

TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN

I. Mục tiêu

Sau khi học xong chuyên đề học sinh có khả năng:

1. Biết vận dụng tính chất chia hết của số nguyên để chứng minh quan hệ chia hết, tìm số dư và tìm điều kiện chia hết.
2. Hiểu các bước phân tích bài toán, tìm hướng chứng minh
3. Có kĩ năng vận dụng các kiến thức được trang bị để giải toán.

II. Các tài liệu hỗ trợ:

- Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8
- Toán nâng cao và các chuyên đề đại số 8
- Bồi dưỡng toán 8
- Nâng cao và phát triển toán 8

- ...

III. Nội dung

1. Kiến thức cần nhớ

1. Chứng minh quan hệ chia hết

Gọi $A(n)$ là một biểu thức phụ thuộc vào n ($n \in \mathbb{N}$ hoặc $n \in \mathbb{Z}$)

a/ Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho m ta phân tích $A(n)$ thành tích trong đó có một thừa số là m

+ Nếu m là hợp số ta phân tích m thành tích các thừa số đôi một nguyên tố cùng nhau rồi chứng minh $A(n)$ chia hết cho tất cả các số đó

+ Trong k số liên tiếp bao giờ cũng tồn tại một số là bội của k

b/. Khi chứng minh $A(n)$ chia hết cho n ta có thể xét mọi trường hợp về số dư khi chia m cho n

* Ví dụ 1:

C/mình rằng $A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$ chia hết cho 5040 với mọi số tự nhiên n

Giải:

Ta có $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = n \cdot [n^2(n^2 - 7)^2 - 36] = n \cdot [n \cdot (n^2 - 7) - 6] \cdot [n \cdot (n^2 - 7) + 6]$$
$$= n \cdot (n^3 - 7n - 6) \cdot (n^3 - 7n + 6)$$

$$\text{Ta lại có } n^3 - 7n - 6 = n^3 + n^2 - n^2 - 7n - 6 = n^2 \cdot (n+1) - n(n+1) - 6(n+1)$$

$$= (n+1)(n^2 - n - 6) = (n+1)(n-2)(n+3)$$

$$\text{Tương tự: } n^3 - 7n + 6 = (n-1)(n-2)(n+3)$$

$$\text{Do đó } A = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Ta thấy : A là tích của 7 số nguyên liên tiếp mà trong 7 số nguyên liên tiếp:

- Tồn tại một bội số của 5 (nên $A : 5$)
- Tồn tại một bội của 7 (nên $A : 7$)
- Tồn tại hai bội của 3 (nên $A : 9$)
- Tồn tại 3 bội của 2 trong đó có bội của 4 (nên $A : 16$)

Vậy A chia hết cho 5, 7, 9, 16 đôi một nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow A : 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16 = 5040$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì :

a/ $a^3 - a$ chia hết cho 3

b/ $a^5 - a$ chia hết cho 5

Giải:

a/ $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$ là tích của các số nguyên liên tiếp nên tích chia hết cho 3

b/ $A = a^5 - a = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)$

- Cách 1:

Ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia a cho 5

- Nếu $a = 5k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $A : 5$ (1)
- Nếu $a = 5k \pm 1$ thì $a^2 - 1 = (5k \pm 1)^2 - 1 = 25k^2 \pm 10k : 5 \Rightarrow A : 5$ (2)
- Nếu $a = 5k \pm 2$ thì $a^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5 \Rightarrow A : 5$ (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow A : 5, \forall n \in \mathbb{Z}$

Cách 2:

Phân tích A thành một tổng của hai số hạng chia hết cho 5 :

+ Một số hạng là tích của 5 số nguyên liên tiếp

+ Một số hạng chứa thừa số 5

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } a^5 - a &= a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a^2 - 1)(a^2 - 4 + 5) = a(a^2 - 1)(a^2 - 4) + 5a(a^2 - 1) \\ &= a(a-1)(a+1)(a+2)(a-2) - 5a(a^2 - 1) \end{aligned}$$

Mà $a(a-1)(a+1)(a+2)(a-2) : 5$ (tích của 5 số nguyên liên tiếp)

$$5a(a^2 - 1) : 5$$

Do đó $a^5 - a : 5$

* Cách 3: Dựa vào cách 2: Chứng minh hiệu $a^5 - a$ và tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 5.

Ta có:

$$a^5 - a - (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) = a^5 - a - (a^2 - 4)a(a^2 - 1) = a^5 - a - (a^3 - 4a)(a^2 - 1)$$

$$= a^5 - a - a^5 + a^3 + 4a^3 - 4a = 5a^3 - 5a : 5$$

$$\Rightarrow a^5 - a - (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) : 5$$

$$\text{Mà } (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) : 5 \quad \Rightarrow a^5 - a : 5 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} a^5 - a - (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) : 5 \\ a^5 - a - (a^3 - 4a)(a^2 - 1) \end{matrix}} \right\} \text{(Tính chất chia hết của một hiệu)}$$

c/ Khi chứng minh tính chia hết của các lũy thừa ta còn sử dụng các hằng đẳng thức:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (\text{HĐT 8})$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (\text{HĐT 9})$$

- Sử dụng tam giác Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 & & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

.....

Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 1

Mỗi số trên một dòng (kể từ dòng thứ 2) đều bằng số liền trên cộng với số bên trái của số liền trên.

Do đó: Với $\forall a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$:

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ ($a \neq b$)

$a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia hết cho $a + b$ ($a \neq -b$)

$(a+b)^n = Bsa + b^n$ (BSa: Bội số của a)

$$(a+1)^n = Bsa + 1$$

$$(a-1)^{2n} = Bsa + 1$$

$$(a-1)^{2n+1} = Bsa - 1$$

* VD3: CMR với mọi số tự nhiên n, biểu thức $16^n - 1$ chia hết cho 17 khi và chỉ khi n là số chẵn.

Giải:

+ Cách 1: - Nếu n chẵn: $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ thì:

$$A = 16^{2k} - 1 = (16^2)^k - 1 \text{ chia hết cho } 16^2 - 1 \text{ (theo nhị thức Niu Tơn)}$$

$$\text{Mà } 16^2 - 1 = 255 : 17. \text{ Vậy } A : 17$$

- Nếu n lẻ thì : $A = 16^n - 1 = 16^n + 1 - 2$ mà n lẻ thì $16^n + 1 : 16 + 1 = 17$ (HĐT 9)

$\Rightarrow A$ không chia hết cho 17

+ Cách 2: $A = 16^n - 1 = (17 - 1)^n - 1 = BS17 + (-1)^n - 1$ (theo công thức Niu Tơn)

- Nếu n chẵn thì $A = BS17 + 1 - 1 = BS17$ chia hết cho 17

- Nếu n lẻ thì $A = BS17 - 1 - 1 = BS17 - 2$ Không chia hết cho 17
 Vậy biểu thức $16^n - 1$ chia hết cho 17 khi và chỉ khi n là số chẵn, $\forall n \in \mathbb{N}$
 d/ Ngoài ra còn dùng phương pháp phản chứng, nguyên lý Dirichle để chứng minh quan hệ chia hết.

• VD 4: CMR tồn tại một bội của 2003 có dạng: 2004 2004....2004

Giải: Xét 2004 số: $a_1 = 2004$

$$a_2 = 2004 \ 2004$$

$$a_3 = 2004 \ 2004 \ 2004$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{2004} = 2004 \ 2004 \dots 2004$$

$$2004 \text{ nhóm } 2004$$

Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2003.

Gọi hai số đó là a_m và a_n ($1 \leq n < m \leq 2004$) thì $a_m - a_n : 2003$

Ta có: $a_m - a_n = 2004 \ 2004 \dots\dots 2004 \ 000 \dots 00$

$$\begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}}_{m-n \text{ nhóm } 2004} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{4n} \\ \text{hay } a_m - a_n = 2004 \ 2004 \dots\dots 2004 \cdot 10^{4n} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{m-n \text{ nhóm } 2004} \\ \text{mà } a_m - a_n : 2003 \text{ và } (10^{4n}, 2003) = 1 \\ \text{nên } \underbrace{2004 \ 2004 \dots\dots 2004}_{m-n \text{ nhóm } 2004} : 2003 \end{array}$$

2. Tìm số dư

* VD1: Tìm số dư khi chia 2^{100}

a/ cho 9

b/ cho 25

Giải:

a/ Luỹ thừa của 2 sát với bội của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$

Ta có : $2^{100} = 2 \cdot 2^{99} = 2 \cdot (2^3)^{33} = 2(9 - 1)^{33} = 2(BS9 - 1)$ (theo nhị thức Niu Tơn)
 $= BS9 - 2 = BS9 + 7$

Vậy 2^{100} chia cho 9 dư 7

b/ Luỹ thừa của 2 gần với bội của 25 là $2^{10} = 1024 = 1025 - 1$

Ta có:

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = (1025 - 1)^{10} = BS \ 1025 + 1 = BS \ 25 + 1 \text{ (theo nhị thức Niu Tơn)}$$

Vậy 2^{100} chia cho 25 dư 1

* VD2: Tìm 4 chữ số tận cùng của 5^{1994} khi viết trong hệ thập phân

Giải:

- Cách 1: Ta có: $1994 = 4k + 2$ và $5^4 = 625$

Ta thấy số tận cùng bằng 0625 khi nâng lên lũy thừa nguyên dương bất kì vẫn tận cùng bằng 0625

$$\text{Do đó: } 5^{1994} = 5^{4k+2} = (5^4)^k \cdot 5^2 = 25 \cdot (0625)^k = 25 \cdot (\dots 0625) = \dots 5625$$

- Cách 2: Tìm số dư khi chia 5^{1994} ch 10000 $= 2^4 \cdot 5^4$

Ta thấy $5^{4k} - 1 = (5^4)^k - 1^k$ chia hết cho $5^4 - 1 = (5^2 + 1)(5^2 - 1) : 16$

Ta có $5^{1994} = 5^6(5^{1988} - 1) + 5^6$ mà $5^6 : 5^4$ và $5^{1988} - 1 = (5^4)^{497} - 1$ chia hết cho 16

$$\Rightarrow (5^{1994})^3 \cdot 5^6(5^{1988} - 1) \text{ chia hết cho } 10000 \text{ còn } 5^6 = 15625$$

$$\Rightarrow 5^{1994} = BS10000 + 15625 \Rightarrow 5^{1994} \text{ chia cho } 10000 \text{ dư } 15625$$

Vậy 4 chữ số tận cùng của 5^{1994} là 5625

3. Tìm điều kiện chia hết

* VD1: Tìm số nguyên n để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B:

$$A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2; B = n^2 - n$$

Giải:

$$\begin{array}{r|l} n^3 + 2n^2 - 3n + 2 & n^2 - n \\ n^3 - n^2 & \underline{n + 3} \\ \hline 3n^2 - 3n + 2 & \\ 3n^2 - 3n & \underline{2} \\ \hline & 2 \end{array}$$

Ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n^2 - n)(n + 3) + \frac{2}{n^2 - n}$

Do đó Giá trị của A chia hết cho giá trị của B $\Leftrightarrow n^2 - n \in U(2)$

$$\Leftrightarrow 2 \text{ chia hết cho } n(n - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \text{ chia hết cho } n$$

Ta có bảng:

n	1	-1	2	-2
n - 1	0	-2	1	-3
n(n - 1)	0	2	2	6
	Loại	T/m	T/m	Loại

Vậy với $n = -1, n = 2$ thì giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B

• VD 2: Tìm số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Giải:

$$n^5 + 1 : n^3 + 1 \Leftrightarrow n^5 + n^2 - n^2 + 1 : n^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : n^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1$$

Hay $n^2 - n : n^2 - n + 1$

$$\Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$+ n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow n = 0, n = 1 \text{ thử lại thấy t/m đề bài}$$

$$+ n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thoả mãn}$$

• VD 3: Tìm số tự nhiên n sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7

Giải:

Ta có lũy thừa của 2 gần với bội của 7 là $2^3 = 8 = 7 + 1$

- Nếu $n = 3k (k \in \mathbb{N})$ thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = (2^3)^k - 1 = 8^k - 1^k : 8 - 1 = 7$

Nếu $n = 3k + 1 (k \in \mathbb{N})$ thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 8^k \cdot 2 - 1 = 2(8^k - 1) + 1$

$$= 2 \cdot \text{BS}7 + 1$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 \text{ không chia hết cho } 7$$

- Nếu $n = 3k + 2 (k \in \mathbb{N})$ thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4 \cdot 2^{3k} - 1$

$$= 4(8^k - 1) + 3 = 4 \cdot \text{BS}7 + 3$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 \text{ không chia hết cho } 7$$

Vậy $2^n - 1 : 7 \Leftrightarrow n = 3k (k \in \mathbb{N})$

2. Bài tập

Bài 1: Chứng minh rằng:

a/ $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết ch 48 với mọi số n chẵn

b/ $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi số n lẻ

Giải

$$a/ n^3 + 6n^2 + 8n = n(n^2 + 6n + 8) = n(n^2 + 4n + 2n + 8) = n[n(n + 4) + 2(n + 4)] \\ = n(n+2)(n + 4)$$

Với n chẵn, $n = 2k$ ta có:

$$n^3 + 6n^2 + 8n = 2k(2k + 2)(2k + 4) = 8.k.(k + 1)k + 2) : 8$$

$$b/ n^4 - 10n^2 + 9 = n^4 - n^2 - 9n^2 + 9 = n^2(n^2 - 1) - 9(n^2 - 1) = (n^2 - 1)(n^2 - 9) \\ = (n - 1)(n+1)(n-3)(n+3)$$

Với n lẻ, $n = 2k + 1$, ta có:

$$n^4 - 10n^2 + 9 = (2k + 1 - 1)(2k + 1 + 1)(2k + 1 - 3)(2k + 1 + 3) \\ = 2k(2k+2)(2k-2)(2k+4) = 16k(k+1)(k-1)(k+2) : 16$$

Bài 2: Chứng minh rằng

a/ $n^6 + n^4 - 2n^2$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên n

b/ $3^{2n} - 9$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên dương n

Giải:

$$\text{Ta có: } A = n^6 + n^4 - 2n^2 = n^2(n^4 + n^2 - 2) = n^2(n^4 + 2n^2 - n^2 - 2) = n^2[(n^2 + 2) - (n^2 - 2)] \\ = n^2(n^2 + 2)(n^2 - 1).$$

$$\text{Ta lại có: } 72 = 8.9 \text{ với } (8,9) = 1$$

Xét các trường hợp:

$$+ \text{ Với } n = 2k \Rightarrow A = (2k)^2(2k + 1)(2k - 1)(4k^2 + 2) = 8k^2(2k + 1)(2k - 1)(2k^2 + 1) : 8$$

$$+ \text{ Với } n = 2k + 1 \Rightarrow A = (2k + 1)^2(2k + 1 - 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1)4k^2 : 8$$

Tương tự xét các trường hợp $n = 3a$, $n = 3a \pm 1$ để chứng minh $A : 9$

Vậy $A : 8.9$ hay $A : 72$

Bài 3: Cho a là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $a^2 - 1$ chia hết cho 24

Giải:

Vì a^2 là số nguyên tố lớn hơn 3 nên a lẻ $\Rightarrow a^2$ là số chính phương lẻ

$\Rightarrow a^2$ chia cho 8 dư 1

$\Rightarrow a^2 - 1$ chia hết cho 8 (1)

Mặt khác a là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow a$ không chia hết cho 3

$\Rightarrow a^2$ là số chính phương không chia hết cho 3 $\Rightarrow a^2$ chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow a^2 - 1$ chia hết cho 3 (2)

Mà $(3,8) = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow a^2 - 1$ chia hết cho 24

Bài 4: Chứng minh rằng:

Nếu số tự nhiên a không chia hết cho 7 thì $a^6 - 1$ chia hết cho 7

Giải:

Bài toán là trường hợp đặc biệt của định lý nhỏ Phéc ma:

- Dạng 1: Nếu p là số nguyên tố và a là một số nguyên thì $a^p - a$ chia hết cho p

- Dạng 2: Nếu a là một số nguyên không chia hết cho số nguyên tố p thì $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p

Thật vậy, ta có $a^6 - 1 = (a^3 + 1)(a^3 - 1)$

- Nếu $a = 7k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $a^3 = (7k \pm 1)^3 = 7k^3 \pm 21k^2 \pm 21k \pm 1 \Rightarrow a^3 - 1 : 7$

- Nếu $a = 7k \pm 2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $a^3 = (7k \pm 2)^3 = 7k^3 \pm 21k^2 \pm 42k \pm 8 = 7k^3 \pm 21k^2 \pm 28k \pm 8 \Rightarrow a^3 - 1 : 7$

- Nếu $a = 7k \pm 3$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $a^3 = (7k \pm 3)^3 = 7k^3 \pm 21k^2 \pm 63k \pm 27 = 7k^3 \pm 21k^2 \pm 21k \pm 27 \Rightarrow a^3 + 1 : 7$

Ta luôn có $a^3 + 1$ hoặc $a^3 - 1$ chia hết cho 7. Vậy $a^6 - 1$ chia hết cho 7

Bài 5: Chứng minh rằng:

Nếu n là lập phương của một số tự nhiên thì $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 504

Giải:

Ta có $504 = 3^2 \cdot 7 \cdot 8$ và 7, 8, 9 nguyên tố cùng nhau từng đôi một

Vì n là lập phương của một số tự nhiên nên đặt $n = a^3$

Cần chứng minh $A = (a^3 - 1)a^3(a^3 + 1)$ chia hết cho 504

Ta có: + Nếu a chẵn $\Rightarrow a^3$ chia hết cho 8

Nếu a lẻ $\Rightarrow a^3 - 1$ và $a^3 + 1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (a^3 - 1)(a^3 + 1)$ chia hết cho 8

Vậy $A: 8, \overline{19a9} \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

+ Nếu $a: 7 \Rightarrow a^3: 7 \Rightarrow A: 7$

Nếu a không chia hết cho 7 thì $a^6 - 1: 7 \Rightarrow (a^3 - 1)(a^3 + 1): 7$ (Định lý Phéc ma)

Vậy $A: 7, \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

+ Nếu $a: 3 \Rightarrow a^3: 9 \Rightarrow A: 9$

Nếu a không chia hết cho 3 $\Rightarrow a = 3k \pm 1 \Rightarrow a^3 = (3k \pm 1)^3 = 9 \pm 1$

$\Rightarrow a^3 - 1 = 9 \pm 1 - 1: 9$

$a^3 + 1 = 9 \pm 1 + 1: 9$

Vậy $A: 9, \forall n \in \mathbb{N}$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow A: 9, \forall n \in \mathbb{N}$

Bài 6: Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức sau là số nguyên tố:

a/ $12n^2 - 5n - 25$

b/ $8n^2 + 10n + 3$

c/ $\frac{n^3 + 3n}{4}$

Giải:

a/ Phân tích thành nhân tử: $12n^2 - 5n - 25 = 12n^2 + 15n - 20n - 25$

$= 3n(4n + 5) - 5(4n + 5) = (4n + 5)(3n - 5)$

Do $12n^2 - 5n - 25$ là số nguyên tố và $4n + 5 > 0$ nên $3n - 5 > 0$.

Ta lại có: $3n - 5 < 4n + 5$ (vì $n \geq 0$) nên để $12n^2 - 5n - 25$ là số nguyên tố thì thừa số nhỏ phải bằng 1 hay $3n - 5 = 1 \Rightarrow n = 2$

Khi đó, $12n^2 - 5n - 25 = 13 \cdot 1 = 13$ là số nguyên tố.

Vậy với $n = 2$ thì giá trị của biểu thức $12n^2 - 5n - 25$ là số nguyên tố 13

b/ $8n^2 + 10n + 3 = (2n - 1)(4n + 3)$

Biến đổi tương tự ta được $n = 0$. Khi đó, $8n^2 + 10n + 3$ là số nguyên tố 3

c/ $A = \frac{n^3 + 3n}{4}$. Do A là số tự nhiên nên $n(n + 3): 4$.

Hai số n và $n + 3$ không thể cùng chẵn. Vậy hoặc n , hoặc $n + 3$ chia hết cho 4

- Nếu $n = 0$ thì $A = 0$, không là số nguyên tố

- Nếu $n = 4$ thì $A = 7$, là số nguyên tố

- Nếu $n = 4k$ với $k \in \mathbb{Z}, k > 1$ thì $A = k(4k + 3)$ là tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên A là hợp số

- Nếu $n + 3 = 4$ thì $A = 1$, không là số nguyên tố

- Nếu $n + 3 = 4k$ với $k \in \mathbb{Z}, k > 1$ thì $A = k(4k - 3)$ là tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên A là hợp số.

Vậy với $n = 4$ thì $\frac{n^3 + 3n}{4}$ là số nguyên tố 7

Bài 7: Đố vui: Năm sinh của hai bạn

Một ngày của thập kỷ cuối cùng của thế kỷ XX, một nhười khách đến thăm trường gặp hai học sinh. Người khách hỏi:

- Có lẽ hai em bằng tuổi nhau?

Bạn Mai trả lời:

- Không, em hơn bạn em một tuổi. Nhưng tổng các chữ số của năm sinh mỗi chúng em đều là số chẵn.

- Vậy thì các em sinh năm 1979 và 1980, đúng không?

Người khách đã suy luận thế nào?

Giải:

Chữ số tận cùng của năm sinh hai bạn phải là 9 và 0 vì trong trường hợp ngược lại thì tổng các chữ số của năm sinh hai bạn chỉ hơn kém nhau là 1, không thể cùng là số chẵn.

Gọi năm sinh của Mai là $\overline{19a9}$ thì $1+9+a+9 = 19+a$. Muốn tổng này là số chẵn thì $a \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Hiển nhiên Mai không thể sinh năm 1959 hoặc 1999. Vậy Mai sinh năm 1979, bạn của Mai sinh năm 1980.

Chuyên đề 2: TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRONG N

Tiết 10-12:

Một số dấu hiệu chia hết – Ví dụ

I. Một số dấu hiệu chia hết

1. Chia hết cho 2, 5, 4, 25 và 8; 125.

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 2 \Leftrightarrow a_0 : 2 \Leftrightarrow a_0 = 0; 2; 4; 6; 8.$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 5 \Leftrightarrow a_0 = 0; 5$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 4 \text{ (hoặc 25)} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 4 \text{ (hoặc 25)}$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 8 \text{ (hoặc 125)} \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 8 \text{ (hoặc 125)}$$

2. Chia hết cho 3; 9.

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 3 \text{ (hoặc 9)} \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_n : 3 \text{ (hoặc 9)}$$

Nhân xét: Dư trong phép chia N cho 3 (hoặc 9) cũng chính là dư trong phép chia tổng các chữ số của N cho 3 (hoặc 9).

3. Dấu hiệu chia hết cho 11:

$$\text{Cho } A = \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} \quad A : 11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)] : 11$$

4. Dấu hiệu chia hết cho 101

$$A = \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} \quad A : 101 \Leftrightarrow [(a_1 a_0 + a_3 a_4 + \dots) - (a_2 a_3 + a_5 a_6 + \dots)] : 101$$

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm các chữ số x, y để:

a) $\overline{134x4y} : 45$

b) $\overline{1234xy} : 72$

Giải:

a) Để $\overline{134x4y} : 45$ ta phải có $\overline{134x4y}$ chia hết cho 9 và 5 $\Rightarrow y = 0$ hoặc $y = 5$

Với $y = 0$ thì từ $\overline{134x40} : 9$ ta phải có $1+3+5+x+4 : 9 \Rightarrow x+4 : 9 \Rightarrow x = 5$

khí đó ta có số 13554

với $x = 5$ thì từ : $\overline{134x4y} : 9$ ta phải có $1+3+5+x+4+5 : 9$

$\Rightarrow x : 9 \Rightarrow x = 0; x = 9$ lúc đó ta có 2 số: 135045; 135945.

b) Ta có $\overline{1234xy} = \overline{123400} + \overline{xy} = 72.1713 + 64 + \overline{xy} : 72 \Rightarrow 64 + \overline{xy} : 72$

Vì $64 \leq 64 + \overline{xy} \leq 163$ nên $64 + \overline{xy}$ bằng 72 hoặc 144.

+ Với $64 + \overline{xy} = 72$ thì $\overline{xy} = 08$, ta có số: 123408.

+ Với $64 + \overline{xy} = 144$ thì $\overline{xy} = 80$, ta có số 123480

Ví dụ 2 Tìm các chữ số x, y để $N = \overline{7x36y5} : 1375$

Giải:

Ta có: $1375 = 11.125$.

$$N : 125 \Leftrightarrow \overline{6y5} : 125 \Leftrightarrow y = 2$$

$$N = \overline{7x3625} : 11 \Leftrightarrow (5+6+x) - (2+3+7) = 12-x : 11 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy số cần tìm là 713625

Ví dụ 3 a) Hỏi số $A_{1991} = \overline{1991 \dots 1991}$ có chia hết cho 101 không?

1991 số 1991

b) Tìm n để $A_n : 101$

Giải:

a) Ghép 2 chữ số liên tiếp nhau thì A_{1991} có 2 cặp số là 91; 19

Ta có: $1991.91 - 1991.19 = 1991.72 \not\vdots 101$ nên $A_{1991} \not\vdots 101$
 b) $A_n \vdots 101 \Leftrightarrow n.91 - n.19 = 72n \vdots 101 \Leftrightarrow n \vdots 101$

TIẾT 13– 14:

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ PHÉP CHIA HẾT

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định lý về phép chia hết:

a) Định lý

Cho a, b là các số nguyên tùy ý, $b \neq 0$, khi đó có 2 số nguyên q, r duy nhất sao cho :
 $a = bq + r$ với $0 \leq r < |b|$, a là số bị chia, b là số chia, q là thương số và r là số dư.

Đặc biệt với $r = 0$ thì $a = b.q$ Khi đó ta nói a chia hết cho b hay b là ước của a , ký hiệu $a \vdots b$.

Vậy

$a \vdots b \Leftrightarrow$ có số nguyên q sao cho $a = b.q$

b) Tính chất

- a) Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots c$ thì $a \vdots c$:
- b) Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots a$ thì $a = b$
- c) Nếu $a \vdots b$, $a \vdots c$ và $(b, c) = 1$ thì $a \vdots bc$
- d) Nếu $ab \vdots c$ và $(c, b) = 1$ thì $a \vdots c$

2. Tính chất chia hết của một tổng, một hiệu, một tích.

- Nếu $\left. \begin{matrix} a \vdots m \\ b \vdots m \end{matrix} \right\} \rightarrow a + b \vdots m$

- Nếu $\left. \begin{matrix} a \vdots m \\ b \vdots m \end{matrix} \right\} \rightarrow a - b \vdots m$

- Nếu $\left. \begin{matrix} a \vdots m \\ b \vdots m \end{matrix} \right\} \rightarrow a.b \vdots m$

- Nếu $a \vdots m \rightarrow a^n \vdots m$ (n là số tự nhiên)

3. Một số tính chất khác:

- Trong n số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho n
- Tích n số tự nhiên liên tiếp chia hết cho $n!$
- $A \vdots a$, $A \vdots b$ và $(a, b) = 1 \Rightarrow A \vdots a.b$

B. Ví dụ:

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có: $(n^2 + n - 1)^2 - 1 \vdots 24$

Giải:

$$A = (n^2 + n - 1)^2 - 1 = [n(n+1)][(n-1)(n+2)] \vdots 4! = 24$$

Bài tập tự luyện:

2. Chứng minh rằng

a. $n^3 + 6n^2 + 8n \vdots 48$ với n chẵn

b. $n^4 - 10n^2 + 9 \vdots 384$ với n lẻ

3. Chứng minh rằng: $n^6 + n^4 - 2n^2 \vdots 72$ với n nguyên

4. CMR với mọi số nguyên a biểu thức sau:

- a) $a(a-1) - (a+3)(a+2)$ chia hết cho 6.
 b) $a(a+2) - (a-7)(a-5)$ chia hết cho 7.
 c) $(a^2 + a + 1)^2 - 1$ chia hết cho 24
 d) $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 (mọi n chẵn)
 5. CMR với mọi số tự nhiên n thì biểu thức:
 a) $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6
 b) $2n(2n+2)$ chia hết cho 8.

Tiết 15– 16: 3. Đồng dư thức

I. Lý thuyết đồng dư:

a) **Định nghĩa** : Cho số nguyên $m > 0$. Nếu 2 số nguyên a, b cho cùng số dư khi chia cho m thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m .

Kí hiệu : $a \equiv b \pmod{m}$

b) **Tính chất**

$$a) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$$

$$b) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow na \equiv nb \pmod{m}$$

$$c) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

$$d) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

c) Một số hằng đẳng thức:

- $a^m - b^m : a - b$
- $a^n + b^n : a + b$ (n lẻ)
- $(a + b)^n = B(a) + b$

II. Ví dụ:

1. Chứng minh: $2^9 + 2^{99} : 200$

Giải:

$$2^9 + 2^{99} = 2^9 = 512 \equiv 112 \pmod{200} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2^{99} = 2^9 \equiv 112^{11} \pmod{200}.$$

$$112^2 = 12544 \equiv 12^2 \pmod{200} \Rightarrow 112^{10} \equiv 12^{10} \pmod{200}$$

$$12^{10} = 61917364224 \equiv 24 \pmod{200}.$$

$$112^{11} \equiv 24.112 \pmod{200} \equiv 2688 \pmod{200} \equiv 88 \pmod{200}$$

$$\Rightarrow 2^{99} \equiv 88 \pmod{200} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 2^9 + 2^{99} \equiv 200 \pmod{200} \text{ hay } 2^9 + 2^{99} : 200$$

III. Bài tập tự luyện:

Sử dụng hằng đẳng thức và đồng dư

1. $(1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2) : 7$
2. $(24^{1917} + 14^{1917}) : 19$
3. $(2^9 + 2^{99}) : 200$
4. $(13^{123456789} - 1) : 183$
5. $(1979^{1979} - 1981^{1981} + 1982) : 1980$
6. $(3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}) : 120$

7. $(2222^{5555} + 5555^{2222}) : 7$

Tiết 17– 18:
QUY NẠP TOÁN HỌC

I. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

B₁: Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 1?

B₂: Giả sử Mệnh đề đúng với n = k ≥ 1. Chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1

II. VÍ DỤ:

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì: $7^{n+2} + 8^{2n+1} : 57$

Giải:

- Với n = 1: $A_1 = 7^3 + 8^3 = 855 + 57$

- Giả sử $A_k + 57$ nghĩa là $7^{n+2} + 8^{2n+1} : 57$

$\Rightarrow A_{k+1} = 7^{k+3} + 8^{2k+3} = 7 \cdot 7^{k+2} + 64 \cdot 8^{2k+1} = 7(7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}$

Vì $7^{k+2} + 8^{2k+1}$ (giả thiết qui nạp) và $57 \cdot 8^{2k+1} : 57$

$\Rightarrow A_{k+1} : 57$

Vậy theo nguyên lí qui nạp $A = 7^{n+2} + 8^{2n+1} : 57$.

**Chú ý: Trong trường hợp tổng quát với n là số nguyên và $n \geq n_0$. Thì ta kiểm tra mệnh đề đúng khi $n = n_0$?*

III. BÀI TẬP:

Chứng minh : Với n là số tự nhiên thì:

1. $(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}) : 23$

2. $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$

3. $(5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}) : 59$

4. $(2^{2n+1} + 3^{3n+1}) : 5$

5. $(2^{2n+2} + 24n + 14) : 18$

Tiết 19-20
LUYỆN TẬP

1. $A = \overline{1ab2c} : 1025$

2. $B = \overline{abca} = (5c + 1)^2$

3. $E = \overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$

4. $A = \overline{ab} = (a + b)^2$

HD: $\overline{ab} = (a + b)^2 \Leftrightarrow (a + b)(a + b - 1) = 9a \leq 9^2 \Rightarrow (a + b) \leq 9$ và $(a + b) = 9k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow 9a = 9 \cdot 8 = 72 \Rightarrow a = 8$ và $b = 1$

5. $B = \overline{abcd} = (ab + cd)^2$

HD: Đặt $x = \overline{ab}$; $y = \overline{cd} \Rightarrow 99x = (x + y)(x + y - 1) \leq 99^2$

Xét 2 khả năng : $\begin{cases} x = 99(1) \\ x < 99(2) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow B = 9801$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 9k \\ x + y - 1 = 11l \\ x + y = 11k \\ x + y - 1 = 9l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2025 \\ B = 3025 \end{cases}$$

$$\text{ĐS: } B = 9801; 2025; 3025$$

$$6. \quad C = \overline{abcdef} = (\overline{abc} + \overline{def})^2$$

$$7. \quad H = \overline{abcd} \text{ sao cho } \underbrace{\overline{aa\dots a}}_n \underbrace{\overline{bb\dots b}}_n \underbrace{\overline{cc\dots c}}_n + 1 = \left(\underbrace{\overline{dd\dots d}}_n + 1 \right)^3$$

$$8. \quad \text{Tìm } \overline{xyy1} + 4z = z^2$$

9. Tính giá trị của biểu thức:

$$1/ \text{ Cho } x + y = 3, \text{ tính giá trị } A = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 3.$$

$$2/ \text{ Cho } x + y = 1. \text{ Tính giá trị } B = x^3 + y^3 + 3xy$$

$$3/ \text{ Cho } x - y = 1. \text{ Tính giá trị } C = x^3 - y^3 - 3xy.$$

$$4/ \text{ Cho } x + y = m \text{ và } x.y = n. \text{ Tính giá trị các biểu thức sau theo } m, n.$$

$$a) x^2 + y^2$$

$$b) x^3 + y^3$$

$$c) x^4 + y^4$$

$$5/ \text{ Cho } x + y = m \text{ và } x^2 + y^2 = n. \text{ Tính giá trị biểu thức } x^3 + y^3 \text{ theo } m \text{ và } n.$$

$$6/ a) \text{ Cho } a + b + c = 0 \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 2. \text{ Tính giá trị của bt: } a^4 + b^4 + c^4.$$

$$b) \text{ Cho } a + b + c = 0 \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 1. \text{ Tính giá trị của bt: } a^4 + b^4 + c^4.$$

Chuyên đề 2

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

I. ĐỊNH NGHĨA: Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

II. TÍNH CHẤT:

1. Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9 ; không thể có chữ số tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.
2. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.
3. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $4n$ hoặc $4n + 1$. Không có số chính phương nào có dạng $4n + 2$ hoặc $4n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$).
4. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $3n$ hoặc $3n + 1$. Không có số chính phương nào có dạng $3n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$).
5. Số chính phương tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2
Số chính phương tận cùng bằng 4 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.
6. Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.
Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.
Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25.
Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

III. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A. DANGI: CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

$$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4 \text{ là số chính phương.}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4 \\ &= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t$ ($t \in \mathbb{Z}$) thì

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}$, $5xy \in \mathbb{Z}$, $5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z}$

Vậy A là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng 1 luôn là số chính phương.

Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là $n, n+1, n+2, n+3$ ($n \in \mathbb{N}$). Ta có

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= n.(n+3)(n+1)(n+2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } n^2 + 3n = t \quad (t \in \mathbb{N}) \text{ thì } (*) &= t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2 \end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2 + 3n + 1 \in \mathbb{N}$ Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.

Bài 3: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2).4 = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2).[(k+3) - (k-1)] \\ &= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \frac{1}{4}.1.2.3.4 - \frac{1}{4}.0.1.2.3 + \frac{1}{4}.2.3.4.5 - \frac{1}{4}.1.2.3.4 + \dots + \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4} \\ &k(k+1)(k+2)(k-1) = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) \end{aligned}$$

$$4S + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$$

Theo kết quả bài 2 $\Rightarrow k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$ là số chính phương.

Bài 4: Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; ...

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa số đứng trước nó.

Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ chữ số } 4} \underbrace{88 \dots 8}_{n-1 \text{ chữ số } 8} 9 &= \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ chữ số } 4} \underbrace{88 \dots 8}_{n \text{ chữ số } 8} + 1 = \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ chữ số } 4} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ chữ số } 1} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 \\ &= \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 8 + 9}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} \\ &= \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

Ta thấy $2 \cdot 10^n + 1 = 200 \dots 01$ có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

$$\Rightarrow \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2 \in \mathbb{Z} \quad \text{hay các số có dạng } 44 \dots 488 \dots 89 \text{ là số chính phương.}$$

Bài 5: Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:

$$A = \underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ chữ số } 1} + \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ chữ số } 4} + 1$$

$$B = \underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ chữ số } 1} + \underbrace{11 \dots 1}_{n+1 \text{ chữ số } 1} + \underbrace{66 \dots 6}_{n \text{ chữ số } 6} + 8$$

$$C = 44 \underbrace{\dots 4}_{2n \text{ chữ số } 4} + 22 \underbrace{\dots 2}_{n+1 \text{ chữ số } 2} + 88 \underbrace{\dots 8}_{n \text{ chữ số } 8} + 7$$

$$\text{Kết quả: } A = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2; \quad B = \left(\frac{10^n + 8}{3} \right)^2; \quad C = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 7}{3} \right)^2$$

Bài 6: Chứng minh rằng các số sau là số chính phương:

$$a. A = 22499 \underbrace{\dots 9100}_{n-2 \text{ chữ số } 9} \underbrace{\dots 09}_{n \text{ chữ số } 0}$$

$$b. B = 11 \underbrace{\dots 155}_{n \text{ chữ số } 1} \underbrace{\dots 56}_{n-1 \text{ chữ số } 5}$$

$$\begin{aligned} a. \quad A &= 224 \cdot 10^{2n} + 99 \dots 9 \cdot 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9 \\ &= 224 \cdot 10^{2n} + (10^{n-2} - 1) \cdot 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9 \\ &= 224 \cdot 10^{2n} + 10^{2n} - 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9 \\ &= 225 \cdot 10^{2n} - 90 \cdot 10^n + 9 \\ &= (15 \cdot 10^n - 3)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ là số chính phương

$$\begin{aligned} b. \quad B &= 111 \underbrace{\dots 155}_{n \text{ chữ số } 1} \underbrace{\dots 5}_{n \text{ chữ số } 5} + 1 = 11 \underbrace{\dots 1}_{n \text{ chữ số } 1} \cdot 10^n + 5 \cdot 11 \underbrace{\dots 1}_{n \text{ chữ số } 1} + 1 \\ &= \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 5 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \frac{10^{2n} - 10^n + 5 \cdot 10^n - 5 + 9}{9} \\ &= \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2 \text{ là số chính phương (điều phải chứng minh)} \end{aligned}$$

Bài 7: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

$$\text{Ta có } (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5 \cdot (n^2 + 2)$$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8 do đó $n^2 + 2$ không thể chia hết cho 5

$\Rightarrow 5 \cdot (n^2 + 2)$ không là số chính phương hay A không là số chính phương

Bài 8: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương

$$\begin{aligned} n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 &= n^2 \cdot (n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2 \cdot [n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)] \\ &= n^2 \cdot [(n+1)(n^3 - n^2 + 2)] = n^2(n+1) \cdot [(n^3 + 1) - (n^2 - 1)] \end{aligned}$$

$$= n^2(n+1)^2(n^2-2n+2)$$

Với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ thì $n^2-2n+2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

$$\text{và } n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không phải là một số chính phương.

Bài 9: Cho 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương

Cách 1: Ta biết một số chính phương có chữ số hàng đơn vị là 6 thì chữ số hàng chục của nó là số lẻ. Vì vậy chữ số hàng chục của 5 số chính phương đã cho là 1,3,5,7,9 khi đó tổng của chúng bằng $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ là số chính phương

Cách 2: Nếu một số chính phương $M = a^2$ có chữ số hàng đơn vị là 6 thì chữ số tận cùng của a là 4 hoặc 6 $\Rightarrow a:2 \Rightarrow a^2:4$

Theo dấu hiệu chia hết cho 4 thì hai chữ số tận cùng của M chỉ có thể là 16, 36, 56, 76, 96 $\Rightarrow$ Ta có: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kỳ không phải là một số chính phương.

a và b lẻ nên $a = 2k+1$, $b = 2m+1$ (Với $k, m \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 + b^2 &= (2k+1)^2 + (2m+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = 4t + 2 \quad (\text{Với } t \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Không có số chính phương nào có dạng $4t + 2$ ($t \in \mathbb{N}$) do đó $a^2 + b^2$ không thể là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p:2$ và p không chia hết cho 4 (1)

a. Giả sử $p+1$ là số chính phương. Đặt $p+1 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$). Ta có $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow p+1 = 4k^2 + 4k + 1$

$$\Rightarrow p = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) : 4 \text{ mâu thuẫn với (1)}$$

$\Rightarrow p+1$ là số chính phương

b. $p = 2.3.5 \dots$ là số chia hết cho 3 $\Rightarrow p-1$ có dạng $3k+2$.

Không có số chính phương nào có dạng $3k+2 \Rightarrow p-1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương

Bài 12: Giả sử $N = 1.3.5.7 \dots 2007$.

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N-1$, $2N$ và $2N+1$ không có số nào là số chính phương.

a. $2N-1 = 2.1.3.5.7...2007 - 1$

Có $2N : 3 \Rightarrow 2N-1$ không chia hết cho 3 và $2N-1 = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 2N-1$ không là số chính phương.

b. $2N = 2.1.3.5.7...2007$

Vì N lẻ $\Rightarrow N$ không chia hết cho 2 và $2N : 2$ nhưng $2N$ không chia hết cho 4.

$2N$ chẵn nên $2N$ không chia cho 4 dư 1 $\Rightarrow 2N$ không là số chính phương.

c. $2N+1 = 2.1.3.5.7...2007 + 1$

$2N+1$ lẻ nên $2N+1$ không chia hết cho 4

$2N$ không chia hết cho 4 nên $2N+1$ không chia cho 4 dư 1

$\Rightarrow 2N+1$ không là số chính phương.

Bài 13: Cho $a = \underbrace{11...1}_{2008 \text{ chữ số } 1}$; $b = \underbrace{100...05}_{2007 \text{ chữ số } 0}$

Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 1: Ta có $a = \underbrace{11...1}_{2008 \text{ chữ số } 1} = \frac{10^{2008} - 1}{9}$; $b = \underbrace{100...0}_{2007 \text{ chữ số } 0} + 5 = 10^{2008} + 5$

$$\Rightarrow ab+1 = \frac{(10^{2008} - 1)(10^{2008} + 5)}{9} + 1 = \frac{(10^{2008})^2 + 4 \cdot 10^{2008} - 5 + 9}{9} = \left(\frac{10^{2008} + 2}{3} \right)^2$$

$$\sqrt{ab+1} = \sqrt{\left(\frac{10^{2008} + 2}{3} \right)^2} = \frac{10^{2008} + 2}{3}$$

Ta thấy $10^{2008} + 2 = \underbrace{100...02}_{2007 \text{ chữ số } 0} : 3$ nên $\frac{10^{2008} + 2}{3} \in \mathbb{N}$ hay $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 2: $b = \underbrace{100...0}_{2007 \text{ chữ số } 0} + 5 = \underbrace{100...0}_{2008 \text{ chữ số } 0} - 1 + 6 = \underbrace{99...9}_{2008 \text{ chữ số } 9} + 6 = 9a + 6$

$$\Rightarrow ab+1 = a(9a+6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a+1 \in \mathbb{N}$$

B. DẠNG 2: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ BIỂU THỨC LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương:

a. $n^2 + 2n + 12$

b. $n(n+3)$

c. $13n + 3$

d. $n^2 + n + 1589$

Giải

a. Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n+1)^2 = 11 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1) = 11$$

Nhận xét thấy $k+n+1 > k-n-1$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết

$$(k+n+1)(k-n-1) = 11.1 \Leftrightarrow \begin{cases} k+n+1 = 11 \\ k-n-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. Đặt } n(n+3) &= a^2 \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 + 3n = a^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4a^2 \\
 &\Leftrightarrow (4n^2 + 12n + 9) - 9 = 4a^2 \\
 &\Leftrightarrow (2n + 3)^2 - 4a^2 = 9 \\
 &\Leftrightarrow (2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9
 \end{aligned}$$

Nhận xét thấy $2n + 3 + 2a > 2n + 3 - 2a$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9.1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2n + 3 + 2a = 9 \\ 2n + 3 - 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{c. Đặt } 13n + 3 &= y^2 \quad (y \in \mathbb{N}) \Rightarrow 13(n - 1) = y^2 - 16 \\
 &\Leftrightarrow 13(n - 1) = (y + 4)(y - 4)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (y + 4)(y - 4) : 13$ mà 13 là số nguyên tố nên $y + 4 : 13$ hoặc $y - 4 : 13$

$$\Rightarrow y = 13k \pm 4 \quad (\text{Với } k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 13(n - 1) = (13k \pm 4)^2 - 16 = 13k(13k \pm 8)$$

$$\Rightarrow n = 13k^2 \pm 8k + 1$$

Vậy $n = 13k^2 \pm 8k + 1$ (Với $k \in \mathbb{N}$) thì $13n + 3$ là số chính phương.

$$\begin{aligned}
 \text{d. Đặt } n^2 + n + 1589 &= m^2 \quad (m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (4n^2 + 1)^2 + 6355 = 4m^2 \\
 &\Leftrightarrow (2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355
 \end{aligned}$$

Nhận xét thấy $2m + 2n + 1 > 2m - 2n - 1 > 0$ và chúng là những số lẻ, nên ta có thể viết $(2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355.1 = 1271.5 = 205.31 = 155.41$

Suy ra n có thể có các giá trị sau: 1588; 316; 43; 28.

Bài 2: Tìm a để các số sau là những số chính phương:

$$\text{a.} \quad a^2 + a + 43$$

$$\text{b.} \quad a^2 + 81$$

$$\text{c.} \quad a^2 + 31a + 1984$$

Kết quả: a. 2; 42; 13

b. 0; 12; 40

c. 12; 33; 48; 97; 176; 332; 565; 1728

Bài 3: Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Với $n = 1$ thì $1! = 1 = 1^2$ là số chính phương.

Với $n = 2$ thì $1! + 2! = 3$ không là số chính phương

Với $n = 3$ thì $1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2$ là số chính phương

Với $n \geq 4$ ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33$ còn $5!; 6!; \dots; n!$ đều tận cùng bởi 0 do đó $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài là $n = 1; n = 3$.

Bài 4: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để các số sau là số chính phương:

- a. $n^2 + 2004$ (Kết quả: 500; 164)
- b. $(23 - n)(n - 3)$ (Kết quả: 3; 5; 7; 13; 19; 21; 23)
- c. $n^2 + 4n + 97$
- d. $2^n + 15$

Bài 5: Có hay không số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương.

Giả sử $2006 + n^2$ là số chính phương thì $2006 + n^2 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2006 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2006$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $m + n + m - n = 2m \Rightarrow 2$ số $m + n$ và $m - n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn

$\Rightarrow (m + n)(m - n) : 4$ Nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương.

Bài 6: Biết $x \in \mathbb{N}$ và $x > 2$. Tìm x sao cho $\frac{x(x-1).x(x-1)}{(x-2)xx(x-1)} = 2$

Đẳng thức đã cho được viết lại như sau: $x(x-1) = (x-2)xx(x-1)$

Do vế trái là một số chính phương nên vế phải cũng là một số chính phương.

Một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi 1 trong các chữ số 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên x chỉ có thể tận cùng bởi 1 trong các chữ số 1; 2; 5; 6; 7; 0 (1)

Do x là chữ số nên $x \leq 9$, kết hợp với điều kiện đề bài ta có $x \in \mathbb{N}$ và $2 < x \leq 9$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x$ chỉ có thể nhận 1 trong các giá trị 5; 6; 7.

Bằng phép thử ta thấy chỉ có $x = 7$ thỏa mãn đề bài, khi đó $76^2 = 5776$

Bài 7: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương.

Ta có $10 \leq n \leq 99$ nên $21 \leq 2n+1 \leq 199$. Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 25; 49; 81; 121; 169 tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84.

Số $3n+1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy $n = 40$

Bài 8: Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho $n+1$ và $2n+1$ đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.

Vì $n+1$ và $2n+1$ là các số chính phương nên đặt $n+1 = k^2$, $2n+1 = m^2$ ($k, m \in \mathbb{N}$)

Ta có m là số lẻ $\Rightarrow m = 2a+1 \Rightarrow m^2 = 4a(a+1) + 1$

$$\Rightarrow n = \frac{m^2 - 1}{2} = \frac{4a(a+1)}{2} = 2a(a+1)$$

$$\Rightarrow n \text{ chẵn} \Rightarrow n+1 \text{ lẻ} \Rightarrow k \text{ lẻ} \Rightarrow \text{Đặt } k = 2b+1 \text{ (Với } b \in \mathbb{N}) \Rightarrow k^2 = 4b(b+1) + 1 \\ \Rightarrow n = 4b(b+1) \Rightarrow n : 8 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } k^2 + m^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Mặt khác k^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, m^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Nên để $k^2 + m^2 \equiv 2 \pmod{3}$ thì $k^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$$m^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 : 3 \text{ hay } (2n+1) - (n+1) : 3 \Rightarrow n : 3 \quad (2)$$

$$\text{Mà } (8; 3) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow n : 24.$$

Bài 9: *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương.*

Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2 \quad (a \in \mathbb{N})$ thì

$$2^n = a^2 - 48^2 = (a+48)(a-48)$$

$$2^p \cdot 2^q = (a+48)(a-48) \quad \text{Với } p, q \in \mathbb{N}; p+q = n \text{ và } p > q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+48 = 2^p \\ a-48 = 2^q \end{cases} \Rightarrow 2^p - 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

$$a - \begin{cases} a+48 = 2^p \\ a-48 = 2^q \end{cases}$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ và } p-q = 2 \Rightarrow p = 7$$

$$\Rightarrow n = 5+7 = 12$$

$$\text{Thử lại ta có: } 2^8 + 2^{11} + 2^n = 80^2$$

C.DẠNG 3: TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: *Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B . Hãy tìm các số A và B .*

Gọi $A = \overline{abcd} = k^2$. Nếu thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta có số

$$B = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = m^2 \quad \text{với } k, m \in \mathbb{N} \text{ và } 32 < k < m < 100$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$$

$$\Rightarrow \text{Ta có } \begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd+1111} = m^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m-k)(m+k) = 1111 \quad (*)$$

Nhận xét thấy tích $(m-k)(m+k) > 0$ nên $m-k$ và $m+k$ là 2 số nguyên dương.

Và $m-k < m+k < 200$ nên $(*)$ có thể viết $(m-k)(m+k) = 11 \cdot 101$

$$\text{Do đó } \begin{cases} m-k = 11 \\ m+k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$$

Bài 2: *Tìm 1 số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau 1 đơn vị.*

Đặt $\overline{abcd} = k^2$ ta có $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ và $k \in \mathbb{N}, 32 \leq k < 100$

Suy ra $101cd = k^2 - 100 = (k-10)(k+10) \Rightarrow k+10 : 101$ hoặc $k-10 : 101$
 Mà $(k-10; 101) = 1 \Rightarrow k+10 : 101$
 Vì $32 \leq k < 100$ nên $42 \leq k+10 < 110 \Rightarrow k+10 = 101 \Rightarrow k = 91$
 $\Rightarrow abcd = 91^2 = 8281$

Bài 3: *Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.*

Gọi số chính phương phải tìm là $aabb = n^2$ với $a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$
 Ta có $n^2 = aabb = 11.a0b = 11.(100a+b) = 11.(99a+a+b)$ (1)
 Nhận xét thấy $aabb : 11 \Rightarrow a+b : 11$
 Mà $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$ nên $1 \leq a+b \leq 18 \Rightarrow a+b = 11$
 Thay $a+b = 11$ vào (1) được $n^2 = 11^2(9a+1)$ do đó $9a+1$ là số chính phương.
 Bằng phép thử với $a = 1; 2; \dots; 9$ ta thấy chỉ có $a = 7$ thỏa mãn $\Rightarrow b = 4$
 Số cần tìm là 7744

Bài 4: *Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.*

Gọi số chính phương đó là $abcd$. Vì $abcd$ vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt $abcd = x^2 = y^3$ Với $x, y \in \mathbb{N}$
 Vì $y^3 = x^2$ nên y cũng là một số chính phương.
 Ta có $1000 \leq abcd \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq y \leq 21$ và y chính phương $\Rightarrow y = 16$
 $\Rightarrow abcd = 4096$

Bài 5: *Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.*

Gọi số phải tìm là $abcd$ với a, b, c, d nguyên và $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$
 $abcd$ chính phương $\Rightarrow d \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$
 d nguyên tố $\Rightarrow d = 5$
 Đặt $abcd = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \leq k < 100$
 k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow k$ tận cùng bằng 5
 Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow k = 45$
 $\Rightarrow abcd = 2025$
 Vậy số phải tìm là 2025

Bài 6: *Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và viết bởi hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương*

Gọi số tự nhiên có hai chữ số phải tìm là ab ($a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a, b \leq 9$)
 Số viết theo thứ tự ngược lại ba
 Ta có $ab^2 - ba^2 = (10a+b)^2 - (10b+a)^2 = 99(a^2 - b^2) : 11 \Rightarrow a^2 - b^2 : 11$

Hay $(a-b)(a+b) : 11$

Vì $0 < a - b \leq 8, 2 \leq a+b \leq 18$ nên $a+b : 11 \Rightarrow a + b = 11$

Khi đó $\overline{ab} - \overline{ba} = 3^2 \cdot 11^2 \cdot (a - b)$

Để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương thì $a - b$ phải là số chính phương do đó $a-b = 1$ hoặc $a - b = 4$

- Nếu $a-b = 1$ kết hợp với $a+b = 11 \Rightarrow a = 6, b = 5, \overline{ab} = 65$

Khi đó $65^2 - 56^2 = 1089 = 33^2$

- Nếu $a - b = 4$ kết hợp với $a+b = 11 \Rightarrow a = 7,5$ (loại)

Vậy số phải tìm là 65

Bài 7: Cho một số chính phương có 4 chữ số. Nếu thêm 3 vào mỗi chữ số đó ta cũng được một số chính phương. Tìm số chính phương ban đầu
(Kết quả: 1156)

Bài 8: Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

Theo giả thiết ta có : $\overline{ab} = (a + b)^3$

$$\Leftrightarrow (10a+b)^2 = (a + b)^3$$

$\Rightarrow \overline{ab}$ là một lập phương và $a+b$ là một số chính phương

Đặt $\overline{ab} = t^3$ ($t \in \mathbb{N}$), $a + b = l^2$ ($l \in \mathbb{N}$)

Vì $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

- Nếu $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a + b = 9$ là số chính phương
- Nếu $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a + b = 10$ không là số chính phương $\Rightarrow$ loại

Vậy số cần tìm là $\overline{ab} = 27$

Bài 9: Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là $2n-1, 2n+1, 2n+3$ ($n \in \mathbb{N}$)

Ta có $A = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111.a$ với a lẻ và $1 \leq a \leq 9$

$$\Rightarrow 12n(n+1) = 11(101a - 1)$$

$$\Rightarrow 101a - 1 : 3 \Rightarrow 2a - 1 : 3$$

Vì $1 \leq a \leq 9$ nên $1 \leq 2a-1 \leq 17$ và $2a-1$ lẻ nên $2a-1 \in \{3; 9; 15\}$

$$\Rightarrow a \in \{2; 5; 8\}$$

Vì a lẻ $\Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 21$

3 số cần tìm là 41; 43; 45

Bài 10: Tìm số có 2 chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.

$$ab(\overline{a+b}) = a^3 + b^3$$

$$\Leftrightarrow 10a + b = a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$$

$$\Leftrightarrow 3a(3 + b) = (a + b)(a + b - 1)$$

$a + b$ và $a + b - 1$ nguyên tố cùng nhau do đó

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} a + b = 3a \\ a + b - 1 = 3 + b \end{array} \right\} \text{ hoặc } \left. \begin{array}{l} a + b - 1 = 3a \\ a + b = 3 + b \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 4, b = 8 \quad \text{hoặc} \quad a = 3, b = 7$$

Vậy $ab = 48$ hoặc $ab = 37$.

Chuyên đề 3

Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

I. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

1. Phương pháp đặt nhân tử chung

- Tìm nhân tử chung là những đơn, đa thức có mặt trong tất cả các hạng tử.
- Phân tích mỗi hạng tử thành tích của nhân tử chung và một nhân tử khác.
- Viết nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc, viết các nhân tử còn lại của mỗi hạng tử vào trong dấu ngoặc (kể cả dấu của chúng).

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

$$28a^2b^2 - 21ab^2 + 14a^2b = 7ab(4ab - 3b + 2a)$$

$$2x(y - z) + 5y(z - y) = 2(y - z) - 5y(y - z) = (y - z)(2 - 5y)$$

$$x^m + x^{m+3} = x^m(x^3 + 1) = x^m(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

2. Phương pháp dùng hằng đẳng thức

- Dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ để phân tích đa thức thành nhân tử.
- Cần chú ý đến việc vận dụng hằng đẳng thức.

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

$$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x - 2)(3x + 2)$$

$$8 - 27a^3b^6 = 2^3 - (3ab^2)^3 = (2 - 3ab^2)(4 + 6ab^2 + 9a^2b^4)$$

$$25x^4 - 10x^2y + y^2 = (5x^2 - y)^2$$

3. Phương pháp nhóm nhiều hạng tử

- Kết hợp các hạng tử thích hợp thành từng nhóm.
- Áp dụng liên tiếp các phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

Ví dụ 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 &= (2x^3 + 2x) - (3x^2 + 3) = 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(2x - 3) \end{aligned}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 16 = (x - y)^2 - 4^2 = (x - y - 4)(x - y + 4)$$

4. Phối hợp nhiều phương pháp

- Chọn các phương pháp theo thứ tự ưu tiên.
- Đặt nhân tử chung.
- Dùng hằng đẳng thức.
- Nhóm nhiều hạng tử.

Ví dụ 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$\begin{aligned} 3xy^2 - 12xy + 12x &= 3x(y^2 - 4y + 4) = 3x(y - 2)^2 \\ 3x^3y - 6x^2y - 3xy^3 - 6axy^2 - 3a^2xy + 3xy &= \\ &= 3xy(x^2 - 2y - y^2 - 2ay - a^2 + 1) \\ &= 3xy[(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 2ay + a^2)] \\ &= 3xy[(x - 1)^2 - (y + a)^2] \\ &= 3xy[(x - 1) - (y + a)][(x - 1) + (y + a)] \\ &= 3xy(x - 1 - y - a)(x - 1 + y + a) \end{aligned}$$

II. PHƯƠNG PHÁP TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ

1. Đối với đa thức bậc hai ($f(x) = ax^2 + bx + c$)

a) Cách 1 (tách hạng tử bậc nhất bx):

Bước 1: Tìm tích ac , rồi phân tích ac ra tích của hai thừa số nguyên bằng mọi cách.

$$a.c = a_1.c_1 = a_2.c_2 = a_3.c_3 = \dots = a_i.c_i = \dots$$

Bước 2: Chọn hai thừa số có tổng bằng b , chẳng hạn chọn tích $a.c = a_i.c_i$ với $b = a_i + c_i$

Bước 3: Tách $bx = a_ix + c_ix$. Từ đó nhóm hai số hạng thích hợp để phân tích tiếp.

Ví dụ 5. Phân tích đa thức $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$ thành nhân tử.

Hướng dẫn

- Phân tích $ac = 12 = 3.4 = (-3).(-4) = 2.6 = (-2).(-6) = 1.12 = (-1).(-12)$
- Tích của hai thừa số có tổng bằng $b = 8$ là tích $a.c = 2.6$ ($a.c = a_i.c_i$).
- Tách $8x = 2x + 6x$ ($bx = a_ix + c_ix$)

Lời giải

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8x + 4 &= 3x^2 + 2x + 6x + 4 = (3x^2 + 2x) + (6x + 4) = x(3x + 2) + 2(3x + 2) \\ &= (x + 2)(3x + 2) \end{aligned}$$

b) Cách 2 (tách hạng tử bậc hai ax^2)

- Làm xuất hiện hiệu hai bình phương :

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x^2 + 8x + 4) - x^2 = (2x + 2)^2 - x^2 = (2x + 2 - x)(2x + 2 + x) \\ &= (x + 2)(3x + 2) \end{aligned}$$

- Tách thành 4 số hạng rồi nhóm :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - x^2 + 8x + 4 = (4x^2 + 8x) - (x^2 - 4) = 4x(x + 2) - (x - 2)(x + 2) \\ &= (x + 2)(3x + 2) \end{aligned}$$

$$f(x) = (12x^2 + 8x) - (9x^2 - 4) = \dots = (x + 2)(3x + 2)$$

c) Cách 3 (tách hạng tử tự do c)

- Tách thành 4 số hạng rồi nhóm thành hai nhóm:

$$f(x) = 3x^2 + 8x + 16 - 12 = (3x^2 - 12) + (8x + 16) = \dots = (x + 2)(3x + 2)$$

d) Cách 4 (tách 2 số hạng, 3 số hạng)

$$f(x) = (3x^2 + 12x + 12) - (4x + 8) = 3(x + 2)^2 - 4(x + 2) = (x + 2)(3x - 2)$$

$$f(x) = (x^2 + 4x + 4) + (2x^2 + 4x) = \dots = (x + 2)(3x + 2)$$

e) Cách 5 (nhắm nghiệm): Xem phần III.

Chú ý : Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có dạng $A^2 \pm 2AB + c$ thì ta tách như sau :

$$f(x) = A^2 \pm 2AB + B^2 - B^2 + c = (A \pm B)^2 - (B^2 - c)$$

Ví dụ 6. Phân tích đa thức $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$ thành nhân tử.

Hướng dẫn

Ta thấy $4x^2 - 4x = (2x)^2 - 2.2x$. Từ đó ta cần thêm và bớt $1^2 = 1$ để xuất hiện hằng đẳng thức.

Lời giải

$$f(x) = (4x^2 - 4x + 1) - 4 = (2x - 1)^2 - 2^2 = (2x - 3)(2x + 1)$$

Ví dụ 7. Phân tích đa thức $f(x) = 9x^2 + 12x - 5$ thành nhân tử.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Cách 1 : } f(x) &= 9x^2 - 3x + 15x - 5 = (9x^2 - 3x) + (15x - 5) = 3x(3x - 1) + 5(3x - 1) \\ &= (3x - 1)(3x + 5) \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2 : } f(x) = (9x^2 + 12x + 4) - 9 = (3x + 2)^2 - 3^2 = (3x - 1)(3x + 5)$$

2. Đối với đa thức bậc từ 3 trở lên (Xem mục III. Phương pháp nhẩm nghiệm)

3. Đối với đa thức nhiều biến

Ví dụ 11. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $2x^2 - 5xy + 2y^2$;

b) $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$.

Hướng dẫn

a) Phân tích đa thức này tương tự như phân tích đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ta tách hạng tử thứ 2 :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5xy + 2y^2 &= (2x^2 - 4xy) - (xy - 2y^2) = 2x(x - 2y) - y(x - 2y) \\ &= (x - 2y)(2x - y) \end{aligned}$$

a) Nhận xét $z - x = -(y - z) - (x - y)$. Vì vậy ta tách hạng tử thứ hai của đa thức :

$$\begin{aligned} x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) &= x^2(y - z) - y^2(y - z) - y^2(x - y) + z^2(x - y) = \\ &= (y - z)(x^2 - y^2) - (x - y)(y^2 - z^2) = (y - z)(x - y)(x + y) - (x - y)(y - z)(y + z) \\ &= (x - y)(y - z)(x - z) \end{aligned}$$

Chú ý :

1) Ở câu b) ta có thể tách $y - z = -(x - y) - (z - x)$ (hoặc $z - x = -(y - z) - (x - y)$)

2) Đa thức ở câu b) là một trong những đa thức có dạng đa thức đặc biệt. Khi ta thay $x = y$ ($y = z$ hoặc $z = x$) vào đa thức thì giá trị của đa thức bằng 0. Vì vậy, ngoài cách phân tích bằng cách tách như trên, ta còn cách phân tích bằng cách xét giá trị riêng (Xem phần VII).

III. PHƯƠNG PHÁP NHẢM NGHIỆM

Trước hết, ta chú ý đến một định lý quan trọng sau :

Định lý : Nếu $f(x)$ có nghiệm $x = a$ thì $f(a) = 0$. Khi đó, $f(x)$ có một nhân tử là $x - a$ và $f(x)$ có thể viết dưới dạng $f(x) = (x - a).q(x)$

Lúc đó tách các số hạng của $f(x)$ thành các nhóm, mỗi nhóm đều chứa nhân tử là $x - a$. Cũng cần lưu ý rằng, nghiệm nguyên của đa thức, nếu có, phải là một ước của hệ số tự do.

Ví dụ 8. Phân tích đa thức $f(x) = x^3 + x^2 + 4$ thành nhân tử.

Lời giải

Lần lượt kiểm tra với $x = \pm 1, \pm 2, 4$, ta thấy $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 4 = 0$. Đa thức $f(x)$ có một nghiệm $x = -2$, do đó nó chứa một nhân tử là $x + 2$. Từ đó, ta tách như sau

$$\begin{aligned}\text{Cách 1 : } f(x) &= x^3 + 2x^2 - x^2 + 4 = (x^3 + 2x^2) - (x^2 - 4) = x^2(x + 2) - (x - 2)(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 - x + 2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cách 2 : } f(x) &= (x^3 + 8) + (x^2 - 4) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (x - 2)(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 - x + 2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cách 3 : } f(x) &= (x^3 + 4x^2 + 4x) - (3x^2 + 6x) + (2x + 4) \\ &= x(x + 2)^2 - 3x(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 - x + 2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cách 4 : } f(x) &= (x^3 - x^2 + 2x) + (2x^2 - 2x + 4) = x(x^2 - x + 2) + 2(x^2 - x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 - x + 2).\end{aligned}$$

Từ định lý trên, ta có các hệ quả sau :

Hệ quả 1. Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì $f(x)$ có một nghiệm là $x = 1$. Từ đó $f(x)$ có một nhân tử là $x - 1$.

Chẳng hạn, đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ có $1 + (-5) + 8 + (-4) = 0$ nên $x = 1$ là một nghiệm của đa thức. Đa thức có một nhân tử là $x - 1$. Ta phân tích như sau :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^3 - x^2) - (4x^2 - 4x) + (4x - 4) = x^2(x - 1) - 4x(x - 1) + 4(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (x - 1)(x - 2)^2\end{aligned}$$

Hệ quả 2. Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ thì $f(x)$ có một nghiệm $x = -1$. Từ đó $f(x)$ có một nhân tử là $x + 1$.

Chẳng hạn, đa thức $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ có $1 + 3 = -5 + 9$ nên $x = -1$ là một nghiệm của đa thức. Đa thức có một nhân tử là $x + 1$. Ta phân tích như sau :

$$f(x) = (x^3 + x^2) - (6x^2 + 6x) + (9x + 9) = x^2(x + 1) - 6x(x + 1) + 9(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x - 3)^2$$

Hệ quả 3. Nếu $f(x)$ có nghiệm nguyên $x = a$ và $f(1)$ và $f(-1)$ khác 0 thì $\frac{f'(1)}{a-1}$ và $\frac{f'(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên.

Ví dụ 9. Phân tích đa thức $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 9x - 18$ thành nhân tử.

Hướng dẫn

Các ước của 18 là $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

$f(1) = -18, f(-1) = -44$, nên ± 1 không phải là nghiệm của $f(x)$.

Dễ thấy không là số nguyên nên $-3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$ không là nghiệm của $f(x)$. Chỉ còn -2 và 3 . Kiểm tra ta thấy 3 là nghiệm của $f(x)$. Do đó, ta tách các hạng tử như sau :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 12x^2 - x^2 + 3x + 6x - 18 \\ &= 4x^2(x - 3) - x(x - 3) + 6(x - 3)(1) \\ &= (x - 3)(4x^2 - x + 6) \end{aligned}$$

Hệ quả 4. Nếu $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ là các số nguyên có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$, trong đó $p, q \in \mathbb{Z}$ và $(p, q) = 1$, thì p là ước của a_0 , q là ước dương của a_n .

Ví dụ 10. Phân tích đa thức $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$ thành nhân tử.

Hướng dẫn

Các ước của -5 là $\pm 1, \pm 5$. Thử trực tiếp ta thấy các số này không là nghiệm của $f(x)$. Như vậy $f(x)$ không có nghiệm nguyên. Xét các số $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}$, ta thấy $\frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức, do đó đa thức có một nhân tử là $3x - 1$. Ta phân tích như sau :

$$f(x) = (3x^3 - x^2) - (6x^2 - 2x) + (15x - 5) = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5).$$

IV. PHƯƠNG PHÁP THÊM VÀ BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ

1. Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hiệu hai bình phương

Ví dụ 12. Phân tích đa thức $x^4 + x^2 + 1$ thành nhân tử

Lời giải

Cách 1 : $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$

Cách 2 : $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 - x^3 + x^2) + (x^3 + 1) = x^2(x^2 - x + 1) + (x + 1)(x^2 - x + 1)$
 $= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$

Cách 3 : $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + x^3 + x^2) - (x^3 - 1) = x^2(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Ví dụ 13. Phân tích đa thức $x^4 + 16$ thành nhân tử

Lời giải

$$\text{Cách 1 : } x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2 : } x^4 + 4 &= (x^4 + 2x^3 + 2x^2) - (2x^3 + 4x^2 + 4x) + (2x^2 + 4x + 4) \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

2. Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung

Ví dụ 14. Phân tích đa thức $x^5 + x - 1$ thành nhân tử

Lời giải

Cách 1.

$$\begin{aligned} x^5 + x - 1 &= x^5 - x^4 + x^3 + x^4 - x^3 + x^2 - x^2 + x - 1 \\ &= x^3(x^2 - x + 1) - x^2(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 - 1). \end{aligned}$$

Cách 2. Thêm và bớt x^2 :

$$\begin{aligned} x^5 + x - 1 &= x^5 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)[x^2(x + 1) - 1] = (x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 - 1). \end{aligned}$$

Ví dụ 15. Phân tích đa thức $x^7 + x + 1$ thành nhân tử

Lời giải

$$\begin{aligned} x^7 + x^2 + 1 &= x^7 - x + x^2 + x + 1 = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 - x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

Lưu ý : Các đa thức dạng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ như $x^7 + x^2 + 1$, $x^4 + x^5 + 1$ đều chứa nhân tử là $x^2 + x + 1$.

V. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Đặt ẩn phụ để đưa về dạng tam thức bậc hai rồi sử dụng các phương pháp cơ bản.

Ví dụ 16. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$$

Lời giải

$$x(x+4)(x+6)(x+10) + 128 = (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128$$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức đã cho có dạng :

$$\begin{aligned}(y-12)(y+12) + 128 &= y^2 - 16 = (y+4)(y-4) = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 8) \\ &= (x+2)(x+8)(x^2 + 10x + 8)\end{aligned}$$

Nhận xét: Nhờ phương pháp đổi biến ta đã đưa đa thức bậc 4 đối với x thành đa thức bậc 2 đối với y .

Ví dụ 17. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1.$$

Lời giải

Cách 1. Giả sử $x \neq 0$. Ta viết đa thức dưới dạng :

Đặt $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$. Do đó :

$$\begin{aligned}A &= x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2 \\ &= \left[x \left(x - \frac{1}{x} \right) + 3x \right]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2.\end{aligned}$$

Dạng phân tích này cũng đúng với $x = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Cách 2. } A &= x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x + 1 = x^4 + (6x^3 - 2x^2) + (9x^2 - 6x + 1) \\ &= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2.\end{aligned}$$

VI. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Ví dụ 18. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x - 3$$

Lời giải

Thử với $x = \pm 1; \pm 3$ không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

$$\begin{aligned}(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) &= x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd \\ &= x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3.\end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số ta được :

Xét $bd = 3$ với $b, d \in \mathbb{Z}$, $b \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Với $b = 3$ thì $d = 1$, hệ điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases} a + c = -6 \\ ac = 8 \\ a + 3c = -14 \end{cases} \Rightarrow 2c = -14 - (-6) = -8. \text{ Do đó } c = -4, a = -2.$$

$$\text{Vậy } x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1).$$

VII. PHƯƠNG PHÁP XÉT GIÁ TRỊ RIÊNG

Trong phương pháp này, trước hết ta xác định dạng các nhân tử chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định các nhân tử còn lại.

Ví dụ 19. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z(x - y).$$

Lời giải

Thay x bởi y thì $P = y^2(y - z) + y^2(z - y) = 0$. Như vậy P chứa thừa số $(x - y)$.

Ta thấy nếu thay x bởi y , thay y bởi z , thay z bởi x thì P không đổi (đa thức P có thể hoán vị vòng quanh). Do đó nếu P đã chứa thừa số $(x - y)$ thì cũng chứa thừa số $(y - z)$, $(z - x)$. Vậy P có dạng $k(x - y)(y - z)(z - x)$.

Ta thấy k phải là hằng số vì P có bậc 3 đối với tập hợp các biến x, y, z , còn tích

$(x - y)(y - z)(z - x)$ cũng có bậc 3 đối với tập hợp các biến x, y, z .

Vì đẳng thức $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = k(x - y)(y - z)(z - x)$ đúng với mọi x, y, z nên ta gán cho các biến x, y, z các giá trị riêng, chẳng hạn $x = 2, y = 1, z = 0$ ta được:

$$4.1 + 1.(-2) + 0 = k.1.1.(-2) \text{ suy ra } k = 1$$

$$\text{Vậy } P = -(x - y)(y - z)(z - x) = (x - y)(y - z)(x - z)$$

VIII. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ MỘT SỐ ĐA THỨC ĐẶC BIỆT

1. Đưa về đa thức : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Ví dụ 20. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc \\
 & = [(a + b)^3 + c^3] - 3ab(a + b + c) \\
 & = (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) \\
 & = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
 \end{aligned}$$

b) Đặt $x - y = a$, $y - z = b$, $z - x = c$ thì $a + b + c = 0$. Theo câu a) ta có :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

$$\text{Vậy } (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$$

2. Đưa về đa thức : $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

Ví dụ 21. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3. \\
 \text{b)} \quad & 8(x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (y + z)^3 - (z + x)^3.
 \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = [(a + b) + c]^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\
 & = (a + b)^3 + c^3 + 3c(a + b)(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3 \\
 & = (a + b)^3 + 3c(a + b)(a + b + c) - (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\
 & = (a + b)[(a + b)^2 + 3c(a + b + c) - (a^2 - ab + b^2)] \\
 & = 3(a + b)(ab + bc + ca + c^2) = 3(a + b)[b(a + c) + c(a + c)] \\
 & = 3(a + b)(b + c)(c + a).
 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \text{Đặt } x + y = a, y + z = b, z + x = c \text{ thì } a + b + c = 2(a + b + c).$$

$$\text{Đa thức đã cho có dạng : } (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

Theo kết quả câu a) ta có :

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Hay } & 8(x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (y + z)^3 - (z + x)^3 \\
 & = 3(x + 2y + z)(y + 2z + x)(z + 2x + y)
 \end{aligned}$$

II. Bài tập:

Bài tập 1: Phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $16x^3y + 0,25yz^3$
2. $x^4 - 4x^3 + 4x^2$
3. $2ab^2 - a^2b - b^3$
4. $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$
5. $x^3 + x^2 - 4x - 4$
6. $x^3 - x^2 - x + 1$
7. $x^4 + x^3 + x^2 - 1$
8. $x^2y^2 + 1 - x^2 - y^2$
10. $x^4 - x^2 + 2x - 1$
11. $3a - 3b + a^2 - 2ab + b^2$
12. $a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1$
13. $a^2 - b^2 - 4a + 4b$
14. $a^3 - b^3 - 3a + 3b$
15. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$
16. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$
17. $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$
18. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - 1)^2$
19. $(xy + 4)^2 - (2x + 2y)^2$
20. $(a^2 + b^2 + ab)^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$
21. $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 4c^2$
22. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$
23. $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2$
24. $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$
25. $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$
26. $(a + b)^3 - (a - b)^3$
27. $X^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$
28. $X^{m+4} + x^{m+3} - x - 1$
29. $(x + y)^3 - x^3 - y^3$
30. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$
31. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$
32. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
33. $(x + y)^5 - x^5 - y^5$
34. $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$

Bài tập 2: Phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $x^2 - 6x + 8$
2. $x^2 - 7xy + 10y^2$
3. $a^2 - 5a - 14$
4. $2m^2 + 10m + 8$
5. $4p^2 - 36p + 56$
6. $x^3 - 5x^2 - 14x$
7. $a^4 + a^2 + 1$
8. $a^4 + a^2 - 2$
9. $x^4 + 4x^2 + 5$
23. $x^3 - 5x^2y - 14xy^2$
24. $x^4 - 7x^2 + 1$
25. $4x^4 - 12x^2 + 1$
26. $x^2 + 8x + 7$
27. $x^2 - 13x + 36$
28. $x^2 + 3x - 18$
29. $x^2 - 5x - 24$
30. $3x^2 - 16x + 5$
31. $8x^2 + 30x + 7$

10. $x^3 - 10x - 12$
11. $x^3 - 7x - 6$
12. $x^2 - 7x + 12$
13. $x^2 - 5x - 14$
14. $4x^2 - 3x - 1$
15. $3x^2 - 7x + 4$
16. $2x^2 - 7x + 3$
17. $6x^3 - 17x^2 + 14x - 3$
18. $4x^3 - 25x^2 - 53x - 24$
19. $x^4 - 34x^2 + 225$
20. $4x^4 - 37x^2 + 9$
21. $x^4 + 3x^3 + x^2 - 12x - 20$
22. $2x^4 + 5x^3 + 13x^2 + 25x + 15$
32. $2x^2 - 5x - 12$
33. $6x^2 - 7x - 20$
34. $x^2 - 7x + 10$
35. $x^2 - 10x + 16$
36. $3x^2 - 14x + 11$
37. $5x^2 + 8x - 13$
38. $x^2 + 19x + 60$
39. $x^4 + 4x^2 - 5$
40. $x^3 - 19x + 30$
41. $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$
42. $4x^2 - 17xy + 13y^2$
43. $-7x^2 + 5xy + 12y^2$
44. $x^3 + 4x^2 - 31x - 70$

Bài tập 3: Phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $x^4 + x^2 + 1$
2. $x^4 - 3x^2 + 9$
3. $x^4 + 3x^2 + 4$
4. $2x^4 - x^2 - 1$
5. $x^4y^4 + 4$
6. $x^4y^4 + 64$
7. $4x^4y^4 + 1$
8. $32x^4 + 1$
9. $x^4 + 4y^4$
10. $x^7 + x^2 + 1$
11. $x^8 + x + 1$
12. $x^8 + x^7 + 1$
13. $x^8 + 3x^4 + 1$
14. $x^{10} + x^5 + 1$
15. $x^5 + x + 1$
17. $x^5 - x^4 - 1$
18. $x^{12} - 3x^6 + 1$
19. $x^8 - 3x^4 + 1$
20. $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$
21. $m^3 - 6m^2 + 11m - 6$
22. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$
23. $x^3 + 4x^2 - 29x + 24$
24. $x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$
25. $x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
26. $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
27. $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$
28. $x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
29. $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

16. $x^5 + x^4 + 1$

Bài tập 4: Phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $x^2 + 2xy - 8y^2 + 2xz + 14yz - 3z^2$

2. $3x^2 - 22xy - 4x + 8y + 7y^2 + 1$

3. $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3$

4. $2x^2 - 7xy + 3y^2 + 5xz - 5yz + 2z^2$

5. $x^2 + 3xy + 2y^2 + 3xz + 5yz + 2z^2$

6. $x^2 - 8xy + 15y^2 + 2x - 4y - 3$

7. $x^4 - 13x^2 + 36$

8. $x^4 + 3x^2 - 2x + 3$

9. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Bài tập 5: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

2. $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 - (x - y)a^3$

3. $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$

4. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

5. $3x^5 - 10x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 10x + 8$

6. $5x^4 + 24x^3 - 15x^2 - 118x + 24$

7. $15x^3 + 29x^2 - 8x - 12$

8. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$

9. $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$

Bài tập 6: Phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $a(b + c)(b^2 - c^2) + b(a + c)(a^2 - c^2) + c(a + b)(a^2 - b^2)$

2. $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

3. $a(b^2 - c^2) - b(a^2 - c^2) + c(a^2 - b^2)$

4. $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$

5. $(x + y)^7 - x^7 - y^7$

6. $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + abc$

7. $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$

$$8. a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$$

$$9. a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$$

$$10. abc - (ab + bc + ac) + (a + b + c) - 1$$

Bài tập 7: Phân tích đa thức thành nhân tử.

$$1. (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$$

$$2. (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$$

$$3. (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$$

$$4. (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$$

$$5. (x^2 + 2x)^2 + 9x^2 + 18x + 20$$

$$6. x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35$$

$$7. (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$$

$$8. (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$$

$$9. 4(x^2 + 15x + 50)(x^2 + 18x + 72) - 3x^2$$

Chuyên đề 1: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Tiết 1 → 3 :

Các ví dụ và phương pháp giải

Ví dụ 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

a. $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$

b. $x - 1 + x^{n+3} - x^n$.

Giải:

a. Dùng phương pháp đặt nhân tử chung

$$\begin{aligned} a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1) &= ax^2 + a - a^2x - x \\ &= ax(x - a) - (x - a) = (x - a)(ax - 1) \end{aligned}$$

b. Dùng phương pháp đặt nhân tử chung rồi sử dụng hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} x - 1 + x^{n+3} - x^n &= x^n(x^3 - 1) + (x - 1) \\ &= x^n(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1) = (x - 1)[x^n(x^2 + x + 1) + 1] \\ &= (x - 1)(x^{n+2} + x^{n+1} + x^n + 1) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Phân tích đa thức thành nhân tử :

a. $x^8 + 3x^4 + 4$.

b. $x^6 - x^4 - 2x^3 + 2x^2$.

Giải:

a. Dùng phương pháp tách hạng tử rồi sử dụng hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} x^8 + 3x^4 + 4 &= (x^8 + 4x^4 + 4) - x^4 \\ &= (x^4 + 2)^2 - (x^2)^2 \\ &= (x^4 - x^2 + 2)(x^4 + x^2 + 2) \end{aligned}$$

b. Dùng phương pháp đặt nhân tử chung , tách hạng tử , nhóm thích hợp để sử dụng hằng đẳng thức

$$x^6 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 = x^2(x^4 - x^2 - 2x + 2)$$

$$\begin{aligned}
&= x^2[(x^4 - 2x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1)] \\
&= x^2[(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2] = x^2(x - 1)^2[(x + 1)^2 + 1] \\
&= x^2(x - 1)^2[x^2 + 2x + 2]
\end{aligned}$$

Ví dụ 3:

Phân tích đa thức thành nhân tử :

a. $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$

b. $x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007$

Giải:

a. Dùng phương pháp tách hạng tử rồi nhóm thích hợp:

$$2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$$

$$\begin{aligned}
&2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc \\
&= 2a^2b + 4ab^2 - a^2c - 2abc + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 2abc = \\
&= 2ab(a + 2b) - ac(a + 2b) + c^2(a + 2b) - 2bc(a + 2b) \\
&= (a + 2b)(2ab - ac + c^2 - 2bc) = (a + 2b)[a(2b - c) - c(2b - c)] \\
&= (a + 2b)(2b - c)(a - c)
\end{aligned}$$

b. Dùng phương pháp đặt nhân tử chung rồi sử dụng hằng đẳng thức

$$\begin{aligned}
&= (x^4 - x) + 2007x^2 + 2007x + 2007 \\
x^4 + 2007x^2 + 206x + 2007 &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2007)
\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Phân tích đa thức thành nhân tử : a. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

b. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

Giải: Sử dụng các hằng đẳng thức

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 + b^2 - ab) \\
&= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] \\
&= (a + b)^3 - 3ab(a + b). \text{ Do đó:} \\
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= [(a + b)^3 + c^3] - 3ab(a + b) - 3abc \\
&= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) \\
&= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b. (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= [(a + b + c)^3 - a^3] - (b + c)^3 \\
&= (b + c)[(a + b + c)^2 + a(a + b + c) + a^2] - (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\
&= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) = 3(b + c)(a + c)(a + b)
\end{aligned}$$

Ví dụ 5: Cho $a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (a + b)^3 = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 \\
\text{Giải: Vì } a + b + c &= 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc
\end{aligned}$$

Ví dụ 6: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$, và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Giải: Biến đổi $4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 - 5ab = 0$

$$\Leftrightarrow (4a - b)(a - b) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Do đó $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$

Ví dụ 7: Cho a, b, c và x, y, z khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng nếu:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ thì } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Giải: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 &\Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 \\ &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{ayz + bxz + cxy}{abc} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{aligned}$$

Tiết 4 -9

Bài tập vận dụng - Tự luyện

1. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a. $x^2 - x - 12$

b. $x^2 + 8x + 15$

c. $x^2 - 6x - 16$

d. $x^3 - x^2 + x + 3$

2. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) - 15.$$

3. Phân tích đa thức thành nhân tử

1. $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3.$

2. $bc(b + c) + ca(c + a) + ba(a + b) + 2abc.$

3. $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz.$

4. Tìm x, y thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2x + 12y - 4z - 14.$

5. Cho $a + |b + c + d| = 0.$

$$\text{Chứng minh rằng } a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab + cd).$$

6. Chứng minh rằng nếu $x + y + z = 0$ thì :

$$2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2).$$

7. Chứng minh rằng với x, y nguyên thì :

$$A = y^4 + (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y)$$

là số chính phương.

8. Biết $a - b = 7$. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$a^2(a + 1) - b^2(b - 1) + ab - 3ab(a - b + 1)$$

9. Cho x, y, z là 3 số thỏa mãn đồng thời:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$
 . Hãy tính giá trị biểu thức

$$P = (x-1)^{17} + (y-1)^9 + (z-1)^{1997}.$$

10.

a. Tính $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$.

b. Cho $a + b + c = 9$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 53$.

Tính $ab + bc + ca$.

11. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x + y + z = 0 \text{ và } xy + yz + zx = 0.$$

Hãy tính giá trị của Biểu thức : $S = (x-1)^{2005} + (y-1)^{2006} + (z+1)^{2007}$

12. Cho 3 số a, b, c thỏa điều kiện : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Tính $Q = (a^{25} + b^{25})(b^3 + c^3)(c^{2008} - a^{2008})$.

=====o0o=====

HƯỚNG DẪN:

1. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a. $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$

b. $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$

c. $x^2 - 6x - 16 = (x+2)(x-8)$

d. $x^3 - x^2 + x + 3 = (x+1)(x^2 - 2x + 3)$

2. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) - 15 = (x^2 - x - 5)(x^2 - x + 3).$$

3. Phân tích đa thức thành nhân tử

1. $(a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3$

$$= (x-y)(x-a)(y-a)(x+y+a)$$

2. $bc(b+c) + ca(c+a) + ba(a+b) + 2abc$

$$= (a+b)(b+c)(c+a)$$

3. $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$

$$(x+y)(y+z)(z+x)$$

4. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2x + 12y - 4z - 14$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (2y-3)^2 + (z-2)^2$$

5. Từ $a + b + c + d = 0 \Rightarrow (a+b)^3 = -(c+d)^3$ Biến đổi tiếp ta được : $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c+d)(ab+cd)$.

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Rightarrow$$

$$(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

6. Nếu $x + y + z = 0$ thì : $\Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy + yz + zx) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(xy + yz + zx) = 6xyz(x^2 + y^2 + z^2) (*)$$

$$- 2xyz(xy + yz + zx) = xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

Nhưng: $(x + y + z)^2 = 0 \Rightarrow -2xyz(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 (**)$

Thay (**) vào (*) ta được:

$$2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2).$$

7. Với x, y nguyên thì :

$$A = y^4 + (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)$$

$$= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

8. Biến đổi $a^2(a+1) - b^2(b-1) + ab - 3ab(a-b+1) = (a-b)^2(a-b+1)$

9. Từ
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + x = 0 \end{cases} \Rightarrow P = -2$$

10.

a. Sử dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2$; S = 5151

b. Sử dụng hằng đẳng thức $(a+b+c)^2$; P = 14

11. Từ giả thiết suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ suy ra: $x = y = z = 0$; S = 0

12. Từ: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. $\therefore (a+b)(b+c)(c+a) = 0$

Tính được Q = 0

=====o0o=====

Chuyên đề 4:

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A. CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Phương pháp đối tượng dương

*) Để chứng minh: $A \geq B$

Ta biến đổi $A \geq B \Leftrightarrow A_1 \geq B_1 \geq \dots \geq A_n \geq B_n$ (đây là bất đẳng thức đúng)

Hoặc từ bất đẳng thức đúng $A_n \geq B_n$, ta biến đổi $A_n \geq B_n \Leftrightarrow A_{n-1} \geq B_{n-1} \geq \dots \geq A_1 \geq B_1 \Leftrightarrow A \geq B$

Ví dụ 1.1 Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có:

$$a) 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \quad (1) \quad b) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

Giải

a) Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (2)$

Do bất đẳng thức (2) đúng nên bất đẳng thức (1) được chứng minh.

b) Ta có: (2)

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) luôn đúng suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.2 Chứng minh rằng:

a) $2(a^4 + b^4) \geq (a+b)(a^3 + b^3) \quad (1)$

b) $3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3) \quad (1)$

Giải.

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 - (a^4 + a^3b + ab^3 + b^4) \geq 0 \Leftrightarrow (a^4 - a^3b) + (b^4 - ab^3) \geq 0$
 $\Leftrightarrow a^3(a-b) - b^3(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right] \geq 0 \quad (2)$

Do bất đẳng thức (2) đúng suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3a^4 + 3b^4 + 3c^4 - (a^4 + a^3b + a^3c + b^4 + ab^3 + b^3c + ac^3 + bc^3 + c^4)$
 $\Leftrightarrow (a^4 + b^4 - a^3b - ab^3) + (b^4 + c^4 - b^3c - bc^3) + (c^4 + a^4 - a^3c - ac^3) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) + (b-c)^2(b^2 + bc + c^2) + (c-a)^2(c^2 + ca + a^2) \geq 0 \quad (2)$

Do bất đẳng thức (2) đúng suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng:

a) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \quad (1) \quad \text{b) } \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$
(1)

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$
 $\Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0 \quad (2)$

Bất đẳng thức (2) luôn đúng suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có: (1) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq (a+c)^2 + (b+d)^2$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd \quad (2)$

+) Nếu $ac + bd < 0$ thì (2) đúng.

+) Nếu $ac + bd \geq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 \Leftrightarrow (ad - bd)^2 \geq 0 \quad (*)$$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \quad (1)$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow a^3c + b^3a + c^2b - a^2bc - b^2ac - c^2ab \geq 0$
 $\Leftrightarrow ab(a^2 - 2ab + b^2) + ac(a^2 - 2ab + c^2) + bc(b^2 - 2bc + c^2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow ab(a-b)^2 + ac(a-c)^2 + bc(b-c)^2 \geq 0 \quad (*)$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.5. Cho $a, b, c > 0$. CMR: $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc \quad (1)$

Giải

Giả sử $a, b \geq c > 0$.

Khi đó ta có: (1) $\Leftrightarrow 3abc - a^2(b+c-a) - b^2(c+a-b) - c^2(a+b-c) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3abc - a(a^2 - ab - ac + bc) + b(b^2 - bc - ba + ac) + c(c^2 - ac - bc + ab) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc) + c(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0 \quad (*)$$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng (Vì $a, b \geq c > 0$). Suy ra điều phải chứng minh.

2. Phương pháp biến đổi đồng nhất.

Để chứng minh BĐT: $A \geq B$. Ta biến đổi biểu thức $A - B$ thành tổng các biểu thức có giá trị không âm.

Ví dụ 2.1. Chứng minh rằng:

$$a) \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + ac + ad \quad (1) \qquad b) \quad a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc \quad (1)$$

Giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad &= \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2 \right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2 \right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2 \right) + \frac{a^2}{4} \\ &= \left(\frac{a}{2} - b \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 + \frac{a^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + ac + ad \quad (\text{đpcm})$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Ta có: } a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 4ac - 8bc &= (a^2 - 4ab + 4b^2) + 4c^2 + (4ac - 8bc) \\ &= (a - 2b)^2 + 2(a - 2b) \cdot 2c + (2c)^2 \\ &= (a - 2b + 2c)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc \quad (\text{đpcm})$$

Ví dụ 2.2. Chứng minh rằng:

$$a) \quad 4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \quad \text{với } a, b > 0.$$

$$b) \quad 8(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \quad \text{với } a, b, c > 0.$$

$$c) \quad (a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \quad \text{với } a, b, c \geq 0.$$

Giải

$$a) \text{ Ta có: } 4(a^3 + b^3) - (a+b)^3 = (a-b)[4(a^2 - ab + b^2) - (a+b)^2] = 3(a+b)(a-b)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

b) Ta có:

$$8(a^3 + b^3 + c^3) - (a+b)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3 = \dots = 3(a+b)(a-b)^2 + 4(a+c)(a-c)^2 + 3(b+c)(b-c)^2 \geq 0$$

$$c) \text{ Ta có: } (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 - 24abc = \dots = 3b(a-c)^2 + 3c(a-b)^2 + 3a(b-c)^2 \geq 0$$

Ví dụ 2.3. Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$a) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \qquad b) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \qquad c) \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Giải

$$a) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{b(a+b) + a(b+c) - 4ab}{ab(a+b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$$

$$b) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{9}{a+b+c} = \frac{bc(a+b+c) + ac(a+b+c) + ab(a+b+c)}{abc(a+b+c)}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ac} \geq 0$$

$$c) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{(a-b) + (a-c)}{2(b+c)} + \frac{(b-a) + (b-c)}{2(c+a)} + \frac{(c-a) + (c-b)}{2(a+b)}$$

$$= \frac{1}{2}(a-b) \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) + \frac{1}{2}(b-c) \left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} \right) + \frac{1}{2}(c-a) \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(a+c)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \right] \geq 0$$

Ví dụ 2.4

a) Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (Bất đẳng thức Cô Si)

b) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (Bất đẳng thức Cô Si)

c) Cho $a \geq b \geq c$ và $x \leq y \leq z$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)(x+y+z) \geq 3(ax+by+cz)$ (BĐT Trê-B-Sép)

Giải

a) Ta có: $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

b) Ta có: $a+b+c-3\sqrt[3]{abc} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}) \left[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c})^2 \right] \geq 0$

c) Ta có:

$$(a+b+c)(x+y+z) - 3(ax+by+cz) = (y-x)(a-b) + (z-x)(b-c) + (x-z)(c-a) \geq 0$$

Ví dụ 2.5 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$a) \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$$

$$b) \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Giải

a) Ta có: $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - (a+b+c) = \frac{c}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{b}{2} \cdot \frac{(c-a)^2}{ca} + \frac{a}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{bc} \geq 0$

b) Ta có:

$$\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right)^2 - 3(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c(a^2-b^2)}{ab} \right)^2 + \left(\frac{a(b^2-c^2)}{bc} \right)^2 + \left(\frac{b(c^2-a^2)}{ca} \right)^2 \right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Ví dụ 2.6. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \quad (\text{nếu } ab > 1) \\ a^2 + b^2 \leq 2)$$

$$\text{b) } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \quad (\text{nếu}$$

$$\text{c) } \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \geq \frac{2}{1-ab} \quad (\text{nếu } -1 < a, b < 1) \quad \text{d) } \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \quad (\text{nếu } a, b > 0)$$

Giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} = \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) = \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} = \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}$$

$$\text{Vì } |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} ab+1 \geq 0 \\ ab-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \leq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

c) Ta có:

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} - \frac{2}{1-ab} = \left(\frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{1-ab} \right) + \left(\frac{1}{1-b^2} - \frac{1}{1-ab} \right) = \frac{(a-b)^2(1-a^2b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-ab)^2} \geq 0$$

$$\text{d) Ta có: } \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} - \frac{1}{1+ab} = \frac{ab(a-b)^2 + (ab-1)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)} \geq 0$$

3. Phương pháp sử dụng tính chất của bất đẳng thức

Cơ sở của phương pháp này là các tính chất của bất đẳng thức và một số bất đẳng thức cơ bản như:

+) Nếu $a \geq b$ và $b \geq c$ thì $a \geq c$

+) Nếu $a \geq b$ và $ab > 0$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

+) Nếu $\begin{cases} a \geq b \geq 0 \\ m \geq n \geq 0 \end{cases}$ thì $a.m \geq b.n$.

+) $(a-b)^2 \geq 0$

+) Nếu $a, b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Ví dụ 3.1 Cho $a+b > 1$. Chứng minh: $a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$

Giải

$$\text{Ta có: } (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} > \frac{1}{8}$$

Ví dụ 3.2 Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$$

$$\text{b) } \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$$

Giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{x^2}{y} \geq x^2 + xy - y^2 \quad (\text{với } x, y > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq (a^2 + ab - b^2) + (b^2 + bc - c^2) + (c^2 + ca - a^2) = ab + bc + ca$$

b) Ta có: $\frac{x^3}{y^2} \geq 3x - 2y$ (với $x, y > 0$)

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq (3a - 2b) + (3b - 2c) + (3c - 2a) = a + b + c$$

Ví dụ 3.3 Cho $a, b, c > 0$. CMR:

a) $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

b) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Giải

a) Ta dễ dàng chứng minh được $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c \Rightarrow$ (đpcm)

b) Ta dễ dàng chứng minh được $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a \Rightarrow$ (đpcm)

Ví dụ 3.4 Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

Giải:

Ta có: Với $a, b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Từ đó suy ra

$$\frac{16}{2x+y+z} = \frac{16}{(x+y)+(z+x)} \leq \frac{4}{x+y} + \frac{4}{z+x} \leq \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad (1)$$

$$\frac{16}{x+2y+z} = \frac{16}{(x+y)+(y+z)} \leq \frac{4}{x+y} + \frac{4}{y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \quad (2)$$

$$\frac{16}{x+y+2z} = \frac{16}{(y+z)+(z+x)} \leq \frac{4}{y+z} + \frac{4}{z+x} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow \frac{16}{2x+y+z} + \frac{16}{x+2y+z} + \frac{16}{x+y+2z} \leq \frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} = 16 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 3.5.

a) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

b) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $abc = ab + bc + ca$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{b+2c+3a} + \frac{1}{c+2a+3b} \leq \frac{3}{16}$$

Giải

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với $a, b > 0$) Ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{2b} = \frac{2}{b} \quad (1)$$

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{4}{2c} = \frac{2}{c} \quad (2)$$

$$\frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{4}{2a} = \frac{2}{a} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ (đpcm)

b) Tổng tự: Áp dụng BĐT $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (với $a, b > 0$) Ta có:

$$\frac{16}{a+2b+3c} = \frac{16}{(c+a)+2(b+c)} \leq \frac{4}{c+a} + \frac{4}{2(b+c)} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \quad (1)$$

$$\frac{16}{b+2c+3a} = \frac{16}{(a+b)+2(c+a)} \leq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{2(c+a)} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2a} \quad (2)$$

$$\frac{16}{c+2a+3b} = \frac{16}{(b+c)+2(a+b)} \leq \frac{4}{b+c} + \frac{4}{2(a+b)} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow 16 \left(\frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{b+2c+3a} + \frac{1}{c+2a+3b} \right) \leq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác: } abc = ab + bc + ca \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ (đpcm)

Ví dụ 3.5

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad \text{b) } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2}$$

Giải

$$\text{a) Áp dụng BĐT: Nếu } 0 < x < y, m > 0 \text{ thì } \frac{x}{y} < \frac{x+m}{y+m}$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{a+b} < \frac{c+a}{a+b+c}; \quad \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}; \quad \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (\text{đpcm})$$

$$\text{b) Ta có: } a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Tổng tự: } \frac{b}{b^2+1} \leq \frac{1}{2} \text{ và } \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{2}. \text{ Từ đó suy ra } \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác ta lại chứng minh được } \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad (\text{BĐT Net - Bit}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (đpcm)

4. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Cô - Si

$$*) \text{ Với } a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0 \text{ thì } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n \geq 0$

Ví dụ 4.1 Cho $a, b > 0$ thỏa mãn điều kiện: $ab = 1$. CMR: $(a+b+1)(a^2+b^2) + \frac{4}{a+b} \geq 8$

Giải

Áp dụng BĐT “Cô - Si” cho hai số dương a^2 và b^2 ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab = 2 \Rightarrow (a+b+1)(a^2+b^2) + \frac{4}{a+b} \geq 2(a+b+1) + \frac{4}{a+b} = (a+b) + \left(a+b + \frac{4}{a+b}\right) + 2$$

(1)

Tương tự: Cùng áp dụng BĐT Cô - Si ta có:

$$\left. \begin{aligned} a+b &\geq 2\sqrt{ab} = 2 \\ a+b + \frac{4}{a+b} &\geq 2\sqrt{(a+b) \cdot \frac{4}{a+b}} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a+b) + \left(a+b + \frac{4}{a+b}\right) + 2 \geq 2 + 4 + 2 = 8$$

(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (đpcm)

Ví dụ 4.2 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \qquad \text{b) } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Giải

a) Ta có:

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} = \frac{a+b}{2} \left(a+b + \frac{1}{2}\right) \geq \sqrt{ab} \left[\left(a + \frac{1}{4}\right) + \left(b + \frac{1}{4}\right)\right] \geq \sqrt{a \cdot b} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

b) Áp dụng BĐT Cô - Si ta có:

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} = \sqrt{\left(\frac{b+c}{a}\right) \cdot 1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b+c}{a} + 1\right) = \frac{a+b+c}{2a} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta cũng chứng minh được: } \sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c} \quad (2) \quad \text{và} \quad \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) } \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a=b+c \\ b=c+a \\ c=a+b \end{cases} \Leftrightarrow a+b+c=0$ (trái với giả thiết). Vậy dấu “=” không xảy ra.

Ví dụ 4.3 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} \\ \text{b) } & \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + 3 \quad (\text{với } a^2+b^2+c^2=1) \end{aligned}$$

Giải

a) Ta có: $\frac{a^2}{b^2+c^2} \leq \frac{a^2}{2bc} = \frac{a^3}{2abc}$; $\frac{b^2}{c^2+a^2} \leq \frac{b^2}{2ca} = \frac{b^3}{2abc}$; $\frac{c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{c^2}{2ab} = \frac{c^3}{2abc}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} \quad (\text{đpcm})$$

b) Ta có: $\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} = (a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \right)$

$$= \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + 3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + 3$$

Ví dụ 4.4 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Giải

Ta có: $a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{2} \geq ab(a+b) \Leftrightarrow a^3+b^3 \geq ab(a+b)$

$$\Rightarrow \frac{abc}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{abc}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $\frac{abc}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{a}{a+b+c}$ và $\frac{abc}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{b}{a+b+c}$

Cộng vế với vế các BĐT trên, suy ra điều phải chứng minh

Ví dụ 4.5 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3 \quad (1)$$

Giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2+b^2+c^2)$

Mà: $\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq \frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a} + \frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b} + \frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c} = a^2+b^2+c^2$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4.6 Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$

b) $\frac{xy}{x^5+xy+y^5} + \frac{yz}{y^5+yz+z^5} + \frac{zx}{z^5+zx+x^5} \leq 1$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô - Si ta có:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{8} + \frac{1+z}{8} \geq \frac{3x}{4} \Rightarrow \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \geq \frac{3x}{4} - \frac{1+y}{8} - \frac{1+z}{8} \quad (1)$$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $\frac{y^3}{(1+z)(1+x)} \geq \frac{3y}{4} - \frac{1+z}{8} - \frac{1+x}{8} \quad (2)$

$$\text{Và: } \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3z}{4} - \frac{1+x}{8} - \frac{1+y}{8} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow \text{VT} \geq \frac{x+y+z}{2} - \frac{3}{4} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad (\text{đpcm})$$

$$\text{b) Ta có: } x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2 \Rightarrow \frac{(x^4 + y^4)(x+y)}{2} \geq x^2y^2(x+y) \Leftrightarrow x^5 + y^5 \geq x^2y^2(x+y) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x^5 + xy + y^5} \leq \frac{xy}{xy + x^2y^2(x+y)} = \frac{1}{1 + xy(x+y)} = \frac{xyz}{xyz + xy(x+y)} = \frac{z}{x+y+z}$$

$$\text{Tương tự ta cũng chứng minh được: } \frac{yz}{y^5 + yz + z^5} \leq \frac{x}{x+y+z}$$

$$\text{Và } \frac{zx}{z^5 + yz + x^5} \leq \frac{y}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x^5 + xy + y^5} + \frac{yz}{y^5 + yz + z^5} + \frac{zx}{z^5 + zx + x^5} \leq 1 \quad (\text{đpcm})$$

Ví dụ 4.7 Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh: $\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô - Si ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x \\ \frac{y^3}{zx} + z + x \geq 3y \\ \frac{z^3}{xy} + x + y \geq 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \right) + 2(x+y+z) \geq 3(x+y+z) \Rightarrow \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z$$

(đpcm)

5. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski.

Với mọi a, b, c và $x, y, z \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có:

$$*) (a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2). \text{ Dấu "}" xảy ra khi } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

$$*) (a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2). \text{ Dấu "}" xảy ra khi } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Tổng quát:

Với $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ và $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n \in \mathbb{R}$ thì

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n)^2$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra khi } \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$$

Ví dụ 5.1 Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad \text{b) } \frac{n^2}{a} + \frac{m^2}{b} \geq \frac{(n+m)^2}{a+b}$$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$4 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)(a+b) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

b) Ta có: $\left(\frac{n^2}{a} + \frac{m^2}{b} \right)(a+b) \geq \left(\frac{n}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{m}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} \right)^2 = (m+n)^2 \Rightarrow \frac{n^2}{a} + \frac{m^2}{b} \geq \frac{(n+m)^2}{a+b}$

Tổng quát:

*) Với $b_i > 0$; $i = \overline{1, n}$ thì $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}$ (1)

*) Với $a_i b_i > 0$; $i = \overline{1, n}$ thì $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n}$ (2)

Thật vậy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right)(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) &\geq \left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \cdot \sqrt{b_1} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} \cdot \sqrt{b_2} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \cdot \sqrt{b_n} \right)^2 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 \\ \Rightarrow \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} &\geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} \end{aligned}$$

Đặt $a_i b_i = x_i > 0$ thay vào (1) được (2)

Ví dụ 5.2 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ b) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

c) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$ d) $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

Giải

a) Ta có: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c$

b) Ta có: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$

c) Ta có: $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} = \frac{a^4}{ab} + \frac{b^4}{bc} + \frac{c^4}{ca} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{ab+bc+ca} \geq a^2 + b^2 + c^2$

d) Ta có: $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} = \frac{a^4}{ab+ca} + \frac{b^4}{ab+bc} + \frac{c^4}{bc+ca} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

Ví dụ 5.3 Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $\frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 8$

Giải

Ta có: VT = $25\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + 16\left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 42$

$$= (a+b+c) \left(\frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq (a+b+c) \cdot \frac{(5+4+1)^2}{2(a+b+c)} - 42 = 8$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{b+c}{5} = \frac{c+a}{4} = \frac{a+b}{1} \Rightarrow a=0$ (vô lí) $\Rightarrow$ suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5.4 Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopki ta có:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Cho biểu thức $f(x, y, \dots)$

*) Ta nói M là giá trị lớn nhất của $f(x, y, \dots)$ kí hiệu $\max f(x, y, \dots) = M$, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- Với mọi $x, y, \dots$ để $f(x, y, \dots)$ Xác định thì $f(x, y, \dots) \leq M$
- Tồn tại $x_0, y_0, \dots$ sao cho $f(x_0, y_0, \dots) = M$.

*) Ta nói m là giá trị nhỏ nhất của $f(x, y, \dots)$ kí hiệu $\min f(x, y, \dots) = m$, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- Với mọi $x, y, \dots$ để $f(x, y, \dots)$ Xác định thì $f(x, y, \dots) \geq m$
- Tồn tại $x_0, y_0, \dots$ sao cho $f(x_0, y_0, \dots) = m$

I) TÌM GTLN, GTNN CỦA ĐA THỨC BẬC HAI

1. Đa thức bậc hai một biến

Ví dụ 1.1

- a) Tìm GTNN của $A = 3x^2 - 4x + 1$
- b) Tìm GTLN của $B = -5x^2 + 6x - 2$
- c) Tìm GTNN của $C = (x-2)^2 + (x-3)^2$
- d) Cho tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$

Tìm GTNN của P nếu $a > 0$.

Tìm GTNN của P nếu $a < 0$.

Giải

- a) $A = 3 \left(x^2 - 2x \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \right) - \frac{1}{3} = 3 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$. Vậy GTNN của A là $-\frac{1}{3}$. Đạt được khi $x = \frac{2}{3}$.

- b) $B = -5 \left(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} \right) - \frac{1}{5} = -5 \left(x - \frac{3}{5} \right)^2 - \frac{1}{5} \leq -\frac{1}{5}$. Vậy GTLN của B là $-\frac{1}{5}$. Đạt được khi $x = \frac{3}{5}$.

$$c) \quad C = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 6x + 9 = 2\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy GTNN của biểu thức $C = \frac{1}{2}$. Đạt được khi $x = \frac{5}{2}$.

$$d) \text{ Ta có: } P = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Nếu $a > 0$ thì $P \geq c - \frac{b^2}{4a}$. Vậy GTNN của $P = c - \frac{b^2}{4a}$. Đạt được khi $x = -\frac{b}{2a}$

Nếu $a < 0$ thì $P \leq c - \frac{b^2}{4a}$. Vậy GTLN của $P = c - \frac{b^2}{4a}$. Đạt được khi $x = -\frac{b}{2a}$

Ví dụ 1.2

a) Tìm GTNN của $M = x^2 - 3x + 1$ với $x \geq 2$.

b) Tìm GTLN của $N = x^2 - 5x + 1$ với $-3 \leq x \leq 8$.

Giải

a) $M = (x-1)(x-2) - 1 \geq -1$. Vậy GTNN của $M = -1$. Đạt được khi $x = 2$.

b) $N = (x+3)(x-8) + 25 \leq 25$. Vậy GTLN của $N = 25$. Đạt được khi $x = -3, x = 8$

2. Đa thức bậc hai hai biến

a) Đa thức bậc hai hai biến có điều kiện

Ví dụ 2a.1

a) Cho $x + y = 1$. Tìm GTLN của $P = 3xy - 4$

b) Cho $x - 2y = 2$. Tìm GTNN của $Q = x^2 + 2y^2 - x + 3y$

Giải

$$a) \quad x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow P = 3(1-y)y - 4 = -3y^2 + 3y - 4 = -3\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \leq -\frac{13}{4}$$

Vậy GTLN của $P = -\frac{13}{4}$. Đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$

$$b) \quad x - 2y = 2 \Rightarrow x = 2y + 2 \Rightarrow Q = 4y^2 + 8y + 4 + 2y^2 - 2y - 2 + 3y = 6y^2 + 9y + 2 \\ = 6\left(y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}\right) - \frac{11}{8} = 6\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{11}{8} \geq -\frac{11}{8}$$

Vậy GTNN của $Q = -\frac{11}{8}$. Đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Ví dụ 2a.2 Tìm GTLN của của $P = xy$ với x, y thỏa mãn điều kiện:

$$a) \quad x + y = 6 \text{ và } y \geq 4.$$

$$b) \quad x + y = S \text{ và } y \geq a > \frac{S}{2}$$

Giải:

a) $P = (6-y)y = 8 - (y-2)(y-4) \leq 8$. Vậy GTLN của $P = 8$. Đạt được khi $x = 2, y = 4$

b) $Q = (S - y)y = (S - a)a - (y - a)(y + a - S) \leq (S - a)a$. Vậy GTLN của $Q = (S - a)a$

Đạt được khi $x = S - a, y = a$

b) Đa thức bậc hai hai biến

Cho đa thức: $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h$ (1), với $a, b, c \neq 0$

Ta thường đưa $P(x, y)$ về dạng: $P(x, y) = mF^2(x, y) + nG^2(y) + k$ (2)

$$P(x, y) = mH^2(x, y) + nG^2(x) + k \quad (3)$$

Trong đó $G(y), H(x)$ là hai biểu thức bậc nhất một ẩn, $H(x, y)$ là biểu thức bậc nhất hai ẩn.

Chẳng hạn nếu ta biến đổi (1) về (2) với $a, (4ac - b^2) \neq 0$.

$$4aP(x, y) = 4a^2x^2 + 4abxy + 4acy^2 + 4adx + 4aey + 4ah$$

$$= 4a^2x^2 + b^2y^2 + d^2 + 4abxy + 4adx + 2bdy + (4ac - b^2) + 2(2ae - bd)y + 4ah - d^2$$

$$= (2ax + by + d)^2 + (4ac - b^2) \left(y + \frac{2ae - bd}{4ac - b^2} \right)^2 + 4ahd^2 - \frac{(2ae - bd)^2}{4ac - b^2}$$

(Tương tự nhân hai vế của (1) với $4c$ để chuyển về (3))

Ví dụ 3.1

a) Tìm GTNN của $P = x^2 + y^2 + xy + x + y$

b) Tìm GTLN của $Q = -5x^2 - 2xy - 2y^2 + 14x + 10y - 1$

Giải

$$a) 4P = 4x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 4y = (4x^2 + y^2 + 1 + 4xy + 4x + 2y) + 3y^2 + 2y - 1$$

$$= (2x + y + 1)^2 + 3 \left(y + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} \geq -\frac{4}{3}$$

Vậy GTNN của $P = -\frac{4}{3}$. Đạt được khi $x = y = -\frac{1}{3}$.

$$b) -5Q = 25x^2 + 10xy + 10y^2 - 70x - 50y + 5 = (5x - y - 7)^2 + (3y - 6)^2 - 80.$$

$$\Rightarrow Q = -\frac{1}{5}(5x - y - 7)^2 - \frac{9}{5}(y - 2)^2 + 16 \leq 16$$

Vậy GTLN của $Q = 16$. Đạt được khi $x = 1, y = 2$

Ví dụ 3.2

Tìm cặp số (x, y) với y nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện: $x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0$ (*)

Giải

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (y + 1)^2 = 4 \Rightarrow (y + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow (y + 3)(y - 1) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq y \leq 1.$$

Vậy GTNN của $y = -3$. Đạt được khi $x = -6$. Vậy cặp số $(x, y) = (-6; -3)$

Ví dụ 3.3 Cho x, y liên hệ với nhau bởi hệ thức: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 7y^2 + 10 = 0$ (**).

Hãy tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $S = x + y + 1$.

Giải

$$\text{Ta có (**)} \Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 4y^2 + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y+7)^2 + 4y^2 = 9$$

$$\Rightarrow (2x+2y+7)^2 \leq 9 \Leftrightarrow (x+y+5)(x+y+2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ x+y+2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{vì } x+y+2 \leq x+y+5)$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq S \leq -1$$

Vậy GTNN của $S = -4$. Đạt được khi $x = -5, y = 0$. GTLN của $S = -1$. Đạt được khi $x = -2, y = 0$.

II. PHƯƠNG PHÁP MIỀN GIÁ TRỊ

Ví dụ 1. Tìm GTLN, GTNN của $A = \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1}$.

Giải

Biểu thức A nhận giá trị a khi phương trình: $a = \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2 - 4\sqrt{2}x + a-3 = 0 \text{ có nghiệm.} \quad (1)$$

Nếu $a = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Nếu $a \neq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -a^2 + 4a + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 5$.

Vậy GTNN của biểu thức A là -1. Đạt được khi $x = -\sqrt{2}$.

Và GTLN của biểu thức A là 5. Đạt được khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $B = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$.

Giải

Biểu thức B nhận giá trị b khi phương trình $b = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow bx^2 - x + by^2 - 2y + 7b - 1 = 0 \quad (2) \text{ có nghiệm.}$$

Trong đó x là ẩn, y là tham số và b là tham số có điều kiện.

Nếu $b = 0 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$

Nếu $b \neq 0$ thì PT (2) có nghiệm x khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4b(by^2 - 2y + 7b - 1) \geq 0 \quad (3)$

Coi (3) là bất phương trình ẩn y. BPT này xảy ra với mọi giá trị của y khi

$$16b^2 + 4b^2(-28b^2 + 4b + 1) \geq 0$$

Vậy GTNN của biểu thức $B = -\frac{5}{14}$. Đạt được khi $x = -\frac{7}{5}$ và $y = -\frac{14}{5}$.

GTLN của biểu thức $B = \frac{1}{2}$. Đạt được khi $x = 1$ và $y = 2$.

III. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC.

1. Sử dụng BĐT Cô - Si.

Ví dụ 1.1. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $A = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$ với $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Ta có: $A^2 = 3x-5+7-3x+2\sqrt{(3x-5)(7-3x)} = 2+2\sqrt{(3x-5)(7-3x)}$

$\Rightarrow A^2 \geq 2 \Rightarrow A \geq \sqrt{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $\sqrt{2}$. Đạt được khi $x = \frac{5}{3}$ và $y = \frac{7}{3}$.

(Biểu thức được cho dưới dạng tổng hai căn thức. Hai biểu thức lấy căn có tổng là hằng số)

Ví dụ 1.2. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 6$. Tìm GTNN của biểu thức: P

$$= 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}.$$

Giải

Ta có: $P = \frac{3}{2}(x+y) + \frac{3x}{2} + \frac{6}{x} + \frac{y}{2} + \frac{8}{y} \geq \frac{3}{2} \cdot 6 + 2\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{6}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2} \cdot \frac{8}{y}} = 9 + 6 + 4 = 19$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 19. Đạt được khi $x = 2$ và $y = 4$.

Ví dụ 1.3. Tìm GTLN của biểu thức: $M = \frac{x\sqrt{y-2} + y\sqrt{x-3}}{xy}$ Với $x \geq 3; y \geq 2$.

Giải

Ta có: $M = \frac{\sqrt{x-3}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y}$

áp dụng BĐT Cô - Si ta có:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{3(x-3)} &\leq \frac{x}{2} \\ \sqrt{2(y-2)} &\leq \frac{y}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{x-3}}{x} &\leq \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{y-2}}{y} &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M \leq \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Vậy Giá trị lớn nhất của biểu thức M là $\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}$. Đạt được khi $x = 6$ và $y = 4$.

Ví dụ 1.4. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq 2$ (1). Tìm GTLN của biểu thức

$P = xyz$.

Giải

Từ (1) $\Rightarrow \frac{1}{1+x} \geq \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$

Tương tự: $\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{(1+z)(1+x)}}$

Và $\frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$

Nhân vế với vế của ba BDT trên ta có: $P = xyz \leq \frac{1}{8}$ Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Vậy GTLN của biểu thức P là $\frac{1}{8}$. Đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.5. Cho $0 < x < 1$, Tìm GTNN của biểu thức: $Q = \frac{3}{1-x} + \frac{4}{x}$.

Giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{3x}{1-x} + \frac{4(1-x)}{x} + 7 \geq 2\sqrt{\frac{3x}{1-x} \cdot \frac{4(1-x)}{x}} + 7 = (2 + \sqrt{3})^2$$

$\Rightarrow$ GTNN của biểu thức: $Q = \frac{3}{1-x} + \frac{4}{x}$ là $(2 + \sqrt{3})^2$. Đạt được khi

$$\frac{3x}{1-x} = \frac{4(1-x)}{x} \Leftrightarrow x = (\sqrt{3} - 1)^2$$

(Đặt $P = \frac{3ax}{1-x} + \frac{4b(1-x)}{x} + c$ rồi đồng nhất hệ số suy ra $a = b = 1$; $c = 7$)

Ví dụ 1.6. Cho $x, y, z, t > 0$. Tìm GTNN của biểu thức: $M = \frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với $a, b > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } M &= M + 4 - 4 = \left(\frac{x-t}{t+y} + 1\right) + \left(\frac{t-y}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y-z}{z+x} + 1\right) + \left(\frac{z-x}{x+t} + 1\right) - 4 \\ &= \frac{x+y}{t+y} + \frac{t+z}{y+z} + \frac{y+x}{z+x} + \frac{z+t}{x+t} - 4 \\ &= (x+y) \left(\frac{1}{t+y} + \frac{1}{z+x}\right) + (z+t) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+t}\right) - 4 \\ &\geq \frac{4(x+y)}{x+y+z+t} + \frac{4(z+t)}{x+y+z+t} - 4 = 0 \end{aligned}$$

Vậy GTNN của biểu thức: $M = \frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}$ là 0. Đạt được khi $x = y$ và $z = t$.

2. Sử dụng BDT Bunhiacopski (BCS)

Ví dụ 2.1. Cho x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $A = x^4 + y^4 + z^4$

Giải

Áp dụng BDT Bunhia Copski ta có:

$$1 = (xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

$$\Rightarrow 1 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (1+1+1)(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là } \frac{1}{3} \text{ đạt được khi } x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ví dụ 2.2. Tìm GTNN của $P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c}$ trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c} = 4\left(\frac{a}{b+c-a} + \frac{1}{2}\right) + 9\left(\frac{b}{c+a-b} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{c}{a+b-c} + \frac{1}{2}\right) - \frac{29}{2} \\ &= \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \left(\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{c+a-b} + \frac{16}{a+b-c}\right) - \frac{29}{2} \\ &\geq \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \left[\frac{(2+3+4)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}\right] - \frac{29}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{81}{a+b+c} - \frac{29}{2} = 26 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 26 đạt được khi $\frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$

Ví dụ 2.3. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c}$.

Trong đó a, b, c > 0 và a+b+c=1.

Giải

Ta có: Q

$$= \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(2b+c)+b(2c+a)+c(2a+b)} = \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1\sqrt{b^2-4ac}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q là 1 đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Ví dụ 2.4

Cho a, b, c > 0 thỏa mãn a + b + c = 1. Tìm GTNN của $P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$

Giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &\geq \frac{9}{ab+bc+ca} \Rightarrow P \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \\ &= \left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{4}{2(ab+bc+ca)}\right) + \frac{7}{ab+bc+ca} \\ &\geq \frac{(1+2)^2}{(a+b+c)^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \geq 9 + \frac{21}{(a+b+c)^2} = 30 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 30 đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Tiết 21-22

I.BẤT ĐẲNG THỨC CÔ – SI VÀ CÁC HỆ QUẢ

1. Chứng minh : $\boxed{a^2 + b^2 \geq 2ab}$ (Với $a, b \geq 0$) (BĐT Cô-si)

Giải:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = b$$

2. Chứng minh: $\boxed{(a + b)^2 \geq 4ab}$. (Với $a, b \geq 0$)

Giải:

$$(a+b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 4ab = (a-b)^2 + 4ab \geq 0 + 4ab \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

3. Chứng minh: $\boxed{2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2}$ (Với $a, b \geq 0$)

Giải:

$$2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = b.$$

4. Chứng minh: $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2}$. (Với $a, b > 0$)

Giải:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{(a^2 + b^2)}{ab}. \text{ Do } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow \frac{(a^2 + b^2)}{ab} \geq 2. \text{ Hay } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = b$$

5. Chứng minh: $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2}$. (Với $a, b < 0$)

Giải:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -\frac{a^2 + b^2}{|a \cdot b|}. \text{ Do } \frac{a^2 + b^2}{|a \cdot b|} \geq 2 \Rightarrow -\frac{a^2 + b^2}{|a \cdot b|} \leq -2. \text{ Hay } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = -b.$$

6. Chứng minh: $\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}}$. (Với $a, b > 0$)

Giải:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a+b).a + (a+b).b - 4ab}{(a+b).ab} = \frac{(a-b)^2}{(a+b).ab} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = b.$$

7. Chứng minh rằng: $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca}$.

Giải:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca). \text{ Hay } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = b; b = c; c = a \Leftrightarrow a = b = c.$$

PHƯƠNG PHÁP XÉT HIỆU HAI VẾ

- $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$
- Cần lưu ý tính chất: $A^2 \geq 0$
- Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = 0$
- Có thể nhân hai vế bất đẳng thức với một số khác 0 thích hợp

B. Bài tập vận dụng:

Chứng minh các bất đẳng thức sau

1. $a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc$
 2. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$
 3. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 \geq 1$
 4. $a^2 + 4b^2 + 3c^2 > 2a + 12b + 6c - 14$
 5. $10a^2 + 5b^2 + 12ab + 4a - 6b + 13 \geq 0$
 6. $a^2 + 9b^2 + c^2 + \frac{19}{2} > 2a + 12b + 4c$
 7. $a^2 - 4ab + 5b^2 - 2b + 5 \geq 4$
 8. $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
 9. $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 \geq 0$
 10. $x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 7 \geq 0$
 11. $x^4 + x^3y + xy^3 + y^4 \geq 0$
 12. $x^5 + x^4y + xy^4 + y^5 \geq 0$ với $x + y \geq 0$
 13. $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$
 14. $(a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4a^2b$
 15. $ac + bd \geq bc + ad$ với $(a \geq b ; c \geq d)$
 16. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
 17. $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$
 18. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$ (với $a \geq b \geq c > 0$)
 19. $a + b \geq \frac{12ab}{9 + ab}$ (Với $a, b > 0$)
 20. $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (Với $a, b, c > 0$)
- =====o0o=====

HƯỚNG DẪN:

Bài 1: Gọi VT của bất đẳng thức là A và VP của bất đẳng thức là B (Nếu không nói gì thêm qui ước này được dùng cho các bài tập khác). Với các BĐT có dấu $\leq; \geq$ thì cần tìm điều kiện của các biến để đẳng thức xảy ra.

$$A - B = (a + 2c - 2b)^2$$

Bài 2: $4A - 4B = (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2$

Bài 3: $A - 1 = (x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 9 = (Y + 3)^2$

Bài 4: $A - B = (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 + 1$

Bài 5: $A = (a-1)^2 + (3a-2b)^2 + (b+3)^2$

Bài 6: $A - B = (a-1)^2 + (3b-2)^2 + (c-2)^2 + \frac{1}{2}$

Bài 7: $A - B = (a-2b)^2 + (b-1)^2$

Bài 8: $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$

Bài 9: $x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y + 3 = (x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2$.
Biến đổi tiếp như bài 8

Bài 10: Tương tự bài 9

Bài 11: $x^4 + x^3y + xy^3 + y^4 = (x^2 - xy + y^2)(x+y)^2$

Bài 12: Tương tự bài 11

Bài 13: Xem ví dụ 7

Bài 14: $A - B = (a^2 + b^2)(a^2 + 1) - 4a^2b$

Bài 15: $A - B = ac + bd - bc - ad$ với $(a \geq b; c \geq d)$
 $= (c-d)(a-b)$

Bài 16: $A - B = \frac{2(a^2 + b^2) - (a+b)^2}{4}$

Bài 17: Xem bài tập 16

Bài 18: $A - B = (a-c)(b-a)(a-b) \cdot \frac{1}{abc}$
(Với $a \geq b \geq c \geq 0$)

Bài 19: $A - B = \frac{b(a-3)^2 + a(b-3)^2}{9 + ab}$
(Với $a, b > 0$)

Bài 20: $A - B = \frac{(ab-bc)^2 + (bc-ac)^2 + (ac-ab)^2}{abc}$
(Với $a, b, c > 0$)

=====o0o=====

Tiết 27-30
TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I: DẠNG $P = ax^2 + bx + c$

• Nếu $a > 0$: $P = ax^2 + bx + c = \frac{4ac-b^2}{4a} + a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ Suy ra $MinP = \frac{4ac-b^2}{4a}$ Khi $x = -\frac{b}{2a}$

• Nếu $a < 0$: $P = ax^2 + bx + c = \frac{4|a|c+b^2}{4|a|} - |a|\left(x - \frac{b}{2|a|}\right)^2$
Suy ra $MaxP = \frac{4|a|c+b^2}{4|a|}$ Khi $x = \frac{b}{2|a|}$

Một số ví dụ:

1. Tìm GTNN của $A = 2x^2 + 5x + 7$

Giải: $A = 2x^2 + 5x + 7 = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16}\right) + 7 =$
 $= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + 7 = \frac{56-25}{8} + 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{31}{8} + 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2.$
Suy ra $MinA = \frac{31}{8}$ Khi $x = -\frac{5}{4}.$

2. Tìm GTLN của $A = -2x^2 + 5x + 7$

Giải: $A = -2x^2 + 5x + 7 = -2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16}\right) + 7 =$
 $= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} + 7 = \frac{56+25}{8} - 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{81}{8} - 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \leq \frac{81}{8}.$
Suy ra $MaxA = \frac{81}{8}$ Khi $x = \frac{5}{4}.$

3. Tìm GTNN của $B = 3x^2 + y^2 - 8x + 2xy + 16.$

Giải: $B = 3x^2 + y^2 - 8x + 2xy + 16 = 2(x-2)^2 + (x+y)^2 + 8 \geq 8.$
 $\Rightarrow MinB = 8$ khi : $\begin{cases} x-2=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}.$

4. Tìm GTLN của $C = -3x^2 - y^2 + 8x - 2xy + 2.$

Giải: $C = -3x^2 - y^2 + 8x - 2xy + 2 = 10 - [2(x-2)^2 + (x+y)^2] \leq 10.$
 $\Rightarrow GTLNC = 10$ khi: $\begin{cases} x-2=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}.$

BÀI TẬP:

5. Tìm GTNN $A = x^2 - 5x + 2008$
6. Tìm GTLN $B = 1 + 3x - x^2$
7. Tìm GTLN $D = 2007 - x^2 - 5x$
8. Tìm GTNN của $F = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$
9. Tìm GTNN của $G = x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 12$
10. Tìm GTNN của $M = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y.$
11. Tìm GTNN $C = (3x-1)^2 - 4|3x-1| + 5$
12. Tìm GTNN của $N = (x+1)^2 + (x-3)^2$
13. Tìm GTNN của $K = x^2 + y^2 - xy + x + y$

HƯỚNG DẪN

5. $A = x^2 - 5x + 2008 = (x - 2,5)^2 + 2001,75$
 $\Rightarrow \text{Min} A = 2001,75$ khi $x = 2,5$
6. $B = 1 + 3x - x^2 = -1,25 - (x - 1,5)^2$
7. $D = 2007 - x^2 - 5x = 2004,5 - (x + 2,5)^2$
8. $F = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2 = \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right]^2$
9. $G = x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 12 = x^2(x - 5)^2 + 12$
10. $M = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y = (x - y + 1)^2 + (y - 4)^2 - 16$
11. $C = (3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 5$
 * Nếu $x \geq \frac{1}{3}$. $C = (3x - 3)^2 + 1$
 * Nếu $x < \frac{1}{3}$. $C = (3x + 1)^2 + 6$
12. $N = (x + 1)^2 + (x - 3)^2 = 2(x - 1)^2 + 8$
 $K = x^2 + y^2 - xy + x + y = \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}(y + 1)^2 - 1$

II. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐÃ BIẾT

* Một trong những phương pháp thường dùng là sử dụng các bất đẳng thức đã biết để chứng minh một bất đẳng thức khác. Tuy nhiên khi sử dụng ,ngoài hai bất đẳng thức Cô-si và bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski

. Các bất đẳng thức khác khi sử dụng làm bài thi cần chứng minh lại (Xem phần trên). Để tiện theo dõi, tôi sẽ liệt kê các bất đẳng thức vào dưới đây.

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b > 0$). (BĐT Cô-si)
2. $(a + b)^2 \geq 4ab$
3. $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
4. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; a, b > 0$
5. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}; a, b > 0$
6. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
7. $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (Bu nhi a cop xki)
8. $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a + b)^2}{x + y}$
9. $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{x + y + z}$

Ví dụ 9: Chứng minh $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$ (Với $a, b, c > 0$)

Giải: $2A - 2B = 2\frac{ab}{c} + 2\frac{bc}{a} + 2\frac{ca}{b} - 2a - 2b - 2c$
 $= a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) + b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\right) + c\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right)$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; a, b > 0$. Ta có: $2A - 2B$

$\geq a(2-2) + b(2-2) + c(2-2) \geq 0$. Vậy $A \geq B$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c > 0$

Ví dụ 10: Cho các số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{xy} + \frac{2}{x^2 + y^2} \geq 8$.

Giải:
$$\frac{1}{xy} + \frac{2}{x^2 + y^2} = \frac{2}{2xy} + \frac{2}{x^2 + y^2} = 2 \left(\frac{1}{2xy} + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \geq 2 \frac{4}{x^2 + 2xy + y^2}$$
$$= \frac{8}{(x+y)^2} = 8. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = y = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 11: Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$

Giải:
$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c}; \quad \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 2 \cdot \frac{b}{a}; \quad \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{c}{b}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) \geq 2 \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad \text{Đẳng thức xảy ra khi } a = b = c.$$
$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

Bài tập:

- Cho a, b, c là 3 số dương. Chứng minh rằng $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$
- Cho các số dương a, b, c biết $a \cdot b \cdot c = 1$. Chứng minh rằng: $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$
- Cho các số a, b biết $a + b = 1$. Chứng minh rằng

a) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ b) $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$

- Cho 3 số dương a, b, c và $a + b + c = 1$. Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

- Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}$$

- Cho 2 số dương a, b có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

a. $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq 6$

b. $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} \geq 14$

- Cho 2 số dương a, b có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

- Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $a, b, c > 0$

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b},$$

- Cho a, b, c là 3 số dương.

Chứng minh: $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$

10. Cho a, b, c là 3 số dương.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

11. Chứng minh: $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$ với $a + b \geq 1$

12. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ Với a, b, c > 0

13. Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

14. Bài 28: Cho $x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$;

Chứng minh rằng: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

15. Cho $A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}$ Chứng minh rằng $A > 1$

HƯỚNG DẪN:

1. $A = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$

2. Áp dụng $(a+1)^2 \geq 2a$

3. a) $A - B = a^2 + b^2 - \frac{1}{2} = 2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 \geq 0$.

b) Áp dụng câu a.

4. Xem bài 1

5. $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{x}{2x} + \frac{y}{2y} + \frac{z}{2z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{(1+1+1)^2}{(3+x+y+z)} \geq \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

6. $A = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{2}{(a+b)^2} = 6$ (vì $2ab \leq \frac{1}{2}(a+b)^2$)

$$B = \frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} = 3\left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) + \frac{1}{2ab}$$

7. $(a + \frac{1}{b})^2 + \frac{25}{4} + (b + \frac{1}{a})^2 + \frac{25}{4} = \left[(a + \frac{1}{b})^2 + (\frac{5}{2})^2\right] + \left[(b + \frac{1}{a})^2 + (\frac{5}{2})^2\right] \geq 5(a + \frac{1}{b}) + 5(b + \frac{1}{a})$
 $= 5(a + b) + 5(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 5(a + b) + 5 \cdot \frac{4}{(a+b)} = 25$

Suy ra: $(a + \frac{1}{b})^2 + (b + \frac{1}{a})^2 \geq \frac{25}{2}$

8. $\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} \geq \frac{2}{a+2b+c}; \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+2a+b} \geq \frac{2}{b+2c+a}; \frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} \geq \frac{2}{c+2a+b}$

Cộng theo vế 3 BDT trên ta được Đpcm

9. Ta có: $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} = \frac{1}{c}(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geq 2 \cdot \frac{1}{c}$

$$\frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 2 \cdot \frac{1}{a}$$

$$\frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} = \frac{1}{b}\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 \cdot \frac{1}{b}$$

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức trên ta được đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. (Hãy kiểm tra lại)

10. Áp dụng BĐT $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

11. $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (a+b)^2 \right]^2 \geq \frac{1}{8}$

12. $\left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{b+a}$
 $= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq (a+b+c) \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{9}{2}$ Suy ra: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

13. Áp dụng BĐT ở ví dụ 6 cho 3 số $a^4 + b^4 + c^4$ rồi tiếp tục áp dụng lần nữa cho 3 số $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ ta có đpcm.

14. Áp dụng BĐT $(x+y)^2 \geq 4xy$. Nhân từng thừa số của 3 BĐT suy ra ĐPCM

15. A có $2n+1$ số hạng (Kiểm tra lại!). Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$; $a, b > 0$ Với từng cặp số hạng thích hợp sẽ có đpcm

Chuyên đề 9: Phương pháp tam giác đồng dạng.

I – Kiến thức cơ bản

1. Ta đã biết nếu 2 tam giác đồng dạng thì suy ra được các cặp góc tương ứng bằng nhau, các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ, đặc biệt là tỉ số diện tích của chúng bằng bình phương tỉ số đồng dạng
2. Để chứng minh 2 góc bằng nhau hay các cặp đoạn thẳng tỉ lệ bằng pp tam giác đồng dạng ta có thể làm theo các bước sau:

Bước 1: Xét 2 tam giác có chứa 2 góc đó hay chứa các cặp đoạn thẳng ấy.

Bước 2: Chứng minh 2 tam giác đó đồng dạng

Bước 3: Suy ra cặp góc tương ứng bằng nhau, cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

3. Để tạo ra được một tam giác đồng dạng với một tam giác khác, ngoài cách vẽ một đường song song với một cạnh của tam giác ta còn có thể vẽ thêm đường phụ bằng nhiều cách khác, chẳng hạn:

- Nối 2 điểm có sẵn trong hình làm xuất hiện một tam giác mới
- Từ một điểm cho trước, vẽ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng.
- Trên một tia cho trước, đặt một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng khác.

4. Một vài ứng dụng của pp tam giác đồng dạng

a) Dùng pp tam giác đồng dạng để CM 3 điểm thẳng hàng

Ta có thể CM 2 tam giác đồng dạng để suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau, từ đó dùng cách cộng góc để được góc bẹt dẫn tới 3 điểm thẳng hàng.

Ví dụ 1:

Cho tam giác ABC, các tia phân giác góc B và góc C cắt nhau tại O. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy M và N sao cho $BM \cdot BC = BO^2$; $CN \cdot CB = CO^2$. CMR 3 điểm M, O, N thẳng hàng.

Bg:

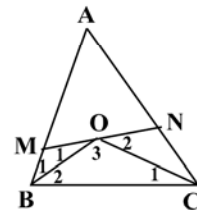
$$BM \cdot BC = BO^2 \Rightarrow \frac{BM}{BO} = \frac{BO}{BC}; \quad \Delta BOM \text{ và } \Delta BCO \text{ có}$$

$$\angle B_1 = \angle B_2; \quad \frac{BM}{BO} = \frac{BO}{BC} \text{ nên } \Delta BOM \sim \Delta BCO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle O_1 = \angle C_1$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \Delta CON \sim \Delta CBO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle O_2 = \angle B_2$$

Ta có $\angle O_1 + \angle O_2 + \angle O_3 = \angle C_1 + \angle B_2 + \angle O_3 = 180^\circ$. Suy ra 3 điểm M, O, N thẳng hàng.

Nhận xét



Điều gì gợi ý cho ta dùng pp đồng dạng để giải ví dụ trên ? Đó là vì trong đề bài có cho BO là trung bình nhân của BM và BC ; CO là trung bình nhân của CN và CB, từ đó suy ra được các cặp đoạn thẳng tỉ lệ dẫn tới 2 tam giác đồng dạng.

b) Dùng pp tam giác đồng dạng để CM tích của 2 đoạn thẳng hoặc tổng các tích của các cặp đoạn thẳng bằng 1 số cho trước.

Ta có thể CM 2 tam giác đồng dạng để suy ra các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ, dẫn tới 2 tích của các cặp đoạn thẳng bằng nhau.

Ví dụ 2 :

Cho hình bình hành ABCD, góc B nhọn. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên AD và CD. Chứng minh rằng $DA \cdot DH + DC \cdot DK = DB^2$

Bg :

*Tìm hướng giải :

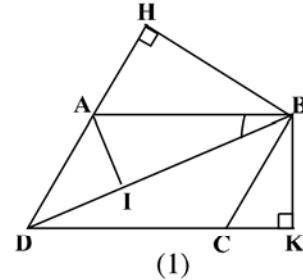
Các tích $DA \cdot DH$, $DC \cdot DK$ chưa có mối liên quan trực tiếp nào với nhau cũng như với DB . Vì thế ta sẽ thay các tích này bởi các tích khác bằng chúng, có liên quan với nhau cũng như liên quan với DB . Muốn vậy phải tạo ra được những cặp tam giác đồng dạng với điều kiện DB phải là cạnh của một trong những tam giác như thế.

*Lời giải:

Vẽ $AI \perp DB$

$$\triangle IDA \sim \triangle HDB \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{DI}{DH} \Rightarrow DA \cdot DH = DB \cdot DI$$

$$\triangle IBA \sim \triangle KDB \Rightarrow \frac{BA}{DB} = \frac{BI}{DK} \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{BI}{DK} \Rightarrow DC \cdot DK = DB \cdot BI \quad (2)$$



Cộng từng vế các ĐĐT (1) và (2) ta được :

$$DA \cdot DH + DC \cdot DK = DB \cdot DI + DB \cdot BI = DB(DI + BI) = DB^2 \quad (\text{đpcm})$$

Chú ý : Nếu $\angle B = 90^\circ$ thì hình bình hành ABCD trở thành hình chữ nhật. Lúc đó áp dụng định lý Py-ta-go ta có ngay điều phải chứng minh.

c) Dùng pp tam giác đồng dạng để giải bài toán dựng hình

Đối với 1 số bài toán dựng hình nhất là dựng hình tam giác, khi chỉ biết một yếu tố về độ dài, còn lại là biết tỉ số giữa các độ dài hoặc biết số đo các góc thì ta có thể nghĩ đến pp tam giác đồng dạng.

Ví dụ 3 :

Dựng tam giác ABC biết $\angle A = 60^\circ$; $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ và $BC = a$.

Bg :

1. Phân tích : Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn đề bài

Vẽ một đường thẳng song song với BC, cắt AB, AC lần lượt tại M và N

Từ C vẽ đường thẳng song song với AB cắt MN tại P. Để thấy

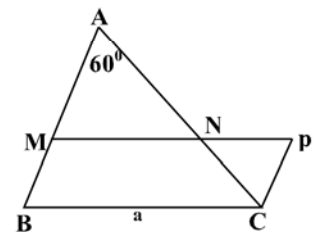
$$MP = BC = a. \quad \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

Vậy $\triangle AMN$ dựng được, từ đó dựng được P, C và B.

2. Cách dựng :

- Dựng $\triangle AMN$ sao cho $\angle A = 60^\circ$; $AM = 2$; $AN = 3$
- Trên tia MN lấy điểm P sao cho $MP = a$.
- Dựng $PC \parallel AB$ (C thuộc tia AN)
- Dựng $CB \parallel MN$ (B thuộc tia AM)

Tam giác ABC là tam giác phải dựng (Phần CM và biện luận tự làm)



II – Bài tập

Bài 1:

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AH và BH. Gọi O là giao điểm của AN với CM. Chứng minh rằng :

- a) $AN \perp CM$
- b) $AH^2 = 4 \cdot MC \cdot MO$

Bg

$$a) \Delta ABH \sim \Delta CAH \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{BH}{AH} = \frac{2BN}{2AM} \text{ hay } \frac{AB}{CA} = \frac{BN}{AM} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \angle B_1 = \angle A_1 \quad (2).$$

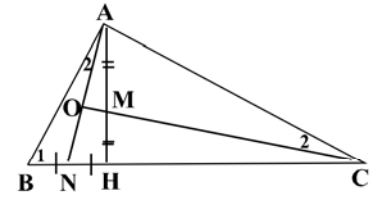
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \Delta ABN \sim \Delta CAM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle A_2 = \angle C_2$$

$$\text{Xét tam giác CAO có } \angle A_2 + \angle C_2 = \angle A_2 + \angle A_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle O = 90^\circ. \text{ Vậy } AN \perp CM$$

$$b) \Delta AOM \sim \Delta CHM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{MO}{MH} \Rightarrow AM.MH = MC.MO$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{2} \cdot \frac{AH}{2} = MC.MO \text{ hay } HA^2 = 4 MC.MO.$$



Bài 2 :

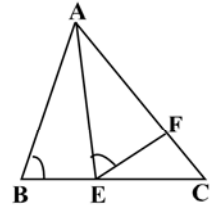
Cho tam giác ABC, phân giác AE. Chứng minh rằng $AB.AC > AE^2$.

Bg

$$\angle AEC > \angle B \text{ (t/c góc ngoài của } \Delta ABE).$$

$$\text{Trên AC lấy điểm F sao cho } \angle AEF = \angle B \Rightarrow AF < AC$$

$$\Delta AEF \sim \Delta ABE \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow AB.AF = AE^2 \Rightarrow AB.AC > AE^2.$$



Bài 3 :

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm di động trên AC. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H, cắt tia BA tại O. Chứng minh rằng :

$$a) OA.OB = OC.OH$$

$$b) \text{ Góc OHA có số đo không đổi}$$

$$c) \text{ Tổng } BM.BH + CM.CA \text{ không đổi.}$$

Bg

$$a) \Delta BOH \sim \Delta COA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OA.OB = OC.OH$$

$$b) \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OB} \quad (1)$$

$$\Delta OHA \text{ và } \Delta OBC \text{ có } \angle O \text{ chung} \quad (2)$$

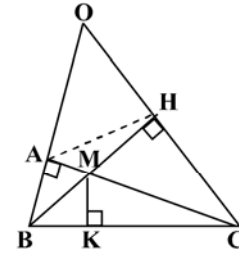
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \Delta OHA \sim \Delta OBC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle OHA = \angle OBC \text{ (không đổi)}$$

$$c) \text{ Vẽ } MK \perp BC; \Delta BKM \sim \Delta BHC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow BM.BH = BK.BC \quad (3)$$

$$\Delta CKM \sim \Delta CAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CM.CA = BC.CK \quad (4)$$

$$\text{Cộng từng vế của (3) và (4) ta được } BM.BH + CM.CA = BK.BC + BC.CK \\ = BC(BK + CK) = BC^2 \text{ (không đổi).}$$



Bài 4 :

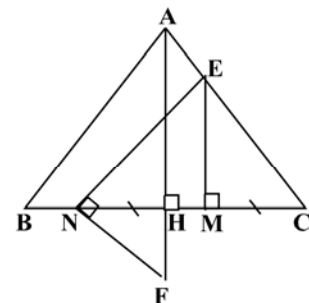
Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Trên đoạn thẳng CH và HB lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $CM = HN$. Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt AC tại E. Qua N vẽ đường thẳng $d \perp NE$. Chứng minh rằng khi M di động trên đoạn thẳng CH thì đường thẳng d luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bg

$$\text{Để thấy } CH = MN = \frac{1}{2} BC$$

$$\Delta HFN \sim \Delta MNE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HF}{MN} = \frac{HN}{ME} = \frac{CM}{ME} \quad (1)$$

$$\Delta AHC \sim \Delta EMC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{EM} = \frac{CH}{CM} \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{CM}{EM} \quad (2)$$



$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{HF}{MN} = \frac{CH}{AH}. \text{ Do đó } HF = \frac{MN \cdot CH}{AH} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{BC^2}{4AH} \text{ (không đổi)}$$

Vì H cố định nên F cố định.

Bài 5 :

Cho tam giác ABC, 3 đường cao AD, BE, CF. Gọi M, N, I, K lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC, BE, CF. Chứng minh rằng 4 điểm M, N, I, K thẳng hàng.

Bg

$$\text{Vì } DM \parallel CF \text{ và } DI \parallel CA \text{ nên } \frac{BM}{BF} = \frac{BD}{BC} = \frac{BI}{BE} \Rightarrow MI \parallel FE \quad (1)$$

$$\text{Vì } DN \parallel BE \text{ và } DK \parallel AB \text{ nên } \frac{CN}{CE} = \frac{CD}{CB} = \frac{CK}{CF} \Rightarrow NK \parallel FE \quad (2)$$

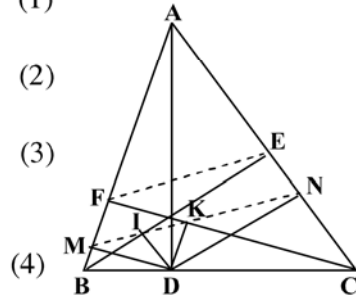
$$\Delta AMD \sim \Delta ADB \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AD}{AB} \quad (3)$$

$$\Delta AND \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AD}{AC} \quad (4)$$

$$\text{Chia từng vế của (3) cho (4) ta được } \frac{AM}{AN} = \frac{AC}{AB}$$

$$\Delta ACF \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB} \text{ do đó } \frac{AM}{AN} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow MN \parallel FE \quad (5)$$

Từ (1) ; (2) ; (5) suy ra 4 điểm M, I, N, K thẳng hàng.



Bài 6 :

Lấy các cạnh AB, AC và BC của ΔABC làm cạnh đáy, dựng các tam giác vuông cân ABD, ACE, BCF, hai tam giác đầu dựng ra phía ngoài ΔABC còn tam giác thứ 3 dựng trong cùng 1 nửa mặt phẳng bờ BC với ΔABC . Chứng minh rằng tứ giác AEFD là hình bình hành (hoặc A, E, F, D thẳng hàng)

Bg

$$\bullet \text{ Nếu } \angle BAC \neq 90^\circ ; \Delta BAD \sim \Delta BCF \text{ (2 tam giác vuông cân)}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BC}. \text{ Mặt khác } \angle DBF = \angle ABC (= 45^\circ + \angle B_1)$$

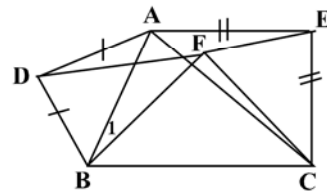
$$\Rightarrow \Delta BDF \sim \Delta BAC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle BDF = \angle BAC$$

$$\text{Chứng minh tương tự có } \Delta FEC \sim \Delta BAC \Rightarrow \angle FEC = \angle BAC$$

$$\text{Ta có } \angle DAE + \angle ADF = (90^\circ + \angle BAC) + (90^\circ - \angle BDF) = 180^\circ \Rightarrow AE \parallel DF$$

Chứng minh tương tự ta được $AD \parallel EF$. Vậy AEFD là hình bình hành.

• Trường hợp nếu $\angle BAC = 90^\circ$ thì 4 điểm A, E, F, D thẳng hàng



Bài 7 :

Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BN với MC và AC. Cho biết AB = 30 cm, tính diện tích các tam giác BEM và AFN.

Bg

$$\Delta ABN = \Delta BCM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle B_1 = \angle C_1 \Rightarrow BN \perp CM$$

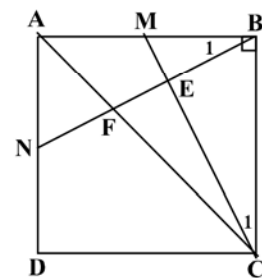
$$\Delta ABN \text{ vuông tại A, AB = 30; AN = 15} \Rightarrow BN^2 = 1125$$

$$\Delta BEM \sim \Delta BAN \Rightarrow \frac{S_{BEM}}{S_{BAN}} = \left(\frac{BM}{BN} \right)^2 = \frac{225}{1125} = \frac{1}{5}$$

$$S_{BAN} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15 = 225 \Rightarrow S_{BEM} = 225 \cdot \frac{1}{5} = 45 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\Delta AFN \sim \Delta CFB \Rightarrow \frac{FN}{FB} = \frac{AN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow FN = \frac{1}{2} FB = \frac{1}{3} BN$$

$$\text{do đó } S_{AFN} = \frac{1}{3} S_{ABN} = \frac{1}{3} \cdot 225 = 75 \text{ cm}^2.$$



Bài 8 :

Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ những đường thẳng song song với 3 cạnh. Các đường thẳng này chia tam giác ABC thành 3 hình bình hành và 3 tam giác nhỏ. Biết diện tích của các tam giác đó là a^2, b^2, c^2 .

a) Tính S_{ABC}

b) Chứng minh $S \leq a^2 + b^2 + c^2$

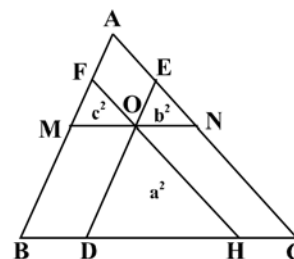
Bg

a) Dễ thấy các tam giác ODH, EON, FMO đồng dạng với ΔABC .

Đặt $S_{ABC} = d^2$. Ta có $\frac{a^2}{d^2} = \left(\frac{DH}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{DH}{BC}$ (1)

$$\frac{b^2}{d^2} = \left(\frac{ON}{BC}\right)^2 = \left(\frac{HC}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{d} = \frac{HC}{BC}$$
 (2)

$$\frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{MO}{BC}\right)^2 = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{BD}{BC}$$
 (3)



Cộng từng vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được $\frac{a+b+c}{d} = \frac{DH+HC+BD}{BC} = 1$

$\Rightarrow a+b+c = d$. Vậy $S = d^2 = (a+b+c)^2$

b) $S = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
 $\leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow O$ trùng với trọng tâm G của ΔABC .

BIẾN ĐỔI PHÂN THỨC

• **Ví dụ 8:**

a. Rút gọn Biểu thức $B = \frac{4a^2 + 12a + 9}{2a^2 - a - 6}$ Với $a \neq -\frac{3}{2}$

b. Thực hiện phép tính: $\frac{0,5a^2 + a + 2}{1 + 0,5a} : \frac{a^3 - 8}{a + 2} + \frac{2}{a(2-a)}$ ($a \neq \pm 2$).
 Giải:

a. $B = \frac{4a^2 + 12a + 9}{2a^2 - a - 6} = \frac{(2a+3)^2}{(2a+3)(a-2)} = \frac{2a+3}{a-2}$

b. $\frac{0,5a^2 + a + 2}{1 + 0,5a} : \frac{a^3 - 8}{a + 2} + \frac{2}{a(2-a)} = \frac{a^2 + 2a + 4}{a + 2} \cdot \frac{a + 2}{a^3 - 8} + \frac{2}{a(2-a)}$
 $= \frac{a^2 + 2a + 4}{(a-2)(a^2 + 2a + 4)} - \frac{2}{a(a-2)} = \frac{a-2}{a(a-2)} = \frac{1}{a}$

• **Ví dụ 9:** Thực hiện phép tính: $A = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 - y^2} : \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 - 2xy}$. (Với $x \neq \pm y$)

Giải:

$A = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 - y^2} : \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 - 2xy} = \frac{x^2 + y^2 - xy}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}$
 $= \frac{x-y}{(x+y)^2}$

• **Ví dụ 10:** Cho biểu thức: $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$.

- a. Rút gọn biểu thức A.
b. Chứng minh rằng A không âm với mọi giá trị của x.

Giải:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1} = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + x^2 + x^2 - x + 1} \\ &= \frac{x^3(x+1) + (x+1)}{x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)} = \frac{(x+1)(x^3 + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{(x+1)^2}{(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

b. $A = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}; (x+1)^2 \geq 0; x^2 + 1 > 0 \Rightarrow A \geq 0$

- **Ví dụ 11:** Tính giá trị biểu thức : $\frac{a^5 + a^6 + a^7 + a^8}{a^{-5} + a^{-6} + a^{-7} + a^{-8}}$
với a = 2007.

Giải:

$$\begin{aligned} B &= \frac{a^5 + a^6 + a^7 + a^8}{a^{-5} + a^{-6} + a^{-7} + a^{-8}} = \frac{a^5 + a^6 + a^7 + a^8}{\frac{1}{a^5} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^7} + \frac{1}{a^8}} \\ &= \frac{a^5 + a^6 + a^7 + a^8}{\frac{a^8}{a^3 + a^2 + a + 1}} = \frac{a^8(a^5 + a^6 + a^7 + a^8)}{a^3 + a^2 + a + 1} \\ &= \frac{a^{13}(1 + a + a^2 + a^3)}{a^3 + a^2 + a + 1} = a^{13} \Rightarrow B = 2007^{13} \end{aligned}$$

- **Ví dụ 12:** Tính giá trị biểu thức : $\frac{x^2 - 25}{x^3 - 10x^2 + 25x} : \frac{y - 2}{y^2 - y - 2}$.

Biết $x^2 + 9y^2 - 4xy = 2xy - |x - 3|$.

Giải:

$$x^2 + 9y^2 - 4xy = 2xy - |x - 3| \Leftrightarrow (x - 3y)^2 + |x - 3| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{x^2 - 25}{x^3 - 10x^2 + 25x} : \frac{y - 2}{y^2 - y - 2} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x(x - 5)^2} \cdot \frac{(y - 2)(y + 1)}{y - 2} \\ &= \frac{(x + 5)(y + 1)}{x(x - 5)} = \frac{8.2}{3.(-2)} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Bài tập:

13. Chứng minh rằng Biểu thức

$$P = \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

không phụ thuộc vào x.

14. Cho biểu thức $M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$.

- a. Tìm tập xác định của M.
b. Tính giá trị của x để M = 0.
c. Rút gọn M.
15. Cho a, b, c là 3 số đôi một khác nhau. Chứng minh rằng :

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

16. Cho biểu thức : $B = \frac{|x+10|}{x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 9x - 10}$

a. Rút gọn B

b. Chứng minh rằng : $n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 : 16$ với $n \in \mathbb{Z}$

a. Rút gọn biểu thức : $A = \frac{2x+3y}{xy+2x-3y-6} - \frac{6-xy}{xy+2x+3y+6} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$ với $x \neq -3; x \neq$

$3; y \neq -2$.

b. Cho Biểu thức : $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$.

a. Tìm điều kiện có nghĩa và Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị của x để $A > 0$.

c. Tìm giá trị của A trong trường hợp $|x-7| = 4$.

19. a. Thực hiện phép tính:

a. $A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$.

b. Rút gọn $C = \frac{\frac{1}{a^2-9} - \frac{1}{a^2+9}}{\frac{1}{a^2-9} + \frac{1}{a^2+9}} - \frac{a^2+9}{a^2}$.

20. Cho a,b,c là 3 số $\neq$ nhau đôi một.

Tính $S = \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{ac}{(b-c)(a-b)}$.

21. Tính giá trị của biểu thức : $\frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b} - 3$

biết: $10a^2 - 3b^2 - 5ab = 0$ & $9a^2 - b^2 \neq 0$

22. Cho $a+b+c=1$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

a. Nếu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Chứng minh rằng $xy + yz + zx = 0$.

b. Nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính giá trị của a,b,c

23. **Bài 11:** Cho Biểu thức : $A = \frac{2a-1}{3a-1} + \frac{5-a}{3a+1}$.

a. Tính giá trị của A khi $a = -0,5$.

b. Tính giá trị của A khi : $10a^2 + 5a = 3$.

24. Chứng minh nếu $xyz = 1$ thì: $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$.

25. Chứng minh đẳng thức sau: $\frac{a^2+3ab}{a^2-9b^2} + \frac{2a^2-5ab-3b^2}{6ab-a^2-9b^2} = \frac{a^2-an+bn+ab}{3bn-a^2-an+3ab}$

26. Thực hiện phép tính: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2008^2}\right)$.

27. Tính tổng : $S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

28. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức :

$$A = \frac{2a^3 - 12a^2 + 17a - 2}{a-2}$$

Biết a là nghiệm của Phương trình : $|a^2 - 3a + 1| = 1$.

29. Gọi a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác biết rằng: $\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8$

Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều.

30. Chứng minh rằng nếu a,b là 2 số dương thỏa điều kiện: $a + b = 1$ thì :

$$\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b - a)}{a^2 b^2 + 3}$$

31. Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{x^2 - yz}{(x + y)(x + z)} + \frac{y^2 - xz}{(x + y)(y + z)} + \frac{z^2 - xy}{(y + z)(x + z)}$$

32. Rút gọn biểu thức : $A = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c}$.

33. Chứng minh rằng biểu thức sau luôn dương trong TXĐ:

$$B = \frac{(1 - x^2)^2}{1 + x^2} : \left[\left(\frac{1 - x^3}{1 - x} + x \right) \left(\frac{1 + x^3}{1 + x} - x \right) \right]$$

34. Rút gọn rồi Tính giá trị biểu thức với $x + y = 2007$.

$$A = \frac{x(x + 5) + y(y + 5) + 2(xy - 3)}{x(x + 6) + y(y + 6) + 2xy}$$

35. Cho 3 số a,b,c $\neq 0$ thỏa mãn đẳng thức: $\frac{a + b - c}{c} = \frac{a + c - b}{b} = \frac{b + c - a}{a}$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{abc}$.

36. Cho biểu thức : $A = \frac{4xy - z^2}{xy + 2z^2} \cdot \frac{4yz - x^2}{yz + 2x^2} \cdot \frac{4zx - y^2}{xz + 2y^2}$. Chứng minh rằng nếu :
 $x + y + z = 0$ thì $A = 1$.

HƯỚNG DẪN:

13. $P = \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2 x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2 x^2 + 1} = \frac{1 + a + a^2}{1 - a + a^2}$

14. $M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$
 $= \frac{(x^3 + 3)^2 (x^2 - 1)}{x + 4}$

15. $\frac{b - c}{(a - b)(a - c)} = \frac{1}{a - b} + \frac{1}{c - a} = \frac{c - a}{(b - a)(b - c)} = \frac{1}{b - c} + \frac{1}{a - b}$
 $= \frac{a - b}{(c - a)(c - b)} = \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a}$

- 16.

a. Rút gọn $B = \frac{|x + 10|}{x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 9x - 10} = \frac{|x + 10|}{(x - 1)(x + 10)(x^2 + 1)}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}; (x > -10 \wedge x \neq 1) \\ \frac{-(x+10)}{(x-1)(x+10)(x^2+1)}; (x < -10) \end{cases}$$

$$b. n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = [n(n+1)]^4$$

$$17. \quad A = \frac{2x+3y}{xy+2x-3y-6} - \frac{6-xy}{xy+2x+3y+6} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$$

$$= \frac{2x+3y}{xy+2x-3y-6} - \frac{6-xy}{xy+2x+3y+6} - \frac{x^2+9}{x^2-9} = \frac{0}{(x-3)(x+3)(y+2)}$$

18.

$$a. A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} = \frac{4x^2}{x-3}$$

$$b. A > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$c. |x-7| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\blacksquare \quad x=11 \Rightarrow A = \frac{121}{2}$$

$$\blacksquare \quad x=3 \Rightarrow A \text{ không xác định}$$

19.

$$a. A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{32}{1-x^{32}}$$

$$b. \text{ Rút gọn } C = \frac{\frac{1}{a^2-9} - \frac{1}{a^2+9}}{\frac{1}{a^2-9} + \frac{1}{a^2+9}} - \frac{a^2+9}{a^2} = -1$$

$$20. \quad S = \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{ac}{(b-c)(a-b)}$$

$$= \frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$$

$$21. \quad \text{Từ: } 10a^2 - 3b^2 - 5ab = 0 \text{ \& } 9a^2 - b^2 \neq 0 \Rightarrow 5ab = 3b^2 - 10a^2 \quad (1)$$

$$\text{Biến đổi } A = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b} - 3 = \frac{3a^2 - 15ab - 6b^2}{9a^2 - b^2} \quad (2)$$

$$\text{Thế (1) vào (2) ; } A = -3$$

$$22. \quad \text{Từ } a+b+c=1 \text{ và } a^2+b^2+c^2=1 \text{ suy ra:}$$

$$ab+bc+ca=0 \quad (1)$$

$$a. \text{ Nếu } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$\text{suy ra: } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = x+y+z$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ Suy ra } xy + yz + zx = 0.$$

$$b. \text{ Áp dụng } (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\text{Từ } a^3+b^3+c^3=1. \text{ Suy ra: } 3(a+b)(b+c)(c+a)=0 \text{ Từ đó tính được } a, b, c.$$

23. Xem bài 21

24. Từ $xyz = 1$ Biến đổi

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$$

$$= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{yz}{1+y+yz}$$

25. Chứng minh :

$$\frac{a^2 + 3ab}{a^2 - 9b^2} + \frac{2a^2 - 5ab - 3b^2}{6ab - a^2 - 9b^2} = \frac{a^2 - an + bn + ab}{3bn - a^2 - an + 3ab} = \frac{a+b}{3b-a}$$

26. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2008^2}\right)$

$$= \frac{1.2.3 \dots 1997}{2.3.4 \dots 1998} \cdot \frac{3.4.5 \dots 1999}{2.3.4 \dots 1998} = \frac{1}{1998} \cdot \frac{1999}{2} = \frac{1999}{3996}$$

27.

$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{n}{2(3n+2)}$$

28. $A = \frac{2a^3 - 12a^2 + 17a - 2}{a-2} = 2a^2 - 8a + 1$

$$|a^2 - 3a + 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; a = 3 \Rightarrow A = 1; A = -5 \\ a = 1; a = 2 \Rightarrow A = -5 \end{cases}$$

29. $\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = 0$

30. Rút gọn

$$\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3} = \frac{(a-b)(a^2+b^2-1)}{ab(b^2+b+1)(a^2+a+1)}$$

31. $\frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y} = \frac{y^2 - xz}{(x+y)(y+z)} = \frac{y}{x+y} - \frac{z}{y+z}$

$$\frac{z^2 - xy}{(x+z)(y+z)} = \frac{z}{y+z} - \frac{x}{x+z} \text{ . Cộng từng vế được } A = 0.$$

32. $A = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a+b+c}$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

33. TXĐ: $x \neq \pm 1$; $B = \frac{1}{1+x^2}$

34. $A = \frac{x(x+5) + y(y+5) + 2(xy-3)}{x(x+6) + y(y+6) + 2xy} = \frac{(x+y+6)(x+y-1)}{(x+y+6)(x+y)}$

35. Từ: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$

$$\text{Suy ra: } \frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{a+c-b}{b} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+c+b}{b} = \frac{b+c+a}{a}$$

Suy ra: hoặc $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

$P = -1$ hoặc $P = 8$

$$36. \quad \text{Từ: } x + y + z = 0 \text{ suy ra: } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$A = \frac{M}{N}. \quad M = 63x^2y^2z^2 - 16xyz(x^3 + y^3 + z^3) + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$$

$$N = 9x^2y^2z^2 + 2xyz(x^3 + y^3 + z^3) + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$$

=====o0o=====