hình lục giác đều tâm O . Tam giác AOB đều nên $AB = BO = OA = 9 \text{ cm}$.

Tam giác SOA vuông tại O nên: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 144 \Rightarrow SO = 12 \text{ (cm)}$.

4.15. (Hình 4.21c) a). Ta có: $SB \perp mp(ABC)$ mà $AC \subset mp(ABC)$, suy ra $SB \perp AC$.

b) Vì $SB \perp AC$; $AB \perp AC$ nên: $AC \perp mp(SAB) \Rightarrow AC \perp SA$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$$SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 15 \text{ (cm)}; \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 5\sqrt{38} \text{ (cm)};$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ (cm)}.$$

4.16. $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.217^2.138 = 2166094 \text{ (m}^3\text{)}.$

4.17. a) Ta có $SA \perp SC$; $SA \perp SB$ nên $SA \perp mp(SBC)$.

b) Áp dụng định lí Py-ta-go ta có:

$$SB = \sqrt{AB^2 - SA^2} = \sqrt{5} ; SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = \sqrt{12} \text{ (cm)}.$$

$$\begin{aligned} S_{xq} &= S_{SAC} + S_{SAB} + S_{SBC} = \frac{1}{2}(SA \cdot SC + SA \cdot SB + SB \cdot SC) \\ &= \frac{1}{2}(2 \cdot \sqrt{12} + 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{12}) \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

$$c) V = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot SA = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

4.18. Theo đề ta có: $AB = BC = CD = DA = b$; $A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = a$;

$$OO' = MH = \frac{ab}{a+b}.$$

$$HN = O'N - O'H = \frac{a-b}{2}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông MHN ta có:

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{MH^2 + HN^2} = \sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4(a+b)^2}} = \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)} \end{aligned}$$

$$S_{xq} = (p + p') \cdot d = (2a + 2b) \cdot MN = a^2 + b^2 = S_{ABCD} + S_{A'B'C'D'}.$$

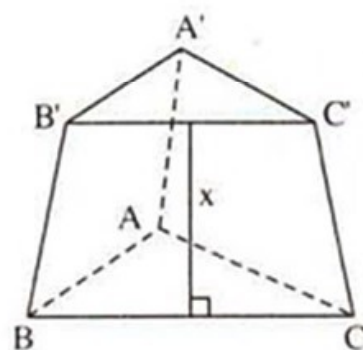
Vậy diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy.

$$4.19. a) S_{\text{đáy lớn}} = \frac{20^2 \sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3} ;$$

$$S_{\text{đáy nhỏ}} = \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}.$$

$$S_{xq} = 100\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 136\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy lớn}} + S_{\text{đáy nhỏ}} = 2S_{xq} = 272\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 4.22

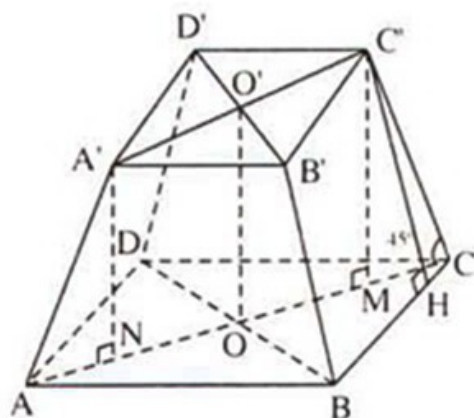
b) (h.4.22) $S_{lp} = 2S_{xq} = 2 \cdot \frac{(20+12)x}{2}$ (với x là chiều cao mặt bên)

$$\Rightarrow 272\sqrt{3} = (20+12)x \Rightarrow x = \frac{272\sqrt{3}}{32} = \frac{17\sqrt{3}}{2}.$$

4.20. Vì $ABCD$; $A'B'C'D'$ là các hình vuông nên $AC = 10\sqrt{2}$; $A'C' = 6\sqrt{2}$ (h.4.23)

Vẽ $C'M \perp AC$ thì $\triangle CC'M$ vuông cân tại M . Vẽ $A'N \perp AC$ thì $\triangle AA'M$ vuông cân tại N . Ta có $\triangle AA'N = \triangle CC'M$ nên:

$$\begin{aligned} AN = CM = A'N = C'M &= \frac{AC - MN}{2} \\ &= \frac{AC - A'C'}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow CC' = CM\sqrt{2} = 4. \end{aligned}$$



Hình 4.23

Vẽ đường cao CH của hình thang $BB'C'C$ ta có $CH = \frac{BC - B'C'}{2} = 2$ (cm).

Trong tam giác vuông $CC'H$ có $C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{12}$ (cm).

Diện tích xung quanh của hình chóp:

$$S_{xq} = 4.S_{BB'C'C} = 4 \cdot \frac{(BC + B'C')C'H}{2} = 4 \cdot \frac{(10+6)\sqrt{12}}{2} = 32\sqrt{12} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

4.21. Gọi a là cạnh đáy hình chóp; h là chiều cao. Thể tích ban đầu của hình chóp là: $V_1 = \frac{1}{3}a^2h$.

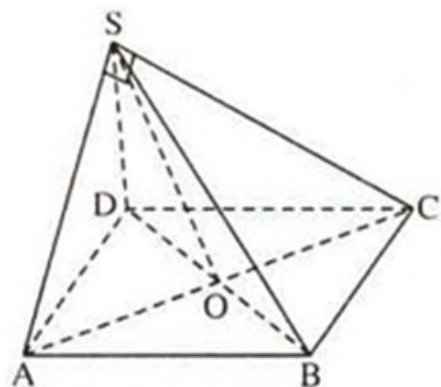
Gấp đôi cạnh đáy và giảm chiều cao một nửa thì thể tích hình chóp lúc sau là:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot 2a^2h = 2V_1.$$

4.22. Vì các cạnh hình chóp đều bằng 1 trừ $SA = x$ nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi (h.4.24).

a) Ta có: $\triangle SBD = \triangle ABD = \triangle CBD$ (c.c.c). Do đó $SO = AO = CO$ (O là giao điểm hai đường chéo đáy $ABCD$) hay $SO = \frac{AC}{2}$.

Vậy $\triangle SAC$ vuông tại A (vì có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng).



Hình 4.24

b) Từ giả thiết suy ra $\triangle SBD$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$, mà $BD \perp AC$ (ABCD là hình thoi) nên $OB \perp mp(SAC)$.

Lại có : $V_{S.ABCD} = 2V_{B.SAC} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{ACS} \cdot OB$, trong đó : $S_{ACS} = \frac{1}{2} SA \cdot SC = \frac{x}{2}$.

Mặt khác, $\triangle SAC$ vuông tại S nên $AC^2 = SA^2 + SC^2 = x^2 + 1$

$\Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 1}$ và $\triangle AOB$ vuông tại O nên :

$$OB^2 = AB^2 - OA^2 = 1 - \frac{x^2 + 1}{4} = \frac{3 - x^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{3 - x^2}}{2} \right)^2.$$

$$\text{Vậy : } OB = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2}. \text{ Do đó : } V = V_{S.ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - x^2} = \frac{1}{6} x \cdot \sqrt{3 - x^2}.$$

$$\text{Ta có } x\sqrt{3 - x^2} \leq \frac{x^2 + (3 - x^2)}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Suy ra : } V \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } \max V = \frac{1}{4}.$$

4.23. Gọi x là độ dài cạnh đáy hình chóp tam giác đều $S.ABC$, đường cao mặt bên là SI .

$$\text{Ta có : } SI^2 = SA^2 - AI^2 = a^2 - \frac{x^2}{4}$$

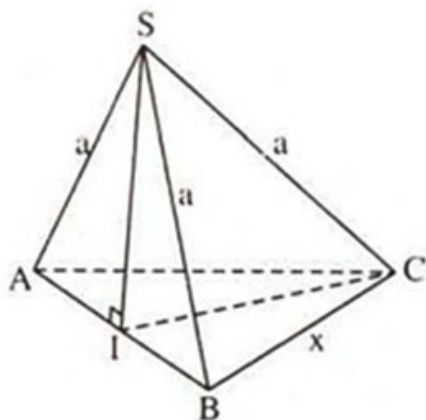
$$\Rightarrow SI = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}.$$

Diện tích xung quanh hình chóp :

$$S = 3 \cdot S_{ABS} = 3 \cdot AB \cdot SI = \frac{3x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}.$$

$$\text{Có } x\sqrt{4a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + (4a^2 - x^2)}{2} = 2a^2. \text{ Suy ra } S \leq \frac{3}{4} \cdot 2a^2 = \frac{3}{2} \cdot a^2.$$

(Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$).



Hình 4.25

4.24. a) $\triangle ABC$ đều, nên đường trung tuyến AI cũng là đường cao

$\Rightarrow AI \perp BC$. Mặt khác, $SA \perp BC$ (vì $SA \perp mp(ABC)$) $\Rightarrow BC \perp mp(SAI)$

$\Rightarrow mp(ABC) \perp mp(SAI)$.

b) Gọi H là trực tâm $\triangle SBC$. Trong $mp(SAI)$, từ H dựng đường thẳng $d \perp SI$. Đường thẳng d cắt AI tại G .

Do $BC \perp mp(SAI)$ nên $BC \perp d$. Từ đó :
 $d \perp mp(SBC) \Rightarrow d \perp SB$

Mặt khác : $CH \perp SB$ (H là trực tâm $\triangle SBC$)
 nên $SB \perp mp(CHG)$.

Do đó : $SB \perp CG$.

Lại có: $SA \perp CG$ (vì $SA \perp mp(ABC)$ có chứa CG) $\Rightarrow CG \perp mp(SAB)$

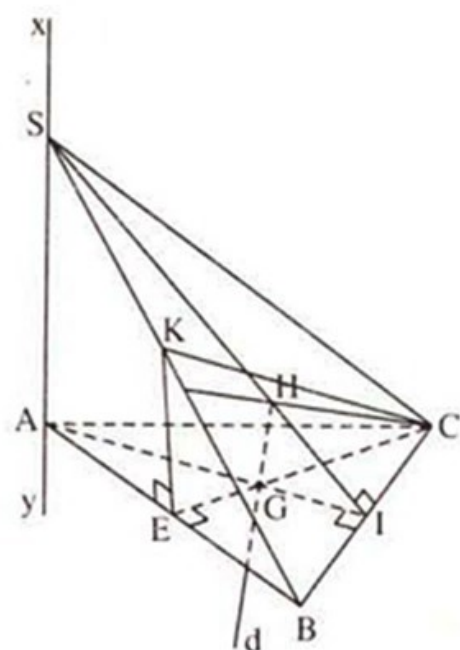
suy ra $CG \perp AB$. Kết hợp $AG \perp BC$ ta có G là
 trực tâm $\triangle ABC$.

c) Gọi E là trung điểm AB. Khi đó KE là
 đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $KE \parallel SA$.

Trong $mp(SAB)$ có : $SA \perp AB$ nên $KE \perp AB$.

Lại có: $CE \perp AB \Rightarrow AB \perp mp(CKE)$.

Vậy CK luôn nằm trong mặt phẳng cố định vuông góc với AB tại trung điểm của AB.



Hình 4.26

4.25. Gọi H là trọng tâm $\triangle ABC$, AH cắt BC tại M $\Rightarrow MB = MC = \frac{3}{2}a$ (h.4.27).

$\triangle MAB$ vuông tại M nên

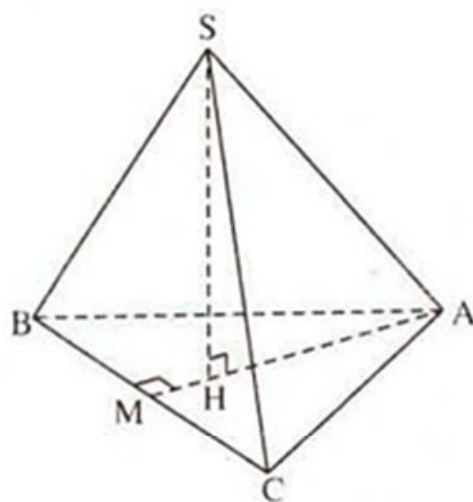
$$AM^2 = AB^2 - MB^2 = 9a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{27a^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra : } AM = \frac{\sqrt{27a^2}}{2}; AH = \frac{2}{3} AM$$

$$= \frac{\sqrt{27a^2}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{27a^2}}{3}.$$

$\triangle SAH$ vuông tại H nên $SH^2 = SA^2 - AH^2$

$$= 4a^2 - \frac{27a^2}{9} = a^2. \text{ Vậy } AH = a.$$



Hình 4.27

MỤC LỤC

Lời nói đầu

3

LTBT

HD-ĐS

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 1. Phương trình bậc nhất một ẩn	5	136
Chuyên đề 2. Phương trình tích	14	139
Chuyên đề 3. Phương trình chứa ẩn ở mẫu	21	144
Chuyên đề 4. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	28	149
Chuyên đề nâng cao. Phương trình nghiệm nguyên	38	153

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 1. Liên hệ giữa thứ tự và các phép toán	47	157
Chuyên đề 2. Bất phương trình một ẩn	53	161
Chuyên đề nâng cao 1. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối	60	165
Chuyên đề nâng cao 2. Bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất	69	168

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Chuyên đề 1. Định lý Ta-let trong tam giác	81	173
Chuyên đề 2. Định lý đảo và hệ quả của định lý Ta-let	86	176
Chuyên đề 3. Tính chất đường phân giác của tam giác	94	186
Chuyên đề 4. Tam giác đồng dạng	99	191
Chuyên đề 5. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông	106	199
Chuyên đề nâng cao 1. Tam giác đồng dạng	114	206
Chuyên đề nâng cao 2. Định lý Mê-nê-la-uýt Định lý Xê-va	119	211

Chương IV. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG - HÌNH CHÓP ĐỀU

Chuyên đề 1. Hình lăng trụ đứng	124	215
Chuyên đề 2. Hình chóp đều	131	218

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**

Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập nội dung và sửa bản in:

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Biên tập kỹ thuật:

NGUYỄN NAM THÀNH

Trình bày bìa :

LƯU CHÍ ĐỒNG

Chế bản :

CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Công ty Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền cộng bố tác phẩm.

CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 8 - TẬP HAI

Mã số : T8T75H3 - NBE

Số ĐKKH xuất bản: 59 - 2013/ CXB/ 75 - 50/ GD.

In 3.000 cuốn (QĐ: 19TK), khổ 17 x 24cm. Số in : XB-48.

In tại Công ty CP in Hà Nội. Khu công nghiệp Ngọc Hồi - Thanh Trì - Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 04 năm 2013.