VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)
TRẦN HỮU NAM – PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
NGUYỄN TAM SƠN

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 8

TẬP MỘT

ĐẠI SỐ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

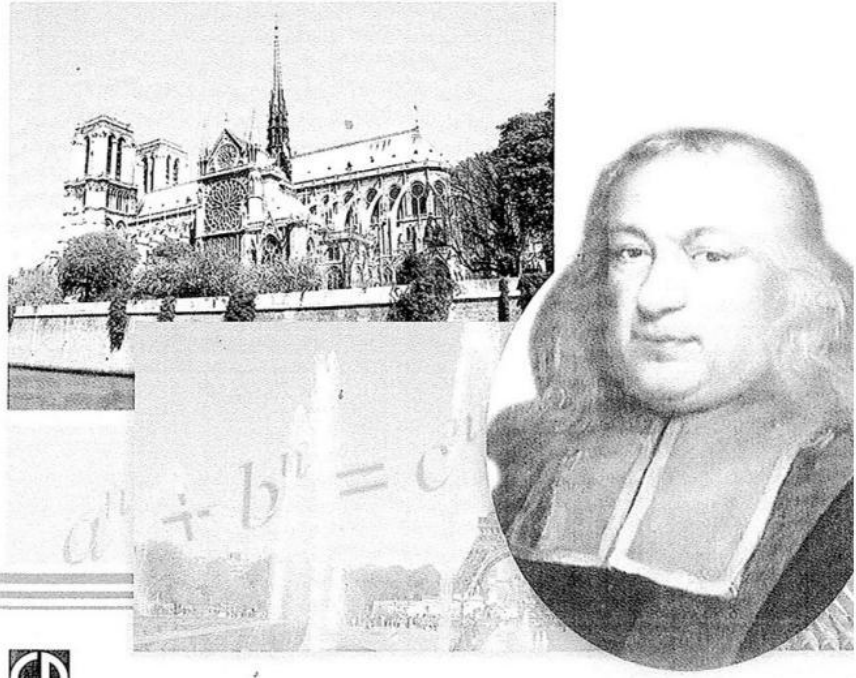
VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)
TRẦN HỮU NAM – PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
NGUYỄN TAM SƠN

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 8

TẬP MỘT

ĐẠI SỐ



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN

NGUYỄN TAM SƠN :	**Các chuyên đề từ 1 đến 16.**
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC :	**Chuyên đề 17.**
TRẦN HỮU NAM :	**Các chuyên đề 18 và 19.**

Ảnh minh họa bìa 1:

Nhà toán học Pháp Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Lời nói đầu

Bộ sách ***Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở*** gồm 8 cuốn, từ lớp 6 đến lớp 9, mỗi lớp 2 tập (tập một: Đại số, tập hai: Hình học), được biên soạn nhằm :

- Cung cấp cho các em học sinh một tài liệu có hệ thống và khá đầy đủ để học tập chuyên sâu về môn Toán ở cấp Trung học cơ sở.

- Tạo nguồn cho các lớp chuyên Toán ở Trung học phổ thông và giúp các em học sinh lớp 9 thi vào lớp 10 chuyên Toán.

- Giúp các cán bộ chỉ đạo môn Toán, các thầy cô giáo dạy Toán có thêm tài liệu để chỉ đạo và giảng dạy chuyên sâu về Toán tại các hoạt động chuyên đề, ngoại khóa, các câu lạc bộ Toán học nhằm bồi dưỡng cho học sinh về kiến thức, kĩ năng, tư duy và những phẩm chất tốt trong học tập, nghiên cứu và sáng tạo, góp phần vào việc đào tạo và bồi dưỡng nhân tài.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã và đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học, các trường Trung học cơ sở có uy tín, những chuyên gia Toán có kinh nghiệm ở Tạp chí Toán học & tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Cuốn sách ***Tài liệu chuyên toán THCS Toán 8, tập một : Đại số*** gồm 15 chuyên đề cơ bản và 4 chuyên đề nâng cao.

Ở mỗi chuyên đề cơ bản, cuốn sách không lặp lại các nội dung đã có trong Sách giáo khoa mà chỉ tóm tắt các kiến thức cơ bản, đồng thời bổ sung thêm một số kiến thức cần thiết. Do đó, khi giảng dạy các chuyên đề, các thầy cô giáo nên sử dụng kết hợp tài liệu này với Sách giáo khoa. Các ví dụ minh hoạ được chọn lọc nhằm giúp học sinh biết cách giải và trình bày lời giải một số dạng toán nâng cao thường gặp. Sau đó là các bài tập có hướng dẫn giải.

Các chuyên đề nâng cao nhằm giúp bạn đọc hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình, chúng được trình bày để học sinh có thể tiếp thu được.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách này sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

Mặc dù các tác giả đã làm việc nhiệt tình, nghiêm túc và có trách nhiệm, tuy nhiên, cuốn sách vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc. Các góp ý xin gửi về :

Ban Toán - Tin, Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

Chủ biên

VŨ HỮU BÌNH

CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN

Chương I · PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 1

NHÂN ĐA THỨC – CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đạ thức rồi cộng các tích với nhau :

$$A(B + C - D) = AB + AC - AD.$$

2. Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích tìm được với nhau.

$$(A + B)(C + D - E) = AC + AD - AE + BC + BD - BE.$$

3. Các hằng đẳng thức đáng nhớ :

$$* \ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$* \ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

$$* \ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (3)$$

$$* \ (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (4)$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$* \ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (5)$$
$$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$* \ a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (6)$$

$$* \ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (7)$$

Kiến thức bổ sung

* $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

* $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$

$= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \ldots + 2a_2a_n + \ldots + 2a_{n-1}a_n$

* $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

(với n = 2 ta có (3), với n = 3 ta có (7)).

* $a^{2k} - b^{2k} = (a + b)(a^{2k-1} - a^{2k-2}b + a^{2k-3}b^2 - \ldots - a^2b^{2k-3} + ab^{2k-2} - b^{2k-1})$

* $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với n lẻ

(n = 3 ta có (6)).

Khai triển nhị thức Niu-tơn[1] :

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n.$$

Tam giác Pascal[2] : Bảng các hệ số trong khai triển $(a + b)^n$:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

.....

Với n = 0 :	$(a + b)^0 =$	1
Với n = 1 :	$(a + b)^1 =$	$a + b$
Với n = 2 :	$(a + b)^2 =$	$a^2 + 2ab + b^2$
Với n = 3 :	$(a + b)^3 =$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Với n = 4 :	$(a + b)^4 =$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
Với n = 5 :	$(a + b)^5 =$	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
Với n = 6 :	$(a + b)^6 =$	$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

.....

1) Niu-tơn (Newton) (1643 – 1727) nhà bác học Anh.

2) Pas-can (Pascal) (1623 – 1662) nhà toán học Pháp.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1.1. a) Rút gọn biểu thức :

$$A = 15(a + 2b)^2 - 3(a + 2b)(a + 2b + 19) + 6(2a + 4b)(1 - a - 2b).$$

b) Cho $A = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - y^2$; $B = x + 2y$;

$$C = 10xy^3 - y^2(x + 2y).$$

Tính $AB - C$.

Giải : a) Đặt $a + 2b = x$ thì

$$A = 15x^2 - 3x(x + 19) + 12x(1 - x) = 15x^2 - 3x^2 - 57x + 12x - 12x^2$$
$$= -45x = -45(a + 2b).$$

b) $AB = (x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - y^2)(x + 2y)$

$$= x^4 + 2x^3y - 2x^3y - 4x^2y^2 + 5x^2y^2 + 10xy^3 - xy^2 - 2y^3$$
$$= x^4 + x^2y^2 + 10xy^3 - xy^2 - 2y^3.$$

$$C = 10xy^3 - xy^2 - 2y^3.$$

Vậy $AB - C = x^4 + x^2y^2$.

Ví dụ 1.2. Cho biểu thức :

$$D = \frac{4}{2015}\left(3 + \frac{2011}{2013}\right) + \frac{1}{2015}.\frac{2}{2013} - \frac{6033}{2013.2015}.$$

Đặt $a = \frac{1}{2015}$ và $b = \frac{2011}{2013}$.

a) Rút gọn D theo a và b ;

b) Tính giá trị của $\frac{1}{D}$.

Giải. Nhận xét : $\frac{2}{2013} = 1 - \frac{2011}{2013}$; $\frac{6033}{2013.2015} = 3.\frac{1}{2015}.\frac{2011}{2013}$.

Do đó $D = 4a(3 + b) + a(1 - b) - 3ab = 12a + 4ab + a - ab - 3ab = 13a$.

b) $\frac{1}{D} = \frac{2015}{13} = 155$.

Ví dụ 1.3. Cho biểu thức :

$$E = x^6 - 6x^5 + 6x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 6.$$

Hãy tính giá trị biểu thức với $x = 5$.

Giải. Cách 1 : Thay x = 5 vào E, ta có :

$$E = 5^6 - 6.5^5 + 6.5^4 - 6.5^3 + 6.5^2 - 6.5 + 6$$
$$= 5^6 - (5+1).5^5 + (5+1).5^4 - (5+1).5^3 + (5+1).5^2 - (5+1).5 + 6$$
$$= 5^6 - 5^6 - 5^5 + 5^5 + 5^4 - 5^4 - 5^3 + 5^3 + 5^2 - 5^2 - 5 + 6 = 1.$$

Cách 2 : Do x = 5 nên 6 = x + 1. Ta có :

$$E = x^6 - (x+1).x^5 + (x+1).x^4 - (x+1).x^3 + (x+1).x^2 - (x+1).x + x + 1$$
$$= x^6 - x^6 - x^5 + x^5 + x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1.$$

Lưu ý : Qua ví dụ 1.2 và 1.3 ta thấy khi tính giá trị một biểu thức, tùy từng trường hợp có thể thay số bằng chữ hoặc thay chữ bằng số cho phù hợp để bài toán có thể được giải một cách đơn giản, thuận lợi.

Ví dụ 1.4. Chứng minh rằng : Với x = a + b + c thì

$$(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a) = 5(a+b+c)^2 + ab + ac + bc.$$

Giải : $(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a)$

$$= x^2 + ax + bx + ab + x^2 + bx + cx + bc + x^2 + cx + ax + ac$$
$$= 3x^2 + 2x(a+b+c) + ab + ac + bc$$
$$= 3x^2 + 2x^2 + ab + ac + bc = 5(a+b+c)^2 + ab + ac + bc.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.5. Cho đa thức $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

a) Viết đa thức trên dưới dạng đa thức của biến y với y = x − 1 ;

b) Viết đa thức trên dưới dạng đa thức của biến z với $z = \frac{x+1}{2}$.

Giải : a) Từ y = x − 1 suy ra x = y + 1. Thay vào đa thức, ta được :

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = (y+1)^3 - 2(y+1)^2 + 3(y+1) - 4$$
$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 2y^2 - 4y - 2 + 3y + 3 - 4$$
$$= y^3 + y^2 + 2y - 2.$$

b) Từ $z = \frac{x+1}{2}$, suy ra x = 2z − 1. Thay vào đa thức, ta được :

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = (2z-1)^3 - 2(2z-1)^2 + 3(2z-1) - 4$$
$$= 8z^3 - 12z^2 + 6z - 1 - 8z^2 + 8x - 2 + 6z - 3 - 4$$
$$= 8z^3 - 20z^2 + 20z - 10.$$

Ví dụ 1.6. Cho $A = (x + y + z)^3 + (x - y - z)^3$; $B = 6x(y + z)^2 + 2x^3$.

Chứng minh rằng A = B.

Giải : Xét hiệu $A - B = (x + y + z)^3 + (x - y - z)^3 - 6x(y + z)^2 - 2x^3$

$$= [x + (y + z)]^3 + [x - (y + z)]^3 - 6x(y + z)^2 - 2x^3$$

$$= x^3 + 3x^2(y + z) + 3x(y + z)^2 + (y + z)^3 + x^3 - 3x^2(y + z)$$

$$+ 3x(y + z)^2 - (y + z)^3 - 6x(y + z)^2 - 2x^3 = 0.$$

Vậy A = B

Ví dụ 1.7. Cho $M = 24.(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)(5^{16} + 1)$ và $N = 5^{32}$.

Hãy so sánh M và N.

Giải : $M = 4.6.(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)(5^{16} + 1)$

$$= (5 - 1)(5 + 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)(5^{16} + 1)$$

$$= (5^2 - 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)(5^{16} + 1)$$

$$= (5^4 - 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)(5^{16} + 1)$$

$$= (5^8 - 1)(5^8 + 1)(5^{16} + 1) = (5^{16} - 1)(5^{16} + 1) = 5^{32} - 1.$$

Vậy M < N.

Ví dụ 1.8. Cho $P = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$

$$Q = (x + y)(y + z) + (y + z)(z + x) + (z + x)(x + y).$$

Chứng minh rằng nếu P = Q thì x = y = z.

Giải. Đặt x + y = a ; y + z = b ; z + x = c thì P = Q có nghĩa là

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow x + y = y + z = z + x \Leftrightarrow x = y = z.$$

Ví dụ 1.9. Chứng minh rằng nếu a + b + c = 0 thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Giải : Từ a + b + c = 0, suy ra a + b = – c nên $c^3 = -(a + b)^3$.

Từ đó $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = (a^3 + b^3) - [a^3 + b^3 + 3a(a + b)]$

$$= -3ab(a + b) = 3abc.$$

III. BÀI TẬP

1.1. Thực hiện phép tính :

a) $(a + b)(a^4 - a^3 b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;

b) $(x - a)(x - b)(x - c)$.

1.2. Thực hiện phép tính :

a) $5x^2(3y - 1) - [3x^2(5y + 2) - 2x(3x^2 - 7x)]$;

b) $4x^n(7x^{n-1} + x - 5) - 2x^{n-2}(14x^{n+1} - 10x^2)$.

1.3. Rút gọn :

a) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$;

b) $(a + c)(a - c) - (a - b - c)(a - b + c) + b(b - 2a)$.

1.4. Cho $A = x^2 - x + 3$; $B = 2x^2 - 3x - 5$; $C = 4x^2 - 4x - 15$.

a) Tính $D = AB - C$;

b) Tính giá trị của D biết $|x - 2| = 1$.

1.5. Cho $a + b + c = -6$; $ab + bc + ca = 11$ và $abc = -6$. Hãy tính giá trị của biểu thức $E = (x + a)(x + b)(x + c)$ với $|x| = 2$.

1.6. Tính giá trị của các đa thức :

a) $f(x) = x^6 - 50x^5 + 50x^4 - 50x^3 + 50x^2 - 50x + 50$ tại $x = 49$;

b) $g(x) = 1969 - 80x + 80x^2 - 80x^3 + 80x^4 - \ldots + 80x^{1968} - x^{1969}$ tại $x = 79$.

1.7. Chứng minh rằng giá trị của các đa thức sau không phụ thuộc vào x :

a) $h(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1)$;

b) $k(x) = 2x(4x + 1) - 8x^2(x + 1) + (2x)^3 - 2x + 3$.

1.8. a) Viết 15.256 thành tổng của bốn lũy thừa cơ số 2 với các số mũ là bốn số tự nhiên liên tiếp ;

b) Viết 775.625.5 thành tổng của ba lũy thừa cơ số 5 với các số mũ là ba số tự nhiên liên tiếp.

1.9. Tính : $M = \frac{1}{1975}\left(\frac{2}{1945} - 1\right) - \frac{1}{1945}\left(1 - \frac{2}{1975}\right) - \frac{1974}{1975}.\frac{1946}{1945} - \frac{3}{1975.1945}$.

1.10. Tìm các hệ số a, b, c, biết :

a) $2x^2(ax^2 + 2bx + 4c) = 6x^4 - 20x^3 - 8x^2$ với mọi x ;

b) $(ax + b)(x^2 - cx + 2) = x^3 + x^2 - 2$ với mọi x.

1.11. Tìm x, biết :

a) $2(x-5)(x+5)-(x+2)(2x-3)+x(x^2-8)=(x+1)(x^2-x+1)$;

b) $3\left(\frac{5}{3}x-7\right)-2(1,5x+6)-(5-x)(x+4)=80+x^2$;

c) $\frac{4}{5}x^2\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4x^2}{3}+1\right)=\frac{22}{45}x^2$.

1.12. a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì

$(2-n)(n^2-3n+1)+n(n^2+12)+8$ chia hết cho 5 ;

b) Hiệu các bình phương của hai số tự nhiên chẵn liên tiếp là 44. Tìm hai số đó ;

c) Hiệu các bình phương của hai số tự nhiên lẻ liên tiếp là 48. Tìm hai số đó ;

d) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng tổng của ba tích mỗi tích là tích của hai trong ba số đó thì được 74.

1.13. Tính nhanh giá trị của các biểu thức sau :

a) $A=123(123+154)+77^2$;

b) $B=3^{24}-(27^4+1)(9^6-1)$;

c) $C=85^2+75^2+65^2+55^2-45^2-35^2-25^2-15^2$;

d) $D=\frac{135^2+130.135+65^2}{135^2-65^2}$;

e) $E=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots+2011^2-2012^2$.

1.14. So sánh :

a) $2011.2013+2012.2014$ và 2012^2+2013^2-2 ;

b) $(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)(9^{16}+1)(9^{32}+1)$ và $9^{64}-1$;

c) $\frac{x-y}{x+y}$ và $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$ với $x>y>0$;

d) $\frac{(x+y)^3}{x^2-y^2}$ và $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$ với $x>y>0$;

1.15. Rút gọn biểu thức :

a) $(a^2+b^2+c^2)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$;

b) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2-4ac$;

c) $(a + b + c)^2 - (a + b)^2 - (a + c)^2 - (b + c)^2$;

d) $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (- a + b + c)^2$.

1.16. Chứng minh rằng :

a) $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$;

b) $2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = (a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right]$;

c) $(a + b)(b + c)(c + a) + 4abc = c(a + b)^2 + a(b + c)^2 + b(c + a)^2$;

d) $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$.

1.17. a) Cho $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$. Chứng minh rằng $x = y = z$;

b) Cho $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4(ab + ac + bc) = 4(a^2 + b^2 + c^2)$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

1.18. a) Cho $x - y = 7$, tính giá trị của biểu thức $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 5y + 6$;

b) Tìm x, y và z biết $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 + (2z - 3)^2 = 0$.

1.19. Tìm x biết :

a) $5x(x - 3)(x + 3) - (2x - 3)^2 - 5(x + 2)^3 + 34x(x + 2) = 1$;

b) $(x - 2)^3 + 6(x + 1)^2 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 97$.

1.20. Cho $a + b + c + d = 0$.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(ab - cd)(c + d)$:

1.21. a) Cho $x = 99$. Tính giá trị của biểu thức $x^3 + 3x^2 + 3x$;

b) Cho $x + y = 1$. Tính giá trị của biểu thức $3(x^2 + y^2) - 2(x^3 + y^3)$;

c) Cho $x + y = 101$. Tính giá trị của biểu thức :

$x^3 - 3x^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3y^2 - 6xy + 3x + 3y + 2012$.

1.22. Cho $a + b + c = 4m$. Chứng minh rằng :

a) $2ab + b^2 + a^2 - c^2 = 16m^2 - 8mc$;

b) $\left(\frac{a + b - c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b + c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a + b + c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4m^2$.

1.23. a) Chứng minh tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là số chính phương ;

b) Chứng minh rằng số $n^2 + n + 1$ với n nguyên dương không là số chính phương.

Chuyên đề 2

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phân tích đa thức thành nhân tử là biến đổi đa thức đó thành một tích các đa thức.
2. Các phương pháp thường dùng : Đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức đáng nhớ, nhóm các hạng tử và phối hợp ba phương pháp đó.
3. Các phương pháp khác :

   – Tách hoặc thêm bớt các hạng tử ;

   – Dùng biến phụ ;

   – Phương pháp hệ số bất định ;

   – Phương pháp sử dụng định lý Bézout (xem chuyên đề 16) ;

   – Phương pháp hoán vị vòng quanh.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

a) $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$;

b) $a(a + 2b)^3 - b(b + 2a)^3$.

Giải. a) $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = [(a + b) + c](ab + bc + ca) - abc$

$= (a + b)(ab + bc + ca) + abc + bc^2 + c^2a - abc = (a + b)(ab + bc + ca + c^2)$

$= (a + b)[b(a + c) + c(a + c)] = (a + b)(b + c)(c + a)$.

b) $a(a + 2b)^3 - b(b + 2a)^3 = a(a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3) - b(b^3 + 6b^2a + 12ba^2 + 8a^3)$

$= a^4 - b^4 + 6ab(a^2 - b^2) - 8ab(a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 2ab(a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) = (a - b)(a + b)(a - b)^2 = (a + b)(a - b)^3$.

Ví dụ 2.2. Phân tích $x^2 - 5x + 6$ thành nhân tử.

Giải. Ta có thể tách (hoặc thêm bớt) các hạng tử theo một số cách sau đây :

Cách 1 : $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(x-3)$.

Cách 2 : $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2.x.\frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = (x-3)(x-2).$$

Cách 3 : $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 9 - 5x + 15 = (x-3)(x+3) - 5(x-3) = (x-3)(x-2)$.

Cách 4 : $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 4 - 5x + 10 = (x-2)(x+2) - 5(x-2) = (x-2)(x-3)$.

Cách 5 : $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 6x + 9 + x - 3 = (x-3)^2 + (x-3) = (x-3)(x-2)$.

Cách 6 : $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 4x + 4 - x + 2 = (x-2)^2 - (x-2) = (x-2)(x-3)$.

☞ **LƯU Ý**

Nhận xét. Ở bài toán trên ta có rất nhiều cách phân tích. Tuy nhiên thông thường ta hay sử dụng cách 1 và cách 2 để phân tích một đa thức thuộc dạng $ax^2 + bx + c$ hoặc $ax^2 + bxy + cy^2$ thành nhân tử.

Ta có thể tìm được quan hệ giữa các hệ số a, b, c để đa thức $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ phân tích được thành nhân tử (theo hướng tách hệ số b) :

Đặt $b = b_1 + b_2$. Ta có $ax^2 + bx + c = ax^2 + (b_1 + b_2)x + c$

$$= ax^2 + b_1x + b_2x + c$$

$$= ax\left(x + \frac{b_1}{a}\right) + b_2\left(x + \frac{c}{b_2}\right).$$

Để $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử thì

$$x + \frac{b_1}{a} = x + \frac{c}{b_2} \text{ tức là } \frac{b_1}{a} = \frac{c}{b_2}$$

hay $\quad b_1 \times b_2 = a \times c$ với $b_1 + b_2 = b$.

Đây chính là quy luật để phân tích đa thức $ax^2 + bx + c$ hoặc $ax^2 + bxy + cy^2$ thành nhân tử bằng cách tách hệ số b.

Áp dụng phân tích $6x^2 + 23x - 18$ thành nhân tử :

Nhận xét. $a = 6$; $b = 23$; $c = -18$. Ta có tích $a.c = -108$ nên phải tách

$23 = 27 - 4$ vì $27.(-4) = -108$.

Khi đó $6x^2 + 23x - 18 = 6x^2 + 27x - 4x - 18 = 3x(2x + 9) - 2(2x + 9)$

$= (2x + 9)(3x - 2)$.

Ví dụ 2.3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$;

b) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$;

c) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

Giải. a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, ta có :

$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = [(a + b) + c]^3 - a^3 - b^3 - c^3$

$= (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b).c.(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + c^3 + 3c(a + b)(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$

$= 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$

$= 3(a + b)(b + c)(c + a)$.

c) Đặt $x - y = a$; $y - z = b$; $z - x = c$ thì $a + b + c = 0$.

Từ a) ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$;

do đó $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Vậy $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

Ví dụ 2.4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 64$; b) $x^4 + x^2 + 1$;

c) $x^5 + x + 1$; d) $x^7 + x^5 + 1$.

Giải. a) $x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2$

$= (x^2 + 8)^2 - 16x^2$

$= (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$.

b) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$

$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$

c) $x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$

d) $x^7 + x^5 + 1 = x^7 + x^5 + x^2 + x - x^2 - x + 1$

$= x^7 - x + x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x(x^6 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^3 - 1)(x^4 + x + x^2) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[(x - 1)(x^4 + x^2 + x) + 1]$

$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$

Ví dụ 2.5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $A = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) - 80$;

b) $B = x^8 + 2x^5 - 2x^4 + x^2 - 2x - 100 + 10x(x^4 + x) + (5x - 1)^2$.

Giải. a) $A = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) - 80$. Đặt $x^2 - 5x + 4 = u$

Ta có $A = u(u + 2) - 80 = u^2 + 2u + 1 - 81$

$= (u + 1)^2 - 81 = (u + 1 + 9)(u + 1 - 9) = (u + 10)(u - 8).$

Vậy $A = (x^2 - 5x + 14)(x^2 - 5x - 4).$

b) $B = (x^8 + 2x^5 + x^2) + 10x(x^4 + x) - (2x^4 + 2x) + (5x - 1)^2 - 100$

$= (x^4 + x)^2 + 2(x^4 + x)(5x - 1) + (5x - 1)^2 - 100.$

Đặt $x^4 + x = a$; $5x - 1 = b$ thì $B = a^2 + 2ab + b^2 - 100 = (a + b)^2 - 100$

$= (a + b + 10)(a + b - 10).$

Vậy $B = (x^4 + 6x + 9)(x^4 + 6x - 11).$

○ Ta biết rằng a là một nghiệm của đa thức f(x) nếu f(a) = 0. Vì thế nếu đa thức f(x) có nghiệm x = a thì nó chứa nhân tử (x – a) và nghiệm nguyên của đa thức nếu có phải là ước của hệ số tự do.

Người ta dựa vào nhận xét đó để phân tích các đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhẩm nghiệm (thực chất là sử dụng định lý Bézout).

Ví dụ 2.6. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Hướng dẫn giải. Nhận xét : $f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ nên đa thức f(x) khi phân tích thành nhân tử có chứa một nhân tử $(x - 1)$.

Giải

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 \\ &= x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x - 1)(x^2 - 2x - 3x + 6) = (x - 1)[x(x - 2) - 3(x - 2)] \\ &= (x - 1)(x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$

Ví dụ 2.7. Phân tích đa thức $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$ thành nhân tử.

Hướng dẫn giải. Các số ± 1 ; ± 5 không là nghiệm của đa thức. Đa thức không có nghiệm nguyên nhưng có thể có nghiệm hữu tỉ dạng $\frac{p}{q}$ (với p là ước của hệ số tự do, q là ước dương hệ số của hạng tử bậc cao nhất). Thử với $\pm\frac{1}{3}$ và $\pm\frac{5}{3}$ thì $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức nên đa thức chứa nhân tử $x - \frac{1}{3}$ hay $3x - 1$.

Giải

$$\begin{aligned} 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 &= 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 \\ &= x^2(3x - 1) - 2x(3x - 1) + 5(3x - 1) = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5). \end{aligned}$$

LƯU Ý

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp hệ số bất định :

Nếu đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng :

$$(ax + b)(cx^2 + dx + e) = acx^3 + (ad + bc)x^2 + (ae + bd)x + be.$$

Đồng nhất đa thức này với $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$, ta có :

$$ac = 3 ; ad + bc = -7 ; ae + bd = 17 ; be = -5.$$

Giả sử $a > 0$ (nếu $a < 0$ ta đổi dấu cả hai nhân tử) thì $a = 3$ hoặc $a = 1$.

Xét $a = 3$ thì $c = 1$, ta có $3d + b = -7$; $3e + bd = 17$ và $be = -5$.

Suy ra b có thể là ± 1 hoặc ± 5. Với $b = -1$ thì $e = 5$; $d = -2$ thoả mãn.

Vậy ta có

$$3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5).$$

Ví dụ 2.8. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$ab(a + b) - bc(b + c) + ac(a - c).$$

Giải

Cách 1 : $ab(a + b) - bc(b + c) + ac(a - c)$

$= ab(a + b) - b^2c - bc^2 + a^2c - ac^2$

$= ab(a + b) + (a^2c - b^2c) - (ac^2 + bc^2)$

$= ab(a + b) + c(a - b)(a + b) - c^2(a+ b)$

$= (a + b)\,[\,ab + c(a - b) - c^2] = (a + b)\,(ab + ca - cb - c^2)$

$= (a + b)\,[(b(a - c) + c(a - c)] = (a + b)(a - c)(b + c).$

Cách 2 : Ta có $a - c = (a + b) - (b + c)$ nên $ab(a + b) - bc(b + c) + ac(a - c)$

$= ab(a + b) - bc(b + c) + ac\,(a + b) - ac(b + c)$

$= (ab + ac)(a + b) - (bc + ac)(b + c)$

$= (a + b)a(b + c) - (b + c)c(a + b) = (a + b)(b + c)(a - c).$

Ví dụ 2.9. Phân tích đa thức $a^5 + a - 1$ thành nhân tử. Từ đó chỉ ra số 100 009 là hợp số.

Giải

$a^5+a-1=a^5+a^2-(a^2-a+1)=a^2(a^3+1)-(a^2-a+1)=a^2(a+1)(a^2-a+1)-(a^2-a+1)$

$= (a^2 - a + 1)(a^3 + a^2 - 1).$

Với a = 10 ta có 100 009 = 91. 1099 là hợp số.

III. BÀI TẬP

2.1. a) Cho $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$. Chứng minh rằng

$$x^{2013} + y^{2013} + z^{2013} = (x + y + z)^{2013}.$$

b) Chứng minh rằng nếu $x + y + z \vdots 6$ thì $A = (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz \vdots 6$.

2.2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử : (dùng cách 1 trong ví dụ 2.2)

a) $x^2 + x - 6$ b) $x^2 + 5x + 6$

c) $x^2 - 4x + 3$ d) $x^2 + 5x + 4$

e) $x^2 - x - 6$ f) $2x^2 + 5x + 3$

g) $2x^2 - 7x + 3$ h) $3x^2 + 10x - 8$

i) $3x^2 + 7x - 76$ k) $2x^2 + 3881x - 17505$

l) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{19}{6}x + 1.$

2.3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử : (dùng cách 2 trong ví dụ 2.2)

a) $x^2 - x - 6$ b) $x^2 - 8x + 12$

c) $x^2 + 3x - 10$ d) $x^2 - 12x - 13$

e) $2x^2 - 5x - 3$ f) $3x^2 + 5x - 2$

g) $15x^2 - x - 6$ h) $x^2 - 4x + 13$.

2.4. a) Chứng minh rằng điều kiện để đa thức $x^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử là : $\frac{b^2}{4} - c$ là bình phương của một số hữu tỉ.

b) Chứng minh rằng điều kiện để đa thức $ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 1$ và $a \neq 0$) phân tích được thành nhân tử là : $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ là bình phương của một số hữu tỉ. Sau đó kiểm tra xem đa thức : $2x^2 - 5x + 7$ có phân tích được thành nhân tử không ?

2.5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; b) $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$;

c) $x^3 - 8x^2 + x + 42$; d) $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 41x - 30$.

2.6. Giải các phương trình :

a) $6x^3 + x + 4 = 11x^2$ b) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 = 36$.

2.7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^4 + 4$; b) $x^4 + 324$; c) $x^8 + 64$

2.8. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^{12} + x^6 + 1$ b) $x^{16} + x^8 + 1$

c) $x^8 + 7x^4 + 16$ d) $x^{40} + 2x^{20} + 9$

e) $x^{4n} + x^{2n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) f) $x^{4n} + 5x^{2n} + 9$

g) $x^{4n} + 4x^{2n} + 16$

2.9. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^5 + x - 1$ b) $x^5 - x^4 - 1$

c) $x^7 + x^2 + 1$ d) $x^9 + x^8 + x^7 - x^3 + 1$

e) $x^{10} + x^5 + 1$.

2.10. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $A = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$;

b) $B = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$;

c) $C = (x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 8) + 15$;

d) $D = (x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 8) + 16$;

e) $E = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 24$;

f) $F = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) + 1$.

2.11. a) Chứng minh rằng với mọi $x, y \in \mathbf{Z}$ thì

$S = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

b) Cho $T = (t - 1)(t - 3)(t - 4)(t - 6) + 9$.

1) Chứng minh : $T \geq 0$ với mọi t

2) T là số chính phương với mọi $t \in \mathbf{Z}$.

2.12. a) Tìm điều kiện của a và m để $M = (x - a)(x - 2a)(x - 3a)(x - 4a) + m$ phân tích được thành nhân tử. Đa thức $H = (x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 8) + 4$ có phân tích được thành nhân tử không ?

b) Tìm điều kiện của $a, b, n \in \mathbf{Q}$ để :

$$N = (x + a)(x + b)(x + a + n)(x + b + n) + k$$

1) Phân tích được thành nhân tử ;

2) Trở thành bình phương đúng.

2.13. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$;

b) $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$;

c) $(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - 8(a + b + c)^3$;

d) $(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5$.

2.14. a) Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, chứng minh rằng

$a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

b) Cho $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$ và $a, b, c, d > 0$, chứng minh rằng

$a = b = c = d$.

2.15. a) Tìm x, biết $x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - bc)x + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

với a, b, c là các số đã cho.

b) Tìm bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thoả mãn :

$$x^3 + y^3 + 3xyz = z^3 = (2x + 2y)^2.$$

2.16. Phân tích thành nhân tử :

a) $A = a^2b^2(a - b) - c^2b^2(c - b) + a^2c^2(c - a)$;

b) $B = 2bc(b + 2c) + 2ac(c - 2a) - 2ab(a + 2b) - 7abc$;

c) $C = ab(b - a) - bc(b - c) - ac(c - a)$;

d) $D = 3bc(3b - c) - 3ac(3c - a) - 3ab(3a + b) + 28abc$;

e) $E = a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$.

2.17. a) Lần lượt thay $a = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; n$ trong hằng đẳng thức $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ rồi cộng theo vế các đẳng thức.

Từ đó tính tổng $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

b) Hãy tính tổng $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ từ $(a + 1)^3$.

c) Hãy tính tổng $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ từ $(a + 1)^4$.

2.18. a) Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3$:

1) Là hợp số ;

2) Bằng 2013.

b) Tìm số tự nhiên n để giá trị biểu thức $B = n^4 - n^3 - 6n^2 + 7n - 21$ là số nguyên tố.

2.19. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp hệ số bất định :

a) $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 9x - 13y - 5$;

b) $2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 20x + 14$;

c) $2x^4 - 19x^3 + 2002x^2 - 9779x + 11670$.

2.20. a) Chứng minh rằng tổng của tích bốn số tự nhiên chẵn liên tiếp với 16 là số chính phương.

b) Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $(x + a)(x - 2) - 7 = (x + b)(x + c)$.

Chuyên đề 3

TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa : Cho hai số nguyên bất kỳ a và b ($b \neq 0$). Có một và chỉ một cặp số nguyên q và r sao cho $a = bq + r$ với $0 \leq r < |b|$.

+ Nếu $r = 0$ thì a chia hết cho b (ký hiệu $a \vdots b$) hay b chia hết a (ký hiệu $b \mid a$) hay a là bội của b hay b là ước của a.

2. Một số tính chất chia hết : Với a, b, c, d, m, n $\in$ **Z**

a) Nếu $a \neq 0$ thì $a \vdots a$; $0 \vdots a$; $a \vdots 1$.

b) Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots c$ thì $a \vdots c$ (tính chất bắc cầu).

c) Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots a$ thì $a = \pm b$.

d) Nếu $a \vdots b$ thì $ac \vdots b$.

e) Nếu $a \vdots b$ và $a \vdots c$ thì $a \vdots$ BCNN(b, c). Khi (b, c) = 1 thì $a \vdots b.c$.

f) Nếu $ab \vdots c$ và (b, c) = 1 thì $a \vdots c$.

g) Nếu $a \vdots c$ và $b \vdots c$ thì $a \pm b \vdots c$ (tính chất chia hết của tổng và hiệu).

h) Nếu $a \vdots c$ và $b \not\vdots c$ thì $a \pm b \not\vdots c$.

i) Nếu $a \vdots c$; $b \vdots d$ thì $ab \vdots cd$.

k) Nếu $a \vdots b$ thì $a^n \vdots b^n$ ($n \in$ **N**).

l) Nếu $a \vdots c$ hoặc $b \vdots c$ thì $ab \vdots c$.

m) Nếu $a \vdots m$; $b \vdots n$ thì $ab \vdots mn$.

n) Nếu $a.b \vdots p$; p là số nguyên tố thì $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$.

Nếu $a^n \vdots p$; p là số nguyên tố thì $a \vdots p$.

Chú ý : Một số nhận xét thường dùng trong các chứng minh về chia hết :

1. Trong n số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho n.
   Tích của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n.

2. Khi chia một số nguyên a cho số nguyên $b \neq 0$, xảy ra một trong |b| dạng sau : $a = bq$; $a = bq + 1$; $a = bq + 2$; ... ; $a = bq + (|b| - 1)$ với q nguyên.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

1. Chứng minh quan hệ chia hết : Cho B(a) là một biểu thức phụ thuộc vào a ($a \in$ **N** hoặc $a \in$ **Z**). Để chứng minh $B(a) \vdots n$ ta thường dùng phương pháp phân tích B(a) thành nhân tử trong đó có chứa n. Nếu n là hợp số ta phân tích n thành một tích các thừa số đôi một nguyên tố cùng nhau rồi chứng minh B(a) chia hết cho tất cả các số đó.

Để chứng minh quan hệ chia hết, ta còn dùng cấu tạo số và các phép tính lũy thừa, các hằng đẳng thức nâng cao, sử dụng các nhận xét thường dùng đã nêu trên.

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì :

a) $a^2 - a \vdots 2$;

b) $a^3 - a \vdots 3$;

c) $a^5 - a \vdots 5$;

d) $a^7 - a \vdots 7$.

Giải. a) $a^2 - a = (a - 1)a \vdots 2$ vì là tích của hai số nguyên liên tiếp.

b) $a^3 - a = (a^2 - 1)a = (a - 1)a(a + 1) \vdots 3$ vì là tích của ba số nguyên liên tiếp.

c) Xét $a^5 - a$:

Cách 1 : $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)$

$= a(a^2 - 1)(a^2 - 4 + 5) = a(a^2 - 1)(a^2 - 4) + 5a(a^2 - 1)$

$= (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5a(a^2 - 1) \vdots 5$

vì đây là tích của năm số nguyên liên tiếp cộng năm lần một số nguyên.

Cách 2 : Xét hiệu $a^5 - a$ với tích của năm số nguyên liên tiếp

$(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$.

Ta có $(a^5 - a) - (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$

$= (a^5 - a) - (a^5 - 5a^3 + 4a) = 5a^3 - 5a \vdots 5$.

Mà $(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$ là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5. Suy ra $a^5 - a \vdots 5$.

Cách 3 : Xét số dư của a trong phép chia cho 5 :

$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)$.

Với $a = 5k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $a \vdots 5$.

Với $a = 5k \pm 1$ thì $a^2 - 1 = (25k^2 \pm 10k + 1) - 1 = 25k^2 \pm 10k \vdots 5$.

Với $a = 5k \pm 2$ thì $a^2 + 1 = (25k^2 \pm 20k + 4) + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5 \vdots 5$.

Trường hợp nào cũng có một thừa số chia hết cho 5 nên $a^5 - a \vdots 5$.

d) Chứng minh $a^7 - a \vdots 7$ tương tự câu c).

Cách 1 : Xét hiệu $(a^7 - a) - (a - 3)(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$

$= 7a(2a^4 - 7a^2 + 5) \vdots 7$.

Suy ra $a^7 - a \vdots 7$.

Cách 2 : $a^7 - a = a(a^3 + 1)(a^3 - 1)$.

Xét $a = 7k$; $a = 7k \pm 1$; $a = 7k \pm 2$; $a = 7k \pm 3$.

☞ **CHÚ Ý**

Mệnh đề "$a^9 - a \vdots 9$ với mọi số nguyên a" không đúng (chẳng hạn $2^9 - 2 = 510 \not\vdots 9$).

Bài toán tổng quát của các bài toán trong ví dụ 1 là : "Nếu p là số nguyên tố thì $a^p - a$ chia hết cho p với mọi số nguyên a" – Đây là định lý nhỏ Fermat.[1)]

1) Pierre de Fermat (1601 – 1665) nhà toán học Pháp.

Ví dụ 3.2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a :

a) $a^3 - a \vdots 6$;

b) $a^3 - 7a \vdots 6$;

c) $a^3 + 11a \vdots 6$;

d) Từ các phần trên, hãy tổng quát hóa bài toán và chứng minh.

Giải. a) Ta có : $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$, là tích của ba số nguyên liên tiếp. Trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 và ít nhất một số chẵn.

Mà 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên

$$(a - 1)a(a + 1) \vdots 6.$$

b) $a^3 - 7a = a^3 - a - 6a \vdots 6$ vì $a^3 - a \vdots 6$ và $6a \vdots 6$.

c) $a^3 + 11a = a^3 - a + 12a \vdots 6$ vì $a^3 - a \vdots 6$ và $12a \vdots 6$.

d) Tổng quát : $a^3 - (1 + 6k)a \vdots 6$ (với mọi a ; $k \in \mathbf{Z}$).

Chứng minh : $a^3 - (1 + 6k)a = (a^3 - a) - 6ka \vdots 6$.

(Với k = 0 ta có câu a) ; với k = 1 ta có câu b) ; với k = –2 ta có câu c).

Ví dụ 3.3. Chứng minh rằng :

a) $10^{2010} - 1 \vdots 99$;

b) $3^{1930} + 2^{1930} \vdots 13$;

c) $(2^{10} + 1)^{2010} \vdots 25^{2010}$;

d) $(30^4)^{1975}.15^{1870}.4^{935} - (7^5)^{1954} \vdots 23$.

Giải. a) Áp dụng hằng đẳng thức $a^n - b^n$ (xem chuyên đề 1). Ta có :

$$10^{2010} - 1 = (10^2)^{1050} - 1 = 100^{1050} - 1^{1050}$$
$$= (100 - 1)(100^{1049} + 100^{1048} + \ldots + 100 + 1) = 99.k$$

với $k = 100^{1049} + 100^{1048} + \ldots + 100 + 1 \in \mathbf{Z}$.

Vậy $10^{2010} - 1 \vdots 99$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức $a^n + b^n$ với n lẻ (xem chuyên đề 1). Ta có :

$$3^{1930} + 2^{1930} = 9^{965} + 4^{965} = (9 + 4)k \vdots 13.$$

c) $(2^{10} + 1)^{2010} = (1024 + 1)^{2010} = 1025^{2010} \vdots 25^{2010}$.

d) $(30^4)^{1975}.15^{1870}.4^{935} - (7^5)^{1954} = 30^{7900}.15^{1870}.2^{1870} - 7^{9770}$

$= 30^{7900}.30^{1870} - 7^{9770} = 30^{9770} - 7^{9770} = (30 - 7)k \vdots 23$.

Ví dụ 3.4. Chứng minh rằng $4^n + 15n - 10 \vdots 9$ ($n \in \mathbb{N}$).

Giải. Cách 1 : $4^n + 15n - 10 = 4^n - 1 - 3n + 18n - 9$.

Xét $4^n - 1 - 3n = (4-1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3} + \ldots + 4^2 + 4 + 1) - 3n$

$= 3\,(4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3} + \ldots + 4^2 + 4 + 1 - n)$

$= 3\,[(4^{n-1} - 1) + (4^{n-2} - 1) + (4^{n-3} - 1) + \ldots + (4^2 - 1) + (4 - 1) + (1 - 1)]$.

Ta lại có $4^{n-1} - 1 = 3.(4^{n-2} + 4^{n-3} + \ldots + 4^2 + 4 + 1) = 3k_1$

$4^{n-2} - 1 = 3.(4^{n-3} + 4^{n-4} + \ldots + 4^2 + 4 + 1) = 3k_2$

$4^{n-3} - 1 = 3.(4^{n-4} + 4^{n-5} + \ldots + 4^2 + 4 + 1) = 3k_3$

...

$4^2 - 1 = 3.5$

$4 - 1 = 3.1$.

Vậy $4^n - 1 - 3n = 3.\,3\,(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + 5 + 1) = 9\,k \,\vdots\, 9$.

Do đó $4^n + 15n - 10 \,\vdots\, 9$ $(n \in \mathbb{N})$.

Cách 2 : Chứng minh bằng quy nạp toán học (xem chuyên đề 18) :

+ Với $n = 0$ thì $4^n + 15n - 10 = 1 + 0 - 10 = -9 \,\vdots\, 9$ đúng.

+ Giả sử bài toán đúng với $n = k$ nghĩa là $4^k + 15k - 10 \,\vdots\, 9$. Ta phải chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$, nghĩa là $4^{k+1} + 15(k + 1) - 10 \,\vdots\, 9$.

Thật vậy $4^{k+1} + 15(k + 1) - 10 = 4.4^k + 15k + 5$

$= 4.(4^k + 15k - 10) - 45k + 45 \,\vdots\, 9$.

(vì $4^k + 15k - 10 \,\vdots\, 9$; $45k \,\vdots\, 9$; $45 \,\vdots\, 9$).

+ Vậy bài toán đúng với mọi số tự nhiên n.

Ví dụ 3.5. Chứng minh rằng hiệu giữa một số tự nhiên có sáu chữ số và số viết theo thứ tự ngược lại luôn chia hết cho 9. Hãy tổng quát hoá bài toán và chứng minh.

Giải. Gọi số có 6 chữ số là $\overline{abcdef}$ $(a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}, a, b, c, d, e, f \le 9 ; a \ne 0)$

Số viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{fedcba}$.

Ta có $\overline{abcdef} - \overline{fedcba} =$

$= (a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + d.10^2 + e.10 + f) - (f.10^5 + e.10^4 + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a)$

$= a(10^5 - 1) + b(10^4 - 10) + c(10^3 - 10^2) - d(10^3 - 10^2) - e(10^4 - 10) - f(10^5 - 1)$

$= 9k_1 + 9k_2 + 9k_3 - 9k_4 - 9k_5 - 9k_6 = 9k \,\vdots\, 9$.

Tổng quát : $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_3 a_2 a_1} - \overline{a_1 a_2 a_3 ... a_{n-2} a_{n-1} a_n} \vdots 9$.

Chứng minh tương tự.

Chú ý : Khi giải bài tập dạng này, cần nhớ cấu tạo số trong hệ thập phân, $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_3 a_2 a_1} = a_n.10^{n-1} + a_{n-1}.10^{n-2} + a_{n-2}.10^{n-3} + ... + a_3.10^2 + a_2.10 + a_1$.

2. Chứng minh quan hệ không chia hết, chia hết có điều kiện, tìm điều kiện để chia hết

Với các bài toán chứng minh quan hệ không chia hết ta thường dùng phương pháp chứng minh phản chứng hoặc sử dụng tính chất chia hết của tổng hoặc hiệu. Dạng toán chứng minh chia hết có điều kiện, tìm điều kiện để chia hết thường sử dụng tính chất chia hết của tổng hoặc hiệu và các hằng đẳng thức $a^n - b^n$; $a^n + b^n$ (với n lẻ), $(a + b)^n$; sử dụng các phép tính luỹ thừa và thêm bớt, tách các hạng tử một cách thích hợp. Có thể dùng phương pháp chứng minh bằng quy nạp toán học.

Ví dụ 3.7. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n :

a) $n^2 + 7n + 2020 \not\vdots\ 9$;

b) $22.484^n + 16^{2n+1} + 2011 \not\vdots\ 19$.

Giải. a) $\forall n \in N$; $n^2 + 7n + 2020 = n^2 + 5n + 2n + 10 + 2010$

$= n(n + 5) + 2(n + 5) + 2010$

$= (n + 5)(n + 2) + 2010$.

Giả sử tồn tại $a \in N$ sao cho $a^2 + 7a + 2020 \vdots 9$ thì

$(a + 5)(a + 2) + 2010 = 9k \vdots 3$ $(k \in N)$

Do $2010 \vdots 3$ nên $(a + 5)(a + 2) \vdots 3$. Vì 3 là số nguyên tố nên $a + 5 \vdots 3$ hoặc $a + 2 \vdots 3$.

Ta lại có $(a + 5) - (a + 2) = 3 \vdots 3$ nên $a + 5 \vdots 3$ và $a + 2 \vdots 3$

Suy ra $(a + 5)(a + 2) \vdots 9 \Rightarrow 2010 \vdots 9$ vô lý vì $2010 \vdots 3$ không chia hết cho 9.

Vậy $n^2 + 7n + 2020$ không chia hết cho 9.

b) $22.484^n + 16^{2n+1} + 2011 = 22.22^{2n} + 16^{2n+1} + 2011$

$= 22^{2n+1} + 16^{2n+1} + 2011 = (19 + 3)^{2n+1} + (19 - 3)^{2n+1} + 2011$

$= 19k + 3^{2n+1} + 19h - 3^{2n+1} + 2011 = 19k + 19h + 19.105 + 16$

$= 19(k + h + 105) + 16$ $(k ; h \in N)$ không chia hết cho 19.

Ví dụ 3.8. Tìm giá trị nguyên dương của n để :

a) $3^n - 1$ chia hết cho 8 ;

b) $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Giải. a) Với n chẵn n = 2k ($k \in \mathbb{N}$) thì

$$3^{2k} - 1 = 9^k - 1 = (9-1)(9^{k-1} + 9^{k-2} + \ldots + 9 + 1) = 8p \vdots 8.$$

Với n lẻ n = 2k + 1 thì

$$3^{2k+1} - 1 = 3.9^k - 3 + 2 = 3(9^k - 1) + 2 = 3.8p + 2 \not\vdots\ 8.$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ chẵn thì $3^n - 1 \vdots 8$.

b) Nếu n = 3k thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = 7a \vdots 7$ ($k \in \mathbb{N}$).

Nếu n = 3k + 1 thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2.2^{3k} - 2 + 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1 \not\vdots\ 7$.

Nếu n = 3k + 2 thì $2^n - 1 = 2^{3k+3} - 1 = 4.2^{3k} - 4 + 3 = 4(2^{3k} - 1) + 3 \not\vdots\ 7$.

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ là bội số của 3 thì $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Ví dụ 3.9. a) Chứng minh rằng nếu $\overline{abc} \vdots 23$ thì $30a + 3b - 2c \vdots 23$.

b) Chứng minh số có 6 chữ số $\overline{abcdef} \vdots 7$ khi và chỉ khi $\overline{abc} - \overline{def} \vdots 7$.

Giải. a) Xét $2\overline{abc} + (30a + 3b - 2c) = (200a + 20b + 2c) + (30a + 3b - 2c)$

$$= 23(10a + b) \vdots 23.$$

Do đó nếu $\overline{abc} \vdots 23$ thì $30a + 3b - 2c \vdots 23$.

b) $\overline{abcdef} = 1000\,\overline{abc} + \overline{def} = 1001\,\overline{abc} - \overline{abc} + \overline{def}$

$$= 1001\,\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{def}) = 7.\,143\,\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{def}) \vdots 7.$$

Vậy $\overline{abcdef} \vdots 7 \Leftrightarrow \overline{abc} - \overline{def} \vdots 7$.

Dạng toán tìm số dư, tìm chữ số tận cùng :

Ở dạng toán trên, ngoài phương pháp biến đổi để xuất hiện hằng đẳng thức $a^n - b^n$; $a^n + b^n$ (với n lẻ) ; $(a + b)^n$; sử dụng các phép tính về luỹ thừa, ta còn sử dụng phương pháp tính chữ số tận cùng của các luỹ thừa với chú ý rằng $(...0)^n = ...0$; $(...1)^n = ...1$; $(...5)^n = ...5$; $(...6)^n = ...6$; $(...2)^{4n} = ...6$; $(...3)^{4n} = ...1$; $(...7)^{4n} = ...1$; $(...9)^{2n} = ...1$; $(...4)^{2n} = ...6$

Ví dụ 3.10. a) Tìm số dư trong phép chia 2^{100} cho 9.

b) Tìm ba chữ số tận cùng của 3^{100} khi viết trong hệ thập phân.

Giải. a) Ta có $2^{100} = 2.2^{99} = 2.(2^3)^{33} = 2.8^{33} = 2.(9-1)^{33}$.

Áp dụng nhị thức Niu-tơn $(a+b)^n$:

$(9-1)^{33} = 9k - 1$ nên $2.(9-1)^{33} = 2(9k-1) = 2.9k - 2 = (2.9k - 9) + 7$.

Vậy số dư trong phép chia 2^{100} cho 9 là 7.

b) Tìm ba chữ số tận cùng của 3^{100} khi viết trong hệ thập phân, tức là tìm số dư trong phép chia 3^{100} cho 1000. Áp dụng nhị thức Niu-tơn, ta có

$$3^{100} = 9^{50} = (10-1)^{50}$$

$$= 10^{50} - 50.10^{49} + \ldots - \frac{50.49.48}{1.2.3}10^3 + \frac{50.49}{2}.10^2 - 50.10 + 1.$$

Do $10^{50} - 50.10^{49} + \ldots - \frac{50.49.48}{1.2.3}10^3 = 10^3 k$,

nên $3^{100} = 10^3 k + 122500 - 500 + 1 = 10^3 k + 122000 + 1 = 10^3 q + 1$.

Vậy ba chữ số tận cùng của 3^{100} là 001.

Ví dụ 3.11. Cho $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{100} + 2^{101} + 2^{102} + 2^{103}$.

a) Chứng minh : 1) $S \vdots 3$;

2) $S \vdots 15$;

3) $S \vdots 255$;

b) Tìm chữ số tận cùng của S và 2^{104}

Giải. a) 1) $S = (2^0 + 2^1) + (2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5) + \ldots + (2^{100} + 2^{101}) + (2^{102} + 2^{103})$

$= 3 + 2^2.3 + 2^4.3 + \ldots + 2^{100}.3 + 2^{102}.3 \vdots 3.$

2) $S = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) + \ldots + (2^{100} + 2^{101} + 2^{102} + 2^{103})$

$= 15 + 15.2^4 + 15.2^8 + \ldots + 15.2^{100} \vdots 15.$

3) $S = 15(1 + 2^4 + 2^8 + \ldots + 2^{100})$

$= 15[(1+2^4) + (2^8 + 2^{12}) + \ldots + (2^{96} + 2^{100})]$

$= 15(17 + 17.2^8 + 17.2^{16} + \ldots + 17.2^{96})$

$= 15.17(1 + 2^8 + 2^{16} + \ldots + 2^{96}) \vdots 15.17 = 255.$

b) $S = 15.17(1+2^8+2^{16}+...+2^{96})$ mà $(1+2^8+2^{16}+...+2^{96})$ lẻ nên S có chữ số tận cùng là 5.

Ta có $S = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+...+2^{100}+2^{101}+2^{102}+2^{103}$

$= (2-1)(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+...+2^{100}+2^{101}+2^{102}+2^{103}) = 2^{104}-1.$

Vậy $2^{104} = S \dot{+} 1 \Leftrightarrow 2^{104}$ có chữ số tận cùng là 6.

III. BÀI TẬP

3.1. Chứng minh rằng :

a) $a^{2013} - a^{2011} \vdots 6 \quad (a \in \mathbf{Z})$;

b) Điều kiện cần và đủ để $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 6$;
là $a + b + c \vdots 6 \quad (a, b, c \in \mathbf{Z})$;

c) $a^3b - ab^3 \vdots 6 \quad (a, b \in \mathbf{Z})$;

d) $\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{3} \in \mathbf{Z} \ (a \in \mathbf{Z})$;

e) $a^3 - a \vdots 24a$ với a là số nguyên tố lớn hơn 3.

3.2. Chứng minh rằng :

a) $a^5 - a \vdots 30$ và $a^{n+5} - a^{n+1} \vdots 30 \ (a \in \mathbf{Z} ; n \in \mathbb{N})$;

b) $a^5 + 59a \vdots 30$ và $a^5 - 91a \vdots 30$. Hãy tổng quát hoá bài toán ;

c) $a^5 - 2b^5 + 3c^5 - 31a + 62b + 87c \vdots 30 \ (a, b, c \in \mathbf{Z})$;

d) $a^{2015}b^{2011} - a^{2011}b^{2015} \vdots 30 \quad (b \in \mathbf{Z})$;

e) $\frac{a^5}{120} - \frac{a^3}{24} + \frac{a}{30} \in \mathbf{Z}$ với $a \in \mathbf{Z}$.

3.3. Từ các bài tập 3.1, 3.2 hãy đề xuất các bài toán tương tự với $a^7 - a$ và tự giải.

3.4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a :

a) $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a \vdots 24$; b) $a^5 - 5a^3 + 4a \vdots 120$;

c) $3a^4 - 14a^3 + 21a^2 - 10a \vdots 24$.

3.5. Chứng minh rằng tổng các luỹ thừa bậc ba của 3 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9.

3.6. Chứng minh rằng :

a) $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n \vdots 384$ với n là số tự nhiên chẵn ;

b) $m^3 + 20m \vdots 48$ với m là số nguyên chẵn ;

c) $n^{12} - n^8 - n^4 + 513 \vdots 512$ với n là số nguyên lẻ.

3.7. Chứng minh rằng :

a) $10^n + 18n - 55 \vdots 27$; b) $3^{3n+3} - 26n - 27 \vdots 169$.

3.8. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n :

a) $5^{n+3} - 3.5^{n+1} + 2^{6n+3} \vdots 59$; b) $8.5^{2n} + 11.6^n \vdots 19$.

3.9. Cho $B = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$. Chứng minh rằng :

$B \vdots 111$ với $n \in \mathbb{N}$; $B \vdots 91$ với n lẻ.

3.10. Chứng minh rằng với mọi số chẵn n :

a) $a^n - b^n \vdots (a-b)(a+b)$; b) $C = 16^n + 12^n - 5^n - 1 \vdots 187$.

3.11. Chứng minh rằng :

a) $12^{2000} - 2^{1000} \vdots 10$; b) $2011^{2013} + 2013^{2011} \vdots 2012$.

3.12. Chứng minh rằng :

a) $19^{2011} + 11^{2010} + 20^{11} \vdots 10$;

b) $1930^{1930} + 1945^{1945} + 1954^{1954} + 1975^{1975} - 2011^{2011} \vdots 5$.

3.13. Cho $P = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots + 5^{98} + 5^{99} + 5^{100}$.

a) Chứng minh $P \vdots 30$;

b) Chứng minh $P \vdots 126$;

c) Tìm chữ số cuối cùng của P.

3.14. Chứng minh rằng :

a) $A = 0,3\left(1983^{1983} - 1917^{1917}\right)$ thuộc $\mathbb{Z}$;

b) $7^{2010^{2012}} - 3^{2008^{2010}} \vdots 10$.

c) $E = 2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$.

3.15. Chứng minh rằng một số có bốn chữ số có chữ số, hàng nghìn và hàng chục bằng nhau :

a) Chia hết cho 4 khi và chỉ khi tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục chia hết cho 4.

b) Chia hết cho 8 khi và chỉ khi tổng của chữ số hàng đơn vị với 2 lần chữ số hàng chục và 4 lần chữ số hàng trăm chia hết cho 8.

3.16. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n :

a) $n^2 + 8n + 17 \not\vdots (n+4)$;

b) $n^2 + 7n - 40 \not\vdots 121$;

c) $n^3 + 6n^2 + 11n + 7 \not\vdots (n+1)$; $(n+2)$ và $(n+3)$.

3.17. a) Tìm số $\overline{abc}$ (a có thể bằng 0) sao cho $\overline{345abc} \vdots 3 ; 7 ; 8$;

b) Viết thêm vào bên phải số 1975 bốn chữ số để nhận được một số có tám chữ số chia hết cho 6 ; 7 ; 8 ; 9 và 11.

3.18. Chứng minh rằng :

a) Nếu $20a + 11b \vdots 17$ thì $83a + 38b \vdots 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) ;

b) Nếu $2a + 3b + 4c \vdots 7$ thì $13a + 23b + 33c \vdots 7$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

3.19. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để :

a) $n^{10} + 1 \vdots 10$;

b) $2^n + 2015 \vdots 7$;

c) $n^2 - 4n + 29 \vdots 5$;

d) $n^2 + 2n + 6 \vdots n + 4$.

3.20. a) Chứng minh tổng các bình phương của năm số nguyên liên tiếp không là số chính phương ;

b) Chứng minh rằng nếu một số chính phương có tận cùng bằng 1 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn ;

c) Chứng minh rằng nếu một số chính phương có chữ số hàng chục là 3 thì chữ số hàng đơn vị của nó là 6.

3.21. a) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n \vdots 6$ và $1000n$ là số chính phương.

b) Cho các số $D = \underbrace{11...11}_{2n \text{ số } 1}$; $E = \underbrace{11...11}_{n+1 \text{ số } 1}$; $F = \underbrace{66...66}_{n \text{ số } 6}$.

Chứng minh rằng $D + E + F + 8$ là số chính phương.

3.22. Chứng minh rằng : a) $E = \underbrace{11...1}_{n \text{ số } 1}2\underbrace{11...1}_{n \text{ số } 1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) là hợp số ;

b) $G = \underbrace{11...1}_{n \text{ số } 1}\underbrace{22...2}_{n \text{ số } 2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) là tích hai số nguyên liên tiếp ;

c) $Q = \overline{\underbrace{aa...a}_{n \text{ số } a}\underbrace{bb...b}_{n \text{ số } b}}$ với $0 < a ; b \leq 9$; $a, b \in \mathbb{N}^*$ là hợp số.

3.23. Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d thoả mãn đẳng thức $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Chứng minh rằng số $a + b + c + d$ là một hợp số.

3.24. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 thì :

Số $6n + 1$ và $5n + 1$ nguyên tố cùng nhau ;

Số $2n - 1$ và $2n + 1$ nguyên tố cùng nhau.

3.25. a) Tìm số tự nhiên a để $a + 1$; $4a^2 + 8a + 5$ và $6a^2 + 12a + 7$ đồng thời là các số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố khác 3 thì số

$A = 3n + 2014 + 2012p^2$ là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chuyên đề 4

CHIA ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B.Q + R$ trong đó R bằng 0 hoặc bậc của R nhỏ hơn của B (R được gọi là dư trong phép chia A cho B).

   Khi $R = 0$ thì phép chia A cho B là phép chia hết.

2. Hai đa thức gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng giá trị với mọi giá trị của biến. Do đó nếu hai đa thức (viết dưới dạng thu gọn) có các hệ số tương ứng của các đơn thức đồng dạng chứa trong hai đa thức đó bằng nhau thì hai đa thức đó bằng nhau.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 4.1. Cho $A = 3x^6(2x+5)^{n+3} : 2x^2(2x+5)^{n-1} - 3^9.2^2 : 648$,

với $x \neq 0$ và $x \neq -\frac{5}{2}$; $n \in N^*$.

Rút gọn A, sau đó tìm x để $A = 0$.

Giải. $A = \frac{3}{2}x^{6-2}(2x+5)^{n+3-n+1} - \frac{3^9.2^2}{3^4.2^3} = \frac{3}{2}x^4(2x+5)^4 - \frac{3^5}{2}$

$$= \frac{3}{2}\left[x(2x+5)\right]^4 - \frac{3^5}{2}.$$

Để $A = 0$ thì $\frac{3}{2}\left[x(2x+5)\right]^4 - \frac{3^5}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[x(2x+5)\right]^4 = 3^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(2x+5) = 3 \\ x(2x+5) = -3. \end{array}\right.$$

$* \; x(2x+5) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; $x = -3$.

$* \; x(2x+5) = -3 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} ; x = -1.$$

Để $A = 0$ thì $x \in \left\{-3 ; -\frac{3}{2} ; -1 ; \frac{1}{2}\right\}$.

Ví dụ 4.2. Cho đa thức $B = 6x^{n-2}y^6 - 19x^{n+3}y^5z$ và đơn thức $C = 4x^4y^{n-1}$.

Hãy xác định giá trị của số tự nhiên n để B chia hết cho C.

Giải. Để B ⋮ C ta phải có :

$$\begin{cases} n-2 \geq 4 \\ n+3 \geq 4 \\ 6 \geq n-1 \\ 5 \geq n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 6 \\ n \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow n = 6.$$

Vậy với n = 6 thì B ⋮ C.

Khi đó $B : C = (6x^4y^6 - 19x^9y^5z) : 4x^4y^5 = \frac{3}{2}y - \frac{19}{4}x^5z.$

Ví dụ 4.3. Thực hiện chia $(x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4) : (x^2 - xy + 2y^2)$.

a) Bằng phương pháp đồng nhất hệ số (phương pháp hệ số bất định) biết rằng dư bằng 0.

b) Bằng phép chia thông thường.

Giải. a) Đa thức bị chia bậc bốn, đa thức chia bậc hai nên đa thức thương bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c$.

Hệ số của hạng tử bậc cao nhất của x trong đa thức bị chia là 1, trong đa thức chia là 1 nên ta có ngay a = 1.

Hệ số của hạng tử bậc cao nhất của y trong đa thức bị chia là 4, trong đa thức chia là 2 nên ta có ngay c = 4 : 2 = 2.

Vậy $x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 - xy + 2y^2)(x^2 + bxy + 2y^2)$.

Ta có $x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4 = x^4 + 0x^3y + 3x^2y^2 + 0xy^3 + 4y^4$

$(x^2 - xy + 2y^2)(x^2 + bxy + 2y^2) = x^4 + (b-1)x^3y + (4-b)x^2y^2 + (2b-2)xy^3 + 4y^4.$

Hai đa thức trên bằng nhau nên ta có : $\begin{cases} b-1 = 0 \\ 4-b = 3 \\ 2b-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy $(x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4) : (x^2 - xy + 2y^2) = x^2 + xy + 2y^2$.

b) Đặt phép chia thông thường :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & & +3x^2y^2 & +4y^4 & x^2-xy+2y^2 \\
\cline{5-5}
-\ x^4 & -\ x^3y & +2x^2y^2 & & x^2+xy+2y^2 \\
\cline{1-4}
 & x^3y & +x^2y^2 & +4y^4 & \\
 & -\ x^3y & -\ x^2y^2 & +2xy^3 & \\
\cline{2-4}
 & & 2x^2y^2 & -2xy^3+4y^4 & \\
 & & -\ 2x^2y^2 & -2xy^3+4y^4 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Ví dụ 4.4. Xác định các số hữu tỉ p và q để đa thức $x^3 + px + q$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.

Giải. *Cách 1.* Đặt tính chia :

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & +px & +q & x^2-2x-3 \\
\cline{4-4}
-\ x^3 & -\ 2x^2 & -3x & x+2 \\
\cline{1-3}
 & 2x^2 & +(p+3)x \quad +q & \\
 & -\ 2x^2 & -4x \quad -6 & \\
\cline{2-3}
 & & (p+7)x \quad +(q+6) &
\end{array}
$$

Để chia hết thì đa thức dư phải bằng 0 với mọi giá trị của x nên :

$$\begin{cases} p+7=0 \\ q+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-7 \\ q=-6 \end{cases}.$$

Vậy với $p = -7$; $q = -6$ thì $x^3 + px + q$ chia hết cho $x^2 - 2x - 3$.

Cách 2 : Phương pháp hệ số bất định :

Đa thức bị chia bậc ba, đa thức chia bậc hai nên thương bậc nhất có dạng $ax + b$. Hệ số của hạng tử bậc cao nhất của x trong đa thức bị chia là 1, trong đa thức chia là 1 nên ta có ngay $a = 1$ và thương là $x + b$.

Ta có $x^3 + px + q = (x^2 - 2x - 3)(x + b)$

hay $\quad x^3 + 0x^2 + px + q = x^3 + (b-2)x^2 + (-2b-3)x + (-3b)$.

Hai đa thức trên bằng nhau nên $\begin{cases} b-2=0 \\ -2b-3=p \\ -3b=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ p=-7 \\ q=-6. \end{cases}$

Vậy với $p = -7$; $q = -6$ thì $x^3 + px + q$ chia hết cho $x^2 - 2x - 3$ thương là $x + 2$.

Cách 3 : (Phương pháp trị số riêng) :

Ta có $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

Gọi thương khi chia $x^3 + px + q$ cho $x^2 - 2x - 3$ là Q(x). Dư là 0 nên ta có :

$$x^3 + px + q = (x^2 - 2x - 3)\,Q(x)$$

hay $$x^3 + px + q = (x - 3)(x + 1)\,Q(x)$$

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên lần lượt cho x = 3, x = –1 ta được :

$$\begin{cases} 27 + 3p + q = 0 \\ -1 - p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p + q = -27 \\ -p + q = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ q = -6. \end{cases}$$

Vậy với p = –7 ; q = –6 thì $x^3 + px + q$ chia hết cho $x^2 - 2x - 3$.

(Phương pháp trị số riêng cũng giống phương pháp sử dụng định lý Bézout. Xem chuyên đề 16 : Định lý Bézout và lược đồ Horner).

Ví dụ 4.5. Tìm các giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức :

$2n^3 - 7n^2 + 13n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n - 1$.

Giải. *Cách 1 :* Đặt phép chia :

$$\begin{array}{r|l} 2n^3 - 7n^2 + 13n + 2 & 2n - 1 \\ \cline{2-2} -\ 2n^3 - n^2 \qquad\qquad\qquad & n^2 - 3n + 5 \\ \cline{1-1} -6n^2 + 13n + 2 & \\ -\ -6n^2 + 3n \qquad\quad & \\ \cline{1-1} 10n + 2 & \\ -\ 10n - 5 & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

Đa thức $2n^3 - 7n^2 + 13n + 2$ không chia hết cho đa thức $2n - 1$ nhưng có những giá trị nguyên của n làm cho giá trị của $2n^3 - 7n^2 + 13n + 2$ chia hết cho giá trị của $2n - 1$. Muốn như vậy $2n - 1$ phải là ước của 7, nghĩa là $2n - 1$ bằng ± 1 ; ± 7.

Với $2n - 1 = 1$ ta có n = 1.

Với $2n - 1 = -1$ ta có n = 0.

Với $2n - 1 = 7$ ta có n = 4

Với $2n - 1 = -7$ ta có n = –3.

Vậy với n bằng –3 ; 0 ; 1 ; 4 thì giá trị của biểu thức $2n^3 - 7n^2 + 13n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n - 1$.

Cách 2 : Dùng phương pháp tách đa thức $2n^3 - 7n^2 + 13n + 2$ thành các hạng tử chứa $(2n - 1)$ để lý luận :

$$2n^3 - 7n^2 + 13n + 2 = 2n^3 - n^2 - 6n^2 + 3n + 10n - 5 + 7$$
$$= n^2(2n - 1) - 3n(2n - 1) + 5(2n - 1) + 7 = (2n - 1)(n^2 - 3n + 5) + 7.$$

Để $(2n^3 - 7n^2 + 13n + 2) \vdots (2n - 1)$ thì $7 \vdots (2n - 1)$ nghĩa là $2n - 1$ là ước số của 7. Ta cũng có kết quả như cách 1.

Ví dụ 4.6. Đa thức f(x) nếu chia cho $x - 2$ thì được số dư bằng 3 ; nếu chia cho $x - 3$ thì được số dư bằng 4. Tìm dư của phép chia đa thức f(x) cho $(x - 2)(x - 3)$.

Giải. *Cách 1 :* Gọi thương của phép chia f(x) cho $x - 2$ và $x - 3$ theo thứ tự là A(x) và B(x).

Với mọi giá trị của x ta có $f(x) = (x - 2)A(x) + 3$ và $f(x) = (x - 3)B(x) + 4$.

Do đó $f(2) = 3$; $f(3) = 4$.

Gọi thương của phép chia f(x) cho $(x - 2)(x - 3)$ là C(x), dư là R(x). Do đa thức chia bậc hai nên R(x) có bậc nhỏ hơn hai và có dạng $R(x) = ax + b$.

Ta có $f(x) = (x - 2)(x - 3).C(x) + ax + b$.

Như vậy : $f(2) = 2a + b = 3$ (1)

$f(3) = 3a + b = 4$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = 1$ và $b = 1$.

Vậy dư của phép chia chia đa thức f(x) cho $(x - 2)(x - 3)$ là $x + 1$.

Cách 2 :

Do $f(x) = (x - 2)A(x) + 3 \Rightarrow (x - 3)f(x) = (x - 2)(x - 3)A(x) + 3(x - 3)$ (3)

$f(x) = (x - 3)B(x) + 4 \Rightarrow (x - 2)f(x) = (x - 2)(x - 3)B(x) + 4(x - 2)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra :

$$[(x - 2) - (x - 3)]\, f(x) = (x - 2)(x - 3)\,[B(x) - A(x)] + 4(x - 2) - 3(x - 3)$$

$$f(x) = (x - 2)(x - 3)\,[B(x) - A(x)] + x + 1$$

Vậy dư của phép chia chia đa thức f(x) cho $(x - 2)(x - 3)$ là $x + 1$.

III. BÀI TẬP

4.1. Thực hiện phép tính :

a) $2.8^{14} : 4^7$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{100} : \left(\frac{8}{27}\right)^{33}$;

c) $\dfrac{9^{25}.125^4.16^3.49^2}{3^{50}.50^7.21^3}$;

d) $(45.12^{10} + 8^7.81^3 - 16^5.27^4) : (4^{10}.9^6)$.

4.2. Chứng minh rằng :

a) $(-75x^4y^7) : (25x^2y^3)$ luôn có giá trị âm với mọi giá trị $x \neq 0$; $y \neq 0$;

b) $(x - 2y)^6 : (-2x^2 + 8xy - 8y^2)$ luôn có giá trị âm với mọi giá trị $x \neq 2y$.

4.3. Tìm số tự nhiên n để :

a) $A \vdots B$, với $A = 8x^{n+2}y^2$; $B = 3x^4y^{n-1}$;

b) $C \vdots D$, với $C = 9x^{2n-1}y^6 - 5x^4y^5$; $D = 5x^3y^n$.

4.4. Xác định số a để :

a) $18x^2 + a$ chia hết cho $2x - 3$;

b) $x^4 + ax^2 + 1$ chia hết cho $x^2 - 2x + 1$;

c) $2x^2 + ax + 5$ chia cho $x + 3$ dư 41

4.5. Xác định các số a ; b để :

a) $2x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia hết cho $x^2 + x + 2$;

b) $2x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $x^2 - x + 3$;

c) $ax^3 + bx + 12$ chia hết cho $(x - 1)(x + 2)$.

4.6. Tìm các số a, b để :

a) $3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + ax - b$ chia hết cho $3x^2 - 2x + 1$;

b) $x^4 - x^3y - x^2y^2 + axy^3 + by^4$ chia hết cho $x^2 - 2xy + 3y^2$;

c) $3x^5 - 3x^4y + 4x^3y^2 + 3x^2y^3 - axy^4 - by^5$ chia hết cho $3x^3 - 2xy^2 + y^3$;

d) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia cho $x^2 - x + 2$ dư $-4x - 1$.

4.7. Xác định các số a, b để :

a) $ax^3 + bx^2 - 11x + 30$ chia hết cho $x^2 - 3x - 10$;

b) $ax^4 - bx^3 + 1$ chia hết cho $x^2 - 2x + 1$;

c) $x^3 + ax + b$ chia cho $(x - 2)$ thì dư 12, chia cho $(x + 1)$ thì dư -6.

4.8. Tìm các số a, b, c sao cho :

a) $4x^4 + 81$ chia hết cho $ax^2 + bx + c$;

b) $x^3 + ax^2 + bx + c$ chia cho $(x + 2)$; $(x + 1)$; $(x - 1)$ đều dư 8.

4.9. Tìm các số a, b, c để $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho $x - 2$ và chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x + 5$.

4.10. Tìm số dư của phép chia đa thức $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2015$ cho đa thức $x^2 + 8x + 10$.

4.11. Tìm các số a, b, c, d để $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ khi chia cho $(x - 2)$, $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(x + 2)$ đều có số dư là 2012.

4.12. Cho $f(y) = y^4 - 3y^3 + ay^2 - 6y + 2b$;

$k(y) = y^2 + 3y + 2$;

$h(y) = y^4 - 5y^2 + 4$.

a) Tính $g(y) = h(y) : k(y)$;

b) Tìm y để $g(y) = 72$.

c) Xác định a và b để f(y) chia hết cho g(y) bằng phương pháp chia thông thường, phương pháp hệ số bất định, phương pháp trị số riêng.

Chương II PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 5

TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC RÚT GỌN PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa :** Biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và $B \neq 0$ là một phân thức đại số.

   A được gọi là tử thức (hay tử). B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

   Mỗi đa thức được coi là một phân thức có mẫu là 1.

2. **Hai phân thức bằng nhau :** Với hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$, ta nói

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } A.D = B.C$$

3. **Tính chất cơ bản**

   * Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho.

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \text{ (M là một đa thức khác 0)}$$

   * Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho.

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \text{ (N là một nhân tử chung)}$$

4. **Rút gọn phân thức**

   Muốn rút gọn phân thức ta làm như sau :

   – Phân tích tử và mẫu thành nhân tử. Tìm nhân tử chung.

   – Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 5.1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, chứng minh hai phân thức sau bằng nhau :

$$\frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 4ab + 3b^2} \text{ và } \frac{a+b}{a-b} \text{ với } a \neq b \text{ và } a \neq 3b.$$

Giải. Xét $(a^2 - 2ab - 3b^2)(a - b) = (a^2 + ab - 3ab - 3b^2)(a - b)$

$= [a(a + b) - 3b(a + b)](a - b) = (a + b)(a - 3b)(a - b).$

Xét $(a^2 - 4ab + 3b^2)(a + b) = (a^2 - ab - 3ab + 3b^2)(a + b)$

$= [a(a - b) - 3b(a - b)](a + b) = (a - b)(a - 3b)(a + b).$

Vậy $\dfrac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 4ab + 3b^2} = \dfrac{a+b}{a-b}$.

Ví dụ 5.2. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, xét sự bằng nhau của hai phân thức $\dfrac{(3x+2)(x+5)}{4(3x+2)}$ và $\dfrac{x+5}{4}$ trong các trường hợp biến x thuộc các tập hợp sau :

a) $x \in \mathbf{N}$; b) $x \in \mathbf{Z}$; c) $x \in \mathbf{Q}$.

Giải. a) Với $x \in \mathbf{N}$ thì $4(3x + 2) \in \mathbf{N}$,

do đó $(3x + 2)(x + 5).4 = 4.(3x + 2)(x + 5)$.

Vậy $\dfrac{(3x+2)(x+5)}{4(3x+2)} = \dfrac{x+5}{4}$.

b) $x \in \mathbf{Z}$ tương tự.

c) Khi $x \in \mathbf{Q}$ thì hai phân thức bằng nhau khi $x \neq -\dfrac{2}{3}$ (để $3x + 2 \neq 0$)

Ví dụ 5.3. So sánh $C = \dfrac{2013^2 - 2012^2}{2013^2 + 2012^2}$ với $D = \dfrac{2013 - 2012}{2013 + 2012}$.

Giải. Đặt 2013 = a và 2012 = b ta có :

$$C = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2};$$

$$D = \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} < \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

(do $a > 0$; $b > 0$ nên $a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2$).

Vậy $D < C$ hay $\dfrac{2013 - 2012}{2013 + 2012} < \dfrac{2013^2 - 2012^2}{2013^2 + 2012^2}$.

Ví dụ 5.4. Chứng minh rằng :

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{63} = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)\ldots(1 + a^{32}). \qquad (1)$$

Giải. Gọi vế trái của (1) là M ; vế phải của (1) là N.

Ta có $(1 - a).M = 1 - a^{64}$ (theo hằng đẳng thức $a^n - b^n$).

Mặt khác :

$(1 - a).N = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)(1 + a^{16})(1 + a^{32}) = 1 - a^{64}$.

Nếu $a \neq 1$ thì $M = N = \dfrac{1 - a^{64}}{1 - a}$.

Nếu a = 1 thì M = 64 và N = 2.2.2.2.2.2 = 64. Vậy M = N.

Vậy với mọi trường hợp, đẳng thức (1) đều đúng.

Ví dụ 5.5. Rút gọn phân thức : $A = \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$

Giải. – Phân tích tử thức thành nhân tử :

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 &= x^3 - x^2 + x^2 - x - 6x + 6 \\ &= x^2(x - 1) + x(x - 1) - 6(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3x - 6) \\ &= (x - 1)[x(x - 2) + 3(x - 2)] = (x - 1)(x - 2)(x + 3). \end{aligned}$$

– Phân tích mẫu thức thành nhân tử :

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 - 2x - 24 &= x^3 - 2x^2 + 7x^2 - 14x + 12x - 24 \\ &= x^2(x - 2) + 7x(x - 2) + 12(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 7x + 12) \\ &= (x - 2)(x^2 + 4x + 3x + 12) \\ &= (x - 2)[x(x + 4) + 3(x + 4)] \\ &= (x - 2)(x + 3)(x + 4). \end{aligned}$$

Vậy $A = \dfrac{(x - 1)(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 3)(x + 4)} = \dfrac{x - 1}{x + 4}$.

Ví dụ 5.6. Rút gọn phân thức :

$$B = \frac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{a^{2042} + a^{2032} + a^{2022} + a^{2012} + a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}.$$

Giải. $B = \dfrac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{a^{2012}(a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1) + (a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1)}$

$$= \frac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{(a^{2012} + 1)(a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1)} = \frac{1}{a^{2012} + 1}.$$

III. BÀI TẬP

5.1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, hãy tìm đa thức A trong các trường hợp sau :

a) $\dfrac{A}{3x-2} = \dfrac{15x^2+10x}{9x^2-4}$; b) $\dfrac{3x^2-5x-2}{A} = \dfrac{x-2}{2x-3}$;

c) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6} = \dfrac{x^2+4x+4}{A}$; d) $\dfrac{2x+1}{x^3+x^2-x+2} = \dfrac{A}{x^3+1}$.

5.2. Biến đổi mỗi phân thức sau thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức B cho sau đây :

a) $\dfrac{2x-5}{3x^2+4}$ và $B = 2x^2 - 3x - 5$; b) $\dfrac{(x+1)(x^2+x-6)}{(x^2-9)(x^2+3x+2)}$ và $B = x - 2$.

5.3. Rút gọn :

a) $\dfrac{2^{18}.54^3 + 15.4^{10}.9^4}{2.12^9 + 6^{10}.2^{10}}$; b) $\dfrac{4^{15}.27^6.42 - 3.72^{10}}{4^4.25.36^{10} - 4^5.6^{19}.35}$;

c) $\dfrac{880.(15^2.3^{18} + 27^7)}{4^2.15^4.3^{16} - 2^4.9^{11}}$.

5.4. Rút gọn :

a) $M = \dfrac{4024.2014 - 2}{2011 + 2012.2013}$; b) $N = \dfrac{2012.2013 + 2014}{2010 - 2012.2015}$;

c) $P = \dfrac{66666.87564 - 33333}{22222.87560 + 77777}$.

5.5. Rút gọn các phân thức sau :

a) $Q = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$; b) $R = \dfrac{3x^2+5xy-2y^2}{3x^2-7xy+2y^2}$;

c) $S = \dfrac{x^6-14x^4+49x^2-36}{x^4+4x^3-x^2-16x-12}$; d) $T = \dfrac{x^6-y^6}{x^6+2x^4y^2+2x^2y^4+y^6}$.

5.6. Rút gọn các phân thức sau :

a) $A = \dfrac{a^4-5a^2+4}{a^4-a^2+4a-4}$; b) $B = \dfrac{a^3-3a+2}{2a^3-7a^2+8a-3}$;

c) $C = \dfrac{a^2-2ab+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac}$;

d) $D = \dfrac{a^3 - 7a + 6}{a^2(a+3)^3 - 4a(a+3)^3 + 4(a+3)^3}$;

e) $E = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$.

5.7. Rút gọn các phân thức sau :

a) $A = \dfrac{xy^2 - xz^2 - y^3 + yz^2}{x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x)}$;

b) $B = \dfrac{x^4(y^2 - z^2) + y^4(z^2 - x^2) + z^4(x^2 - y^2)}{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}$.

5.8. Rút gọn các phân thức sau :

a) $A = \dfrac{(x+y+z)^2 - 3xy - 3yz - 3xz}{9xyz - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3}$;

b) $B = \dfrac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z-x)^2}$;

c) $C = \dfrac{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}$.

5.9. Rút gọn các phân thức sau với $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!(n+2)(n+3)}$; b) $\dfrac{n!}{n! + (n-1)!}$; c) $\dfrac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+2)! + (n+3)!}$.

5.10. Chứng minh các phân số sau là tối giản với mọi số tự nhiên n :

a) $\dfrac{3n+2}{4n+3}$; b) $\dfrac{12n+1}{2(10n+1)}$; c) $\dfrac{2n+3}{2n^2 + 4n + 1}$.

5.11. Chứng minh phân số $\dfrac{n^7 + 2n^2 + n + 2}{n^8 + n^2 + 2n + 2}$ không tối giản với mọi số nguyên dương n.

5.12. Viết gọn biểu thức sau dưới dạng một phân thức

$$P = (x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} + x^{16} + 1).$$

5.13. Rút gọn phân thức :

a) $\dfrac{|x-2| + |x-1| + x}{2x^2 - 7x + 3}$ với $x < 1$; b) $\dfrac{|x-4|.|x-5|}{x^3 - 9x^2 + 20x}$ với $4 < x < 5$.

5.14. Rút gọn các phân thức sau :

a) $T = \dfrac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1}{x^2+7x+11}$; b) $U = \dfrac{x^3-53x+88}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16}$.

5.15. Cho $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$ và $x, y, z \neq 0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2} = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$.

5.16. Cho $ax + by + cz = 0$. Rút gọn phân thức :

$$V = \frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$$

5.17. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh $\dfrac{9(x^2+y^2+z^2)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = 3$.

5.18. Chứng minh

$$\frac{x^2+y^2-z^2-2zt+2xy-t^2}{x+y-z-t} = \frac{x^2-y^2+z^2-2zt+2xz-t^2}{x-y+z-t}.$$

5.19. Rút gọn

$$X = \frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)(14^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)(16^4+4)}.$$

Chuyên đề 6

CÁC PHÉP TOÁN VỀ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Quy đồng :** Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta làm như sau :
   - Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung.
   - Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức
   - Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

2. **Cộng, trừ phân thức. Các tính chất**
   - Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.
   - Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

– Phép cộng các phân thức có tính chất :

Giao hoán : $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{C}{D}+\frac{A}{B}$

Kết hợp : $\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)+\frac{E}{F}=\frac{A}{B}+\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)$

– Phân thức đối của phân thức $\frac{A}{B}$ được kí hiệu bởi $-\frac{A}{B}$.

$$-\frac{A}{B}=\frac{-A}{B} \text{ và } \frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}$$

– Trừ phân thức $\frac{C}{D}$ là cộng với phân thức đối của $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\left(-\frac{C}{D}\right)$$

3. Nhân, chia phân thức. Các tính chất

– Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau : $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$

– Tính chất của phép nhân các phân thức :

+ Giao hoán : $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{C}{D}.\frac{A}{B}$

+ Kết hợp : $\left(\frac{A}{B}.\frac{C}{D}\right).\frac{E}{F}=\frac{A}{B}.\left(\frac{C}{D}.\frac{E}{F}\right)$

+ Phân phối đối với phép cộng : $\frac{A}{B}\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)=\frac{A}{B}.\frac{C}{D}+\frac{A}{B}.\frac{E}{F}$

– Chia cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0 là nhân với nghịch đảo của phân thức $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.\frac{D}{C}$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 6.1. Thực hiện phép tính :

$$A=\frac{1}{(x-y)(z^2+yz-x^2-xy)}-\frac{1}{(y-z)(x^2+xz-y^2-yz)}+\frac{1}{(z-x)(y^2+xy-z^2-xz)}.$$

Giải. Phân tích thành nhân tử :

$z^2 + yz - x^2 - xy = z^2 - x^2 + yz - xy = (z - x)(z + x) + y(z - x) = (z - x)(z + x + y)$.

Biến đổi tương tự :

$$x^2 + xz - y^2 - yz = (x - y)(x + y + z)$$
$$y^2 + xy - z^2 - xz = (y - z)(y + z + x)$$

(nếu ta hoán vị vòng quanh thay x bằng y, y bằng z và z bằng x thì ta được ngay kết quả trên).

Mẫu chung bằng $(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$.

Do đó $A = \dfrac{(y - z) - (z - x) + (x - y)}{(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)}$

$$= \frac{-2(z - x)}{(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)} = \frac{-2}{(x - y)(y - z)(x + y + z)}.$$

Ví dụ 6.2. Thực hiện phép tính :

$$B = \frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 + a} + \frac{2}{1 + a^2} + \frac{4}{1 + a^4} + \frac{8}{1 + a^8} + \frac{16}{1 + a^{16}}.$$

Giải. Ta không quy đồng mẫu tất cả các phân thức mà cộng lần lượt từ trái sang phải :

$$B = \frac{2}{1 - a^2} + \frac{2}{1 + a^2} + \frac{4}{1 + a^4} + \frac{8}{1 + a^8} + \frac{16}{1 + a^{16}}$$
$$= \frac{4}{1 - a^4} + \frac{4}{1 + a^4} + \frac{8}{1 + a^8} + \frac{16}{1 + a^{16}}$$
$$= \frac{8}{1 - a^8} + \frac{8}{1 + a^8} + \frac{16}{1 + a^{16}}$$
$$= \frac{16}{1 - a^{16}} + \frac{16}{1 + a^{16}} = \frac{32}{1 - a^{32}}.$$

Ví dụ 6.3. Tìm các số a và b sao cho phân thức $C = \dfrac{17x + 18}{3x^2 + x - 14}$ viết được thành $\dfrac{a}{x - 2} + \dfrac{b}{3x + 7}$.

Giải. Cách 1. (Phương pháp hệ số bất định) :

Ta có $3x^2 + x - 14 = (x - 2)(3x + 7)$ nên $C = \dfrac{17x + 18}{(x - 2)(3x + 7)}$.

Ta có $\dfrac{a}{x - 2} + \dfrac{b}{3x + 7} = \dfrac{a(3x + 7) + b(x - 2)}{(x - 2)(3x + 7)} = \dfrac{(3a + b)x + (7a - 2b)}{(x - 2)(3x + 7)}$.

Như vậy ta phải có : $17x + 18 = (3a + b)x + (7a - 2b)$ với mọi x.

Đồng nhất hệ số các hạng tử cùng bậc ở hai vế ta có :

$$\begin{cases} 3a + b = 17 \\ 7a - 2b = 18 \end{cases}, \text{ suy ra } a = 4 ; b = 5.$$

Vậy $\dfrac{17x+18}{3x^2+x-14} = \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{5}{3x+7}$.

Cách 2 : (Phương pháp trị số riêng) :

Ta có $17x + 18 = a(3x + 7) + b(x - 2)$ đúng với mọi x.

Với $x = 2$ ta có $52 = a.13$ nên $a = 4$.

Với $x = -\dfrac{7}{3}$ ta có $17.\left(-\dfrac{7}{3}\right) + 18 = b.\left(-\dfrac{7}{3} - 2\right)$ nên $b = 5$.

Ví dụ 6.4. Cho $a + b + c = 0$ và a, b, c, đều khác 0. Rút gọn biểu thức :

$$D = \frac{2ab}{a^2 + (b+c)(b-c)} + \frac{2bc}{b^2 + (c+a)(c-a)} + \frac{2ca}{c^2 + (a+b)(a-b)}.$$

Giải

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a + b = -c \Rightarrow (a+b)^2 = (-c)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab.$

Do đó $a^2 + (b+c)(b-c) = a^2 + b^2 - c^2 = -2ab.$

Tương tự $b^2 + (c+a)(c-a) = b^2 + c^2 - a^2 = -2bc.$

$c^2 + (a+b)(a-b) = c^2 + a^2 - b^2 = -2ca$

Do đó $D = \dfrac{2ab}{-2ab} + \dfrac{2bc}{-2bc} + \dfrac{2ca}{-2ca} = -1 - 1 - 1 = -3.$

Ví dụ 6.5. Chứng minh rằng $\dfrac{m}{(x+k)(x+k+m)} = \dfrac{1}{x+k} - \dfrac{1}{x+k+m}$.

Từ đó thực hiện các phép tính :

a) $E = \dfrac{1}{x^2+3x} + \dfrac{1}{x^2+9x+18} + \dfrac{1}{x^2+15x+54} + \dfrac{1}{x^2+21x+108}$

b) $F = \dfrac{1}{x^2-x} + \dfrac{1}{x^2-3x+2} + \dfrac{1}{x^2-5x+6} + \dfrac{1}{x^2-7x+12} + \dfrac{1}{x^2-9x+20}$

Giải. $\dfrac{1}{x+k} - \dfrac{1}{x+k+m} = \dfrac{(x+k+m)-(x+k)}{(x+k)(x+k+m)} = \dfrac{m}{(x+k)(x+k+m)}$

Từ đó :

a) Ta có $3E = \dfrac{3}{x(x+3)} + \dfrac{3}{(x+3)(x+6)} + \dfrac{3}{(x+6)(x+9)} + \dfrac{3}{(x+9)(x+12)}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+9} + \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+12}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+12} = \frac{12}{x(x+12)}.$$

Vậy $E = \dfrac{4}{x(x+12)}$.

b) $F = \dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} + \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{1}{(x-3)(x-4)} + \dfrac{1}{(x-4)(x-5)}$

$= -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{1}{x-5}$

$= \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{x(x-5)}$.

Ví dụ 6.6. Rút gọn biểu thức $G = \dfrac{2x^2-8}{x^2+x+5} \cdot \dfrac{5x^2+5x+25}{x^2-x-12} : \dfrac{10x^2-40}{x^2-5x+4}$ rồi xét xem với giá trị nguyên nào của x thì G nhận giá trị nguyên và tính giá trị nguyên đó của G.

Giải. $G = \dfrac{2(x^2-4)}{x^2+x+5} \cdot \dfrac{5(x^2+x+5)}{(x-4)(x+3)} \cdot \dfrac{(x-4)(x-1)}{10(x^2-4)} = \dfrac{x-1}{x+3}$ với $x \neq \pm 2; 4; -3$

$G = \dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{x+3-4}{x+3} = 1 - \dfrac{4}{x+3}$.

G nhận giá trị nguyên khi $4 \vdots (x+3)$

$x+3$	-4	-2	-1	1	2	4
x	-7	-5	-4	-2	-1	1
G	2	3	5		-1	0

($x = -2$ không thoả mãn điều kiện).

Ví dụ 6.7. Rút gọn biểu thức :

$$H = \frac{20x-11}{x-2012} \cdot \frac{x(x-2)}{1982x^2+30} - \frac{20x-11}{1982x^2+30} : \frac{x-2012}{x(x-3)+2012}.$$

Giải : $H = \dfrac{20x-11}{x-2012} \cdot \dfrac{x(x-2)}{1982x^2+30} - \dfrac{20x-11}{1982x^2+30} \cdot \dfrac{x(x-3)+2012}{x-2012}$

$H = \dfrac{20x-11}{x-2012} \cdot \left(\dfrac{x^2-2x}{1982x^2+30} - \dfrac{x^2-3x+2012}{1982x^2+30} \right)$

$= \dfrac{20x-11}{x-2012} \cdot \dfrac{x-2012}{1982x^2+30} = \dfrac{20x-11}{1982x^2+30}$.

Ví dụ 6.8. Cho $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$ với $a, b, c \neq 0$ và $M = \dfrac{b^2c^2}{a} + \dfrac{c^2a^2}{b} + \dfrac{a^2b^2}{c}$.

Chứng minh rằng $M = 3abc$.

Giải. Đặt $\frac{1}{a} = x$; $\frac{1}{b} = y$; $\frac{1}{c} = z$ thì $x + y + z = 0$.

Ta có $M = \frac{b^2c^2}{a} + \frac{c^2a^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c} = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$

$= a^2b^2c^2(x^3 + y^3 + z^3)$.

Từ $x + y + z = 0$ suy ra $x + y = -z \Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = (-z)^3$

$\Rightarrow x^3 + y^3 - 3xyz = -z^3$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Vậy $M = a^2b^2c^2.\ 3xyz = a^2b^2c^2.\ 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 3abc$.

III. BÀI TẬP

6.1. a) Thực hiện phép tính : $\frac{x-5}{x+1} + \frac{2x-3}{x-1} - \frac{x+1}{1-x^2}$;

b) Thực hiện phép tính : $\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2+2xy} : \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-xy} : \frac{x^4+y^4-2x^2y^2}{x^3+y^3}$;

c) Thực hiện phép tính : $T = \frac{3x-2}{x+1930} . \frac{30x-4}{x+1975} - \frac{3x-2}{x+1975} : \frac{x+1930}{29x-1979}$;

d) Cho $S = \frac{x+9}{x^2+3x-4} + \frac{x+12}{x^2+5x+4} + \frac{x-5}{x^2-1}$

$P = \frac{x(x+3)+2}{x(x-3)-10} : \frac{x(3x+20)-23}{x(x+3)-4}$.

Tính S.P.

e) Rút gọn biểu thức :

$Q = \left[\frac{(x-1)(x+1)}{2ax} + \frac{a}{2x} + 1\right].\left(1 - \frac{1}{a+x}\right) : \left(1 + \frac{1}{a+x}\right)$ với $x = a^2 - a + 1$.

6.2. Tìm các số a, b, c, d để :

a) $\frac{6x^2-x-1}{x^3-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$;

b) $\frac{6x^3-5x^2+3}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$.

6.3. Cho a, b, c là các số đôi một khác nhau, hãy rút gọn các biểu thức :

a) $A = \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(a-b)(b-c)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$;

b) $B = \dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

c) $C = \dfrac{bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{ac}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$;

d) $D = \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$;

e) $E = \dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

6.4. Cho $M = \dfrac{b-c}{a^2-ac-ab+bc} + \dfrac{c-a}{b^2-ab-cb+ca} + \dfrac{a-b}{c^2-cb-ac+ab}$;

$N = \dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a}$. Chứng minh rằng M = 2N.

6.5. Cho $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0$ và $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{bcx^2} + \dfrac{b}{acy^2} + \dfrac{c}{abz^2} = \dfrac{4}{abc}$.

6.6. Cho $abc \neq 0$ và $a + b + c = 0$. Rút gọn biểu thức

$$T = \frac{a^2}{(a-b)(a+b)-c^2} + \frac{b^2}{(b-c)(b+c)-a^2} + \frac{c^2}{(c-a)(c+a)-b^2}.$$

6.7. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$; $a + b + c \neq 0$.

Chứng minh rằng $P = \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{8}{abc}$.

6.8. Cho $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ và $abc \neq 0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ac}{b^2} + \dfrac{ab}{c^2} = 3$.

6.9. a) Cho abc = 1. Rút gọn biểu thức

$$E = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}.$$

b) Cho abc = 2012. Rút gọn biểu thức

$$G = \frac{a}{ab + a + 2012} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2012c}{ac + 2012c + 2012}.$$

6.10. Cho abc = m (m ∈ N*). Rút gọn biểu thức :

$$H = \frac{a}{ab + a + m} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{mc}{ac + mc + m}.$$

6.11. Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b - c} - \frac{1}{a - b}$ và $ac \neq 0$; $a \neq b$; $b \neq c$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{c} = \frac{a - b}{b - c}$.

6.12. Cho $A = \frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{(x - y)(y - z)(z - x)}$; $B = 2\left(\frac{1}{x - y} + \frac{1}{y - z} + \frac{1}{z - x}\right)$.

Rút gọn A + B.

6.13. Cho $C = (xy + yz + zx)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$; $D = xyz\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$;

$E = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$. Tính (C – D) : E.

6.14. Cho a, b, c là các số đôi một khác nhau và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Rút gọn : a) $P = \frac{bc + 1}{a^2 + 2bc} + \frac{ca + 1}{b^2 + 2ac} + \frac{ab + 1}{c^2 + 2ab}$;

b) $Q = \frac{a^2 + bc}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2 + ca}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2 + ab}{c^2 + 2ab}$.

6.15. Cho $\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} = 0$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} = 1$.

6.16. Cho $\frac{a - (c - b)}{b - c} + \frac{b - (a - c)}{c - a} + \frac{c - (b - a)}{a - b} = 3$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} = 0$.

6.17. Cho $abc \neq 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh $a = b = c$.

6.18. a) Chứng minh rằng, nếu $ab + bc + ca = abc \neq 0$ và $a + b + c = 0$

thì $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1.$$

b) Chứng minh rằng, nếu $a + b + c = ab + bc + ca = abc \neq 0$ và $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

thì $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \pm 2.$$

c) Cho $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 2$ và $abc \neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$.

6.19. a) Cho $abc = 1$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng tồn tại một trong ba số a, b, c bằng 1.

b) Chứng minh rằng nếu $a + b + c = n$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{n}$ thì tồn tại một trong ba số bằng n.

c) Chứng minh rằng, nếu ba số a, b, c khác 0, thoả mãn đẳng thức

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b^2 - c^2}{bc} + \frac{c^2 - a^2}{ca} = 0$$

thì tồn tại hai số bằng nhau.

6.20. Cho $A = \frac{a^2(b^2 + c^2) - b^2c^2}{a^2b^2c^2}$; $B = \frac{b^2(a^2 + c^2) - a^2c^2}{a^2b^2c^2}$;

$C = \frac{c^2(a^2 + b^2) - a^2b^2}{a^2b^2c^2}$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Tính tích A.B.C.

6.21. Cho $D = \frac{(6.3^2 - 6)(20.7^2 - 20)(42.11^2 - 42)(72.15^2 - 72)}{(5^2 - 1)(9^2 - 1)(13^2 - 1)(17^2 - 1)}$;

$E = \frac{(1^3 + 1)(2^3 + 1)(3^3 + 1)...(9^3 + 1)}{(1^2 + 2)(2^2 + 3)...(8^2 + 9)}$.

Tính $\frac{D}{E}$.

Chuyên đề 7

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Biểu thức hữu tỉ : là biểu thức nguyên và biểu thức phân.

– Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức : Nhờ các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

– Khi làm các bài toán liên quan đến giá trị của phân thức, trước hết phải tìm điều kiện để giá trị của phân thức được xác định, đó là những giá trị của biến làm mẫu thức khác không. Tại giá trị của biến mà giá trị của phân thức được xác định thì phân thức ấy và phân thức rút gọn của nó có cùng một giá trị.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 7.1. Tìm giá trị của x để phân thức $\dfrac{5x^2 - 25x + 30}{x^3 - 9x}$ bằng 0.

Giải. $\dfrac{5x^2 - 25x + 30}{x^3 - 9x} = \dfrac{5(x^2 - 5x + 6)}{x(x^2 - 9)} = \dfrac{5(x-2)(x-3)}{x(x-3)(x+3)}$.

Với x = 2 thì tử bằng 0, mẫu khác 0 nên phân thức bằng 0.

Với x = 3 thì mẫu bằng 0, phân thức không xác định.

Vậy $\dfrac{5x^2 - 25x + 30}{x^3 - 9x} = 0$ tại $x = 2$.

Ví dụ 7.2. Cho hai phân thức :

$$A = \frac{x^5 + x^4 - 16x - 16}{x^3 - 6x^2 - 9x + 14}; \quad B = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 - 10x + 21}.$$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của các phân thức được xác định ;

b) Rút gọn phân thức A ;

c) Tìm giá trị của phân thức để giá trị của từng phân thức bằng 0 ;

d) Tìm giá trị của phân thức A tại x = 3 và phân thức B tại $|x - 1| = 3$;

e) Tìm giá trị nguyên của x để $\frac{A}{B}$ nhận giá trị nguyên.

Giải. a) $A = \frac{x^5 + x^4 - 16x - 16}{x^3 - 6x^2 - 9x + 14}$.

Phân tích tử : $x^5 + x^4 - 16x - 16 = x^4(x + 1) - 16(x + 1) = (x + 1)(x^4 - 16)$

$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$.

Phân tích mẫu : $x^3 - 6x^2 - 9x + 14 = x^3 - 5x^2 - 14x - x^2 + 5x + 14$

$= x(x^2 - 5x - 14) - (x^2 - 5x - 14) = (x^2 - 5x - 14)(x - 1)$

$= (x^2 - 7x + 2x - 14)(x - 1) = [x(x - 7) + 2(x - 7)](x - 1)$

$= (x - 7)(x + 2)(x - 1)$.

* Giá trị của phân thức A được xác định khi mẫu khác 0 tức là :

$(x - 7)(x + 2)(x - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 7 ; x \neq -2 ; x \neq 1$.

Ta có $B = \frac{x^2(x - 2) + 4(x - 2)}{x^2 - 7x - 3x + 21} = \frac{(x^2 + 4)(x - 2)}{x(x - 7) - 3(x - 7)}$

$= \frac{(x^2 + 4)(x - 2)}{(x - 3)(x - 7)}$.

* Giá trị của phân thức B được xác định khi mẫu khác 0 tức là :

$(x - 3)(x - 7) \neq 0 \Rightarrow x \neq 7 ; x \neq 3$;

b) Rút gọn : $A = \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)(x + 1)}{(x + 2)(x - 7)(x - 1)} = \frac{(x^2 + 4)(x - 2)(x + 1)}{(x - 7)(x - 1)}$.

c) Giá trị của A = 0 khi tử bằng 0 và mẫu khác 0.

Ta có $x^2 + 4 > 0$ với mọi x, do đó $(x^2 + 4)(x - 2)(x + 1) = 0$ khi $x = 2 ; x = -1$.

Hai giá trị này của x đều thoả mãn điều kiện để mẫu khác 0.

Vậy A = 0 khi $x = 2 ; x = -1$.

Tương tự B = 0 khi x = 2.

d) Khi x = 3 thì $A = \frac{(3^2 + 4)(3 - 2)(3 + 1)}{(3 - 7)(3 - 1)} = -\frac{13}{2}$.

Ta có $|x-1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Tại $x = 4$ thì $B = \dfrac{(4^2+4)(4-2)}{(4-3)(4-7)} = -\dfrac{40}{3}$.

Tại $x = -2$ thì $B = \dfrac{[(-2)^2+4](-2-2)}{(-2-3)(-2-7)} = -\dfrac{32}{45}$.

c) Ngoài các điều kiện x khác 7 ; −2 ; 1 ; 3 để giá trị $\dfrac{A}{B}$ xác định cần thêm điều kiện $x \neq 2$.

$$\frac{A}{B} = \frac{(x^2+4)(x-2)(x+1)}{(x-7)(x-1)} : \frac{(x^2+4)(x-2)}{(x-3)(x-7)}$$

$$= \frac{(x^2+4)(x-2)(x+1)}{(x-7)(x-1)} \cdot \frac{(x-3)(x-7)}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{x-1}.$$

Để $\dfrac{A}{B} \in \mathbf{Z}$ thì $\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \dfrac{x^2-2x+1-4}{x-1} = (x-1) - \dfrac{4}{x-1} \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow \dfrac{4}{x-1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow x-1$ là ước của 4 $\Rightarrow x-1$ bằng ± 1 ; ± 2 ; ± 4

$\Rightarrow x \in \{-3 ; -1 ; 0 ; 5\}$, (loại $x = 2$; 3 vì không thoả mãn điều kiện xác định).

Ví dụ 7.3. Cho $a^2 + b^2 = \dfrac{50}{7}ab$ với $b > a > 0$. Tính giá trị của phân thức $B = \dfrac{a+b}{a-b}$.

Giải. *Cách 1 :* Từ $a^2 + b^2 = \dfrac{50}{7}ab$, suy ra $7a^2 + 7b^2 = 50ab$.

Xét $B^2 = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = \dfrac{7a^2+7b^2+14ab}{7a^2+7b^2-14ab} = \dfrac{50ab+14ab}{50ab-14ab} = \dfrac{64ab}{36ab} = \dfrac{16}{9}$.

Do $b > a > 0$ nên $a - b < 0$; $a + b > 0 \Rightarrow B < 0 \Rightarrow B = -\dfrac{4}{3}$.

Cách 2 : Từ $a^2 + b^2 = \dfrac{50}{7}ab$, suy ra $7a^2 + 7b^2 = 50ab$

$\Rightarrow 7a^2 + 7b^2 - 50ab = 0 \Rightarrow 7a^2 - 49ab - ab + 7b^2 = 0$

$\Rightarrow 7a(a-7b) - b(a-7b) = 0 \Rightarrow (a-7b)(7a-b) = 0$.

Trường hợp $a = 7b$ không xảy ra vì $b > a$ nên $b = 7a$.

Thay vào ta có $B = \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{a+7a}{a-7a} = \dfrac{8a}{-6a} = -\dfrac{4}{3}$ (do $a \neq 0$).

Ví dụ 7.4. Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $C = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 4}{2x - 1}$ là số nguyên.

Giải. Ta có với x nguyên thì $2x - 1 \neq 0$, giá trị của phân thức được xác định. Ta có :

$$C = \frac{2x^3 - x^2 + 2x^2 - x + 2x - 1 + 5}{2x - 1}$$

$$= \frac{x^2(2x - 1) + x(2x - 1) + (2x - 1) + 5}{2x - 1} = (x^2 + x + 1) + \frac{5}{2x - 1}.$$

Với x nguyên thì để giá trị của biểu thức C là số nguyên thì $\dfrac{5}{2x - 1}$ phải có giá trị nguyên. Do đó $2x - 1$ phải là ước của 5 tức là $2x - 1 = \pm 1$; $2x - 1 = \pm 5$.

$2x - 1$	-5	-1	1	5
x	-2	0	1	3

Vậy $x \in \{-2 ; 0 ; 1 ; 3\}$ thì C có giá trị nguyên.

Ví dụ 7.5. Cho biểu thức :

$$D = \frac{\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{x}{x^2 + x + 1}}{(x - 3)\left(x - \dfrac{x^4 + 2}{x^3 - 1}\right)}.$$

a) Biến đổi biểu thức D thành phân thức đại số và rút gọn ;

b) Tìm giá trị của D tại $x = \dfrac{2012}{2013}$;

c) Tìm x biết $D = 2012$;

d) Tìm giá trị tự nhiên của x để D có giá trị nguyên.

Giải. a) ĐKXĐ : $x \neq 1$; $x \neq -2$; $x \neq 3$.

$$D = \frac{\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{x}{x^2 + x + 1}}{(x - 3)\left(x - \dfrac{x^4 + 2}{x^3 - 1}\right)} = \frac{\dfrac{2x^2 + 2x + 2 - x^2 + x}{x^3 - 1}}{\dfrac{(x - 3)(-x - 2)}{x^3 - 1}}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} \cdot \frac{x^3 - 1}{(x - 3)(-x - 2)} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(3 - x)(x + 2)} = \frac{x + 1}{3 - x}.$$

b) Tại $x = \frac{2012}{2013}$

thì $D = \left(\frac{2012}{2013} + 1\right) : \left(3 - \frac{2012}{2013}\right) = \frac{4025}{2013} \cdot \frac{2013}{4027} = \frac{4025}{4027}$.

c) Để $D = 2012$ thì $\frac{x+1}{3-x} = 2012 \Leftrightarrow x + 1 = 6036 - 2012x \Leftrightarrow x = \frac{6035}{2013}$.

d) $D = \frac{x+1}{3-x} = \frac{(x-3)+4}{3-x} = \frac{4}{3-x} - 1$.

Để $D \in \mathbf{Z}$ thì $\frac{4}{3-x} \in \mathbf{Z} \Rightarrow 3 - x$ là ước của 4.

Nếu $3 - x = 1$ thì $x = 2$.

Nếu $3 - x = -1$ thì $x = 4$.

Nếu $3 - x = 2$ thì $x = 1$ (loại vì không thoả mãn ĐKXĐ).

Nếu $3 - x = -2$ thì $x = 5$.

Nếu $3 - x = 4$ thì $x = -1$ (loại vì không là số tự nhiên).

Nếu $3 - x = -4$ thì $x = 7$.

Vậy $x \in \{2 ; 4 ; 5 ; 7\}$.

III. BÀI TẬP

7.1. Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức :

a) $A = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}}{\frac{4x^2 - y^2}{x}}$;

b) $B = \dfrac{\frac{xy - y^2}{1 + xy} - xy}{\frac{x^2 - xy}{1 + xy} - x^2}$;

c) $C = \dfrac{x + \frac{3(3x-1)}{x^2 + 3x - 10}}{x - \frac{3(x+1)}{x+5}}$;

d) $D = \dfrac{\frac{x^3 - x}{x+1} + \frac{2x-2}{1 + \frac{x}{2}}}{\frac{x^3 - 3x^2}{x-3} - \frac{2x^2 + 8}{x+2}}$.

7.2. Thực hiện phép tính :

a) $E = \dfrac{1 + \frac{1}{a+x}}{1 - \frac{1}{a+x}} \cdot \left[1 - \dfrac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax}\right]$;

b) $F = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{1+\frac{(2x-1)^2}{3}} - \frac{1}{1+\frac{(2x+1)^2}{3}}\right]\left(x^2 + \frac{1}{x^2+1}\right)$;

c) $G = \frac{(x-y)-(y-z)-(z-x)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} \cdot \left[\frac{x^2-yz}{1+\frac{y+z}{x}} + \frac{y^2-zx}{1+\frac{z+x}{y}} + \frac{z^2-xy}{1+\frac{x+y}{z}}\right]$;

d) $H = \left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+1\right) \cdot \frac{1+\frac{z}{x+y}}{yz-\frac{yz^2}{x+y}} : \frac{1+\frac{y+z}{x}}{x^2+4y^2-(x-2y)^2}$.

7.3. Tìm điều kiện xác định và tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $I = \frac{x(x+2y)+(y+1)(y-1)}{x(x+2)-(y+1)(y-1)}$ tại $x = 2013$; $y = 2012$;

b) $K = \frac{\frac{x^4+1}{x^3-1} - x}{\frac{x}{x^2+x+1} - \frac{2}{x-1}}$ với $x = 2013$;

c) $L = \frac{4x^5-12x^4y-xy^4+3y^5}{2x^3y^2-6x^2y^3+xy^4-3y^5}$ với $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$.

7.4. Tìm giá trị của x để các phân thức sau có giá trị bằng 0.

a) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x-10}$; b) $\frac{x^3-19x+30}{x^4-15x^2+16}$;

c) $\frac{x^5-7x^4+x-7}{x^5-4x^4+x-4}$.

7.5. Tìm các số nguyên x để các phân thức sau có giá trị là số nguyên.

a) $\frac{5}{2x+1}$; b) $\frac{3}{x^2-x+1}$;

c) $\frac{x^2-44}{x+7}$; d) $\frac{x+1}{x^2+1}$;

e) $\frac{x^3+x-2}{x^3-3x^2-2x-8}$.

7.6. Tìm số hữu tỉ x để phân thức $\frac{15}{x^2+3}$ có giá trị là số nguyên.

7.7. a) Tìm giá trị của phân thức $M = \frac{2x-3y}{2x+3y}$ với $x^2 - 2xy = 3y^2$; $x + y \neq 0$; $y \neq 0$; $2x + 3y \neq 0$.

b) Tìm giá trị của phân thức $N = \frac{24xy}{49x^2 - y^2}$ với $7x^2 + y^2 = 8xy$ và $7x > y > 0$.

7.8. Tìm giá trị của phân thức $P = \frac{5x-4y}{5x+4y}$ với $25x^2 + 16y^2 = 50xy$ và $4y < 5x < 0$.

7.9. Tìm giá trị của biểu thức $Q = \frac{2x^2 - 3xy}{x^2 + 3y^2}$ với $2x + y = 11z$ và $3x - y = 4z$ và $x \neq 0$; $y \neq 0$.

7.10. a) Biết $2b - a = 10$; $a \neq -\frac{15}{4}$; $b \neq 5$. Tính giá trị của biểu thức

$$R = \frac{a}{b-5} + \frac{5a+6b}{4a+15}.$$

b) Biết $2a - b = 5$; $a \neq -\frac{10}{3}$; $b \neq 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = \frac{7a-2b}{3a+10} - \frac{7b-4a}{15b-30}.$$

7.11. Biết $4a^2 - 15ab + 3b^2 = 0$; $b \neq \pm 4a$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \frac{5a-b}{4a-b} + \frac{3b-2a}{4a+b}.$$

7.12. a) Cho $x^2 - 52x + 2 = 0$ và $x \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $U = \frac{x^4+4}{27x^2}$.

b) Cho $x^2 - 9x + 1 = 0$ và $x \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $X = \frac{x^4 + x^2 + 1}{5x^2}$.

7.13. Cho $x \neq 0$; $n \neq \pm 1$ và $\left(x - \frac{1}{x}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right) = n$.

Tính $V = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ theo n.

7.14. Cho $\begin{cases} ax + by = 5c & (1) \\ by + cz = 5a & (2) \\ cz + ax = 5b & (3) \end{cases}$ và $x \neq -5$; $y \neq -5$; $z \neq -5$; $a + b + c \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{y+5} + \frac{1}{z+5}$.

7.15. Cho phân thức :

$$A = \frac{(5x^2 + 5y^2 + 5z^2)(x + y + z)^2 + 5(xy + yz + zx)^2}{(5x + 5y + 5z)^2 - (25xy + 25yz + 25zx)}.$$

a) Tìm các giá trị của x, y, z để phân thức xác định ;

b) Rút gọn A.

7.16. Cho biểu thức :

$$B = \frac{a^3 + 2a^2 - a - 2}{a^{n+2} - 2a^{n+1} - 3a^n}\left[\frac{(a + 2)^2 - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{3}{a^2 - a}\right] \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

a) Rút gọn B.

b) Khi n = 1, tìm giá trị của a để B = 3.

7.17. Cho các biểu thức :

$$C = \frac{x^2}{x + y - xy - y^2} - \frac{y^2}{x + y + xy + x^2} \text{ ; } D = \frac{x^2y^2 + x^2y^3}{1 + x - y^2 - xy^2}.$$

a) Tính C – D.

b) Tìm các cặp giá trị nguyên (x ; y) để C – D = 10.

7.18. Cho $E = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^3 + 3x^2 - 27x + 27}.\left[\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} + \frac{2}{3x} : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right)^2\right]$

và $F = \frac{3 + x}{3 - x}.\frac{x^2 - 6x + 9}{9x^2}.\left(\frac{3}{3 - x} - \frac{9}{27 + x^3}.\frac{x^2 - 3x + 9}{3 - x}\right).$

a) Rút gọn E và F ;

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{E}{F}$ nhận giá trị nguyên ;

c) Tìm các giá trị của x nếu $\left|\frac{E}{F}\right| = 9$;

d) Tìm các giá trị của x để $\frac{E}{F} > 2$;

e) Tìm các giác trị của x nếu $\frac{E}{F} = 2013$;

f) Tìm giá trị của $\frac{E}{F}$ tại $|x - 1| = 2012$.

7.19. a) Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

b) Cho ba số a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau và thoả mãn $a + b + c = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $Q = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)$.

7.20. a) Rút gọn $E = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + ... + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ với $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Rút gọn $F = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{n(n+3)}$ với $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Rút gọn

$G = \left(1 - \frac{2}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{2}{20}\right)\left(1 - \frac{2}{30}\right)...\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ với $n \in \mathbf{N}$ và $n \geq 2$.

7.21. Với a, b, c, $n \in \mathbf{Z}$ và $n = b + c$ $(b < c)$,

a) Chứng minh

$$1 + \frac{bc}{a(a+n)} = \frac{(a+b)(a+c)}{a(a+n)}.$$

Áp dụng : Tính nhanh $A = \left(1 + \frac{2}{1.4}\right)\left(1 + \frac{2}{2.5}\right)...\left(1 + \frac{2}{100.103}\right)$.

b) Chứng minh $1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{a(a+n)}{(a+b)(a+c)}$.

Áp dụng : Tính nhanh $B = \left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right)...\left(1 - \frac{2}{101.102}\right)$.

Chương III PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 8

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mở đầu về phương trình

* Một phương trình với ẩn x có dạng A(x) = B(x), trong đó vế trái A(x) và vế phải B(x) là hai biểu thức của cùng một biến x.
* Giá trị của biến thoả mãn (hay nghiệm đúng) phương trình đã cho là nghiệm của phương trình đó.
* Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm (hay tập nghiệm) của phương trình đó.
* Hai phương trình có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương.

2. Hai quy tắc biến đổi tương đương

a) Quy tắc chuyển vế : Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

b) Quy tắc nhân với một số : Trong một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với (hoặc cho) cùng một số khác 0.

* Từ một phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

3. Phương trình bậc nhất một ẩn

* Phương trình có dạng $ax + b = 0$, với a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.
* Phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ luôn có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

4. Phương trình đưa được về dạng ax + b = 0 và phương pháp giải

a) Phương trình không chứa mẫu số :

– Thực hiện phép tính và bỏ ngoặc.

– Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia.

– Thu gọn và giải phương trình nhận được.

b) Phương trình chứa mẫu số bằng số : Trước hết phải quy đồng mẫu số rồi nhân hai vế với mẫu chung để khử mẫu rồi thực hiện như a).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 8.1. Giải các phương trình :

a) $2x(x-5) = (x+2)^2 + (x-5)^2$; (1)

b) $2x - \dfrac{\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x}{4}}{6} = \dfrac{3x - \dfrac{5-4x}{3}}{4} - x + 1.$ (2)

Giải. a) (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 10x = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 10x + 25$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x - x^2 - 4x - x^2 + 10x = 4 + 25$

$\Leftrightarrow -4x = 29 \Leftrightarrow x = -\dfrac{29}{4}.$

b) (2) $\Leftrightarrow 2x - \dfrac{2x+6-x}{24} = \dfrac{9x-5+4x}{12} - x + 1$

$\Leftrightarrow 48x - x - 6 = 26x - 10 - 24x + 24$

$\Leftrightarrow 48x - x - 26x + 24x = -10 + 24 + 6$

$\Leftrightarrow 45x = 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{9}.$

Ví dụ 8.2. Giải phương trình sau với a là hằng số (ta còn gọi a là tham số)

$$a(ax-1) = x(3a-2) - 1. \quad (3)$$

Giải. (3) $\Leftrightarrow a^2x - a = 3ax - 2x - 1 \Leftrightarrow a^2x - 3ax + 2x = a - 1$

$\Leftrightarrow x(a^2 - 3a + 2) = a - 1 \Leftrightarrow x(a-1)(a-2) = a - 1$

– Nếu $a \neq 1$ và $a \neq 2$ thì $x = \dfrac{1}{a-2}$.

– Nếu $a = 2$ phương trình có dạng $0x = 1$. Vô nghiệm.

– Nếu $a = 1$ phương trình có dạng $0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

Ví dụ 8.3. Giải phương trình sau với b là tham số :

$$\frac{x-1+b}{b+2} + \frac{x-b}{b-2} = \frac{b-x}{4-b^2}. \quad (4)$$

Giải. Điều kiện $b \neq \pm 2$.

$$(4) \Leftrightarrow (x - 1 + b)(b - 2) + (x - b)(b + 2) = x - b$$

$$\Leftrightarrow xb - 2x - b + 2 + b^2 - 2b + xb + 2x - b^2 - 2b = x - b$$

$$\Leftrightarrow 2xb - x = 4b - 2 \Leftrightarrow (2b - 1)x = 2(2b - 1).$$

* Nếu $b \neq \frac{1}{2}$ (và $b \neq \pm 2$) thì $x = 2$.

* Nếu $b = \frac{1}{2}$ thì phương trình trở thành $0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

Ví dụ 8.4. Giải phương trình :

a) $\frac{x+1}{2012} + \frac{x+2}{2011} + \frac{x+3}{2010} = \frac{x-1}{2014} + \frac{x-2}{2015} + \frac{x-3}{2016}$; (5)

b) $\frac{x-1}{99} - \frac{x+1}{101} + \frac{x-2}{98} - \frac{x+2}{102} + \frac{x-3}{97} - \frac{x+3}{103} + \frac{x-4}{96} - \frac{x+4}{104} = 0$. (6)

Giải. a) Nhận xét : Nếu quy đồng mẫu thức hai vế thì mẫu thức chung quá lớn. Nếu cộng thêm 1 vào mỗi phân thức ở hai vế thì các phân thức nhận được có các tử thức bằng nhau. Do đó ta có cách giải sau :

$$(5) \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2012} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{2011} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2010} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{x-1}{2014} + 1\right) + \left(\frac{x-2}{2015} + 1\right) + \left(\frac{x-3}{2016} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2013}{2012} + \frac{x+2013}{2011} + \frac{x+2013}{2010} = \frac{x+2013}{2014} + \frac{x+2013}{2015} + \frac{x+2013}{2016}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2013}{2012} + \frac{x+2013}{2011} + \frac{x+2013}{2010} - \frac{x+2013}{2014} - \frac{x+2013}{2015} - \frac{x+2013}{2016} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2013)\left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}\right) = 0.$$

Dễ thấy $\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \neq 0$. Do đó $x + 2013 = 0$

Vậy $x = -2013$.

b) Ta biến đổi phương trình (6) như sau :

$$(6) \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{99}-1\right)-\left(\frac{x+1}{101}-1\right)+\left(\frac{x-2}{98}-1\right)-\left(\frac{x+2}{102}-1\right)$$

$$+\left(\frac{x-3}{97}-1\right)-\left(\frac{x+3}{103}-1\right)+\left(\frac{x-4}{96}-1\right)-\left(\frac{x+4}{104}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-100}{99}-\frac{x-100}{101}+\frac{x-100}{98}-\frac{x-100}{102}$$

$$+\frac{x-100}{97}-\frac{x-100}{103}+\frac{x-100}{96}-\frac{x-100}{104}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-100)\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}+\frac{1}{98}-\frac{1}{102}+\frac{1}{97}-\frac{1}{103}+\frac{1}{96}-\frac{1}{104}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

$$\left(\text{do } \frac{1}{99}-\frac{1}{101}+\frac{1}{98}-\frac{1}{102}+\frac{1}{97}-\frac{1}{103}+\frac{1}{96}-\frac{1}{104}\neq 0\right).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 100$.

Ví dụ 8.5. Tìm giá trị của m để :

a) Phương trình sau có nghiệm $x = -2$:

$$(3x-4)(1+2m)-8(x+4)=25(x+5)(2-x)+3(m-2)+25 \qquad (7)$$

b) Phương trình $(x-m)(x+2)-5mx+4=(x+m)(x-2)-3x$ (8)

có nghiệm gấp đôi nghiệm của phương trình $2x(x-3)-6x=2(x-1)(x+5)$.

Giải. a) Để $x = -2$ là nghiệm của (7) ta phải có :

$$(-6-4)(1+2m)-8.2=25.3.4+3(m-2)+25$$

$$\Leftrightarrow -10-20m-16=300+3m-6+25$$

$$\Leftrightarrow -20m-3m=10+300+16-6+25$$

$$\Leftrightarrow -23m=345 \Leftrightarrow m=-15.$$

b) Giải phương trình : $2x(x-3)-6x=2(x-1)(x+5)$ (9)

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x-6x=2x^2+10x-2x-10$$

$$\Leftrightarrow -20x=-10 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Nghiệm của phương trình (8) gấp đôi nghiệm của phương trình (9) nghĩa là (8) có nghiệm là 1. Do đó $3-3m-5m+4=-1-m-3$

$$\Leftrightarrow -7m=-11 \Leftrightarrow m=\frac{11}{7}.$$

Ví dụ 8.6. Giải các phương trình :

a) $\frac{2}{1^2}.\frac{6}{2^2}.\frac{12}{3^2}.\frac{20}{4^2}.....\frac{110}{10^2}.(x-2) = -20(x+1)+60.$ (10)

b) $\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}\right)2013x = \frac{2012}{51}+\frac{2012}{52}+...+\frac{2012}{99}+\frac{2012}{100}.$ (11)

c) $\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{19.21}\right)840-\left[0,4.(7,5-2,5x)\right]:0,25 = 412.$ (12)

Giải. a) $\frac{2}{1^2}.\frac{6}{2^2}.\frac{12}{3^2}.\frac{20}{4^2}.....\frac{110}{10^2} = \frac{2}{1^2}.\frac{2.3}{2^2}.\frac{3.4}{3^2}.\frac{4.5}{4^2}.....\frac{10.11}{10^2}$

$$= \frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}.....\frac{11}{10} = 11.$$

Vậy $11(x-2) = -20(x+1)+60 \Leftrightarrow 11x-22 = -20x-20+60$

$\Leftrightarrow 11x+20x = 22-20+60 \Leftrightarrow 31x = 62 \Leftrightarrow x = 2.$

b) $\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}\right)2013x = 2012\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right).$

Xét $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}\right)$

$= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}.$

Vậy $x = \frac{2012}{2013}.$

c) Tính $\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{19.21}\right)840 = \left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{19.21}\right)420$

$$= \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)420$$

$$= \left(1-\frac{1}{21}\right).420 = \frac{20}{21}.420 = 400.$$

(12) $\Leftrightarrow 400-\left[0,4.(7,5-2,5x)\right]:0,25 = 412$

$\Leftrightarrow 400-(3-x)4 = 412 \Leftrightarrow (3-x).4 = -12 \Leftrightarrow x = 6.$

III. BÀI TẬP

8.1. Giải các phương trình :

a) $x(x-3)+(x+3)^2=2x(x-5)+35$;

b) $(3x-2)^2+(2x+3)^2=(2x-5)(9x+1)-5x^2-68$;

c) $(x-1)^3+(2x+1)^3-(3x-1)(3x+1)=9x(x-1)(x+1)+91$;

d) $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)-8=x(x^3+1)-(5x+1)(x-4)$;

e) $(x+2)^2(x+1)+8=(x-2)^3-(x-2)^2+(3x-2)(4x-3)$.

8.2. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{5-x}{3}+\dfrac{3x-2}{5}=\dfrac{4x+3}{6}-2x$;

b) $\dfrac{4+x}{3}-\dfrac{x-\dfrac{x-1}{2}}{2}+\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{6-2x}{2}$;

c) $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{\dfrac{2x-5}{3}-2\left(2x+\dfrac{x-1}{5}\right)}{4}=\dfrac{2-5x-\dfrac{6-3x}{4}}{3}-x$.

8.3. Tìm y, nếu :

a) $\left(2\dfrac{1}{3}+3\dfrac{1}{4}-4\dfrac{1}{5}\right).\dfrac{30}{83}y=6\dfrac{1}{2}(1-y)+7\dfrac{1}{2}$;

b) $\dfrac{5,73+0,27-4,5.3}{3,51+\dfrac{6}{25}}+0,25y=\left(\dfrac{y}{2}-\dfrac{y}{4}\right):0,25+1$;

c) $35,6y:\left(3\dfrac{1}{4}-5\dfrac{1}{5}-2\dfrac{1}{2}\right)-11=\dfrac{1}{5}-0,75:\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)-10(y+1)$.

8.4. Tìm giá trị của n để phương trình

$$(x-1)^2-(x+n-2)-(x+3)^2=2(x-n+1)+10(n+1)+1$$

có nghiệm là $x=4$.

8.5. Tìm giá trị của n để phương trình :

$$x^2-\frac{2n-3x}{4}-2x+5n=x^3-9x^2+10$$

có nghiệm bằng $\dfrac{1}{3}$ nghiệm của phương trình $(x+1)(x+3)=x(x-3)+24$.

8.6. Giải các phương trình :

a) $\frac{2x+5}{95}+\frac{2x+6}{94}+\frac{2x+7}{93}=\frac{2x+93}{7}+\frac{2x+94}{6}+\frac{2x+95}{5}$;

b) $\frac{74-x}{26}+\frac{75-x}{25}+\frac{76-x}{24}+\frac{77-x}{23}+\frac{78-x}{22}=-5$;

c) $\frac{x-50}{50}+\frac{x-51}{49}+\frac{x-52}{48}+\frac{x-53}{47}+\frac{x-200}{25}=0$;

d) $\frac{5x-150}{50}+\frac{5x-102}{49}+\frac{5x-56}{48}+\frac{5x-12}{47}+\frac{5x-660}{46}=0.$

8.7. Giải phương trình :

a) $\frac{x-a}{a+3}+\frac{x-3}{a-3}=\frac{6a}{9-a^2}$ với a là hằng số ;

b) $\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{x-b}{ca}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{1}{a}\right)=\frac{ab+bc+ca}{abc}$

với a, b, c là các hằng số và $a.b.c \neq 0$.

8.8. Giải phương trình :

a) $\frac{x-a}{b-2}+\frac{x-b}{a-2}+\frac{x+2}{a+b}=3$ với a ; b là các hằng số ;

b) $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}=3$ với a ; b và c là các hằng số khác 0.

8.9. Giải các phương trình :

a) $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}\right)503x$

$$=1+\frac{2014}{2}+\frac{2015}{3}+...+\frac{4023}{2011}+\frac{4024}{2012};$$

b) $\left(\frac{0,6+\frac{3}{7}-\frac{3}{11}}{1+\frac{5}{7}-\frac{5}{11}}+\frac{\frac{2}{3}-1,5+\frac{2}{9}}{\frac{5}{3}-3,75+\frac{5}{9}}\right)+93x$

$$=\left(\frac{3737}{4545}-\frac{954954}{975975}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-7(x-3).$$

8.10. Tìm x, nếu :

a) $\left(\frac{8}{1.9}+\frac{8}{9.17}+\frac{8}{17.25}+...+\frac{8}{49.57}\right)+\frac{58}{57}+2(x-1)=\frac{2x+7}{3}+\frac{5x-8}{4}$;

b) $\left(\frac{3030}{1212}+\frac{3030}{2020}+...+\frac{3030}{9090}\right)(2x-1)=\frac{2013.2014-2011}{2014.2011+2017}x+12(x+1)$;

c) $\left(\frac{2011}{1.11}+\frac{2011}{2.12}+...+\frac{2011}{100.110}\right)x=\frac{2012}{1.101}+\frac{2012}{2.102}+...+\frac{2012}{10.110}$.

Chuyên đề 9

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

– Dạng phương trình : $A(x).B(x)=0$ trong đó $A(x)$, $B(x)$ là các đa thức của biến x.

– Phương pháp chung : Để giải phương trình $A(x).B(x)=0$, ta giải hai phương trình $A(x)=0$ và $B(x)=0$, rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

$$A(x).B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \text{ hoặc } B(x)=0.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 9.1. Giải phương trình $x^3-6x^2+11x-12=0$. (1)

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow x^3-4x^2-2x^2+8x+3x-12=0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-4)-2x(x-4)+3(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-2x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x^2-2x+3=0. \end{array}\right.$$

Giải $x-4=0$ được $x=4$. Phương trình $x^2-2x+3=0$ vô nghiệm vì $x^2-2x+3=x^2-2x+1+2=(x-1)^2+2>0$ với mọi x.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=4$.

Ví dụ 9.2. Giải phương trình : $x^6-7x^2(2x^2-7)=36$. (2)

Giải.

$$(2) \Leftrightarrow x^6-14x^4+49x^2-36=0$$
$$\Leftrightarrow x^6-x^4-13x^4+13x^2+36x^2-36=0$$
$$\Leftrightarrow x^4(x^2-1)-13x^2(x^2-1)+36(x^2-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^4-13x^2+36)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^4-4x^2-9x^2+36)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)[x^2(x^2-4)-9(x^2-4)]=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)=0.$$

Vậy phương trình (2) có 6 nghiệm là : $x=\pm 1$; $x=\pm 2$; $x=\pm 3$.

Ví dụ 9.3. Tìm bốn số tự nhiên liên tiếp sao cho tổng các lập phương của ba số đầu bằng lập phương của số thứ tư.

Giải. Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp cần tìm là a ; a + 1 ; a + 2 ; a + 3.

Ta có $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = (a+3)^3$

$\Leftrightarrow a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27$

$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 3a^2 - 9a + 3a - 9 = 0 \Leftrightarrow (a-3)(a^2 + 3a + 3) = 0.$

Do $a^2 + 3a + 3 = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi a nên $a - 3 = 0$ hay $a = 3$.

Vậy bốn số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Ví dụ 9.4. Giải phương trình

$$(x-1)^3 - (x-3)^3 = 98.$$

Giải. *Cách 1 :* Biến đổi phương trình được

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 = 98$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 24x - 72 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 6 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \end{array}\right..$

Nghiệm của phương trình là x = 6 ; x = –2.

Cách 2 : Ta có x – 2 là trung bình cộng của x – 1 và x – 3.

Đặt x – 2 = y phương trình trở thành $(y+1)^3 - (y-1)^3 = 98$

$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 98$

$\Leftrightarrow 6y^2 = 96 \Leftrightarrow y^2 = 16$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = -4 \end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} x - 2 = 4 \\ x - 2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình là x = 6 ; x = –2.

Ví dụ 9.5. Giải phương trình

$$(2x^2 - x - 3)^2 - 7(2x^2 - x + 3) + 42 = 0.$$

Giải. Đặt $2x^2 - x - 3 = y$.

Phương trình trở thành $y^2 - 7(y+6) + 42 = 0$

$\Leftrightarrow y(y-7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y - 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ 2x^2 - x - 10 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (2x-3)(x+1) = 0 & (1) \\ (2x-5)(x+2) = 0 & (2) \end{array}\right.$

Giải (1) được $x = \frac{3}{2}$; $x = -1$.

Giải (2) được $x = \frac{5}{2}$; $x = -2$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = \frac{3}{2}$; $x = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 9.6. Giải phương trình

$$(x - 1)(x - 2)(x - 5)(x - 6) = 252.$$

Giải. Xét vế trái nếu nhân nhân tử thứ nhất với nhân tử thứ tư ; nhân nhân tử thứ hai với nhân tử thứ ba thì chúng cùng hệ số của x^2 và của x. Do đó ta biến đổi thành :

$$(x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 10) = 252.$$

Đặt $x^2 - 7x + 8 = y$, phương trình trở thành $(y - 2)(y + 2) = 252$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4 = 252 \Leftrightarrow y^2 = 256 \Leftrightarrow y = \pm 16.$$

* Với $y = 16$ ta có $x^2 - 7x + 8 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 8)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

* Với $y = -16$ ta có $x^2 - 7x + 8 = -16 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 24 = 0$, phương trình này vô nghiệm vì $x^2 - 7x + 24 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{47}{4} > 0\ \forall x$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 8$ và $x = -1$.

(Ta cũng có thể đặt $x^2 - 7x + 6$ hoặc $x^2 - 7x + 10$ làm biến phụ. Bạn đọc tự giải).

CHÚ Ý

Khi giải phương trình tích ta có thể gặp phương trình đối xứng, đó là phương trình có hệ số của chúng đối xứng nhau.

Trong phương trình đối xứng, nếu a là nghiệm thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm.

Phương trình đối xứng bậc lẻ bao giờ cũng có nghiệm là -1.

Phương trình đối xứng bậc chẵn 2n đưa về phương trình bậc n bằng cách đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$.

Ví dụ 9.7. Giải các phương trình :

a) $4x^3 + 21x^2 + 21x + 4 = 0$; b) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$.

Giải a) : Biến đổi phương trình thành $(x + 1)(x + 4)(4x + 1) = 0$.

Phương trình có ba nghiệm $x = -1$; $x = -4$ và $x = -\frac{1}{4}$.

b) *Cách 1 :* Biến đổi phương trình thành $(x^2 - x + 1)(2x - 1)(x - 2) = 0$.

Nghiệm của phương trình là $x = 2$ và $x = \frac{1}{2}$.

Cách 2 : Vì $x = 0$ không là nghiệm nên $x \neq 0$. Chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$.

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Do đó ta có
$$2(y^2 - 2) - 7y + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2y^2 - 7y + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y - 1)(2y - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 1 = 0 \\ 2y - 5 = 0 \end{array}\right.$$

* Với $y - 1 = 0$ ta có $x + \frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm vì

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \ \forall x.$$

* Với $2y - 5 = 0$ ta có $2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$ và $x = \frac{1}{2}$.

III. BÀI TẬP

9.1. Giải các phương trình :

a) $(x - 3)^2 - 16 = 0$;

b) $(x - 4)^2 = (2x + 1)^2$;

c) $(x^2 - 9)(3x + 2) = (x^2 - 9)(2x - 3)$;

d) $(3x - 5)^2 - 4(x - 3)^2 = 0$;

9.2. Giải các phương trình :

a) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$; b) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;

c) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$; d) $x^3 + x^2 + 4 = 0$;

c) $(x - 1)^2(x - 3) + (x - 1)^2 (x + 3) = 72$.

9.3. Giải các phương trình :

a) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$; b) $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 = 0$;

c) $24x^3 - 10x^2 - 3x + 1 = 0$;

9.4. Giải các phương trình :

a) $(x^2 - x)^2 = 12 + 4x - 4x^2$; b) $(x^2 - x)(x^2 + 3x + 2) = 24$;

c) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = 40$.

9.5. Giải các phương trình :

a) $(x - 2)^3 + (x + 1)^3 = (2x - 1)^3$; b) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$;

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^4 = 82$.

9.6. Cho phương trình $x^3 - 9x^2 + 13ax - 12a = 0$.

a) Giải phương trình với $a = 2$.

b) Tìm a để phương trình có nghiệm là -2.

9.7. Cho phương trình $(x - 1)^3 - (a^2 - a + 7)(x - 1) - 3(a^2 - a - 2) = 0$.

a) Tìm các giá trị của a để một trong các nghiệm của phương trình là 2.

b) Giải phương trình với các giá trị đó của a.

9.8. Giải các phương trình với tham số a :

a) $4ax^3 - 12x^2 - ax + 3 = 0$; b) $2a^2x^3 + 5a^2x^2 - 8x = 20$.

9.9. Giải các phương trình :

a) $(8x + 5)^2(4x + 3)(2x + 1) = 9$; b) $(2x + 3)(x + 2)^2(2x + 5) = 315$;

c) $(8x - 7)(8x - 5)(2x - 1)(4x - 1) = 9$; d) $(x^2 + 3x + 2)(2x + 3)(2x + 5) = 30$.

9.10. Giải các phương trình :

a) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$; b) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$;

c) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$; d) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

9.11. Giải các phương trình

a) $(x - 2012)^3 + (x - 2014)^3 = (2x - 4026)^3$;

b) $(x - 3)^4 + (x - 5)^4 = 16$;

c) $(x - 9)^4 + (x - 10)^4 = (19 - 2x)^4$;

d) $(6 - x)^5 + (x - 4)^5 = 32$.

Chuyên đề 10

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp chung :

Bước 1 : Tìm điều kiện xác định của phương trình (giá trị của ẩn làm tất cả các mẫu thức của phương trình khác 0). Viết tắt : ĐKXĐ.

Bước 2 : Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3 : Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4 : (Kết luận). Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 10.1. Giải phương trình

$$\frac{9-4x}{9x^2-1} = \frac{3}{3x+1} - \frac{5}{1-3x}.$$

Giải. ĐKXĐ của phương trình : $x \neq \pm\frac{1}{3}$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với :

$$9 - 4x = 3(3x - 1) + 5(3x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4x = 9x - 3 + 15x + 5$$

$$\Leftrightarrow -28x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Giá trị này thoả mãn điều kiện trên. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 10.2. Giải phương trình

$$\frac{2x-3}{x+1} + \frac{x^2-5x+22}{x^2-2x-3} = \frac{3x-5}{x-3}.$$

Giải. Phương trình trên tương đương với $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{x^2-5x+22}{(x+1)(x-3)}=\frac{3x-5}{x-3}$.

ĐKXĐ : $x \neq 3$ và $x \neq -1$.

Quy đồng hai vế và khử mẫu được :

$$(2x-3)(x-3)+x^2-5x+22=(3x-5)(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-9x+9+x^2-5x+22=3x^2-2x-5$$
$$\Leftrightarrow -12x=-36 \Leftrightarrow x=3.$$

Giá trị này không thoả mãn ĐKXĐ của phương trình nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 10.3. Cho phương trình

$$\frac{x+b}{x-5}+\frac{x+5}{x-b}=2 \text{ (với b là hằng số).}$$

a) Giải phương trình với b = 2.

b) Tìm b để phương trình có nghiệm x = 10 ;

c) Giải phương trình với tham số b.

Giải. a) Khi b = 2 ta có : với $x \neq 5$ và $x \neq 2$ thì $\frac{x+2}{x-5}+\frac{x+5}{x-2}=2$

$$\Leftrightarrow x^2-4+x^2-25=2x^2-14x+20 \Leftrightarrow 14x=49 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}.$$

b) Nếu x = 10 với $b \neq 10$, ta có $\frac{10+b}{5}+\frac{15}{10-b}=2$

$$\Leftrightarrow 100-b^2+75=100-10b \Leftrightarrow 100=b^2-10b+25$$
$$\Leftrightarrow 100=(b-5)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=15 \\ b=-5. \end{array}\right.$$

c) Điều kiện của nghiệm nếu có là $x \neq 5$ và $x \neq b$.

Biến đổi ta có phương trình : $(x+b)(x-b)+(x+5)(x-5)=2(x-5)(x-b)$

$$\Leftrightarrow x^2-b^2+x^2-25=2x^2-2bx-10x+10b$$
$$\Leftrightarrow 2x(b+5)=(b+5)^2. \quad (1)$$

* Nếu $b \neq -5$ thì $x=\frac{b+5}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình nếu $\frac{b+5}{2} \neq b$ và $\frac{b+5}{2} \neq 5$ tức là $b \neq 5$.

* Nếu b = – 5 thì (1) có dạng 0x = 0. Phương trình nghiệm đúng với mọi x khác ± 5.

Kết luận : Nếu $b \neq \pm 5$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{b+5}{2}$.

Nếu $b = 5$ phương trình vô nghiệm.

Nếu $b = -5$ phương trình nghiệm đúng với mọi x trừ $x = 5$ và $x = -5$.

Ví dụ 10.4. Giải phương trình :

$$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}=\frac{1}{15}.$$

Giải. ĐKXĐ $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$; $x \neq 5$.

Biến đổi phương trình về dạng :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-5)}=\frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{15} \Leftrightarrow 60 = x^2-6x+5$$

$$\Leftrightarrow (x-11)(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=-5 \end{array}\right..$$

III. BÀI TẬP

10.1. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{x+2}{x-3}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{2x^2}{x^2+x-12}$; b) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{3}{x-3}$;

c) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{5-x}{x-2}=\dfrac{3}{x^2-x-2}-1$.

10.2. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{96}{x^2-16}+\dfrac{7+x}{4-x}=\dfrac{2x-1}{x+4}-3$; b) $1+\dfrac{x-2}{1-x}+\dfrac{2x^2-5}{x^3-1}=\dfrac{4}{x^2+x+1}$;

c) $\dfrac{x^2-4x}{x^2+4x}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{7-2x}{2x-1}-1$.

10.3. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=\dfrac{3}{(x^4+x^2+1)x}$;

b) $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2+3}-\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2+3}=\dfrac{16}{x^4+4x^2+16}$;

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2}{x^2-2x+2}=\dfrac{5(x^2-5)}{x^4+4}+\dfrac{25}{4}$.

10.4. Giải các phương trình :

a) $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{2}+x^2$;

b) $3\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)=7\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;

c) $\dfrac{21}{x^2-4x+10}=x^2-4x+6$;

d) $2\left(\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\right)^2-7=\dfrac{13\left(x^3-1\right)}{(x-1)^2}$.

10.5. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}-\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{90}$;

b) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2}+\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x+3}=\dfrac{7}{6}$;

c) $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$.

10.6. Giải phương trình $\dfrac{x+5}{x(2x-5)+2}+\dfrac{x+2}{x(2x-7)+3}=\dfrac{2x+7}{2x^2-7x+3}$.

10.7. Cho phương trình $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{2x}{x-a}=\dfrac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$ với a là hằng số.

a) Tìm a để phương trình có nghiệm là 5 ;

b) Giải phương trình với a = 6.

10.8. Tìm x, biết $\dfrac{x^2+1}{n^2x-2n}-\dfrac{1}{2-nx}=\dfrac{x}{n}$

với n là hằng số ; $n \neq 0$ $n \neq 1$; và $\dfrac{2}{n} \neq x$.

10.9. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{1}{x^3-6x^2+11x-6}+\dfrac{3}{x^2-3x+2}-\dfrac{4}{x^2-4x+3}=\dfrac{5}{x^2-5x+6}$;

b) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+...+\dfrac{1}{x^2+199x+9900}=\dfrac{25}{51}$;

c) $\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}=\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}-\dfrac{x^2+10x+30}{x+5}-\dfrac{4}{x^2+7x+12}$.

Chuyên đề 11

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bước 1 : Lập phương trình.

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số ;

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết ;

– Lập phương trình biểu thị quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2 : Giải phương trình.

Bước 3 : Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

2. Một số dạng toán thường gặp

a) Toán chuyển động đều : có ba đại lượng : Vận tốc (v) ; quãng đường (s) và thời gian (t).

Quan hệ giữa chúng như sau : $s = v.t$; $v = s : t$; $t = s : v$.

Đơn vị của các đại lượng trên phải tương ứng với nhau. Chẳng hạn, đơn vị vận tốc : km/giờ thì đơn vị quãng đường : km và thời gian : giờ.

Đặc biệt : Chuyển động xuôi, ngược dòng nước (hoặc xuôi gió, ngược gió) : với v_x là vận tốc khi xuôi ; v_n là vận tốc khi ngược, v_r là vận tốc riêng của động tử, v_{dn} là vận tốc của dòng nước (hoặc gió) thì :

$$v_x = v_r + v_{dn} ;$$
$$v_n = v_r - v_{dn}.$$

b) Toán năng suất lao động : có ba đại lượng là năng suất lao động (khối lượng công việc hoàn thành trong một đơn vị thời gian) ; khối lượng công việc ; thời gian hoàn thành công việc. Ba đại lượng đó quan hệ như sau :

Khối lượng = Năng suất × Thời gian ;

$$\text{Năng suất} = \frac{\text{Khối lượng}}{\text{Thời gian}} ; \quad \text{Thời gian} = \frac{\text{Khối lượng}}{\text{Năng suất}}.$$

c) Toán về công việc đồng thời (làm chung hoặc riêng một công việc) : Đây là dạng đặc biệt của toán năng suất lao động. Khối lượng công việc ở đây không được cho dưới dạng cụ thể .Vì thế ta có thể quy ước công việc cần hoàn thành là 1. Tùy nội dung từng bài toán cụ thể mà ta quy ước một đại lượng nào đó làm đơn vị. Khi ấy đơn vị của năng suất là :

1 công việc/ 1 đơn vị thời gian.

Trong các bài toán này, ta thường gặp vấn đề làm chung, làm riêng, một điều cần lưu ý là : Năng suất lao động chung bằng tổng năng suất lao động riêng của từng cá thể.

d) Toán có nội dung liên quan đến cấu tạo thập phân của số.

e) Toán có nội dung liên quan đến tỉ số, tỉ số %.

f) Toán có nội dung lý, hóa, hình học .

g) Các dạng toán khác : tăng, giảm, thêm, bớt, chuyển ... các đại lượng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 11.1. Quãng đường AC gồm hai đoạn AB và BC. Đoạn BC dài hơn AB là 60km. Một ô-tô đi từ A đến B với vận tốc 50km/giờ rồi tiếp tục đi đến C với vận tốc 40km/giờ. Tính quãng đường AC biết thời gian đi trên đoạn đường AB ít hơn thời gian đi trên đoạn đường BC là 2 giờ.

Giải. Gọi quãng đường AC là x(km) ; x > 0. Do đoạn BC dài hơn AB là 60km ; tổng hai đoạn đường là x (km) nên :

– Đoạn đường AB dài $\frac{x-60}{2}$ (km), đoạn đường BC là $\frac{x+60}{2}$ (km).

– Thời gian ô-tô đi trên đoạn AB là : $\frac{x-60}{2.50}$ (h), đi trên đoạn BC là : $\frac{x+60}{2.40}$ (h).

Theo bài ra ta có phương trình : $\frac{x+60}{80} - \frac{x-60}{100} = 2.$

Giải phương trình được : x = 260

Quãng đường AC dài 260km.

Ví dụ 11.2. Một người đi ô-tô trên nửa đầu của đoạn đường AB với vận tốc 60km/giờ và trên nửa sau của đoạn đường AB với vận tốc 40km/giờ. Tính vận tốc trung bình của ô-tô trên cả đoạn đường. Sau đó tính thời gian người đó đi nửa sau của đoạn đường AB, biết thời gian đi cả đoạn đường AB là 3 giờ.

Giải. Gọi vận tốc trung bình của ô-tô trên cả đoạn đường là x (km/giờ) ; x > 0. Biểu thị nửa đoạn đường AB là a km (a > 0) thì thời gian ô-tô đi nửa đoạn đường đầu là $\frac{a}{60}$ giờ ; thời gian ô-tô đi nửa đoạn đường sau là $\frac{a}{40}$ giờ ;

Theo bài ra ta có phương trình : $\frac{a}{60} + \frac{a}{40} = \frac{2a}{x}$

Giải phương trình trên được : $\frac{1}{60} + \frac{1}{40} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 48.$

Vận tốc trung bình của ô-tô là 48km/giờ.

Quãng đường AB dài : 48. 3 = 144(km)

Thời gian đi nửa sau đoạn đường là : $\frac{72}{40}$ = 1,8 (giờ) = 1 giờ 48 phút .

Ví dụ 11.3. Đường sông xuôi từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ là 12km. Đi ca nô từ A đến B hết 4 giờ còn đi ô-tô nhanh hơn 1giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca-nô, biết vận tốc ô-tô hơn vận tốc riêng của ca-nô là 20km/giờ, vận tốc dòng nước là 2km/giờ.

Giải. Gọi vận tốc riêng của ca-nô là x (km/giờ) với x > 0, thì vận tốc khi ca-nô xuôi dòng là x + 2 (km/giờ), vận tốc của ô-tô là x + 20 (km/giờ).

Quãng đường ca nô xuôi dòng từ A đến B là : 4(x + 2) (km).

Quãng đường ô-tô đi từ A đến B là 2,5.(x + 20) (km).

Ta có phương trình : 2,5(x + 20) − 4(x + 2) = 12.

Giải phương trình được x = 20.

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 20km/giờ.

Ví dụ 11.4. Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ nhất may trong 3 ngày, tổ thứ hai may trong 5 ngày thì hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng năng suất lao động của tổ thứ nhất hơn tổ thứ hai là 10 chiếc áo / ngày. Tính năng suất lao động của mỗi tổ.

Giải. Gọi năng suất lao động của tổ thứ hai là x (chiếc áo/ngày) ; ($x \in N^*$) thì năng suất lao động của tổ thứ nhất là (x + 10) (chiếc áo / ngày).

Trong 5 ngày tổ thứ hai may được 5x (chiếc áo), trong 3 ngày tổ thứ nhất may được 3(x + 10) (chiếc áo).

Theo đầu bài ta có phương trình : 3(x + 10) + 5x = 1310.

Giải phương trình được x = 160 (thoả mãn điều kiện)

Vậy năng suất lao động của tổ thứ hai là 160 chiếc áo/ngày ; tổ thứ nhất là 170 chiếc áo/ngày.

Ví dụ 11.5. Hai đội công nhân cùng làm một công việc trong18 giờ thì xong. Nếu đội thứ nhất làm 6 giờ, đội thứ hai làm 12 giờ thì chỉ hoàn thành được 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Giải. Gọi thời gian đội thứ nhất làm riêng để hoàn thành công việc là x (giờ) (x > 0).

Trong 1 giờ hai đội làm được $\frac{1}{18}$ công việc, đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc) ; đội thứ hai làm được $\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{x}\right)$ (công việc).

Ta có phương trình : $6.\frac{1}{x} + 12.\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{x} = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow x = 36$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy nếu làm riêng thì đội thứ nhất hoàn thành công việc đó trong 36 giờ ; đội thứ hai hoàn thành công việc đó trong $1 : \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{36}\right) = 36$ (giờ).

Ví dụ 11.6. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 6 giờ thì đầy bể. Nếu để riêng vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ, sau đó đóng lại và mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 3 giờ nữa thì được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi nếu có vòi thứ ba chảy một mình sau 2 giờ được $\frac{1}{6}$ bể thì vòi thứ hai và vòi thứ ba cùng chảy vào cái bể không có nước đó trong bao lâu đầy bể ?

Giải. Gọi thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ hai là x (giờ), trong một giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x}$ bể nước, vòi thứ nhất chảy được $\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{x}\right)$ bể nước.

Ta có phương trình : $2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{x}\right) + \frac{3}{x} = \frac{2}{5}$. Giải được x = 15.

Trong một giờ vòi thứ ba chảy được $\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}$ (bể nước).

Vòi thứ hai và vòi thứ ba cùng chảy một giờ được $\frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{3}{20}$ (bể nước).

Thời gian vòi thứ hai và vòi thứ ba cùng chảy đầy bể nước là $1 : \frac{3}{20} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ (giờ).

Đáp số : 6 giờ 40 phút.

Ví dụ 11.7. Một số có bốn chữ số có chữ số hàng đơn vị là 2. Nếu chuyển chữ số 2 lên đầu thì được số mới lớn hơn số ban đầu là 189. Tìm số đó .

Giải. Gọi số có ba chữ số đứng trước chữ số 2 là x ($x \in \mathbb{N}$; $100 \le x < 1000$)

Số phải tìm là $\overline{x2}$. Chuyển 2 lên đầu được số $\overline{2x}$.

Ta có phương trình $\overline{2x} - \overline{x2} = 189 \Leftrightarrow 2000 + x - 10x - 2 = 189$

$\Leftrightarrow 9x = 1809 \Leftrightarrow x = 201$.

Số phải tìm là 2012.

Ví dụ 11.8. Năm trước tỉ số thóc thu hoạch được giữa thửa ruộng thứ nhất và thứ hai là $\frac{4}{5}$. Năm nay thửa thứ nhất thu hoạch tăng 10% ; thửa thứ hai thu hoạch tăng 20% nên số thóc thu hoạch của cả hai thửa tăng là là 140 kg. Tính số thóc thu hoạch của mỗi thửa năm trước.

Giải. Gọi số thóc thu hoạch năm trước của thửa thứ hai là x (kg)(x > 0) thì số thóc thu hoạch của thửa thứ nhất là $\frac{4}{5}$ x (kg). Năm nay thửa thứ nhất thu hoạch tăng được $10\%.\frac{4}{5}x$ (kg) ; thửa thứ hai thu hoạch tăng được 20%.x (kg).

Theo bài ra ta có phương trình : $10\%.\frac{4}{5}x + 20\%.x = 140 \Leftrightarrow x = 500$.

Vậy năm trước : – Thửa thứ nhất thu hoạch được 400kg thóc.

– Thửa thứ hai thu hoạch được 500kg thóc .

Ví dụ 11.9. Tổng của bốn số là 720. Biết rằng lấy số thứ nhất cộng 5, số thứ hai trừ 5 ; số thứ ba nhân 5 và số thứ tư chia 5 thì đều có kết quả bằng nhau. Tìm bốn số đó .

Giải. Gọi kết quả sau khi biến đổi của bốn số là x thì :

Số thứ nhất là x – 5, số thứ hai là x + 5, số thứ ba là x : 5, số thứ tư là 5x.

Ta có phương trình (x – 5) + (x + 5) + x :5 + 5x = 720.

Giải phương trình được x = 100.

Vậy : Số thứ nhất là 95 ; số thứ hai : 105 ; số thứ ba : 20 ; số thứ tư : 500.

Ví dụ 11.10. Một hội trường có 500 ghế ngồi, người ta xếp chúng thành các dãy có số ghế như nhau. Nếu mỗi dãy thêm 3 ghế và bớt đi 3 dãy thì số ghế trong hội trường vẫn phải bổ sung thêm 6 chiếc. Hỏi lúc đầu người ta định xếp bao nhiêu dãy ghế ?

Giải. Gọi x là số dãy ghế trong hội trường lúc đầu($x \in \mathbb{N}$, x > 3), thì số dãy ghế lúc sau là x – 3.

Số ghế ở mỗi dãy lúc đầu là $\frac{500}{x}$ (chiếc).

Số ghế ở mỗi dãy lúc sau là $\frac{500+6}{x-3} = \frac{506}{x-3}$ (chiếc).

Theo bài ra ta có phương trình : $\frac{500}{x} + 3 = \frac{506}{x-3} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 500 = 0.$

Giải phương trình : $x^2 - 5x - 500 = 0 \Leftrightarrow (x + 20)(x - 25) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 20 = 0 \\ x - 25 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -20 \\ x = 25. \end{array}\right.$$

Ta được x = 25 thoả mãn điều kiện. Vậy số dãy ghế ban đầu xếp là 25 dãy.

Ví dụ 11.11. Một cửa hàng bán một số mét vải : Ngày thứ nhất bán 20m và $\frac{1}{10}$ phần còn lại, ngày thứ hai bán 40m và $\frac{1}{10}$ phần còn lại, ngày thứ ba bán 60m và $\frac{1}{10}$ phần còn lại.

Cứ bán như vậy đến ngày cuối cùng thì hết số mét vải cần bán và số vải bán mỗi ngày là bằng nhau. Tính số ngày bán và toàn bộ số mét vải đem bán.

Giải. *Cách 1 :* Gọi tổng số mét vải đem bán là x (m) với x > 0.

Ngày thứ nhất bán số mét vải là $20 + \frac{1}{10}(x - 20) = \frac{1}{10}x + 18.$

Phần số mét vải còn lại sau ngày bán thứ nhất là : $x - \left(\frac{1}{10}x + 18\right) = \frac{9}{10}x - 18.$

Ngày thứ hai bán số mét vải là $40 + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}x - 18 - 40\right) = \frac{9}{100}x + \frac{342}{10}.$

Do số mét vải bán mỗi ngày bằng nhau nên ta có phương trình :

$$\frac{1}{10}x + 18 = \frac{9}{100}x + \frac{342}{10}.$$

Giải phương trình được : x = 1620.

Số mét vải bán một ngày là 180 m. Số ngày bán là 1620 : 180 = 9 (ngày).

Vậy số ngày bán là 9 ngày và toàn bộ số mét vải đem bán là 1620 m vải .

Cách 2 : Gọi số ngày bán là y (y > 1). Do cuối cùng bán hết nên ngày cuối cùng bán được 20y + 0 (m) vải và số vải bán mỗi ngày bằng nhau nên mỗi ngày bán là 20y (m) vải. Toàn bộ số vải bán là $20y^2$.

Số mét vải bán ngày thứ nhất là $20 + \frac{20y^2 - 20}{10} = 20 + 2y^2 - 2.$

Ta có $$20y = 20 + 2y^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow 10(y - 1) = y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 10(y - 1) = (y + 1)(y - 1).$$

Do $y > 1$ nên $y + 1 = 10 \Leftrightarrow y = 9$.

Vậy số ngày bán là 9 ngày. Toàn bộ số vải bán là $20.\ 9^2 = 1620$ (m vải).

III. BÀI TẬP

11.1. Quãng đường AB dài 30km. Lúc 7 giờ một người đi xe đạp từ A để đến B. Đến 8 giờ một người đi xe máy đi từ A và đến B sớm hơn xe đạp là 20 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng vận tốc của xe máy gấp 3 lần vận tốc xe đạp.

11.2. Một người đi xe đạp, một người đi xe máy, một người đi ô-tô khởi hành từ A đến B theo thứ tự lúc 6 giờ, 7 giờ, 8 giờ và vận tốc 15km/giờ, 35km/giờ, 50km/giờ. Hỏi lúc mấy giờ thì ô-tô cách đều xe đạp và xe máy .

11.3. Một ô-tô chuyển động đều trên một quãng đường gồm một đoạn đường bằng và một đoạn lên dốc. Vận tốc trên đoạn đường bằng gấp đôi đoạn lên dốc. Biết rằng ô-tô đó đi 10km trên đường bằng hết 12 phút ; đoạn lên dốc ngắn hơn đoạn đường bằng là 100km và thời gian để ô-tô đó đi cả quãng đường là 2 giờ 18 phút. Tính chiều dài quãng đường ô-tô đã đi.

11.4. Một ca-nô xuôi một dòng sông hết 2 giờ 30 phút và ngược dòng sông đó hết 3giờ15phút. Tìm vận tốc riêng của ca-nô, biết rằng một đám bèo thả trôi trên dòng sông15 phút trôi được 750m.

11.5. Ba xe ô-tô cùng khởi hành từ A để đi đến B. Vận tốc xe thứ hai nhỏ hơn vận tốc xe thứ nhất là 10km/giờ và lớn hơn vận tốc xe thứ ba là 10km/giờ. Xe thứ hai đến B sau xe thứ nhất là 30 phút và trước xe thứ ba là 45 phút. Tìm vận tốc mỗi xe, quãng đường AB và mỗi xe đi hết bao nhiêu thời gian.

11.6. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất phải làm 900 sản phẩm. Do cải tiến kỹ thuật nên tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10%so với kế hoạch. Vì vậy hai tổ vượt mức được 110 sản phẩm. Hỏi mỗi tổ đã sản xuất được bao nhiêu sản phẩm ?

11.7. Một tổ công nhân theo kế hoạch phải làm 200 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kỹ thuật nên khi thực hiện năng suất của tổ đã vượt năng suất dự định là 5 sản phẩm/ngày, do đó chẳng những tổ hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày mà còn làm thêm được 10 sản phẩm nữa. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu sản phẩm ?

11.8. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể sau 4 giờ thì bể đầy. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ, sau đó vòi thứ hai chảy tiếp trong 3 giờ thì đầy $\frac{7}{12}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể ?

11.9. Một bể nước có hai vòi chảy vào, vòi thứ hai chảy một mình sau 6 giờ thì đầy bể. Ở đáy bể có một vòi để tháo nước ra. Nếu bể đầy mở vòi sau 30 giờ thì bể cạn. Lúc đầu bể cạn, người ta quên khóa vòi ở đáy bể. Người ta mở vòi thứ nhất sau 2 giờ, rồi mở tiếp vòi thứ hai thì sau 2 giờ nữa thì bể đầy. Hỏi vòi thứ nhất chảy một mình sau bao lâu thì đầy bể ?

11.10. Một bể nước có hai vòi chảy vào và một vòi chảy ra ở $\frac{1}{3}$ bể từ đáy. Người ta cho vòi thứ nhất chảy vào sau 2 giờ thì nước đầy $\frac{1}{3}$ bể. Sau đó cả ba vòi cùng chảy thì sau 3giờ 20 phút bể đầy. Hỏi nếu vòi chảy vào thứ hai chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể, biết rằng lượng nước vòi chảy ra trong một giờ bằng nửa lượng nước vòi thứ hai chảy vào trong một giờ..

11.11. Hai đội công nhân theo kế hoạch nếu cùng sửa một con đường sau 12 giờ thì xong. Khi thực hiện hai đội làm chung trong 4 giờ, sau đó đội I phải chuyển sang làm công việc khác. Đội II tiếp tục làm sau 13 giờ 20 phút nữa mới hoàn thành công việc. Hỏi nếu làm một mình thì đội II sau bao lâu sửa xong con đường ?

11.12. Một số tự nhiên có hai chữ số, chữ số hàng đơn vị gấp ba chữ số hàng chục. Nếu đổi chỗ hai chữ số, ta được số mới lớn hơn số cũ 54 đơn vị. Tìm số đã cho ?

11.13. Tổng của chữ số hàng trăm và hàng đơn vị của một số có ba chữ số là 14. Nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu là 396. Tìm số đó biết rằng chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị là 1 đơn vị.

11.14. Tìm một số tự nhiên có sáu chữ số có chữ số đầu tiên và cuối cùng đều là 9, biết rằng nếu xóa hai chữ số 9 đó thì số có bốn chữ số còn lại giảm đi 109 lần so với số ban đầu.

11.15. 100 con vừa gà, vừa chó, vừa thỏ có 350 chân. Biết số chó gấp 4 lần số thỏ. Hỏi có bao nhiêu con mỗi loại ?

11.16. Chu vi một thửa vườn hình chữ nhật là 200m. Nếu tăng chiều dài thêm 10m và bớt chiều rộng đi 5m thì diện tích tăng thêm là $50m^2$. Tính kích thước của thửa sau khi thay đổi.

11.17. Tính tuổi mẹ và tuổi con hiện nay, biết rằng trước đây 5 năm tuổi mẹ gấp 6 tuổi con, sau đây 15 năm tuổi mẹ gấp đôi tuổi con.

11.18. Hòa 400 gam dung dịch NaCl loại I với 600 gam dung dịch NaCl loại II được một dung dịch NaCl có nồng độ phần trăm là 27%. Tính nồng độ phần trăm của mỗi dung dịch NaCl loại I và II, biết rằng nồng độ phần trăm dung dịch NaCl loại II ít hơn nồng độ phần trăm dung dịch NaCl loại I là 5%.

11.19. Một vật là hợp kim của đồng và kẽm có khối lượng 505g và thể tích là $64cm^3$. Tính xem trong hợp kim đó có bao nhiêu gam đồng và bao nhiêu gam kẽm? Biết rằng 178g đồng có thể tích là $20cm^3$ và bằng nửa thể tích của 280 g kẽm.

11. 20. Tìm nhiệt độ sau cùng của nước khi pha 6kg nước nóng ở nhiệt độ 95^0 với 4kg nước ở 25^0 (bỏ qua sự mất nhiệt).

11.21. Hai nông dân đem cam ra chợ bán với tổng số cam của hai người là 200 quả. Số cam của hai người không bằng nhau, nhưng hai người bán được một số tiền bằng nhau. Một người nói với người kia : "Nếu số cam của tôi bằng số cam của anh thì tôi bán được 720000 đồng". Người kia nói : "Nếu số cam của tôi bằng số cam của chị thì tôi chỉ bán được 320000đồng thôi". Hỏi mỗi người có bao nhiêu cam và giá bán mỗi quả cam của mỗi người là bao nhiêu ?

11.22. Đầu xuân mới, nhà trường phát động Tết trồng cây. Tổng số cây trồng được tính ra như sau :

– Lớp thứ nhất trồng 9 cây và $\frac{1}{9}$ số cây còn lại.

– Tiếp theo lớp thứ hai trồng 18 cây và $\frac{1}{9}$ số cây còn lại.

– Tiếp theo lớp thứ ba trồng 27 cây và $\frac{1}{9}$ số cây còn lại.

Cứ như vậy cho đến lớp cuối cùng thì vừa hết và số cây trồng của các lớp bằng nhau. Hỏi trường đó có bao nhiêu lớp và tổng số cây trồng được là bao nhiêu ?

Chương IV BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 12
BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa :** Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$; $a \geq b$; $a \leq b$) gọi là bất đẳng thức.

2. **Tính chất :**

a) $a > b \Leftrightarrow b < a$.

b) $a > b$; $b > c \Rightarrow a > c$.

c) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

d) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ nếu $c > 0$;

$a > b \Leftrightarrow ac < bc$ nếu $c < 0$;

$a > b \Rightarrow ac = bc$ nếu $c = 0$.

e) Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều.

f) Trừ từng vế của hai bất đẳng thức ngược chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất.

g) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ $(n \in \mathbb{N})$

$|a| > |b| \Leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}$;

$a > b \Leftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$.

h) Với $m > n > 0$, ta có : $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$; $a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$

$0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$.

i) Nếu $ab > 0$ và $a > b$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

3. **Các phương pháp chứng minh A > B** (A < B tương tự) :

a) Dùng định nghĩa : Chứng minh $A - B > 0$.

b) Biến đổi tương đương : $A > B \Leftrightarrow A_1 > B_1 \Leftrightarrow A_2 > B_2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow A_n > B_n$.

Nếu $A_n > B_n$ đúng thì $A > B$ đúng.

c) Phản chứng : Giả sử $A \le B$ dẫn tới một điều vô lý. Vậy $A > B$

d) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học (xem chuyên đề 18) :

+ Bước 1 : Chứng minh bất đẳng thức đúng với số tự nhiên $n = n_0$.

+ Bước 2 : Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \ge n_0$) ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Sau đó kết luận bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$.

e) Phương pháp tổng hợp :

+ Sử dụng tính chất và các hằng bất đẳng thức.

+ Sử dụng tính chất bắc cầu (làm trội) : Chứng minh $A > C$; $C > B \Rightarrow A > B$.

4. Một số hằng bất đẳng thức :

a) $a^2 \ge 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$;

b) $|a| \ge a$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a \ge 0$;

c) Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối (GTTĐ) :

* $|a + b| \le |a| + |b|$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \ge 0$).

* $|a - b| \ge |a| - |b|$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b(a - b) \ge 0$.

d) Bất đẳng thức tam giác : Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác :

$$a + b > c \; ; \; a - b < c$$

e) Bất đẳng thức Cauchy[1] : Với hai số không âm a, b ta có : $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Với n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), ta có $\left(\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n \ge a_1 a_2 ... a_n$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Vài dạng cụ thể hay gặp :

$$a^2 + b^2 \ge 2ab \; ; \; (a + b)^2 \ge 4ab \; ; \; ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

f) Bất đẳng thức Bunyakovsky[2] : Với hai bộ n số $(a_1, a_2, ... ; a_n)$; $(b_1, b_2, ..., b_n)$, ta có :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right).$$

---

1) Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), nhà toán học Pháp.

2) Victor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 – 1889), nhà toán học Nga.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \exists t$ để $a_i = tb_i$ $(i = \overline{1,n})$.

Nếu $b_i \neq 0$ $(i = \overline{1,n})$ thì dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 12.1. a) Chứng minh rằng với mọi a, b, ta có $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.

b) Chứng minh rằng tổng của một số dương với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2.

Áp dụng chứng minh rằng $ab + cd \geq 2$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$, với a, b, c, d là các số dương thoả mãn $abcd = 1$.

c) Cho $a + b > 100$, chứng minh rằng $a^2 + b^2 > 5000$.

Giải. a) *Cách 1.* (Biến đổi tương đương) : $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (hiển nhiên đúng).}$$

Cách 2. (Xét hiệu) : $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \dfrac{(a-b)^2}{4} \geq 0$

nên $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.

Cách 3. (Phản chứng) : Giả sử $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 < ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 4ab$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Rightarrow (a-b)^2 < 0, \text{ vô lý. Vậy } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab.$$

Cách 4. (Tổng hợp) : Ta có $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab.$$

b) Gọi số dương đó là x, nghịch đảo của nó là $\dfrac{1}{x}$. Ta chứng minh $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Thật vậy $x + \dfrac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ đúng.

Áp dụng : Do a, b, c, d > 0 và $abcd = 1$ nên

$$cd = \frac{1}{ab} \Leftrightarrow ab + cd = ab + \frac{1}{ab} = x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ (với } ab = x).$$

Mặt khác $a^2 + b^2 \geq 2ab$ và $c^2 + d^2 \geq 2cd$ nên $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ab + cd) \geq 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

c) $a^2 + 2ab + b^2 > 10000$ và $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) > 10000 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 12.2. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với mọi a, b, c ;

b) $a(a - b) + b(b - c) + c(c - a) \geq 0$ với mọi a, b, c ;

c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ với $a + b + c = 1$.

Giải. a) Ta có :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab;$$
$$b^2 + c^2 \geq 2bc;$$
$$c^2 + a^2 \geq 2ac.$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên, ta được : $2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) Có thể dùng cả bốn cách chứng minh. Sau đây là một cách :

$\forall a; b; c$ ta có $a(a - b) + b(b - c) + c(c - a) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 - bc + c^2 - ca \geq 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2bc + 2c^2 - 2ca \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ đúng do $(a - b)^2 \geq 0$; $(b - c)^2 \geq 0$; $(c - a)^2 \geq 0$, suy ra đpcm. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

c) *Cách 1.* Đặt $a = \frac{1}{3} + x$; $b = \frac{1}{3} + y$; $c = \frac{1}{3} + z$. Do $a + b + c = 1$ nên $x + y + z = 0$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + x^2\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}y + y^2\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}z + z^2\right)$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} + x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1.a + 1.b + 1.c)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$ và $a + b + c = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 12.3. Với a, b, c là các số dương, chứng minh rằng :

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$; b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$;

c) Hãy tổng quát hóa bài toán và chứng minh.

Giải. a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 = 2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 4$ vì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ (theo ví dụ 12.1b) : $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nghịch đảo nhau). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b.

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$= 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right) \geq 3+2+2+2 = 9.$

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.

c) Tổng quát : Chứng minh rằng, với n số dương $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ta có

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 \ (n \geq 2 ; n \in N).$$

Chứng minh :

Ta có $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$

$= n+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\ldots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\left(\frac{a_2}{a_4}+\frac{a_4}{a_2}\right)+\ldots$

$+\left(\frac{a_2}{a_n}+\frac{a_n}{a_2}\right)+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \geq n+2(n-1)+2(n-2)+2(n-3)+\ldots+2.2+2$

$= n+2[1+2+\ldots+(n-1)] = n+2.\frac{n(n-1)}{2} = n+n^2-n = n^2.$

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

Ví dụ 12.4. Cho a ; b ; c là các số dương. Chứng minh rằng :

a) $\frac{2a}{b+c}+\frac{b+c}{2a} \geq 2$;

b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$;

c) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq \frac{15}{2}$.

Giải. a) $\frac{2a}{b+c}+\frac{b+c}{2a}\geq 2 \Leftrightarrow 4a^2+(b+c)^2-4a(b+c)\geq 0$

$\Leftrightarrow [\,2a-(b+c)\,]^2\geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $2a=b+c$.

b) Biến đổi và áp dụng ví dụ 12.3 b), ta có :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3.$$

$$=\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

c) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 2+2+2=6.$ (1)

Theo câu b): $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Chú ý : Ở câu c) của ví dụ 12.4 còn có một cách giải khác :

Đặt $A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$

Ta có $2A=\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}+2\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$

$$=\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

$$=\frac{2a}{b+c}+\frac{b+c}{2a}+\frac{2b}{c+a}+\frac{c+a}{2b}+\frac{2c}{a+b}+\frac{a+b}{2c}+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Áp dụng các bài toán đã chứng minh trên ta có :

$$2A\geq 2+2+2+\frac{3}{2}(2+2+2)=6+9=15\Rightarrow A\geq\frac{15}{2}.$$

* Ở bài này có bạn giải theo cách :

$$A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$

$$=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c+a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}\right)$$

rồi sử dụng kết quả $x+\frac{1}{x}\geq 2$ với $x>0$ để dẫn tới $A\geq 2+2+2=6$, không đúng.

Sai lầm ở chỗ nếu xét riêng từng cặp thì đúng nhưng xét đồng thời cả 3 cặp số thì dấu đẳng thức không thể xảy ra vì khi ấy $a = b + c$; $b = c + a$; $c = a + b$

$\Rightarrow a + b + c = 2(a + b + c)$, điều này vô lý.

Ví dụ 12.5. a) Chứng minh $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$ với x, y, z không âm.

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, chứng minh :

$$abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

Giải. a) Dễ dàng chứng minh $(x + y)^2 \geq 4xy$; $(y + z)^2 \geq 4yz$; $(z + x)^2 \geq 4zx$;

$\Rightarrow (x + y)^2(y + z)^2(z + x)^2 \geq 64x^2y^2z^2 \Rightarrow$ đpcm. Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

b) Đặt $b + c - a = x$; $c + a - b = y$; $a + b - c = z$ thì $x, y, z > 0$.

Ta có $x + y = 2c$; $y + z = 2a$; $z + x = 2b$.

Áp dụng câu a) ta có $2c.2a.2b \geq 8(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$.

$\Rightarrow abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$. Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 12. 6. Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

a) $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$; (1)

b) $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$. (2)

Giải. a) Không mất tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

$(1) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(c + a) - c^2(a + b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - a^2c - b^2c - b^2a - c^2a - c^2b \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2(a - b) + b^2(b - a) + c(2ab - a^2 - b^2) + c(c^2 - bc + ab - ac) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 - b^2) - c(a - b)^2 + c(c - a)(c - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b - c) + c(a - c)(b - c) \geq 0$.

Hiển nhiên đúng vì $a \geq b$; $a + b > c$; $a \geq c$; $b \geq c > 0$

b) $(2) \Leftrightarrow a(b - c)^2 - a^3 + b(c - a)^2 - b^3 + c(a + b)^2 - c^3 > 0$

$\Leftrightarrow a[(b - c)^2 - a^2] + b[(c - a)^2 - b^2] + c[(a + b)^2 - c^2] > 0$

$\Leftrightarrow a(b + a - c)(b - c - a) + b(c + b - a)(c - a - b) + c(a + b - c)(a + b + c) > 0$

$\Leftrightarrow (b + a - c)(ab - ac - a^2 - bc - b^2 + ab + ac + bc + c^2) > 0$

$\Leftrightarrow (b + a - c)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) > 0 \Leftrightarrow (b + a - c)[c^2 - (a - b)^2] > 0$

$\Leftrightarrow (b + a - c)(c + b - a)(c + a - b) > 0$.

Bất đẳng thức trên đúng vì trong tam giác có : $a + b > c$; $c + b > a$; $a + c > b$. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 12.7. Chứng minh rằng :

a) $A = \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + ... + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} < \frac{1}{15}$ với $n \in N^*$;

b) $1 < \frac{2012}{2011^2+1} + \frac{2012}{2011^2+2} + \frac{2012}{2011^2+3} + ... + \frac{2012}{2011^2+2011} < 2.$

Giải. a) Do $\frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3k+5}\right)$ $(k \in N^*)$

nên $A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + ... + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3n+5}\right) < \frac{1}{15}.$

b) Để ý rằng : $2011^2 + 2011 = 2011(2011+1) = 2011.2012.$

Đặt $S = \frac{1}{2011^2+1} + \frac{1}{2011^2+2} + \frac{1}{2011^2+3} + ... + \frac{1}{2011^2+2011}$. Ta có :

$$\frac{1}{2011.2012} < \frac{1}{2011^2+1} < \frac{1}{2011^2};$$

$$\frac{1}{2011.2012} < \frac{1}{2011^2+2} < \frac{1}{2011^2};$$

$$\frac{1}{2011.2012} < \frac{1}{2011^2+3} < \frac{1}{2011^2};...;$$

$$\frac{1}{2011.2012} = \frac{1}{2011^2+2011} < \frac{1}{2011^2}.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và nhân với 2012 ta có

$$\frac{2012.2011}{2011.2012} < 2012S < \frac{2012.2011}{2011^2} \Leftrightarrow 1 < 2012S < \frac{2012}{2011} = 1 + \frac{1}{2011} < 2.$$

Ví dụ 12.8. a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp :

– Với $n = 2$ thì $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$ đúng.

– Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \in N$, $k \geq 2$) tức là $S_k > \frac{13}{24}$.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

Thật vậy : $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + ... + \frac{1}{2k+2}.$$

Do đó $\quad S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0$

Suy ra $\quad S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}$. Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2$.

Ví dụ 12.9. Với mọi $x \in \mathbf{R}$, chứng minh rằng :

a) $|x + 1001| + |x - 1011| \geq 2012$;

b) $|x + 1945| - |x - 30| \leq 1975$.

Giải. a) Áp dụng bất đẳng thức $|a + b| \leq |a| + |b|$, ta có

$|x + 1001| + |x - 1011| = |x + 1001| + |1011 - x| \geq |x + 1001 + 1011 - x| = 2012$.

b) Áp dụng bất đẳng thức : $|a - b| \geq |a| - |b|$, ta có

$$|x + 1945| - |x - 30| \leq |x + 1945 - (x - 30)| = 1975.$$

Ví dụ 12.10. Chứng minh rằng :

a) $(x - 2)(x - 5)(x - 6)(x - 9) + 36 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi nào ?

b) $M = x^{14} - x^{11} + x^4 - x + 1 > 0, \forall x$.

Giải. a) $(x - 2)(x - 5)(x - 6)(x - 9) + 36 = (x^2 - 11x + 18)(x^2 - 11x + 30) + 36$.

Đặt $x^2 - 11x + 24 = y$, ta có $(y - 6)(y + 6) + 36 = y^2 - 36 + 36 = y^2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 3 ; x = 8$.

b) * Với $x \geq 1$ ta có $M = x^{11}(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1$.

Do $x \geq 1$ nên $x^3 \geq 1 \Rightarrow x^3 - 1 \geq 0 ; x^{11} \geq 1$, do đó $M > 0$. (1)

* Với $x < 1$ ta có $M = x^{14} + x^4(1 - x^7) + (1 - x)$.

Do $1 > x$ nên $1 > x^7$ hay $1 - x^7 > 0 ; 1 - x > 0 ; x^{14} > 0 ; x^4 > 0$ nên $M > 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

III. BÀI TẬP

12.1. Cho a, b là hai số khác 0 và $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Chứng minh rằng : a) $A \geq 2$ nếu a, b cùng dấu ; $A \leq -2$ nếu a, b khác dấu.

b) $A^2 - 3A + 2 \geq 0$.

12.2. Chứng minh rằng với mọi a, b ta có

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$.

Hãy tổng quát hoá bài toán.

12.3. Cho a.b.c $\neq 0$. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+4 \geq 3\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)$; b) $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}$.

12.4. a) Chứng minh $\dfrac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$, $\forall$ a, b ;

b) Chứng minh $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a} > 1$ với a, b, c là các số dương.

12.5. a) Cho các số dương a, b, c, d thoả mãn abcd = 1.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \geq 10$.

b) Chứng minh $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$.

12.6. Chứng minh :

a) $a^2+b^2+c^2 \geq 2ab-2ac+2bc$;

b) $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$; c) $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ với a, b, c ≥ 0.

12.7. a) Cho abc = 1 và $a^3 > 36$. Chứng minh $a^2 > 3(ab+ac+bc-b^2-c^2)$;

b) Cho $a_1+a_2+...+a_n = 1$. Chứng minh $a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2 > \dfrac{1}{n}$.

12.8. Tìm các số nguyên thoả mãn bất đẳng thức :

$$x^2+y^2+z^2+3 < xy+3y+2z$$

12.9. a) Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh rằng :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geq \frac{9}{2};$$

b) Cho x, y, z, t là các số dương. Chứng minh rằng :

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x+y+z}+\frac{1}{y+z+t}+\frac{1}{z+t+x}+\frac{1}{t+x+y}\right) \geq \frac{16}{3}.$$

c) Cho các số dương x, y, z, t. Chứng minh :

$$\frac{x}{y+z+t}+\frac{y}{z+t+x}+\frac{z}{t+x+y}+\frac{t}{x+y+z}$$
$$+\frac{y+z+t}{x}+\frac{z+t+x}{y}+\frac{t+x+y}{z}+\frac{x+y+z}{t} \geq \frac{40}{3}.$$

12.10. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có :

a) $x^4(x^2 - 2x + 2) - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$;

b) $x^8 - x^7 + x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1 > 0$;

c) $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 > 0$;

d) $(x + 4)(x + 7)(x + 8)(x + 11) + 36 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi nào ?

12.11. Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b} > 4$;

b) $a + 2b + c \geq 4(1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

12.12. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}(a + b + c)$;

b) $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \leq \dfrac{1}{2}(a + b + c)$.

12.13. a) Chứng minh rằng $|x + y| < |1 + xy|$ với $|x| < 1$; $|y| < 1$.

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số x, y, z đồng thời thoả mãn cả ba bất đẳng thức : $|y - z| > |x|$; $|z - x| > |y|$; $|x - y| > |z|$.

12.14. Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

a) $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$;

b) $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc < a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$;

c) $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 < 0$;

d) $(a + b + c)^2 \leq 9bc$ với $a \leq b \leq c$.

12.15. a) Cho a, b, c là các cạnh của tam giác, m là chu vi.

Chứng minh : $\dfrac{1}{m-2a} + \dfrac{1}{m-2b} + \dfrac{1}{m-2c} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$;

b) Cho sáu đoạn thẳng có độ dài trong khoảng 2cm đến 15cm. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được ba đoạn thẳng làm thành cạnh của một tam giác.

12.16. a) Chứng minh $A = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + ... + \dfrac{1}{2011.2013} < \dfrac{1}{2}$;

b) Chứng minh $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1} < n$ với $n \in N$ và $n > 1$;

c) Chứng minh $C = \frac{2012}{2^3} + \frac{2012}{3^3} + \frac{2012}{4^3} + ... + \frac{2012}{n^3} < 503$ với $n \in N$ và $n > 1$.

12.17. Chứng minh với mọi $n \in N^*$:

a) $D = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} < 1$;

b) $E = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ... + \frac{1}{1.2.3...n} < 2$;

d) $F = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right)...\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) < 2$.

12.18. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta có :

a) $E = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$;

b) $F = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$;

c) $G = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$.

12.19. a) Chứng minh $G = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n-1}{n!} < 1$ với $n > 1$; $n \in N$;

b) Chứng minh $H = \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + ... + \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!} < 2$ với $n \in N^*$.

12.20. a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4} ;$$

b) Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng :

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

12.21. Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác. Chứng minh :

$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Chuyên đề 13

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN
BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG TÍCH, THƯƠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Bất phương trình ẩn x : Có dạng $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) \leq B(x)$), trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là hai biểu thức chứa biến x.
2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn : Có dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$), trong đó a và b là hai số đã cho, $a \neq 0$.
3. Nghiệm của bất phương trình là giá trị của ẩn, khi thay vào bất phương trình được một khẳng định đúng. Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình là tập nghiệm của nó. Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.
4. Hai bất phương trình tương đương là hai bất phương trình có cùng tập nghiệm.
5. **Quy tắc biến đổi bất phương trình**

   a) Quy tắc chuyển vế : Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia phải đổi dấu hạng tử đó.

   b) Quy tắc nhân với một số : Khi nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số khác 0 ta phải :

   – Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương.

   – Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.
6. Phương pháp giải bất phương trình :

   a) Bất phương trình bậc nhất một ẩn : $ax + b > 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm :

$$x > -\frac{b}{a} \text{ nếu } a > 0 \text{ ; } x < -\frac{b}{a} \text{ nếu } a < 0.$$

Các bất phương trình $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$ với $a \neq 0$ giải tương tự.

b) Bất phương trình dạng tích $A(x).B(x) > 0$ (hoặc $A(x).B(x) < 0$, $A(x).B(x) \geq 0$, $A(x).B(x) \leq 0$), thương $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ $\left(\text{hoặc } \frac{A(x)}{B(x)} < 0, \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0, \frac{A(x)}{B(x)} \leq 0\right)$.

Phương pháp giải. Phân tích thành nhân tử chứa các nhị thức bậc nhất. Lập bảng xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ (xem chuyên đề 14).

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax + b$	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 13.1. Tìm giá trị nguyên của x thoả mãn cả hai bất phương trình :

$$\frac{x+12}{5}+\frac{11}{4}>\frac{3x-8}{4}\ (1) \quad \text{và} \quad \frac{25}{6}+\frac{x+4}{5}<x-\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}.\ (2)$$

Giải. Giải bất phương trình (1)

$$\frac{x+12}{5}+\frac{11}{4}>\frac{3x-8}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+12)+55>5(3x-8)$$

$$\Leftrightarrow 4x+48+55>15x-40 \Leftrightarrow 4x-15x>-40-48-55$$

$$\Leftrightarrow -11x>-143 \Leftrightarrow x<13.$$

Giải bất phương trình (2)

$$\frac{25}{6}+\frac{x+4}{5}<x-\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 125+6(x+4)<30x-15(x-1)+10(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 6x-30x+15x-10x<-125-24+15+20$$

$$\Leftrightarrow -19x<-114 \Leftrightarrow x>6.$$

Nghiệm nguyên thoả mãn cả hai bất phương trình là $x \in \{7;8;9;10;11;12\}$.

Ví dụ 13.2. Cho $A=\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+8}:\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2-4x+4}$.

Rút gọn biểu thức A rồi tìm giá trị của x để $A>0$.

Giải. ĐKXĐ : $x \neq \pm 2$

$$A=\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{(x-2)^2}{(x^2-4)(x-2)}=\frac{1}{x^2-2x+4}.$$

Do $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0\ \forall x$ nên $A>0$ với $x \neq \pm 2$.

Ví dụ 13.3. Giải các bất phương trình với a và b là hằng số :

a) $ax-a^2>3x-9$; b) $\dfrac{b^2x+1}{b}<\dfrac{5}{b}+5x$.

Giải. a) $ax-a^2>3x-9 \Leftrightarrow (a-3)x>a^2-9$

$$\Leftrightarrow (a-3)x>(a-3)(a+3). \quad (1)$$

Nếu $a>3$ thì nghiệm của bất phương trình là : $x>a+3$.

Nếu $a<3$ thì nghiệm của bất phương trình là : $x<a+3$.

Nếu $a=3$ thì (1) trở thành $0x>0$, vô nghiệm.

b) ĐKXĐ : $b \neq 0$. Ta không nên nhân hai vế với b để khử mẫu vì khi đó phải xét $b > 0$ và $b < 0$. Ta biến đổi như sau :

Ta có $\frac{b^2x+1}{b} < \frac{5}{b} + 5x \Leftrightarrow bx + \frac{1}{b} < \frac{5}{b} + 5x$

$$\Leftrightarrow bx - 5x < \frac{5}{b} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow (b-5)x < \frac{4}{b}. \qquad (2)$$

Nếu $b > 5$ thì nghiệm của bất phương trình là : $x < \frac{4}{b(b-5)}$;

Nếu $b < 5$ và $b \neq 0$ thì nghiệm của bất phương trình là : $x > \frac{4}{b(b-5)}$;

Nếu $b = 5$ thì (2) trở thành $0x < \frac{4}{5}$ nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 13.4. Tìm x sao cho : $2(3x-4) < 5x-6 < 7x-8$.

Giải. $2(3x-4) < 5x-6 < 7x-8 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8 < 5x-6 \\ 5x-6 < 7x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-5x < 8-6 \\ 5x-7x < 6-8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ -2x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ví dụ 13.5. Một bài thi trắc nghiệm gồm 20 câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được 5 điểm, nếu trả lời sai thì bị trừ 2 điểm, nếu bỏ qua không trả lời thì được 0 điểm. Bạn An được 59 điểm. Hỏi An trả lời đúng mấy câu trả lời sai mấy câu, bỏ qua không trả lời mấy câu ?

Giải

Gọi số câu An trả lời đúng là x, số câu An trả lời sai là y, số câu An bỏ qua không trả lời là z với $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x > 0$.

Ta có $\quad x + y + z = 20 \qquad (1)$

và $\quad 5x - 2y = 59. \qquad (2)$

Từ (2) ta có $\quad 5x \geq 59 \Leftrightarrow x \geq \frac{59}{5} \Leftrightarrow x \geq 11\frac{4}{5}. \qquad (3)$

Từ (2) còn suy ra x là số lẻ. $\qquad (4)$

Cũng từ (2) ta có $\quad y = \frac{5x-59}{2}$.

Từ (1) suy ra $x + y \leq 20$ nên $x + \frac{5x-59}{2} \leq 20 \Leftrightarrow 7x - 59 \leq 40 \Leftrightarrow 7x \leq 99$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{99}{7} \Leftrightarrow x \leq 14\frac{1}{7}. \qquad (5)$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên từ (3), (4), (5) suy ra $x = 13$.

Vậy : Số câu An trả lời đúng là 13, số câu An trả lời sai là $\frac{5.13 - 59}{2} = 3$, số câu An bỏ qua không trả lời là $20 - 13 - 3 = 4$.

Ví dụ 13.6. Giải bất phương trình : $(x-1945)(2013-x) > 0$.

Giải. *Phương pháp 1* : Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x - 1945 > 0\\ 2013 - x > 0\end{cases}\\ \begin{cases}x - 1945 < 0\\ 2013 - x < 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 1945\\ -x > -2013\end{cases}\\ \begin{cases}x < 1945\\ -x < -2013\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 1945\\ x < 2013\end{cases}\\ \begin{cases}x < 1945\\ x > 2013.\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{(vô lí)}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $1945 < x < 2013$.

Phương pháp 2 : Lập bảng xét dấu :

x		1945		2013	
$x - 1945$	–	0	+		+
$2013 - x$	+		+	0	–
$(x - 1945)(2013 - x)$	–	0	+	0	–

Vậy nghiệm của bất phương trình là $1945 < x < 2013$.

Ví dụ 13.7.

Giải các bất phương trình : a) $-x^2 + 6x - 5 < (x - 5)(x + 6)$; (1)

b) $x^4 + 35x^2 + 24 \geq 10x^3 + 50x$. (2)

Giải. a) (1) $\Leftrightarrow (x - 1)(5 - x) + (5 - x)(x + 6) < 0$

$\Leftrightarrow (5 - x)(2x + 5) < 0$.

Lập bảng xét dấu :

x		–2,5		5	
$5 - x$	+	0	+	0	–
$2x + 5$	–	0	+		+
$(5 - x)(2x + 5)$	–	0	+	0	–

Nghiệm của bất phương trình : $x < -2,5$ hoặc $x > 5$.

b) (2) $\Leftrightarrow x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \geq 0$.

Phân tích vế trái thành nhân tử bằng phương pháp tách, thêm bớt các hạng tử ta được kết quả :

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq 0.$$

Lập bảng xét dấu :

x		1		2		3		4	
x – 1	–	0	+		+		+		+
x – 2	–		–	0	+		+		+
x – 3	–		–		–	0	+		+
x – 4	–		–		–		–	0	+
VT	+	0	–	0	+	0	–	0	+

Nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ 2 \leq x \leq 3 \\ x \geq 4. \end{array}\right.$

Ví dụ 13.8. Giải bất phương trình : $\dfrac{-x^2 - x + 26}{x^2 - x - 12} \leq -2$ và biểu diễn nghiệm trên trục số.

Giải. ĐKXĐ : $x \neq -3$; $x \neq 4$.

$$\frac{-x^2 - x + 26}{x^2 - x - 12} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - x + 26}{x^2 - x - 12} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12} \leq 0$$

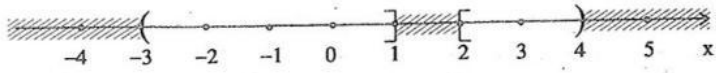
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-4)} \leq 0.$$

Lập bảng xét dấu :

x		–3		1		2		4	
x – 1	–		–	0	+		+		+
x – 2	–		–		–	0	+		+
x + 3	–	0	+		+		+		+
x – 4	–		–		–		–	0	+
VT	+	‖	–	0	+	0	–	‖	+

Nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} -3 < x \leq 1 \\ 2 \leq x < 4 \end{array}\right.$.

Biểu diễn nghiệm :



Ví dụ 13.9. Cho biểu thức

$$A = \left[\frac{3}{x+5} - \frac{3x-15}{2x-15}.\left(\frac{2x-15}{x^2-25} - 2x + 15\right)\right] : (1-x).$$

Tìm x để : a) $A > 0$; b) $A \le 2$

Giải. Rút gọn A : Với $x \ne \pm 5$; $x \ne 1$; $x \ne 7{,}5$. Ta có :

$$A = \left[\frac{3}{x+5} - \frac{3(x-5)}{(2x-15)}.\frac{(2x-15)(1-x^2+25)}{(x-5)(x+5)}\right].\frac{1}{1-x}$$

$$= \left[\frac{3}{x+5} - \frac{3(1-x^2+25)}{x+5}\right].\frac{1}{1-x} = \frac{3(x-5)(x+5)}{x+5}.\frac{1}{1-x} = \frac{3(x-5)}{1-x}.$$

a) $A > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(x-5)}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-5>0\\1-x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-5<0\\1-x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>5\\x<1\end{cases} \text{ (vô lí)}\\ \begin{cases}x<5\\x>1\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy để $A > 0$ thì $1 < x < 5$.

b) $A \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{3(x-5)}{1-x} \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{3(x-5)}{1-x} - 2 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-17}{1-x} \le 0$.

Lập bảng xét dấu :

x		1		$\frac{17}{5}$	
$5x - 17$	–		–	0	+
$1 - x$	+	0	–		–
$\frac{5x-17}{1-x}$	–	‖	+	0	–

Vậy để $A \le 2$ thì $x < 1$; $x \ge \dfrac{17}{5}$ và $x \ne 5$ và $x \ne 7{,}5$

Ví dụ 13.10. Giải bất phương trình :

a) $\dfrac{2x-100}{900}+\dfrac{2x-200}{800}>\dfrac{2x-500}{500}+\dfrac{2x-900}{100}$.

b) $\left(1+\dfrac{2}{4}\right)\left(1+\dfrac{2}{10}\right)\left(1+\dfrac{2}{18}\right)...\left(1+\dfrac{2}{108}\right)x>\dfrac{x^2}{2}+3$

Giải. a) (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2x-100}{900}-1+\dfrac{2x-200}{800}-1>\dfrac{2x-500}{500}-1+\dfrac{2x-900}{100}-1$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1000}{900}+\frac{2x-1000}{800}-\frac{2x-1000}{500}-\frac{2x-1000}{100}>0.$$

$$\Leftrightarrow (2x-1000)\left(\frac{1}{900}+\frac{1}{800}-\frac{1}{500}-\frac{1}{100}\right)>0.$$

Do $\dfrac{1}{900}+\dfrac{1}{800}-\dfrac{1}{500}-\dfrac{1}{100}<0$ nên $2x-1000<0 \Leftrightarrow x<500$.

b) Ta có $\left(1+\dfrac{2}{4}\right)\left(1+\dfrac{2}{10}\right)\left(1+\dfrac{2}{18}\right)...\left(1+\dfrac{2}{108}\right)=\dfrac{2.3}{1.4}.\dfrac{3.4}{2.5}.\dfrac{4.5}{3.6}.....\dfrac{10.11}{9.12}=\dfrac{5}{2}$.

Do đó (2) trở thành $\dfrac{5}{2}x>\dfrac{x^2}{2}+3 \Leftrightarrow x^2-5x+6<0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)<0.$$

Lập bảng xét dấu, ta có $2<x<3$.

Ví dụ 13.11. Kí hiệu $[a]$ (gọi là phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Tìm x, biết rằng : $\left[\dfrac{7x-9}{5}\right]=x-3$.

Giải. Do $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a nên nếu $[a]=n$ thì n là số nguyên và $0\le a-n<1$.

Vì thế $\left[\dfrac{7x-9}{5}\right]=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases}0\le \dfrac{7x-9}{5}-(x-3)<1\\ x\in \mathbf{Z}.\end{cases}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 0\le 7x-9-5(x-3)<5 \Leftrightarrow -6\le 2x<-1$

$\Leftrightarrow -3\le x<-0,5$.

Do $x\in \mathbf{Z}$ nên $x\in\{-1;-2;-3\}$.

III. BÀI TẬP

13.1. Giải các bất phương trình :

a) $2(3x + 1) - 4(5 - 2x) > 2(4x - 3) - 6$;

b) $9x^2 - 3(10x - 1) < (3x - 5)^2 - 21$;

c) $2(x - 2)(x + 2) - 3x + (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \geq (x^2 - 3)(x + 2)$;

d) $x^3 > 2x + 4$.

13.2. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} \geq \frac{x-3}{5} + \frac{5}{4}$;

b) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} + \frac{x+4}{5} < x - \frac{25}{6}$;

c) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4} > \frac{x-4}{5} + \frac{x-5}{6}$;

d) $\frac{2x(x^2+1) - x^2 - 4}{3} + x(x^2 - x + 1) > \frac{5x^2+5}{3}$.

13.3. Tìm giá trị của x thoả mãn cả hai bất phương trình :

a) $\frac{x+2}{5} + 5 > \frac{3(x-1)}{4} - 1$ (1)

và $\frac{x^2}{3} - (2x - 3) < \frac{(2x-1)^2}{12} + x$ (2)

b) $\frac{2x-1}{5} + 1 - \frac{2x}{3} \geq \frac{3(x+1)}{2} - \frac{7}{10}$ (3)

và $2x(x - 8) + x(x - 2) > 3(x + 3)(x - 3) + 9$. (4)

13.4. Tìm số nguyên x thoả mãn cả hai bất phương trình :

a) $2(3x - 4) > 5(6 - 7x) + 8x + 9$ (1)

và $\frac{2(x-1)}{3} < \frac{x+1}{2} + \frac{1}{3}$ (2)

b) $\frac{x-1}{4} - 1 \leq \frac{2x-3}{2} + 4$ (3)

và $4(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \geq (x^2 + 1)(4x - 2) + (2x + 1)(2x - 1) - 2x^2 - 17$. (4)

13.5. a) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $A = \frac{x-2}{6} - \frac{x-3}{3}$ có giá trị lớn hơn 2 nhưng nhỏ hơn 3.

b) Tìm x để $2(x - 1) - 3 < \frac{3x-5}{4} < \frac{2+3x}{3} + 1$.

13.6. Giải các bất phương trình sau với a, b là các hằng số :

a) $a^2x - a > b^2x - b$ và $a > 0, b > 0$; (1)

b) $\dfrac{ax - b}{a} > \dfrac{b}{a} - (a + b)x$; (2)

c) $\dfrac{x}{a^2 - 2a + 4} - \dfrac{1}{a + 2} < \dfrac{x - 1}{a^2 - 2a + 4} + \dfrac{a(3 - 2x) - 2 - a^2}{8 + a^3}$. (3)

13.7. Giải các phương trình :

a) $\left[\dfrac{2x + 5}{8}\right] = x$ (1) ; b) $\left[\dfrac{6x - 2}{9}\right] = x$ (2) ; c) $\left[\dfrac{4x + 1}{6}\right] = 3x - 1$. (3)

13.8. Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình sau là số dương :

$$2 - m = \frac{m + 2}{x - 1}.$$

13.9. Tìm giá trị của m để nghiệm của bất phương trình $5mx - 2 > 2x$:

a) Lớn hơn 3 ; b) Nhỏ hơn –3.

13.10. Giải bất phương trình : $x^2 - 3x - 1 < 9$.

13.11. Giải các bất phương trình :

a) $(19x - 5)(3x + 2)(2 - 9x) > 0$; (1)

b) $(1000 - x)(9x + 2010) > x^2 - 999x - 1000$; (2)

c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \le 0$; (3)

d) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 > 36$. (4)

13.12. Giải các bất phương trình :

a) $(x^4 - 10)(x^2 + 2)(x^2 - 2) \ge 72$; (1)

b) $x^4 + 4 \le 16(x^2 + 2x + 2) + 3x^3 + 6x^2 + 6x$; (2)

c) $x(x^3 - 1)(x^3 - 8)(x + 1) > 6(x^3 - 1)(x^3 - 8)$. (3)

13.13. Giải bất phương trình

$$\frac{26x - 3}{1931 + 80x} < 0.$$

13.14. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{1 - 3x}{x - 3} \ge 1$ (1) ; b) $\dfrac{2x}{x - 3} > 1 + \dfrac{x - 2}{x + 3}$; (2)

c) $\dfrac{1}{x - 5} < \dfrac{1}{x + 2}$ (3) ; d) $\dfrac{2x}{x - 5} - \dfrac{3}{x - 1} < 2$. (4)

13.15. Cho $A = \dfrac{x - 2014}{\left(\dfrac{x-2}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-2}\right) : \left(\dfrac{x-2}{x+1} + \dfrac{x+1}{x-2}\right)}$. Tìm x để $A \geq 0$.

13.16. Cho $B = \left(\dfrac{4x}{x+2} - \dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 8} \cdot \dfrac{4x^2 - 8x + 16}{x^2 - 4}\right) : \dfrac{16}{x^2 - x - 6}$.

Tìm x để : a) $B < 0$; b) $B \geq 2012$.

13.17. Tìm x để $1 < \dfrac{x+2}{x-5} < 2$.

13.18. a) Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình sau lớn hơn 2 :

$$\frac{m-2}{x-2} = 2 + m \ ;$$

b) Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm âm :

$$\frac{5}{x-1} = 3 - m.$$

13.19. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{1}{x^2 + 4x + 3} + \dfrac{1}{x^2 + 8x + 15} + ... + \dfrac{1}{x^2 + 20x + 99} > 0$;

b) $\left(\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{99.100}\right)(x^2 - x + 1982) < 2012\left(\dfrac{1}{51} + \dfrac{1}{52} + ... + \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{100}\right)$.

13.20. Cho $C = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{10}{12} \cdot \dfrac{18}{20} \cdot \dfrac{28}{30} \cdot \dfrac{40}{42} \cdot \dfrac{54}{56} \cdot \dfrac{70}{72}$,

$$D = \left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right)\left(1 + \frac{1}{4.6}\right)\left(1 + \frac{1}{5.7}\right)\left(1 + \frac{1}{6.8}\right)\left(1 + \frac{1}{7.9}\right)\left(1 + \frac{1}{8.10}\right).$$

a) Tìm các số nguyên x thoả mãn $C < \dfrac{x}{60} < \dfrac{1}{3}D$;

b) Giải bất phương trình : $12Cx^2 + 2x + 30 > 20Dx$.

Chuyên đề 14

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN :

1. Định nghĩa giá trị tuyệt đối (GTTĐ) : $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$

2. Định lí về dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ $(a \neq 0)$:

Ta có : $ax + b = a\left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right]$. Do đó :

Nhị thức cùng dấu với a khi $x > -\frac{b}{a}$, trái dấu với a khi $x < -\frac{b}{a}$.

Do $-\frac{b}{a}$ là nghiệm của nhị thức nên định lí trên được phát biểu :

Nhị thức $ax + b$ $(a \neq 0)$ cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm, trái dấu với a với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nó.

3. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối :

a) *Dạng 1* : $|f(x)| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < f(x) < \alpha$

$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$

b) *Dạng 2* : $|f(x)| > \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > \alpha \\ f(x) < -\alpha \end{array}\right.$

$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$

c) *Dạng 3* : $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 14.1. (Dạng đơn) Giải các phương trình :

a) $|3x - 2| = 2014$; b) $|x^2 - 2x - 1| = 14$; c) $|x - 4| = 2x - 2$.

Giải. a) *Cách 1 :*

* Nếu $3x - 2 \geq 0$, tức là $x \geq \frac{2}{3}$ thì $|3x - 2| = 3x - 2$.

Ta có : $3x - 2 = 2014 \Leftrightarrow 3x = 2016 \Leftrightarrow x = 672$ (thoả mãn).

* Nếu $3x - 2 < 0$, tức là $x < \frac{2}{3}$ thì $|3x - 2| = 2 - 3x$.

Ta có : $2 - 3x = 2014 \Leftrightarrow -3x = 2012 \Leftrightarrow x = -\frac{2012}{3}$ (thoả mãn).

Nghiệm của phương trình là : $x = -\frac{2012}{3}$ và $x = 672$.

Cách 2 : $|3x - 2| = 2014 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 2014 \\ 3x - 2 = -2014 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 672 \\ x = -\frac{2012}{3} \end{array}\right.$.

b) $\left|x^2 - 2x - 1\right| = 14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 1 = 14 \\ x^2 - 2x - 1 = -14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 15 = 0 \\ x^2 - 2x + 13 = 0. \end{array}\right.$

Phương trình $x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Phương trình $x^2 - 2x + 13 = 0$ vô nghiệm vì $x^2 - 2x + 13 = (x - 1)^2 + 12 > 0, \forall x$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$ và $x = -3$.

c) * Với $x \geq 4$ thì $\left|x - 4\right| = x - 4$.

Phương trình trở thành $x - 4 = 2x - 2 \Leftrightarrow x = -2$ (loại vì $x \geq 4$).

* Với $x < 4$ thì $\left|x - 4\right| = 4 - x$.

Phương trình trở thành $4 - x = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 2$ thoả mãn.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 2$.

Ví dụ 14.2. (Dạng lồng : $\left|\left|ax + b\right| + c\right| + d = e$)

Giải phương trình $\left|\left|2x - 3\right| - 5\right| + 7 = 20.$ (1)

Giải. (1) $\Leftrightarrow \left|\left|2x - 3\right| - 5\right| = 13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|2x - 3\right| - 5 = -13 \\ \left|2x - 3\right| - 5 = 13 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|2x - 3\right| = -8 \quad \text{(loại)} \\ \left|2x - 3\right| = 18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = -18 \\ 2x - 3 = 18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7,5 \\ x = 10,5. \end{array}\right.$

Ví dụ 14.3. (Dạng rời : $\left|ax + b\right| + \left|cx + d\right| + ... + \left|px + q\right| = m$)

a) Giải phương trình $\left|x - 2\right| + \left|2x - 5\right| + \left|4 - 4x\right| = 8.$ (1)

b) Giải phương trình $\left|x^2 - 9\right| + \left|x^2 - 4\right| = 5.$ (2)

Giải. a) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối :

x		1		2		2,5	
$\left\|x - 2\right\|$	$2 - x$		$2 - x$	0	$x - 2$		$x - 2$
$\left\|2x - 5\right\|$	$5 - 2x$		$5 - 2x$		$5 - 2x$	0	$2x - 5$
$\left\|4 - 4x\right\|$	$4 - 4x$	0	$4x - 4$		$4x - 4$		$4x - 4$
Vế trái	$11 - 7x$		$x + 3$		$3x - 1$		$7x - 11$

Vậy : + Với $x < 1$ thì $11 - 7x = 8 \quad \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$.

+ Với $1 \le x \le 2$ thì $x + 3 = 8 \Leftrightarrow x = 5$ (loại).

+ Với $2 < x \le 2,5$ thì $3x - 1 = 8 \Leftrightarrow x = 3$ (loại).

+ Với $x > 2,5$ thì $7x - 11 = 8 \quad \Leftrightarrow x = 2\frac{5}{7}$.

Nghiệm của phương trình : $x = \frac{3}{7}$ và $x = 2\frac{5}{7}$.

b) Lập bảng :

x^2		4		9	
$\lvert x^2 - 9\rvert$	$9 - x^2$		$9 - x^2$	0	$x^2 - 9$
$\lvert x^2 - 4\rvert$	$4 - x^2$	0	$x^2 - 4$		$x^2 - 4$
Vế trái	$13 - 2x^2$		5		$2x^2 - 13$

Với $x^2 \le 4$, ta có $13 - 2x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4$.

Với $4 < x^2 < 9$, ta có $0x^2 + 5 = 5$ đúng với mọi x thoả mãn điều kiện.

Với $x^2 \ge 9$, ta có $2x^2 - 13 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9$.

Vậy ta có : $4 \le x^2 \le 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x \le 3 \\ -3 \le x \le -2 \end{array}\right.$.

Ví dụ 14.4. (Dạng hỗn hợp $\lVert ax + b\rvert + c\rvert + \lvert dx + e\rvert + ... + \lvert mx + n\rvert = p$)

Giải phương trình $\lVert 4x - 2\rvert - 3\rvert - \lvert x - 5\rvert = 1$. (1)

Giải. (1) $\Leftrightarrow \lVert 4x - 2\rvert - 3\rvert = \lvert x - 5\rvert + 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lvert 4x - 2\rvert - 3 = 1 + \lvert x - 5\rvert \\ \lvert 4x - 2\rvert - 3 = -1 - \lvert x - 5\rvert \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lvert 4x - 2\rvert - \lvert x - 5\rvert = 4 \\ \lvert 4x - 2\rvert + \lvert x - 5\rvert = 2. \end{array}\right.$$

a) Trường hợp $\lvert 4x - 2\rvert - \lvert x - 5\rvert = 4$, lập bảng xét giá trị tuyệt đối và giải như ví dụ 14.3, ta được $x = \frac{-7}{3}$ và $x = \frac{11}{5}$.

b) Trường hợp $\lvert 4x - 2\rvert + \lvert x - 5\rvert = 2$, lập bảng xét giá trị tuyệt đối và giải như ví dụ 14.3 : vô nghiệm.

Ví dụ 14.5. (Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối dạng $|f(x)| < \alpha$; $|f(x)| > \alpha$ và $|f(x)| < g(x)$; $|f(x)| > g(x)$).

Giải các bất phương trình :

a) $|2x - 5| < 8$ (1) ; b) $5|2x - 1| < 3x + 1$; (2)

c) $|2x - 5| > 7$ (3) ; d) $\left|\dfrac{x-7}{2x+1}\right| > 2.$ (4)

Giải. a) (1) $\Leftrightarrow -8 < 2x - 5 < 8 \Leftrightarrow -8 + 5 < 2x < 8 + 5$

$$\Leftrightarrow -3 < 2x < 13 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2}.$$

b) *Cách 1*. Ta có $|2x - 1| = 2x - 1$ nếu $x \geq \dfrac{1}{2}$

$$|2x - 1| = 1 - 2x \text{ nếu } x < \frac{1}{2}.$$

Vì thế : Nếu $x \geq \dfrac{1}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow 5(2x - 1) < 3x + 1 \Leftrightarrow 10x - 5 < 3x + 1$

$$\Leftrightarrow 7x < 6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{7}. \text{ Vậy } \frac{1}{2} \leq x < \frac{6}{7}.$$

Nếu $x < \dfrac{1}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow 5(1 - 2x) < 3x + 1 \Leftrightarrow 5 - 10x < 3x + 1$

$$\Leftrightarrow -13x < -4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{13}. \text{ Vậy } \frac{4}{13} < x < \frac{1}{2}.$$

Kết hợp ta được nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{4}{13} < x < \dfrac{6}{7}$.

Cách 2. Ta có với $x > -\dfrac{1}{3}$ thì $5|2x - 1| < 3x + 1 \Leftrightarrow -3x - 1 < 10x - 5 < 3x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 5 < 3x + 1 \\ 10x - 5 > -3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x < 6 \\ 13x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{6}{7} \\ x > \dfrac{4}{13}. \end{cases}$$

Nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{4}{13} < x < \dfrac{6}{7}$.

c) $|2x - 5| > 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 5 > 7 \\ 2x - 5 < -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x > 12 \\ 2x < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 6 \\ x < -1. \end{array}\right.$

d) Với $x \neq -\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{x-7}{2x+1}\right| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x-7}{2x+1} > 2 \\ \frac{x-7}{2x+1} < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x-7}{2x+1} - 2 > 0 \\ \frac{x-7}{2x+1} + 2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{3x+9}{2x+1} < 0 & (*) \\ \frac{5x-5}{2x+1} < 0 & (**) \end{array}\right.$$

Giải (*) ta được $-3 < x < -\frac{1}{2}$. Giải (**) ta được $-\frac{1}{2} < x < 1$.

Hợp nghiệm được $-3 < x < 1$ và $x \neq -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 14.6. (Bất phương trình chứa nhiều dấu GTTĐ) :

Giải các bất phương trình :

a) $|x-2| > |3x+1|$; (1)

b) $|x-1| - |x| + |2x+3| > 2x + 4$. (2)

Giải. a) *Cách 1*. Bình phương hai vế ta có :

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 9x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow 8x^2 + 10x - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (4x-1)(2x+3) < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{4}.$$

Cách 2. Lập bảng xét giá trị tuyệt đối :

x		$-\frac{1}{3}$		2	
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$		$2-x$	0	$x-2$
$\lvert 3x+1\rvert$	$-3x-1$	0	$3x+1$		$3x+1$

* Với $x < -\frac{1}{3}$ thì (1) $\Leftrightarrow 2 - x > -3x - 1 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$.

* Với $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow 2 - x > 3x + 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$.

* Với $x > 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x - 2 > 3x + 1 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$ (loại)

Hợp nghiệm : $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{3}$ hoặc $-\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{4}$ ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{4}$.

b) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối :

x		$-1,5$		0		1	
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$
$\lvert x\rvert$	$-x$		$-x$	0	x		x
$\lvert 2x+3\rvert$	$-2x-3$	0	$2x+3$		$2x+3$		$2x+3$

* Với $x < -1,5$ thì (2) $\Leftrightarrow -x + 1 + x - 2x - 3 > 2x + 4$

$\Leftrightarrow -4x > 6 \Leftrightarrow x < -1,5$.

* Với $-1,5 \le x < 0$ thì (2) $\Leftrightarrow -x + 1 + x + 2x + 3 > 2x + 4$

$\Leftrightarrow 0x > 0$, vô nghiệm.

* Với $0 \le x < 1$ thì (2) $\Leftrightarrow -x + 1 - x + 2x + 3 > 2x + 4$

$\Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, loại

* Với $x \ge 1$ thì (2) $\Leftrightarrow x - 1 - x + 2x + 3 > 2x + 4$

$\Leftrightarrow 0x > 2$, vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -1,5$.

III. BÀI TẬP

14.1. Giải các phương trình :

a) $\lvert\lvert x\rvert - 2\rvert = 1$; b) $\lvert\lvert x\rvert - 1\rvert = x + 4$.

14.2. Giải các phương trình :

a) $\lvert 2x+3\rvert + \lvert 2x-3\rvert = 6$;

b) $\lvert 3x+2\rvert + \lvert 1-2x\rvert + \lvert x\rvert = 5$;

c) $\lvert 2x-8\rvert + \lvert x-3\rvert + \lvert x-2\rvert = 9$.

14.3. Giải phương trình $\lvert x^2 - 2x - 3\rvert = \lvert 2x - 5\rvert + 1$.

14.4. Giải phương trình $\lvert 3 - 2\lvert x\rvert\rvert = \lvert 2 - x\rvert - 3$. (1)

14.5. Giải phương trình $\lvert 2\lvert x-10\rvert - 5\rvert + \lvert 2\lvert x-10\rvert - 9\rvert = 10$.

14.6. Giải các bất phương trình :

a) $|x^2 - x - 2| < 4$ (1) ; b) $|x - 5| < x^2 + x + 2$; (2)

c) $|5x - 1000| \le 2010$ (3) ; d) $|2x - 1| < \frac{2x + 1}{3}$. (4)

14.7. Giải các bất phương trình :

a) $|3x - 1| > \frac{3x + 1}{2}$ (1) ; b) $\left|\frac{1}{x - 1} + 2\right| > 5$; (2)

c) $\left|\frac{x}{x - 1} - 1\right| > 2011$. (3)

14.8. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{|2x - 9|}{1 + 3 + 5 + ... + 89} \ge \frac{1}{45}$ (1) ; b) $\left|\frac{2x}{x - 1} - 1\right| > 3$; (2)

c) $\left|\frac{1}{2x - 4} - 3\right| > 5$ (3) ; d) $|x^2 - 1| \ge 1 - x$; (4)

e) $|3x + 5| > x^2 + 2x + 3$. (5)

14.9. Giải các bất phương trình :

a) $|2x + 1| < |x - 3|$; b) $|x - 2| - |x + 3| > 5 - 4x$;

c) $4|x - 1| + 3|x - 2| < 2|x - 3| + |x - 4|$; d) $|x - 1| < 2|x - 3| - 3|x - 2|$.

14.10. Giải các bất phương trình :

a) $||x - 1| - 8| + 3 > 4$; b) $||2x - 1| - 10| + 4 < 5$.

14.11. Giải các bất phương trình :

a) $|-x^2 + x - 1| \le |x^2 - 3x + 4|$ (1) ; b) $|-x^2 + 4x - 4| \ge |x^2 - 6x + 9|$. (2)

Chuyên đề 15

TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ LỚN NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Xét trong tập xác định (D) :

a) Nếu với mọi x ta có $A(x) \le A(x_0) = a$ (a là hằng số) thì ta nói a là giá trị lớn nhất của A(x) với $x = x_0$. Kí hiệu : $\max A(x) = a \Leftrightarrow x = x_0$.

b) Nếu với mọi x ta có $B(x) \ge B(x_0) = b$ (b là hằng số) thì ta nói b là giá trị nhỏ nhất của B(x) với $x = x_0$. Kí hiệu : $\min B(x) = b \Leftrightarrow x = x_0$.

c) Nếu với mọi x, y,... ta có $A(x, y, ...) \le A(x_0, y_0, ...) = a$ (a là hằng số) thì ta nói a là giá trị lớn nhất của A(x, y, ...) với $x = x_0$; $y = y_0$; ...

Kí hiệu : $\max A(x, y, ...) = a \Leftrightarrow x = x_0 ; y = y_0 ; ...$

d) Nếu với mọi x, y, ... ta có $B(x, y, ...) \ge B(x_0, y_0, ...) = b$ (b là hằng số) thì ta nói b là giá trị nhỏ nhất của B(x, y, ...) với $x = x_0$; $y = y_0$; ...

Kí hiệu : $\min B(x, y, ...) = b \Leftrightarrow x = x_0 ; y = y_0 ; ...$

2. Chứng minh $\max A(x, y, ...) = a$ (a là hằng số) :

a) $A(x, y, ...) \le a, \forall x, y, ...$

b) Có $(x_0, y_0,...)$, sao cho $A(x_0, y_0, ...) = a$

3. Chứng minh $\min B(x, y, ...) = b$ (b là hằng số) :

a) $B(x, y, ...) \ge b, \forall x, y, ...$

b) Có $(x_0, y_0, ...)$, sao cho $B(x_0, y_0, ...) = b$.

4. Một số bất đẳng thức hay dùng (xem chuyên đề 12) :

Bất đẳng thức Cauchy.

Bất đẳng thức Bunyakovski.

Bất đẳng thức GTTĐ.

Bất đẳng thức tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 15.1. (Dạng phân tích thành bình phương của tổng hiệu, đặt biến phụ)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 - 4x + 24$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = -3x^2 - 2x + 1$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $D = (x - 1)(x - 4)(x - 5)(x - 8)$.

Giải. a) $A = x^2 - 4x + 24 = x^2 - 4x + 4 + 20 = (x - 2)^2 + 20$.

Do $(x - 2)^2 \ge 0, \forall x$ nên $(x - 2)^2 + 20 \ge 20, \forall x$

Do đó $\min A = 20 \Leftrightarrow x = 2$

b) $B = -3x^2 - 2x + 1 = 1 - 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) = 1 - 3\left(x^2 + 2.x.\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{3} - 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$.

Do $-\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \le 0, \forall x \Rightarrow \frac{4}{3} - 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \le \frac{4}{3}, \forall x \Rightarrow \max B = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

c) $C = x^4 - 10x^3 + 25x^2 + x^2 - 10x + 25 + 5$

$= (x^2 - 5x)^2 + (x - 5)^2 + 5 = (x - 5)^2(x^2 + 1) + 5.$

Do $x^2 + 1 > 0, \forall x$; $(x - 5)^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow (x - 5)^2(x^2 + 1) + 5 \geq 5, \forall x$

nên min $C = 5 \Leftrightarrow x = 5$.

d) $D = (x^2 - 9x + 8)(x^2 - 9x + 20)$.

Đặt $x^2 - 9x + 14 = y$, ta có $D = (y - 6)(y + 6) = y^2 - 36 \geq -36, \forall y$.

Vậy min $D = -36 \Leftrightarrow y = 0$ hay $x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x = 7$.

Ví dụ 15.2. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A(x, y) = x^2 - 2x + 4y^2 + 4y + 2014$.

b) Tìm x, y, z để đa thức sau đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị ấy.

$$B(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y.$$

c) Tìm x, y để đa thức sau đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị ấy :

$$C(x, y) = 1892 - 2x^2 - y^2 + 2xy - 10x + 14y.$$

Giải. a) $A(x, y) = x^2 - 2x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 + 2012 = (x - 1)^2 + (2y + 1)^2 + 2012$.

Do $(x - 1)^2 \geq 0, \forall x$ và $(2y + 1)^2 \geq 0, \forall y$

nên $(x - 1)^2 + (2y + 1)^2 + 2012 \geq 2012, \forall x ; y$.

Do đó min $A(x, y) = 2012 \Leftrightarrow (x = 1 ; y = -0,5)$.

b) $B(x, y, z) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz) - 5$

$= (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x + y - z)^2 - 5 \geq -5, \forall x, y, z.$

Do đó min $B(x, y, z) = -5 \Leftrightarrow (x = 1 ; y = 2 ; z = 3)$.

c) $C(x, y) = 1945 - (x^2 - 4x + 4) + (x^2 + y^2 + 49 - 2xy + 14x - 14y)$

$= 1945 - (x - 2)^2 - (y - x - 7)^2 \leq 1945, \forall x, y$.

Do đó max $C(x, y) = 1945 \Leftrightarrow (x = 2 ; y = 9)$.

Chú ý : Ở dạng trên chúng ta sử dụng hằng đẳng thức

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Ví dụ 15.3. (Dạng toán về phân thức)

a) Tìm giá trị lớn nhất của $A = \dfrac{2010}{x^2 - 2x + 1001}$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \dfrac{20}{6x - 9x^2 - 21}$.

Giải. a) $A = \dfrac{2010}{(x - 1)^2 + 1000}$. Do $(x - 1)^2 + 1000 \geq 1000, \forall x$

nên $\dfrac{2010}{(x-1)^2+1000} \le \dfrac{2010}{1000}$, $\forall x$. Vậy max $A = \dfrac{2010}{1000} \Leftrightarrow x = 1$.

b) $B = \dfrac{-20}{(3x-1)^2+20}$. Do $(3x-1)^2 + 20 \ge 20$ nên $\dfrac{1}{(3x-1)^2+20} \le \dfrac{1}{20}$, $\forall x$

$\Rightarrow \dfrac{-20}{(3x-1)^2+20} \ge \dfrac{-20}{20} = -1$, $\forall x$. Vậy min $B = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 15.5. a) Tìm giá trị lớn nhất của $B = \dfrac{4-x^2}{x^2+1}$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \dfrac{x^2-4x-4}{x^2-4x+5}$.

Giải. a) $B = \dfrac{5-(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{5}{x^2+1} - 1$.

Do $x^2 + 1 \ge 1$, $\forall x$ nên $\dfrac{5}{x^2+1} \le 5 \Rightarrow \dfrac{5}{x^2+1} - 1 \le 5 - 1 = 4$, $\forall x$.

Vậy max $B = 4 \Leftrightarrow x = 0$.

b) $C = \dfrac{(x^2-4x+5)-9}{x^2-4x+5} = 1 - \dfrac{9}{x^2-4x+5}$. Do $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \ge 1$, $\forall x$

nên $\dfrac{1}{(x-2)^2+1} \le 1 \Rightarrow -\dfrac{9}{(x-2)^2+1} \ge -9 \Rightarrow 1 - \dfrac{9}{(x-2)^2+1} \ge 1 - 9 = -8$, $\forall x$.

Vậy min $C = -8 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 15.6. Tìm giá trị của x để :

a) Biểu thức $D = \dfrac{x^2-2x+2013}{x^2}$ $(x \ne 0)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Biểu thức $E = \dfrac{-x^2+x-10}{x^2-2x+1}$ $(x \ne 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải. a) $D = \dfrac{x^2-2x+2013}{x^2} = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2013}{x^2}$. Đặt $\dfrac{1}{x} = t$.

Ta có $D = 2013t^2 - 2t + 1 = 2013\left(t^2 - 2t.\dfrac{1}{2013} + \dfrac{1}{2013^2}\right) - \dfrac{1}{2013} + 1$

$= 2013\left(t - \dfrac{1}{2013}\right)^2 + \dfrac{2012}{2013} \ge \dfrac{2012}{2013}$, $\forall t$.

Vậy min $D = \dfrac{2012}{2013} \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2013}$ hay $x = 2013$.

b) $E = \dfrac{-(x^2-2x+1)-(x-1)-10}{(x-1)^2} = -\left(1+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{10}{(x-1)^2}\right)$. Đặt $\dfrac{1}{x-1} = t$.

Ta có $E = -(10t^2+t+1) = -10\left(t^2+2t.\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{20^2}-\dfrac{1}{400}\right)-1$

$= -10\left(t+\dfrac{1}{20}\right)^2 - \dfrac{39}{40} \le -\dfrac{39}{40}, \forall t.$

Vậy max $E = -\dfrac{39}{40} \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{20}$ hay $x = -19$.

Ví dụ 15.7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $T = \dfrac{8x+12}{x^2+4}$.

Giải. * $T = \dfrac{(x^2+8x+16)-(x^2+4)}{x^2+4} = \dfrac{(x+4)^2}{x^2+4} - 1 \ge -1, \ \forall x.$

Do đó min $T = -1 \Leftrightarrow x = -4$.

* $T = \dfrac{(4x^2+16)-(4x^2-8x+4)}{x^2+4} = 4 - \dfrac{4(x-1)^2}{x^2+4} \le 4, \ \forall x.$

Do đó max $T = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

Thí dụ 15.8. a) Chứng minh định lí : *Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau. Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

b) Chứng minh giá trị nhỏ nhất của tổng một số dương với nghịch đảo của nó là 2.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{12}{x-1} + \dfrac{x}{3}$, với $x > 1$.

d) Cho $5a + 7b = 20$ với $a, b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của tích $P = ab$.

Giải. a) Gọi hai số dương là a và b. Ta có $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Nếu $a + b = k$ không đổi thì $ab \le \dfrac{k^2}{4}$.

Vậy max $(ab) = \dfrac{k^2}{4} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{k}{2}$.

Nếu $ab = h$ không đổi. Ta có $(a + b)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a = b$.

Vậy min $(a + b) = 2\sqrt{h} \Leftrightarrow a = b$.

b) *Cách 1* : Gọi số dương là x. Ta có $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$. Do đó $\min\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Cách 2 : Áp dụng câu a) : Ta có $x.\frac{1}{x} = 1$ không đổi nên $x + \frac{1}{x}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $\min\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

c) $A = \frac{12}{x-1} + \frac{x}{3} = \frac{12}{x-1} + \frac{x-1}{3} + \frac{1}{3}$. Ta có với $x > 1$ thì $\frac{12}{x-1}$; $\frac{x-1}{3}$ là hai số dương có tích $\frac{12}{x-1}.\frac{x-1}{3} = 4$ không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \frac{12}{x-1} = \frac{x-1}{3} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 36.$$

Phương trình này có hai nghiệm là $x = 7$ và $x = -5$. Nghiệm $x = 7$ thoả mãn điều kiện đầu bài. Vậy $\min A = \frac{13}{3} \Leftrightarrow x = 7$.

d) Xét $35P = 5a.7b$ trong đó $5a + 7b = 20$ không đổi nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau, tức là $5a = 7b$.

Vậy $\max P = \frac{20}{7} \Leftrightarrow a = 2 ; b = \frac{10}{7}$.

Ví dụ 15.9. Với x, y, z > 0, tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $A = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$; b) $B = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$;

Giải. a) $A = \frac{x}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{y} = 2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$. Do $\frac{x}{y}$ và $\frac{y}{x}$ là hai số dương nghịch đảo nhau nên theo ví dụ 15.8 b) ta có $A \geq 2 + 2 = 4$.

Vậy $\min A = 4 \Leftrightarrow x = y$.

b) $B = \frac{x}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{z} = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$.

Theo ví dụ 15.8 b) ta có $B \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Vậy $\min B = 9 \Leftrightarrow x = y = z$.

Ví dụ 15.10. (Dạng các biến bị ràng buộc bởi các hệ thức)

Cho $a + b + c = 5$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^2 + b^2 + c^2$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = ab + bc + ca$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A + B.

Giải. a) *Cách 1* : a + b + c = 5. Suy ra

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 25. \quad (1)$$

Mặt khác $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$.

Do đó $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 25$

$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 25$. Vậy min $A = \frac{25}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{5}{3}$.

Cách 2 : Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski cho bộ 3 số 1, 1, 1 và a, b, c, ta có

$$(a.1 + b.1 + c.1)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2)$$

hay $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Từ đó $A \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{25}{3}$ $\forall$ a, b, c.

Vậy min $A = \frac{25}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{5}{3}$.

b) Theo câu a) ta có A + 2B = 25 và $A \geq B \Rightarrow 3B \leq A + 2B = 25$ nên

$$B \leq \frac{25}{3} \Rightarrow \max B = \frac{25}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{5}{3}.$$

c) Ta có A + 2B = 25 mà $B \leq \frac{25}{3}$ nên $A + B = A + 2B - B \geq 25 - \frac{25}{3}$

$\Rightarrow \min (A + B) = \frac{50}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{5}{3}$.

Ví dụ 15.11. (Dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |5x + 2|$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = 2 - |4 - 3x|$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = |x - 4| + |x - 3|$;

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $D = (5x - 3)^2 - 4|5x - 3| + 14$.

Giải. a) Theo định nghĩa GTTĐ ta luôn có :

$A = |5x + 2| \geq 0$; Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -0,4$.

Vậy min $A = 0 \Leftrightarrow x = -0,4$.

b) Do $-|4 - 3x| \leq 0 \Leftrightarrow B = -|4 - 3x| + 2 \leq 2$. Vậy max $B = 2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.

c) *Cách 1* : Áp dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a + b|$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

Ta có $C = |x - 4| + |x - 3| = |4 - x| + |x - 3| \geq |4 - x + x - 3| = 1$.

Vậy $C \geq 1 \Leftrightarrow (4 - x)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4$.

Do đó min $C = 1 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4$.

Cách 2 : Lập bảng xét GTTĐ trong các khoảng :

x		3		4	
$\lvert x-4\rvert$	$4-x$		$4-x$	0	$x-4$
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$	0	$x-3$		$x-3$

* Với $x < 3$. Ta có $C = 7 - 2x$. Do $x < 3$ nên $-2x > -6 \Rightarrow C = 7 - 2x > 1$. (1)

* Với $3 \le x \le 4$ thì $C = 1$. (2)

* Với $x > 4$, ta có $C = 2x - 7 > 1$ (do $x > 4$). (3)

Từ (1) ; (2) ; (3) ta có min $C = 1 \Leftrightarrow 3 \le x \le 4$.

d) Đặt $\lvert 5x-3\rvert = y$ thì

$$D = \lvert 5x-3\rvert^2 - 4\lvert 5x-3\rvert + 14 = y^2 - 4y + 4 + 10 = (y-2)^2 + 10 \ge 10.$$

Vậy min $D = 10 \Leftrightarrow y = 2$ hay $\lvert 5x-3\rvert = 2 \Leftrightarrow x = 1$; $x = \frac{1}{5}$.

III. BÀI TẬP

15.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $A(x) = 2x^2 + 8x + 5$;

b) $A(y) = (y+3)^2 + 2(y-1)^2$;

c) $A(u) = (u-1)^2 + (u-2)^2 + (u-3)^2$;

d) $A(z) = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 14$;

e) $A(x, y, z, t) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + t^2 - 8t$.

15.2. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x-2)(x-4)(x^2 - 6x + 10)$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của $Q = (1-x)(x+4)(x^2 + 3x + 4)$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $R = (x+5)(x+2)(x+1)(x-2)$;

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x(x-4)(x^2 - 4x + 6) + 109$;

e) Tìm giá trị lớn nhất của $V = 2012 - \left[(x-2013)^4 + (x-2015)^4\right]$.

15.3. Tìm giá trị lớn nhất của :

a) $B(y) = 1 + 5y - y^2$;

b) $B(z) = (z+2)^2 - (2z-1)^2$;

c) $B(x) = \dfrac{9x^2 - 12x + 14}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{100}-1\right)}$.

15.4. Với $n \in N$ và $n > 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $M = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)$;

b) $N = x_1^2 + 2^2x_2^2 + 3^2x_3^2 + ... + n^2x_n^2 - 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n)$;

c) $P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 - 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n)$.

15.5. a) Tìm x, y để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị ấy :

$$D = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6y - 10(x - y) + 32.$$

b) Tìm x, y để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị ấy :

$$E = 1983 - x^2 - 3y^2 + 2xy - 10x + 14y.$$

c) Tìm x, y để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị ấy :

$$G = x^4 - 4y(x^2 - 4y) + x^2 - 6x + 10.$$

d) Tìm x, y để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị ấy :

$$L = y^2 - 2xy + 3x^2 + 2y - 14x + 1949.$$

15.6. a) Tìm giá trị lớn nhất của $C = \dfrac{100}{25x^2 - 20x + 14}$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $D = \dfrac{30}{4x - 4x^2 - 6}$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của $E = \dfrac{1000}{x^2 + y^2 - 20(x + y) + 2210}$;

d) Tìm giá trị lớn nhất của $G = \dfrac{2012}{x^2 + (x - 2y)^2 - 2(x - 2y) - 4x + 2018}$.

15.7. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \dfrac{x^2 - 2011}{4(x^2 + 1)}$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của $D = \dfrac{2x^2 + 9}{x^2 + 4}$;

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = \dfrac{3x^2 - 8x + 13}{x^2 + 5}$;

e) Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \dfrac{5x^2 + 10x + 42}{x^2 + 2x + 7}$.

15.8. a) Tìm giá trị lớn nhất của $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2x + 1}$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $k(x) = \dfrac{5x^2 - 22x + 25}{x^2 - 4x + 4}$.

15.9. Tìm giá trị nguyên của x để :

a) $A = \dfrac{19}{5 - x}$ có giá trị lớn nhất ;

b) $B = \dfrac{x - 8}{x - 3}$ có giá trị lớn nhất ;

c) $C = \dfrac{1945 - x}{x - 1930}$ có giá trị nhỏ nhất.

15.10. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của :

a) $A = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$;

b) $B = \dfrac{4x + 1}{4x^2 + 2}$;

c) $C = \dfrac{243 - 36x}{x^2 + 81}$;

d) $D = \dfrac{4x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x + 1}$ với $x \geq 0$.

15.11. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \dfrac{(5x + 8)(2x + 5)}{x}$ với $x > 0$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \dfrac{x^2 - 5}{x + 3}$ với $x \geq 0$.

15.12. a) Tìm giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 17}$ với $x > 0$;

b) Cho $\dfrac{1}{3} < a < 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $Q = (1 - a)(3a - 1)$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của $R = (x^2 - 3x + 5)(25 - x^2 + 3x)$.

15.13. Với x, y, z, t > 0, tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $G = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$;

b) $H = (x + y + z + t)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t}\right)$.

15.14. Với $x_1, x_2, x_3, \ldots ; x_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$; $n > 1$), tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $K = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right)$;

b) $Q = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} \cdot \dfrac{x_2^2 + x_3^2}{x_2x_3} \cdot \dfrac{x_3^2 + x_4^2}{x_3x_4} \cdots \dfrac{x_{n-1}^2 + x_n^2}{x_{n-1}x_n} \cdot \dfrac{x_n^2 + x_1^2}{x_nx_1}$.

15.15. Với x, y, z, t > 0, tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $C = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$;

b) $D = \frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{x} + \frac{y}{z+x} + \frac{z+x}{y} + \frac{z}{x+y} + \frac{x+y}{z}$;

c) $E = \frac{x}{y+z+t} + \frac{y+z+t}{x} + \frac{y}{z+t+x} + \frac{z+t+x}{y} + \frac{z}{x+y+t} + \frac{x+y+t}{z} + \frac{t}{x+y+z} + \frac{x+y+z}{t}$.

15.16. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của : $D = a^2 + b^2$ với $a > 0$; $b > 0$ và $a + b = 2$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của : $E = a^3 + b^3 + ab$, biết $a + b = 1$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của : $G = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1}$ với $a > 1$; $b > 1$ và $a + b = 3$;

d) Tìm giá trị lớn nhất của : $H = ab$, biết $2a + b = 2$;

e) Cho a, b, c ≥ 0 và $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$K = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

15.17. Cho $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k$ ($k \in \mathbf{R}$; $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$).

Tìm giá trị nhỏ nhất của $D_n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2$.

15.18. Cho hai số x và y thoả mãn $2(x^2 + y^2) = 2025$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của x + y.

15.19. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $D = |x - 10| + |x - 11| + |x - 12| + |x - 13|$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = |x - 1010| + |x - 2010|$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = (3x - 5)^2 - 6|3x - 5| + 10$;

d) Tìm giá trị lớn nhất của $G = 6 - |5 - 4x|$;

e) Tìm giá trị lớn nhất của $H = \frac{1}{|2x - 3| + 4} - \frac{37}{4}$.

15.20. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $L = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$ với $a < b < c < d$;

b) $K = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + ... + |x - 2012|$.

CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

Chuyên đề 16

ĐỊNH LÍ BÉZOUT – LƯỢC ĐỒ HORNER

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lí Bézout[1)]

a) Định lí : Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a bằng giá trị của đa thức f(x) tại x = a.

Chứng minh : Gọi thương của phép chia f(x) cho x – a là Q(x).

Đa thức chia bậc một nên dư là một hằng số r.

Ta có f(x) = (x – a) Q(x) + r với mọi x.

$$f(a) = (a - a)\,Q(a) + r = 0 + r = r.$$

Vậy f(a) = r (đpcm)

Chú ý. Từ định lí Bézout ta suy ra hệ quả sau .

b) Hệ quả. Đa thức f(x) chia hết cho x – a khi và chỉ khi f(a) = 0 (hay a là nghiệm của đa thức f(x)).

c) Ứng dụng của định lí Bézout :

– Định lí Bézout giúp chúng ta tính số dư của phép chia đa thức f(x) cho x – a mà không cần thực hiện phép chia đa thức.

– Hệ quả của Định lí Bézout giúp chúng ta phân tích các đa thức bậc cao (bậc ≥ 2) thành nhân tử : Nếu f(a) = 0 thì f(x) phải chứa nhân tử (x – a).

2. Lược đồ Horner[2)]

Ngoài các phương pháp đặt tính chia đa thức, hệ số bất định, trị số riêng ta còn có thể tìm được kết quả khi chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a ; đồng

---

1) Bézout (1730 – 1783) nhà toán học Pháp.

2) Horner (1786 – 1837) nhà toán học Anh.

thời cũng tính được giá trị của đa thức f(x) tại x = a bằng lược đồ Horner (hay thuật toán Horner) như sau :

Nếu đa thức bị chia là $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$,

đa thức chia là x – a,

đa thức thương là : $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$

thì giữa các hệ số a_n ; a_{n-1} ;... ; a_1 ; a_0 với b_{n-1} ; b_{n-2} ;..., b_1 ; b_0 và hằng số a có mối quan hệ sau :

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} + a.\, b_{n-1}$$
$$b_{n-3} = a_{n-2} + a.\, b_{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_1 = a_2 + a.\, b_2$$
$$b_0 = a_1 + a.\, b_1$$
$$r = a_0 + a.\, b_0 \text{ (r là số dư).}$$

Để cho tiện ta thường lập bảng các hệ số :

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$	.....	$b_0 = a_1 + ab_1$	$r = a_0 + ab_0$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Áp dụng hệ quả định lí Bézout phân tích các đa thức (thường có các hệ số nguyên và nghiệm nguyên) thành nhân tử, ta thường làm như sau :

Bước 1 : Chọn một giá trị x = a nào đó (thường là ước của hạng tử tự do trong đa thức cần phân tích) tìm f(a).

Bước 2 : Nếu f(a) = 0 thì f(x) = (x – a).g(x). Để tìm g(x) ta dùng phép chia đa thức f(x) cho x – a, hoặc dùng lược đồ Horner, hoặc tách thêm bớt các hạng tử một cách hợp lí sao cho xuất hiện nhân tử chung x – a.

Bước 3 : Tiếp tục phân tích g(x) thành nhân tử nếu còn phân tích được.

Ví dụ 16.1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $2x^3 - 7x^2 + x + 10$.

Nhận xét : Thay x bằng các giá trị là ước của 10 (± 1 ; ± 2 ; ± 5 ;± 10) ta thấy với x = –1 thì f(–1) = –2 –7 – 1 + 10 = 0. Vậy f(x) = (x + 1). g(x). Ta tìm g(x) :

Cách 1 : Tách, thêm bớt các hạng tử :

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 10 = 2x^3 + 2x^2 - 9x^2 - 9x + 10x + 10$$
$$= 2x^2(x + 1) - 9x(x + 1) + 10(x + 1)$$
$$= (x + 1)(2x^2 - 9x + 10).$$

Phân tích tiếp $2x^2 - 9x + 10 = 2x^2 - 4x - 5x + 10 = 2x(x - 2) - 5x(x - 2)$
$= (x - 2)(2x - 5).$

Vậy $f(x) = (x + 1)(x - 2)(2x - 5)$.

Cách 2 : Dùng đặt tính chia đa thức :

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 7x^2 + x + 10 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 - 9x + 10 \\ \cline{1-1}
-9x^2 + x + 10 & \\
-\ -9x^2 - 9x \qquad & \\ \cline{1-1}
10x + 10 & \\
-\ 10x + 10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Nhận xét với $x = 2$ thì $g(2) = 0$ rồi chia tiếp $g(x) = 2x^2 - 9x + 10$ cho $x - 2$

$$\begin{array}{r|l}
2x^2 - 9x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^2 - 4x \qquad & 2x - 5 \\ \cline{1-1}
-5x + 10 & \\
-\ -5x + 10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Vậy $f(x) = (x + 1)(x - 2)(2x - 5)$.

Cách 3 : Dùng lược đồ Horner :

Hệ số của f(x)		2	−7	1	10
Hệ số của g(x)	$a = -1$	2	$-7 + (-1).2 = -9$	$1 + (-1).(-9) = 10$	$10 + (-1).10 = 0 = r$

Vậy $g(x) = 2x^2 - 9x + 10$ và $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 9x + 10)$

Nhận xét $g(2) = 0$ nên $g(x) = (x - 2).h(x)$

Dùng tiếp lược đồ Horner, ta có :

Hệ số của g(x)		2	–9	10
Hệ số của h(x)	a = 2	2	$-9 + 2.2 = -5$	$10 + 2.(-5) = 0 = r$

$$g(x) = (x - 2)(2x - 5)$$

Vậy $$f(x) = (x + 1)(x - 2)(2x - 5).$$

Ví dụ 16.2. Cho đa thức $f(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Chứng minh rằng :

a) Đa thức f(x) chia hết cho x – 1 nếu tổng các hệ số bằng 0.

b) Đa thức f(x) chia hết cho x + 1 nếu tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các chữ số của hạng tử bậc lẻ.

Giải. a) Theo định lí Bézout, số dư r của phép chia f(x) cho x – 1 là :

$$r = f(1) = a_{10} + a_9 + \ldots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Nếu $a_{10} + a_9 + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$ thì $r = 0$ tức là $f(x) \vdots (x - 1)$.

b) Theo định lí Bézout, số dư r của phép chia f(x) cho x + 1 là :

$$r = f(-1) = a_{10} - a_9 + \ldots + a_2 - a_1 + a_0.$$

Nếu $a_{10} - a_9 + \ldots + a_2 - a_1 + a_0 = 0$

hay $a_{10} + a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0 = a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1$

thì $r = 0$ tức là $f(x) \vdots (x + 1)$.

(Chú ý. Chứng minh trên đúng với mọi đa thức f(x) bậc $n \in \mathbb{N}^*$).

Ví dụ 16.3. Không dùng chia đa thức, xét xem đa thức $h(x) = x^3 - 7x + 6$

a) Có chia hết cho x + 2 hay không ?

b) Có chia hết cho x – 2 hay không ?

c) Có chia hết cho x – 4 hay không ?

Giải. a) Theo định lí Bézout, số dư r của phép chia h(x) cho x + 2 là :

$r = h(-2) = -8 + 14 + 6 = 12 \neq 0$. Vậy $h(x) \not\vdots (x + 2)$.

b) Tương tự $r = h(2) = 8 - 14 + 6 = 0$ vậy $h(x) \vdots (x - 2)$.

c) Tương tự $r = h(4) = 64 - 28 + 6 = 42 \neq 0$. Vậy $h(x) \not\vdots (x - 4)$.

Ví dụ 16.4. Tìm đa thức f(x) biết rằng khi chia cho x + 2 thì dư – 4 ; chia cho x – 3 thì dư 21 ; chia cho $x^2 - x - 6$ thì được thương là $x^2 + 4$ và còn dư.

Giải. Ta có $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ và đa thức chia bậc hai nên dư là ax + b.

Vậy $f(x) = (x - 3)(x + 2)(x^2 + 4) + ax + b$.

Theo định lí Bézout, dư trong phép chia f(x) cho x – 3 là f(3) = 21 cho x + 2 là f(–2) = 4 nên ta có : $\begin{cases} 3a + b = 21 \\ -2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6. \end{cases}$

Đa thức cần tìm là $(x + 2)(x - 3)(x^2 + 4) + 5x + 6 = x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 18$.

Ví dụ 16.5. Cho đa thức $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 1945x - 2012$ chia cho x – 3.

a) Dùng lược đồ Horner để tính số dư và viết đa thức thương ;

b) Dùng Định lí Bézout để tính số dư.

Giải. a) Dùng lược đồ Horner : f(x) = (x – 3).g(x) + r.

Hs f(x)		1	–3	2	–9	1945	– 2012
Hs g(x)	a = 3	1	–3 + 3.1 = 0	2 + 3.0 = 2	–9 + 3.2 = –3	1945 + 3.(–3) = 1936	– 2012 + 3.1936 = 3796 = r

Vậy $g(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1936$ và r = 3796.

b) Theo định lí Bézout, số dư trong phép chia f(x) cho x – 3 là

$f(3) = 3^5 - 3.3^4 + 2.3^3 - 9.3^2 + 1945.3 - 2012 = 3796$.

III. BÀI TẬP

16.1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng ba phương pháp : Tách và thêm bớt các hạng tử, chia đa thức và dùng lược đồ Horner :

a) $p(x) = x^3 + 6x^2 - 13x - 42$;

b) $q(x) = x^3 - 7x + 6$;

c) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 104x + 105$;

d) $h(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$.

16.2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng cách áp dụng định lí Bézout :

a) $A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$; b) $B = (x + y)^5 - x^5 - y^5$.

16.3. Tìm dư trong phép chia :

a) $x^{21} : (x^2 + 1)$; b) $x^{63} : (x^2 + 1)$.

16.4. Tìm dư của phép chia $f(x) = x^{67} + x^{47} + x^{27} + x^7 + x + 1$ cho :

a) $x + 1$; b) $x^2 + 1$; c) $x^2 - 1$.

16.5. Tìm giá trị của a để :

a) $f(x) = 18x^2 + a$ chia hết cho $3x + 5$;

b) $g(x) = x^4 + ax^2 + 16$ chia hết cho $x^2 + 4x + 4$;

c) $h(x) = 3x^2 + ax - 32$ chia $x + 5$ có số dư là 3.

16.6. Tìm a và b để :

a) $f(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho $x^2 - 5x + 6$;

b) $g(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + ax + b$ chia cho $x^2 + x - 2$ dư $2x + 1$;

c) $h(x) = 3x^3 + ax + b$ chia $x + 1$ dư 6 ; chia $x - 3$ dư 70.

16.7. Cho $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + k$ và $g(x) = x^2 + x - 2$. Tìm giá trị của k để f(x) chia hết cho g(x) ;

a) Bằng phương pháp sử dụng định lí Bézout ;

b) Dùng lược đồ Horner.

16.8. Tìm đa thức f(x) biết rằng khi chia cho $x - 2$ thì dư 4 ; chia cho $x + 5$ thì dư -17 ; chia cho $x^2 + 3x - 10$ thì được thương là $x^2 + 1$ và còn dư.

16.9. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho giá trị của $f(n) = n^3 + 2n^2 + 17$ chia hết cho giá trị của $g(n) = n + 3$ (bằng cả ba cách : Chia đa thức ; dùng định lí Bézout và lược đồ Horner).

16.10. Không làm phép chia, tìm các giá trị nguyên của k để :

a) Giá trị của biểu thức $f(k) = 2k^2 - k - 1$ chia hết cho giá trị của biểu thức $k - 2$;

b) Giá trị của biểu thức $g(k) = 2k^2 + 5k - 19$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2k - 3$.

16.11. Cho $f(x) = (x^2 + x - 1)^{2012} + (x^2 - x - 1)^{2012} - 2$. Chứng minh $f(x) \vdots (x^2 - 1)$.

16.12. Chứng minh rằng :

Nếu : đa thức bị chia là : $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$,

đa thức chia là : $x - a$,

đa thức thương là : $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$,

dư là : r

thì giữa các hệ số $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ với $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$; hằng số a và số dư r có mối quan hệ sau :

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$$
$$b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_1 = a_2 + ab_2$$
$$b_0 = a_1 + ab_1$$
$$r = a_0 + ab_0 \text{ (r là số dư).}$$

16.13. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để giá trị của biểu thức $f(n) = 3n^3 - n^2 - 2n + 3$ chia hết cho giá trị biểu thức $n^2 - n$.

Chuyên đề 17

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Phương trình nghiệm nguyên còn gọi là phương trình Diophantus (mang tên nhà toán học cổ Hy Lạp vào thế kỉ thứ II) là dạng một phương trình có nhiều ẩn số với tất cả các hệ số đều là số nguyên mà ta phải đi tìm nghiệm nguyên của nó. Nhiều nhà toán học đã mong muốn tìm ra công thức giải tổng quát, song chỉ nêu lên được cách giải một số dạng. Cách giải phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng, hấp dẫn và đòi hỏi học sinh khả năng phân tích, đối chiếu, dự đoán và phương pháp tư duy lôgic để lựa chọn nghiệm thích hợp. Do vậy, các bài toán này thường thấy trong các đề thi chọn học sinh giỏi. Trong chuyên đề này xin giới thiệu một vài phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên. Các phương pháp này sẽ được minh hoạ thông qua một số ví dụ cụ thể và việc phân loại các phương pháp dựa trên phạm vi kiến thức chủ yếu được vận dụng.

A. PHƯƠNG PHÁP HẠN CHẾ TẬP HỢP CHỨA NGHIỆM DỰA VÀO TÍNH CHIA HẾT

Khi giải phương trình nghiệm nguyên, việc lựa chọn nghiệm trong một tập hợp hữu hạn có ít phần tử nhất là một cách làm hữu ích để tìm ra đáp số. Dựa vào tính chất chia hết của số nguyên để tìm ra tập hợp này thông qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 17.1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$xy + 3x + 2y = 6.$$

Giải. Từ $xy + 3x + 2y = 6$ suy ra $y(x + 2) = 6 - 3x$.

Ta nhận thấy $x = -2$ không là nghiệm. Với $x \neq -2$ thì

$$y = \frac{6 - 3x}{x + 2} = -3 + \frac{12}{x + 2}.$$

Để ý rằng x, y là số nguyên nên $x + 2$ phải là ước của 12, tức là $x + 2$ thuộc tập hợp $\{-12 ; -6 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$.

Ta có bảng sau

x + 2	−12	− 6	− 4	−3	−2	−1	1	2	3	4	6	12
x	−14	− 8	− 6	−5	−4	−3	−1	0	1	2	4	10
y	− 4	− 5	− 6	−7	−9	−15	9	3	1	0	−1	−2

Vậy phương trình đã cho có 12 nghiệm (x ; y) như trên.

Nhận xét. Ta có thể làm theo cách khác như sau :

Biến đổi phương trình thành dạng $(x + 2)(y + 3) = 12$ (1). Nhận thấy x, y là các số nguyên nên $x + 2$ và $y + 3$ là ước số của 12, tức là thuộc tập hợp $\{-12, -6, -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$. Từ đó cũng tìm được 12 đáp số như trên.

Ví dụ 17.2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 - y^2 = 2011.$$

Giải. Ta nhận thấy $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2011$. (2)

Do x, y là số nguyên dương nên từ (2) suy ra $x + y > x - y$ và $x + y$, $x - y$ đều là ước nguyên dương của 2011.

Vì 2011 là số nguyên tố nên ước số nguyên dương của 2011 là 1 ; 2011. Từ đó ta có

$$\begin{cases} x + y = 2011 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1006 \\ y = 1005. \end{cases}$$

Vì vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương duy nhất

$$(x ; y) = (1006 ; 1005).$$

Nhận xét. Phương trình dạng (1), (2) đều có vế trái là một tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là một hằng số nguyên, ta gọi là phương trình ước số. Bằng cách tìm ước số của hằng số ở vế phải, ta sẽ tìm được nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

Dựa vào việc xét số dư trong phép chia hai vế của phương trình cho cùng một số mà khác nhau dẫn đến phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 17.3. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên :

a) $x^2 - y^2 = 2010$; b) $x^4 + y^4 + z^4 = 1000$.

Giải

a) Giả sử phương trình $x^2 - y^2 = 2010$ có nghiệm nguyên (x_0, y_0) thì $x_0^2 - y_0^2 = 2010$.

Ta nhận thấy x_0^2 và y_0^2 chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1, nên $x_0^2 - y_0^2$ chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 3. Còn vế phải 2010 chia cho 4 dư 2. Điều này mâu thuẫn.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b) Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên (x_0, y_0, z_0) thì

$$x_0^4 + y_0^4 + z_0^4 = 1000.$$

Ta nhận thấy x_0^4, y_0^4, z_0^4 chia cho 16 có số dư là 0 hoặc 1 nên $x_0^4 + y_0^4 + z_0^4$ chia cho 16 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 2 hoặc 3. Còn vế phải là 1000 chia cho 16 dư 8. Điều này mâu thuẫn. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Nhận xét. Cần nhớ các kết quả thường dùng

a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 ; chia cho 4 dư 0 hoặc 1 ; chia cho 9 dư 0 hoặc 1 hoặc 4 hoặc 7 ; a^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1.

$a^2 - b^2$ chia cho 4 không dư 2.

$a^4 + b^4 + c^4$ chia cho 16 không dư k với $4 \le k \le 15$.

Ví dụ 17.4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$4x + 5y = 2012.$$

Giải. *Cách 1.* Giả sử x, y là các số nguyên thoả mãn phương trình.

Ta thấy 2012 và 4x chia hết cho 4 nên $5y \vdots 4$, vì 5 và 4 nguyên tố cùng nhau nên $y \vdots 4$.

Đặt $y = 4t$ ($t \in \mathbf{Z}$), thay vào phương trình ta được

$$4x + 5.4t = 2012 \Leftrightarrow x + 5t = 503.$$

$$\Leftrightarrow x = 503 - 5t \ (t \in \mathbf{Z}).$$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên (x, y) được biểu thị bởi công thức

$$\begin{cases} x = 503 - 5t \\ y = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{Z}).$$

Cách 2. Rút x theo y, ta được $x = \frac{2012 - 5y}{4} = 503 - \frac{5y}{4}$.

Để cho x, y nguyên thì $\frac{5y}{4}$ phải nguyên, mà (5, 4) = 1 nên $\frac{y}{4}$ phải nguyên.

Đặt $\frac{y}{4} = t$ ($t \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow y = 4t$. Do đó $x = 503 - 5t$. Từ đó cũng có kết luận như cách 1.

Nhận xét. Bằng cách làm như trên ta có thể tìm được nghiệm nguyên của phương trình dạng ax + by = c (với a, b, c là các hằng số nguyên). Hơn nữa điều kiện để phương trình này có nghiệm nguyên là c phải chia hết cho ƯCLN (a ; b).

B. PHƯƠNG PHÁP HẠN CHẾ TẬP HỢP CHỨA NGHIỆM DỰA VÀO ĐIỀU KIỆN CỦA CÁC ẨN

Ví dụ 17.5. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9.$$

Giải. Ta thấy ngay vai trò x, y như nhau nên có thể giả thiết $x \le y$, do đó

$$9 = \sqrt{x} + \sqrt{y} \ge 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} \le 4,5 \Rightarrow x \le 20,25.$$

Từ $\sqrt{y} = 9 - \sqrt{x}$ ta có $y = 81 - 18\sqrt{x} + x$.

Vì x, y nguyên dương nên ta đặt $x = k^2$ (với $k \in \mathbb{N}^*$).

Do $x < 20,25$ nên $k^2 < 20,25$, suy ra k chỉ có thể nhận các giá trị 1, 2, 3, 4.

Với k = 1 thì x = 1 ; $y = (9 - \sqrt{1})^2 = 64$.

Với k = 2 thì x = 4 ; $y = (9 - \sqrt{4})^2 = 49$.

Với k = 3 thì x = 9 ; $y = (9 - \sqrt{9})^2 = 36$.

Với k = 4 thì x = 16 ; $y = (9 - \sqrt{16})^2 = 25$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương (x ; y) là

(1 ; 64), (4 ; 49), (9 ; 36), (16 ; 25), (64 ; 1), (49 ; 4), (36 ; 9), (25 ; 16).

Nhận xét. Để giảm bớt cách thử khi tìm nghiệm, ta có thể sắp thứ tự các giá trị của ẩn nếu vai trò của chúng như nhau rồi lần lượt xét giá trị của từng ẩn.

Ví dụ 17.6. Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Giải. Gọi ba số nguyên dương phải tìm là x, y, z. Ta có

$$x + y + z = xyz. \qquad (*)$$

Do các ẩn x, y, z có vai trò như nhau trong phương trình nên ta có thể giả sử $1 \le x \le y \le z$.

$$xyz = x + y + z \le 3z.$$

Chia hai vế của $xyz \le 3z$ cho số dương z ta được $xy \le 3$.

Do đó $xy \in \{1 ; 2 ; 3\}$.

∘ Với $xy = 1$ thì $x = 1, y = 1$, thay vào (*) được $z = 2 + z$ (loại).

∘ Với $xy = 2$ thì $x = 1, y = 2$, thay vào (*) được $z = 3$.

∘ Với $xy = 3$ thì $x = 1, y = 3$, thay vào (*) được $z = 2$, loại vì trái với sắp xếp $y \le z$.

Vậy ba số nguyên dương cần tìm là 1 ; 2 ; 3.

Ví dụ 17.7. Tìm nghiệm nguyện dương của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z.$$

Giải. Biến đổi phương trình thành $x + y = xyz$.

Do hai ẩn x, y có vai trò như nhau trong phương trình nên ta có thể giả sử $1 \le x \le y$. Khi đó $xyz = x + y \le y + y = 2y \Rightarrow xz \le 2$.

Vì vậy $xz \in \{1 ; 2\}$.

∘ Với $xz = 1$ thì $x = 1, z = 1$. Thay vào phương trình tìm được $\frac{1}{y} = 0$ (vô lí).

∘ Với $xz = 2$ thì $x = 1 ; z = 2$ hoặc $x = 2 ; z = 1$.

+ Với $x = 1, z = 2$ suy ra $\frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (thoả mãn).

+ Với $x = 2, z = 1$ suy ra $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 2$ (thoả mãn).

Từ đó suy ra phương trình có các nghiệm (x ; y ; z) nguyên dương là (1 ; 1 ; 2) và (2 ; 2 ; 1).

Ví dụ 17.8. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$5(x + y + z + t) + 15 = 2xyzt.$$

Giải. Do các ẩn x, y, z, t có vai trò như nhau nên không giảm tổng quát, giả sử $1 \le x \le y \le z \le t$.

Chia hai vế của phương trình cho xyzt ta được

$$2 = \frac{5}{xyz} + \frac{5}{xzt} + \frac{5}{xyt} + \frac{5}{yzt} + \frac{15}{xyzt} \le \frac{5}{x^3} + \frac{5}{x^3} + \frac{5}{x^3} + \frac{5}{x^3} + \frac{15}{x^3} = \frac{35}{x^3}.$$

Suy ra $2x^3 \le 35 \Rightarrow x \in \{1 ; 2\}$.

∘ Với $x = 1$ thì có

$$2 = \frac{5}{yz} + \frac{5}{zt} + \frac{5}{yt} + \frac{5}{yzt} + \frac{15}{yzt} \le \frac{35}{y^2}.$$

Suy ra $y^2 \le \frac{35}{2} \Rightarrow y \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

+ Với x = 1, y = 1 thì có $5(z + t) + 25 = 2zt \Leftrightarrow (2z - 5)(2t - 5) = 75$.

Do $1 \le z \le t$ nên $-3 \le 2z - 5 \le 2t - 5$, phân tích $75 = 75 . 1 = 25 . 3 = 15 . 5$.

Tìm được $(z ; t) = (3 ; 40), (4 ; 15), (5 ; 10)$.

+ Với x = 1, y = 2 thì có $5(z + t) + 30 = 4zt \Leftrightarrow (4z - 5)(4t - 5) = 145$.

Vế trái là tích của hai số chia cho 4 dư 3, còn vế phải không có ước số chia cho 4 dư 3. Vì vậy trường hợp này không xảy ra.

+ Với x = 1, y = 3 thì có $5(z + t) + 35 = 6zt \Leftrightarrow (6z - 5)(6t - 5) = 235$.

Do $3 \le z \le t$ nên $13 \le 6z - 5 \le 6t - 5$, nhưng $235 = 5.47$ không thể là tích của hai số nguyên dương lớn hơn 12, nên trường hợp này không xảy ra.

+ Với x = 1, y = 4 thì có $5(z + t) + 40 = 8zt \Leftrightarrow (8z - 5)(8t - 5) = 345$.

Do $4 \le z \le t$ nên $27 \le 8z - 5 \le 8t - 5$, nhưng $345 = 15.23$ không thể là tích của hai số nguyên dương lớn hơn 26, nên trường hợp này không xảy ra.

∘ Với x = 2 thì có $5(y + z + t) + 25 = 4yzt$. Chia hai vế cho yzt được

$$4 = \frac{5}{zt} + \frac{5}{yt} + \frac{5}{yz} + \frac{25}{yzt} \le \frac{40}{y^2}.$$

Suy ra $4 \le y^2 \le 10 \Rightarrow y \in \{2 ; 3\}$.

+ Với x = 2 ; y = 2 thì có

$$5(z + t) + 35 = 8zt \quad \Leftrightarrow (8z - 5)(8t - 5) = 305 \ (= 5.61).$$

Mà $11 \le 8z - 5 \le 8t - 5$ nên trường hợp này không xảy ra.

+ Với x = 2, y = 3 thì có

$$5(z + t) + 40 = 12zt \Leftrightarrow (12z - 5)(12t - 5) = 505 = 5.101.$$

Mà $31 \le 12z - 5 \le 12t - 5$ nên trường hợp này cũng không xảy ra.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương (x, y, z, t) là (1 ; 1 ; 3 ; 40), (1 ; 1 ; 4 ; 15), (1 ; 1 ; 5 ; 10) và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Với cách làm tương tự, ta có thể tìm được nghiệm nguyên dương của phương trình dạng

$$a(x_1 + x_2 + ... + x_n) + b = cx_1x_2 ... x_n,$$

trong đó a, b, c, n là các số nguyên dương cho trước, $n \ge 2$.

C. PHƯƠNG PHÁP GIẢN ƯỚC CHO ƯỚC SỐ CHUNG

Ví dụ 17.9. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^4 + 4y^4 = 2z^4.$$

Giải. Giả sử (x_0, y_0, z_0) là nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho. Gọi $d = \text{ƯCLN}(x_0, y_0, z_o)$, ta có $x_0 = dx_1$, $y_0 = dy_1$, $z_0 = dz_1$ trong đó x_1, y_1, z_1 nguyên tố cùng nhau. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$x_1^4 + 4y_1^4 = 2z_1^4.$$

Do $2z_1^4$, $4y_1^4$ chẵn nên x_1^4 phải chẵn, tức là $x_1 = 2x_2$ ($x_2 \in \mathbf{N}^*$).

Suy ra $16x_2^4 + 4y_1^4 = 2z_1^4 \Rightarrow 2(4x_2^4 + y_1^4) = z_1^4$.

Do đó z_1^4 phải chẵn, tức là $z_1 = 2z_2$ ($z_2 \in \mathbf{N}^*$), suy ra

$$4x_2^4 + y_1^4 = 8z_2^4.$$

Lại suy ra y_1^4 phải chẵn, tức là $y_1 = 2y_2$ ($y_2 \in \mathbf{N}^*$).

Thành thử x_1, y_1, z_1 có ước chung là 2, trái với giả thiết x_1, y_1, z_1 nguyên tố cùng nhau. Do vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 17.10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + 5y^3 = 25z^3. \quad (1)$$

Giải. Từ phương trình đã cho suy ra $x^3 \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 5$.

Đặt $x = 5x_1$ ($x_1 \in \mathbf{Z}$), thay vào (1) rồi chia hai vế cho 5 được

$$25x_1^3 + y^3 = 5z^3. \quad (2)$$

Do đó $y^3 \vdots 5 \Rightarrow y \vdots 5$. Đặt $y = 5y_1$ ($y_1 \in \mathbf{Z}$), thay vào (2) rồi chia hai vế cho 5 được $5x_1^3 + 25y_1^3 = z^3$. (3)

Do đó $z^3 \vdots 5 \Rightarrow z \vdots 5$. Đặt $z = 5z_1$ ($z_1 \in \mathbf{Z}$), thay vào (3) rồi chia hai vế cho 5 được $x_1^3 + 5y_1^3 = 25z_1^3$. (4)

Như vậy, nếu $(x ; y ; z)$ là nghiệm nguyên của (1) thì $(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{x}{5} ; \frac{y}{5} ; \frac{z}{5}\right)$ cũng là nghiệm của (1).

Lập luận tương tự như trên thì $\left(\frac{x}{5^2}, \frac{y}{5^2}, \frac{z}{5^2}\right), ..., \left(\frac{x}{5^k}, \frac{y}{5^k}, \frac{z}{5^k}\right)$ ($k \in \mathbf{N}$ tuỳ ý) cũng là nghiệm nguyên của (1).

Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$. Đây là nghiệm duy nhất của (1).

Nhận xét. Ta gọi phương pháp giải cho hai ví dụ trên là phương pháp giản ước cho ước số chung của các ẩn số, còn gọi là phương pháp lùi vô hạn. Phương pháp này thường dùng khi phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm nguyên duy nhất khi các ẩn đều bằng 0.

D. PHƯƠNG PHÁP CHỈ RA NGHIỆM NGUYÊN

Đôi khi ta chỉ ra một hoặc một vài số là nghiệm của phương trình, rồi chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác.

Ví dụ 17.11. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Giải. Chia hai vế của phương trình cho 5^x được

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Với $x = 2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ (đúng).

Với $x > 2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$ nên $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$, loại.

Với $x < 2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2$ nên $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$, loại.

Vậy phương trình có nghiệm tự nhiên duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 17.12. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} = y.$$

Giải. Điều kiện $x \geq 0$, $y \geq 0$.

- Nếu $x = 0$ thì suy ra $y = 0$. Do đó $(x ; y) = (0 ; 0)$ là nghiệm của phương trình.
- Xét $x > 0$ thì

$\sqrt{x + \sqrt{x}} = y \Rightarrow x + \sqrt{x} = y^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y^2 - x \Rightarrow \sqrt{x}$ là số nguyên dương. Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t \in \mathbb{N}^*$). Khi đó $x = t^2$ và $t^2 + t = y^2$.

Nhưng $t^2 < t^2 + t = y^2 < (t + 1)^2$. Điều này không xảy ra.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất $(x ; y) = (0 ; 0)$.

E. PHƯƠNG PHÁP KHỬ ẨN ĐỂ TÌM NGHIỆM NGUYÊN

Ở một số phương trình, ta sử dụng tính chất luỹ thừa cùng bậc của các số nguyên liên tiếp hoặc tích các số nguyên liên tiếp để đưa phương trình nghiệm nguyên cần giải về dạng phương trình khác ít ẩn hơn và quen thuộc hơn. Từ đó, dễ dàng tìm được nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

Trong phương pháp này, thường vận dụng hai nhận xét sau (trong đó a, n là các số nguyên dương ; y là số nguyên) :

1) Nếu $x^n < y^n < (x + a)^n$ thì $y^n = (x + i)^n$ với $i = 1, 2, ..., a - 1$.

2) Nếu $x(x + 1) < y(y + 1) < (x + a)(x + a + 1)$ thì $y(y + 1) = (x + i)(x + i + 1)$ với $i = 1, 2, ..., a - 1$.

Ví dụ 17.13. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^3.$$

Giải. Ta nhận thấy $1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x nên

$$x^3 < 1 + x + x^2 + x^3 = y^3. \quad (1)$$

Lại có $(x + 2)^3 - (1 + x + x^2 + x^3)$

$$= 5x^2 + 11x + 7 = 5\left(x + \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{19}{20} > 0 \text{ nên } (x + 2)^3 \geq 1 + x + x^2 + x^3.$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x^3 < y^3 < (x + 2)^3 \Rightarrow y^3 = (x + 1)^3 \text{ tức là}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 0.$$

Với $x = -1$ thì $y = 0$; với $x = 0$ thì $y = 1$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên (x ; y) là (−1 ; 0) và (0 ; 1).

Ví dụ 7.14. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0.$$

Giải. Biến đổi phương trình đã cho thành

$$y^4 = x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 \quad (1)$$

Nhận thấy $3x^2 + 4z^2 + 1 > 0$ với mọi x, z, nên $y^4 > (x^2 + z^2)^2$. (2)

Lại có $(x^2 + z^2 + 2)^2 - y^4 = x^4 + z^4 + 4 + 2x^2z^2 + 4x^2$

$$+ 4z^2 - x^4 - z^4 - 2x^2z^2 - 3x^2 - 4z^2 - 1 = x^2 + 3 > 0.$$

Suy ra $(x^2 + z^2 + 2)^2 > y^4$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $(x^2 + z^2)^2 < (y^2)^2 < (x^2 + z^2 + 2)^2$.

Do đó $y^4 = (x^2 + z^2 + 1)^2$. Kết hợp với (1) ta có $x^2 + 2z^2 + 0 \Leftrightarrow x = z = 0$. Từ đó suy ra $y = \pm 1$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên (x, y, z) là (0 ; 1 ; 0) và (0 ; −1 ; 0).

Ví dụ 7.15. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0.$$

Giải. Biến đổi phương trình đã cho thành

$$y(y-1) = x^4 + x^2 + 10. \qquad (1)$$

Ta có

$$x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 10 < (x^4 + x^2 + 10) + (6x^2 + 2).$$

Suy ra $\quad x^2(x^2+1) < y(y-1) < (x^2+3)(x^2+4)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y(y-1) = (x^2+1)(x^2+2) \\ y(y-1) = (x^2+2)(x^2+3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4 + x^2 + 10 = (x^2+1)(x^2+2) \\ x^4 + x^2 + 10 = (x^2+2)(x^2+3). \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

- Với $x^2 = 4$ thì $y(y-1) = 30 \Rightarrow y = 6$ hoặc $y = -5$.
- Với $x^2 = 1$ thì $y(y-1) = 12 \Rightarrow y = 4$ hoặc $y = -3$.

Vậy các nghiệm nguyên $(x ; y)$ của phương trình đã cho là

$(2 ; 6), (2 ; -5), (-2 ; 6), (-2 ; -5), (1 ; 4), (1 ; -3), (-1, 4), (-1 ; -3)$.

BÀI TẬP

17.1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

a) $xy - 2x - 3y + 1 = 0$; b) $x^2 - y^2 = 1999$.

17.2. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$x^2 + y^2 = 2011.$$

17.3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

a) $7x - 6y = 200$; b) $5x + 15y = 2012$.

17.4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau :

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2012}$; b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$;

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$; d) $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$.

17.5. Tìm bốn số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

17.6. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$; b) $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 2x^2y^2z^2t^2$;

c) $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$.

17.7. Tìm nghiệm tự nhiên của các phương trình sau

a) $4^x + 5^x = 9^x$; b) $2^x + 2^y + 2^z = 512$;

c) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = y$.

17.8. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$1! + 2! + ... + x! = y^2.$$

17.9. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

a) $1 + x + x^2 = y^2$; b) $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$.

17.10. Tồn tại bao nhiêu cặp số (x ; y) với x, y là các số nguyên dương không vượt quá 1000 sao cho $x^2 + y^2$ chia hết cho 121 ?

Chuyên đề 18

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUY NẠP

I. NGUYÊN LÍ QUY NẠP TOÁN HỌC

1. Phương pháp quy nạp toán học dựa trên quan sát khá trực giác sau : Giả sử rằng chúng ta phải thực hiện một nhiệm vụ bao gồm một số hữu hạn bước và các bước này là liên tiếp. Ta cũng giả sử rằng sẽ hoàn thành được bước thứ n với điều kiện hoàn thành được bước thứ n − 1. Khi đó nếu chúng ta có thể thực hiện bước đầu của nhiệm vụ (bước cơ sở) thì chúng ta sẽ luôn hoàn thành được nhiệm vụ (vì bắt đầu với bước cơ sở, chúng ta sẽ thực hiện được bước tiếp theo, bước tiếp theo nữa, ...).

Nguyên lý quy nạp toán học thường kí hiệu là PMI, là viết tắt chữ cái đầu của các từ tiếng Anh : *Principle of Mathematics Induction*. Nguyên lý được phát biểu chính xác như sau :

Giả sử ta có mệnh đề M(n) theo các số tự nhiên n thỏa mãn :

(1) $M(n_0)$ đúng với một số tự nhiên n_0 nào đó,

(2) Nếu M(n) đúng thì M(n + 1) đúng.

Khi đó mệnh đề M(n) sẽ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

(1) còn gọi là *bước cơ sở*, (2) là *bước quy nạp*.

2. Một số ví dụ

Ví dụ 18.1. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có :

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Giải. a) Với n = 1 mệnh đề đúng vì $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$.

Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Ta sẽ chứng minh rằng mệnh đề đúng với n = k + 1, tức là chứng minh

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Thật vậy : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+2)}{6} + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Theo PMI, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Với n = 1 mệnh đề đúng vì $1^3 = \left[\dfrac{1(1+1)}{2}\right]^2$.

Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$.

Ta sẽ chứng minh rằng mệnh đề đúng với n = k + 1, tức là chứng minh

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Thật vậy : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$

$$= \frac{[k(k+1)]^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Theo PMI, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 18.2. Chứng minh rằng nếu k là số tự nhiên lẻ thì $k^{2^n} - 1$ chia hết cho 2^{n+2} với mọi số nguyên dương n.

Giải. Với n = 1 thì $k^2 - 1 = (k-1)(k+1) \vdots 8 = 2^{1+2}$ (vì với k lẻ thì k – 1 và k + 1 là hai số chẵn liên tiếp).

Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là $k^{2^n} - 1 = a2^{n+2}$ với số nguyên a nào đó. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1, tức là chứng minh

$$k^{2^{n+1}} - 1 \vdots 2^{n+3}.$$

Ta có : $k^{2^{n+1}} - 1 = (k^{2^n} - 1)(k^{2^n} + 1) = a2^{n+2}(k^{2^n} + 1)$. Do k lẻ nên $k^{2^n} + 1$ chẵn và $k^{2^n} + 1 = 2b$ với số nguyên b nào đó. Do đó :

$$k^{2^{n+1}} - 1 = 2ab2^{n+2} = 2^{n+3}ab \vdots 2^{n+3}.$$

Theo PMI, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 18.3. Chứng minh rằng

a) $3^{2n+1} + 40n - 67 \vdots 64$ với mọi số tự nhiên n khác 0.

b) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \vdots 24$ (1) với mọi số tự nhiên n.

Giải. a) Với n = 1 thì $3^{2.1+1} + 40.1 - 67 = 0 \vdots 64$, vậy mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với n = k. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

Ta có : $3^{2k+3} + 40(k+1) - 67 = 9.3^{2k+1} + 40k - 27$

$= 9(3^{2k+1} + 40k - 67) - 320k + 576$

$= 9(3^{2k+1} + 40k - 67) - 64(5k - 9) \vdots 64$.

Theo PMI, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Với n = 0 thì $0^4 + 6.0^3 + 11.0^2 + 6.0 = 0 \vdots 24$. Giả sử mệnh đề (1) đúng với $n = k \geq 0$, tức là $k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k \vdots 24$.

Ta sẽ chứng minh (1) đúng với n = k + 1.

Thật vậy, ta có : $(k+1)^4 + 6(k+1)^3 + 11(k+1)^2 + 6(k+1)$

$$= (k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k) + 24(k^2 + 1) + 4(k^3 + 11k). \qquad (2)$$

Nếu ta chứng minh được rằng $k^3 + 11k \vdots 6$ (3) thì vế phải của (2) chia hết cho 24 và do đó (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh (3).

Với k = 0 thì $0^3 + 11.0 = 0 \vdots 6$, vậy (3) đúng.

Giả sử (3) đúng với k = m, tức là $m^3 + 11m \vdots 6$. Ta chứng minh (3) đúng với k = m + 1.

Ta có : $(m+1)^3 + 11(m+1) = m^3 + 11m + 12 + 3m(m+1) \vdots 6$.

Vậy (3) đúng với mọi $k \in \mathbf{N}$.

Ví dụ 18.4. Chứng minh rằng $(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}$ là số nguyên chẵn và $(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} = b\sqrt{2}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$ và b là số nguyên dương nào đó.

Giải. Với n = 1 thì $(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2 = 6$ và $(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}$. Vậy mệnh đề đúng với n = 1.

Giả sử mệnh đề đúng với n = k − 1, tức là

$$(1+\sqrt{2})^{2(k-1)} + (1-\sqrt{2})^{2(k-1)} = 2N \text{ với N nguyên}$$

và $(1+\sqrt{2})^{2(k-1)} - (1-\sqrt{2})^{2(k-1)} = a\sqrt{2}$ với a là số nguyên dương nào đó.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với n = k. Ta có :

$$(1+\sqrt{2})^{2k} + (1-\sqrt{2})^{2k} = (1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^{2k-2} + (1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^{2k-2}$$
$$= (3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2k-2} + (3-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2k-2}$$
$$= 3\left[(1+\sqrt{2})^{2k-2} + (1-\sqrt{2})^{2k-2}\right] + 2\sqrt{2}\left[(1+\sqrt{2})^{2k-2} - (1-\sqrt{2})^{2k-2}\right]$$
$$= 6N + 4a = 2(3N + 2a) \text{ là số nguyên chẵn.}$$
$$(1+\sqrt{2})^{2k} - (1-\sqrt{2})^{2k} = (1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^{2k-2} - (1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^{2k-2}$$
$$= (3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2k-2} - (3-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2k-2}$$
$$= 3\left[(1+\sqrt{2})^{2k-2} - (1-\sqrt{2})^{2k-2}\right] + 2\sqrt{2}\left[(1+\sqrt{2})^{2k-2} + (1-\sqrt{2})^{2k-2}\right]$$
$$= 3a\sqrt{2} + 4\sqrt{2}N = (3a+4N)\sqrt{2} \text{ có dạng } b\sqrt{2} \text{ với } b = 3a + 4N \in \mathbf{Z}^+.$$

Vậy mệnh đề đúng với n = k. Suy ra mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 18.5. Dùng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ với $x > -1$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ (bất đẳng thức Bernoulli) ;

b) $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + .. + x_n$, trong đó $x_i > -1$, $i = \overline{1,n}$ và các x_i cùng dấu (bất đẳng thức Bernoulli mở rộng).

c) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ với $n \in \mathbf{N}^*$, $n > 1$.

Giải. a) Với $n = 0$ thì $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0.x$, bất đẳng thức luôn đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Ta có $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + x)(1 + kx) = 1 + (k + 1)x + kx^2$

$$\geq 1 + (k + 1)x \text{ (do } kx^2 \geq 0).$$

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) Với $n = 1$ thì $1 + x_1 \geq 1 + x_1$, bất đẳng thức luôn đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+..+x_k,$$

ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Từ giả thiết quy nạp và $x_{k+1} > -1$, ta có

$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + ..+ x_k)(1 + x_{k+1})$

$= 1 + x_1 + x_2 + ..+ x_k + x_{k+1} + x_{k+1}(x_1 + x_2 + ..+ x_k)$

$\geq 1 + x_1 + x_2 + ..+ x_k + x_{k+1}$ (do các x_i cùng dấu nên $x_{k+1}(x_1 + x_2 + ..+ x_k) > 0$).

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Với $n = 2$, ta có : $2! = 2 < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = 1,5^2 = 2,25$, bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = m$. Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = m + 1$. Ta có

$$(m + 1)! = (m + 1).m! < (m + 1)\left(\frac{m+1}{2}\right)^m = 2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}.$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli (câu a), ta có $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \geq 1+(m+1).\frac{1}{m+1} = 2.$

Vì vậy $(m+1)! < 2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{m+2}{2}\right)^{m+1}$, suy ra điều phải chứng minh.

II. NGUYÊN LÝ QUY NẠP TOÁN HỌC MẠNH

1. Khi chứng minh bằng PMI, trong một số trường hợp, khi mệnh đề M(n) đúng khó có thể sử dụng để chứng minh M(n + 1) đúng (ví dụ 18.6) thì ta có thể sử dụng thêm một số mệnh đề đúng khác, chẳng hạn M(n – k), M(n – k + 1), ..., M(n) để

chứng tỏ M(n + 1) là đúng và từ đó đạt được mục đích cần chứng minh. Đây chính là nội dung của *nguyên lý quy nạp toán học mạnh* (gọi tắt là nguyên lý quy nạp mạnh), kí hiệu là PSMI, viết tắt chữ cái đầu của các từ tiếng Anh : *Principle of Strong Mathematics Induction*. Nội dung nguyên lý quy nạp mạnh như sau :

Giả sử ta có một mệnh đề M(n) theo các số tự nhiên n thỏa mãn :

(1) $M(n_0)$ đúng với một số tự nhiên n_0 nào đó,

(2) Với mỗi số tự nhiên $n \geq n_0$, nếu $M(n_0)$, $M(n_0 + 1)$, ... , M(n) đúng thì M(n + 1) đúng.

Khi đó mệnh đề M(n) sẽ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Chú ý. a) Như vậy, PSMI chỉ khác PMI ở bước quy nạp : Ở PSMI, chúng ta giả sử rằng không chỉ M(n) đúng mà tất cả các M(j) đúng, với $j \in \{n_0, ..., n\}$ thì M(n + 1) đúng. Tuy nhiên từ sự khác nhau này, trong một số bài toán thì việc dùng PSMI sẽ tiện lợi hơn khi dùng PMI.

b) Phương pháp PSMI cũng thường dùng để chứng minh *dạng đóng* (*closed form*) đối với các phần tử của một dãy số xác định bởi quan hệ đệ quy (bài tập 18.16). Có thể hiểu rằng dạng đóng các phần tử của một dãy số là biểu diễn dưới dạng có thể tính được mà không cần biết các phần tử khác của dãy số. Ví dụ : đối với dãy số Fibonacci (bài tập 18.12) thì dạng đóng của các phần tử của dãy là

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Để rõ hơn về PSMI, ta xét một số ví dụ sau đây.

2. Một số ví dụ

Ví dụ 18.6. Chứng minh rằng $n^4 - n^2 \vdots 12$ với mọi số nguyên dương n.

Giải. Trước hết ta sẽ xem nếu dùng PMI, thì bài này sẽ giải thế nào!

Gọi M(n) là mệnh đề cần chứng minh : $n^4 - n^2 \vdots 12$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

– Với n = 1 thì $1^4 - 1^2 = 0 \vdots 12$. Vậy M(1) đúng.

– Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là $k^4 - k^2 \vdots 12$ hay $k^4 - k^2 = 12a$, $a \in \mathbb{Z}$. (*)

Tiếp theo, sử dụng (*) ta sẽ cố gắng chứng minh $(k + 1)^4 - (k + 1)^2 \vdots 12$.

Ta có : $(k + 1)^4 - (k + 1)^2 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - (k^2 + 2k + 1)$

$$= k^4 - k^2 + 4k^3 + 6k^2 + 2k$$

$$= 12a + 4k^3 + 6k^2 + 2k. \qquad (**)$$

Đến đây, chúng ta bị "sa lầy" vào thế bí vì sẽ khó phân tích (**) thành tích có một nhân tử là 12 !!

Bây giờ ta sẽ dùng PSMI để giải bài này.

Trước hết, ta thấy rằng mệnh đề là đúng với 6 số nguyên dương đầu tiên

– Với $n = 1$ thì $1^4 - 1^2 = 0 \vdots 12$.

– Với $n = 2$ thì $2^4 - 2^2 = 12 \vdots 12$.

– Với $n = 3$ thì $3^4 - 3^2 = 72 \vdots 12$.

– Với $n = 4$ thì $4^4 - 4^2 = 240 \vdots 12$.

– Với $n = 5$ thì $5^4 - 5^2 = 600 \vdots 12$.

– Với $n = 6$ thì $6^4 - 6^2 = 1260 \vdots 12$.

Với $n \geq 6$, ta giả sử $j^4 - j^2 \vdots 12$ với mọi số nguyên j, $1 \leq j \leq n$ (nghĩa là các mệnh đề M(1), M(2), ... , M(n) đúng). Ta phải chứng minh $(n+1)^4 - (n+1)^2 \vdots 12$ (tức là mệnh đề M(n + 1) đúng).

Do M(n – 5) đúng nên $(n-5)^4 - (n-5)^2 \vdots 12$. Để việc trình bày đơn giản, ta đặt $k = n - 5$. Khi đó $k^4 - k^2 \vdots 12$ hay $k^4 - k^2 = 12b$, $b \in \mathbf{Z}$.

Ta có : $(n+1)^4 - (n+1)^2 = (k+6)^4 - (k+6)^2$

$$= (k^4 + 24k^3 + 216k^2 + 864k + 1296) - (k^2 + 12k + 36)$$

$$= k^4 - k^2 + 24k^3 + 216k^2 + 852k + 1260$$

$$= 12b + 24k^3 + 216k^2 + 852k + 1260$$

$$= 12(b + 2k^3 + 18k^2 + 71k + 105)$$

$$= 12c \text{ với } c = b + 2k^3 + 18k^2 + 71k + 105 \in \mathbf{Z}.$$

Vậy $(n+1)^4 - (n+1)^2 \vdots 12$ hay mệnh đề M(n + 1) đúng.

Theo PSMI thì $(n+1)^4 - (n+1)^2 \vdots 12$ với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 18.7. (*Định lí cơ bản của số học*) Chứng minh rằng mọi số nguyên lớn hơn 2 đều viết được dưới dạng tích của các số nguyên tố.

Giải. Gọi M(n) là mệnh đề "n viết được dưới dạng tích các số nguyên tố".

Với $n = 2$, thì mệnh đề hiển nhiên đúng (vì 2 là số nguyên tố).

Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, giả sử với mọi số nguyên j, $2 \leq j \leq n$, M(j) đúng, tức là j viết được dưới dạng tích các số nguyên tố. Ta phải chứng minh n + 1 cũng viết được dưới dạng tích các số nguyên tố.

– Nếu n + 1 là số nguyên tố thì ta có ngay điều cần chứng minh.

– Nếu $n + 1$ không là số nguyên tố thì $n + 1 = a.b$ với a và b là các số nguyên dương khác 1 và khác $n + 1$. Vì vậy $2 \le a, b \le n$. Theo giả thiết quy nạp thì a và b đều viết được dưới dạng tích các số nguyên tố :

$$a = p_1 . p_2 . . . p_r,\ b = q_1 . p_2 . . . q_s .$$

Do đó : $n + 1 = a.b = p_1 . p_2 . . . p_r . q_1 . q_2 . . . q_s$. Vậy $n + 1$ cũng viết được dưới dạng tích các số nguyên tố. Như vậy $M(n + 1)$ đúng.

Theo PSMI thì $M(n)$ đúng với mọi số nguyên dương $n \ge 2$.

BÀI TẬP

(Dùng PMI để làm các bài từ 18.1 đến 18.14, dùng PSMI để làm các bài 18.15, 18.16).

Trong các bài tập từ 18.1 đến 18.10, với mọi số tự nhiên n khác 0, chứng minh rằng :

18.1. $1 + 2 + 3 + . . . + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

18.2. a) $a + 2a + 3a + ... + na = \dfrac{[a + na]n}{2}$ $(a \in \mathbf{R})$.

b) $b + bq + bq^2 + . . . + bq^{n-1} = b.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $(b, q \in \mathbf{R},\ q \ne 1)$.

18.3. $1.2 + 2.3 + . . . + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

18.4. $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) . . . \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1}$.

18.5. $1.4 + 2.7 + . . . + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$.

18.6. $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) . . . \left[1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right] = \dfrac{n+2}{2n+2}$.

18.7. $1.1! + 2.2! + . . . + n.n! = (n + 1)! - 1$.

18.8. $\dfrac{0}{1!} + \dfrac{1}{2!} + . . . + \dfrac{n-1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!}$.

18.9. $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + . . . + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}, n > 1$.

18.10. $3 + 33 + 333 + . . . + \underbrace{33...3}_{\text{n số 3}} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$.

18.11. Chứng minh rằng $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \vdots 9$ với mọi số tự nhiên n.

18.12. *Dãy Fibonacci* là dãy số cho bởi $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, với $n \in \mathbb{N}^*$, tức là mỗi số hạng sau số hạng thứ hai bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó. Đó là dãy số : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^{n+1}$.

18.13. Chứng minh rằng với n = 4, 6, 7, 8, 9, ... có thể chia một hình vuông cho trước thành n hình vuông với kích thước không nhất thiết giống nhau.

18.14. (USAMO-1978) Một số nguyên n được gọi là *tốt* nếu ta có thể viết $n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$, trong đó $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ là các số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Biết các số nguyên từ 33 đến 73 là tốt, chứng minh rằng mọi số nguyên lớn hơn hoặc bằng 33 là tốt.

18.15. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên n lớn hơn 5 đều viết được dưới dạng tổng các số hạng mà mỗi số hạng là 2 hoặc 5.

18.16. Cho dãy các số được cho bởi *quan hệ đệ quy* sau

$$a_0 = 0,\ a_1 = 2 \text{ và } a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) \text{ với } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng $a_n = n.2^n$ với mọi số tự nhiên n.

Chuyên đề 19

ĐỒNG DƯ THỨC VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho số nguyên m > 0. Nếu hai số nguyên a và b khi chia cho m có cùng số dư thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m và kí hiệu là : $a \equiv b \pmod{m}$. Trong trường hợp a và b không đồng dư với nhau theo môđun m thì ta viết $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Ví dụ : $17 \equiv 2 \pmod{3}$, $15 \equiv 0 \pmod{3}$, $-20 \equiv 1 \pmod{3}$, $2012 \not\equiv 0 \pmod{3}$, ...

Từ định nghĩa của đồng dư thức, ta có các điều kiện tương đương sau đây.

II. CÁC ĐIỀU KIỆN TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA ĐỊNH NGHĨA

a) a và b đồng dư với nhau theo môđun m.

b) $a - b$ chia hết cho m.

c) tồn tại số nguyên t sao cho $a = b + mt$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh : a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

∘ a) $\Rightarrow$ b) : Theo định nghĩa, vì $a \equiv b \pmod{m}$ nên $\exists\, p, q, r \in \mathbf{Z}$ sao cho : $a = mp + r$, $b = mq + r$. Do đó $a - b = m(p - q) \vdots m$.

∘ b) $\Rightarrow$ c) : Giả sử $m \mid a - b$. Khi đó $\exists t \in \mathbf{Z}$ sao cho $a = b + mt$.

∘ c) $\Rightarrow$ a) : Giả sử có số nguyên t sao cho $a = b + mt$. Gọi r là dư trong phép chia a cho m. Ta có : $a = mp + r$ với $p, r \in \mathbf{Z}$, $0 \le r < m$.

Khi đó : $b + mt = mp + r \Leftrightarrow b = m(p - t) + r$. Như vậy a và b có cùng số dư r trong phép chia cho m. Vậy $a \equiv b \pmod{m}$.

Đồng dư thức có một số tính chất cơ bản sau

III. TÍNH CHẤT

1) $a \equiv a \pmod{m}$ (*tính chất phản xạ*).

2) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$ (*tính chất đối xứng*).

3) $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$ (*tính chất bắc cầu*).

4) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{km}$, $\forall k \in \mathbf{Z}^+$

(*có thể nhân hai vế và môđun của một đồng dư thức với cùng một số nguyên dương*).

5) $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow s_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_k \equiv b_1 + b_2 \pm \ldots \pm b_k \pmod{m}$

(*có thể cộng hoặc trừ từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun với nhau*).

Đặc biệt : $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Suy ra : $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,

$a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

6) $a_i \equiv b_i \pmod{m}, \forall i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow a_1.a_1 \ldots a_k \equiv b_1.b_1 \ldots b_k \pmod{m}$

(*có thể nhân từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun với nhau*).

Đặc biệt : $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$.

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$

(*có thể nhân hai vế của một đồng dư thức với cùng một số nguyên*).

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m} \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+$

(*có thể nâng hai vế của của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa*).

7) $a \equiv b \pmod{m_i}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[m_1, m_2, \ldots, m_k]}$

(*nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy*).

Đặc biệt, nếu $(m_i, m_j) = 1$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ thì

$$a \equiv b \pmod{m_i} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m_1.m_2\ldots m_k}.$$

8) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow$ tập hợp các ước chung của a và m bằng tập hợp các ước chung của b và m.

Đặc biệt : $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a, m) = (b, m)$.

9) $a \equiv b \pmod{m}$, $k \in UC(a, b, m), k > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{k} \equiv \dfrac{b}{k} \left(\bmod \dfrac{m}{k}\right)$

(ta có thể chia hai vế và môđun của một đồng dư cho một ước dương chung của chúng).

Đặc biệt : $ac \equiv bc \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b\left(\bmod \dfrac{m}{(c, m)}\right)$

$$ac \equiv bc \pmod{m},\ (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}.$$

Chứng minh

1) Vì $a - a = 0 \vdots m$ nên $a \equiv a \pmod{m}$.

2) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid b - a \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$.

3) Vì $a \equiv b \pmod{m}$ nên $m \mid a - b$, vì $b \equiv c \pmod{m}$ nên $m \mid b - c$. Do đó : $m \mid a - b + b - c$ hay $m \mid a - c$. Vậy $a \equiv c \pmod{m}$.

4) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \exists t \in \mathbf{Z} : a = b + mt \Rightarrow ka = kb + (km)t\ \forall k \in \mathbf{Z}, k > 0$ $\Rightarrow ka \equiv kb \pmod{km}$ (chú ý rằng $km > 0$).

5) Vì $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ nên $\exists t_i \in \mathbf{Z}$ sao cho $a_i = b_i + mt_i$ (*).

Cộng (trừ) từng vế các đẳng thức (*) ta được :

$a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_k \equiv b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_k + m(t_1 \pm t_2 \pm \ldots \pm t_k)$.

Đẳng thức này chứng tỏ : $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_k \equiv b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_k \pmod{m}$.

6) Vì $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ nên $\exists t_i \in \mathbf{Z}$ sao cho $a_i = b_i + mt_i$ (*).

Nhân từng vế các đẳng thức (*) thì ta được vế trái là $a_1.a_2\ldots.a_k$, vế phải có chứa một số hạng là $b_1.b_2\ldots.b_k$, các số hạng còn lại có ít nhất một thừa số là m, do đó đẳng thức có dạng : $a_1.a_2\ldots.a_k = b_1.b_2\ldots.b_k + mt$ với $\exists t \in \mathbf{Z}$.

Vậy : $a_1.a_1\ldots a_k \equiv b_1.b_1\ldots b_k \pmod{m}$.

7) Từ $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ suy ra $(a - b) \vdots m_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Do đó : $(a - b) \vdots [m_1, m_2, \ldots, m_k]$. Suy ra : $a \equiv b \pmod{[m_1, m_2, \ldots, m_k]}$.

Ngược lại, từ $a \equiv b \pmod{[m_1, m_2, \ldots, m_k]}$ và do $m_i \mid [m_1, m_2, \ldots, m_k]$ ta suy ra $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

8) Gọi X là tập hợp các ước chung của a và m, Y là tập hợp các ước chung của b và m. Giả sử $x \in X$. Khi đó : $a \vdots x$, $m \vdots x$. Mà $a - b \vdots m$ nên $a - b \vdots x$. Do $a \vdots x$ nên $b \vdots x$. Vì $x \mid b$, $x \mid m$ nên $x \in Y$. Vì vậy $X \subset Y$.
Lập luận tương tự ta được $Y \subset X$. Suy ra $X = Y$.

9) $k \in UC(a,b,m), k > 0 \Rightarrow a = ka_1, b = kb_1,\ m = km_1$ với $a_1, b_1, m_1 \in \mathbf{Z}, m_1 > 0$.
Nhưng $a \equiv b \pmod{m}$ nên $a = b + mt\ (t \in \mathbf{Z})$. Do đó : $ka_1 = kb_1 + km_1t$,
suy ra $a_1 = b_1 + m_1t$. Vì vậy $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$ hay $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}\left(\bmod \frac{m}{k}\right)$.

☞ CHÚ Ý

1) Trong phép chia số nguyên a cho số nguyên dương m dư r : $a = bm + r$, ta đã định nghĩa $0 \le r < m$ và viết $a \equiv b \pmod{m}$.

Nhưng vì $a = bm + r = (b + k)m + r - km = (b + k)m + r_1$ (r_1 và r sai khác một bội của m), nên trong một số trường hợp, để việc trình bày gọn gàng người ta lấy số dư là $r' = r - m < 0$ (số dư âm bằng số dư dương trừ đi số chia). Ví dụ trong phép chia a cho 3, các số dư có thể có là $r = 0, 1, 2$. Nhưng số dư 2 trong phép chia này có thể coi là dư $-1\ (= 2 - 3)$ và do đó có thể nói dư phép chia a cho 3 là 0 hoặc ± 1. Và ta có thể viết $a \equiv -1 \pmod{3}$ thay cho viết $a \equiv 2 \pmod{3}$.

2) Có sự khác biệt trong việc giải phương trình đại số và giải phương trình đồng dư thức (tức là tìm các giá trị bằng chữ trong đồng dư thức thoả mãn đồng dư thức). Chẳng hạn, trong đại số từ phương trình $4x = 4y$ suy ra $x = y$. Nhưng từ phương trình đồng dư $4x \equiv 4y \pmod{6}$ không suy ra được $x \equiv y \pmod{6}$! Tuy nhiên từ phương trình đồng dư $4x \equiv 4y \pmod{15}$ luôn suy ra được $x \equiv y \pmod{15}$ (tính chất 9). Trong đại số từ $xy = 0$ suy ra $x = 0$ hoặc $y = 0$. Tuy nhiên trong phương trình đồng dư $xy \equiv 0 \pmod{m}$ không suy ra được $x \equiv 0 \pmod{m}$ hoặc $y \equiv 0 \pmod{m}$ (chẳng hạn, $3.5 \equiv 0 \pmod{15}$ nhưng $3 \not\equiv 0 \pmod{15}$ và $5 \not\equiv 0 \pmod{15}$.

IV. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

1. Định lí Fermat bé. Cho a là số nguyên dương và p là số nguyên tố. Khi đó ta luôn có : $a^p \equiv a \pmod{p}$. Đặc biệt nếu $(a, p) = 1$, ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Chứng minh.

Cách 1. Giả sử $(a, p) = 1$. Khi đó dư trong các phép chia a, 2a, ... , (p – 1)a cho p sẽ đôi một khác nhau và là những số trong các số 1, 2, ... , p – 1. Gọi $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ lần lượt là dư trong các phép chia a, 2a, ... , (p – 1)a cho p.

Khi đó : $a \equiv r_1 \pmod p$, $2a \equiv r_2 \pmod p$, ... , $(p-1)a \equiv r_{p-1} \pmod p$. Nhân các vế của các đồng dư thức này ta được : $(p-1)!a^{p-1} \equiv r_1.r_2 \ldots r_{p-1} \pmod p$ hay $(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod p$. Do đó $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ hay $a^p \equiv a \pmod p$.

Cách 2. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo a. Hiển nhiên với $a = 1$ thì định lí luôn đúng. Giả sử định lí đúng với số nguyên dương $a > 1$, tức là $a^p \equiv a \pmod p$, ta sẽ chứng minh định lí đúng với $a + 1$.

Ta có : $(a+1)^p - (a+1) = a^p - a + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k$ với $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$.

Dễ chứng minh được $p \mid C_p^k$, $\forall k = 1, 2, \ldots, p-1$ và do giả thiết quy nạp suy ra $p \mid (a+1)^p - (a+1)$. Định lí được chứng minh.

Ví dụ : $2^{11} \equiv 2 \pmod{11}$, $11^6 \equiv 1 \pmod 7$, $2^{2011} \equiv 2 \pmod{2011}$.

CHÚ Ý

Định lí Fermat bé trang bị cho ta một công cụ tốt để kiểm tra một số có là hợp số hay không (nếu p là hợp số thì $a^p \not\equiv a \pmod p$). Tuy nhiên, mệnh đề đảo của định lí Fermat bé là không đúng, nghĩa là với a, p là hai số nguyên dương mà $a^p \equiv a \pmod p$ thì p chưa chắc là số nguyên tố. Ví dụ : với a nguyên dương, ta luôn có $a^{561} \equiv a \pmod{561}$, nhưng $561 = 3.11.17$ không là số nguyên tố.

2. Định lí Wilson. Với mọi số nguyên tố p thì : $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Chứng minh. Với $p = 2$ và $p = 3$ thì định lí luôn đúng. Ta chứng minh định lí cho $\forall p \geq 5$. Đặt $S = \{2, 3, \ldots, p-2\}$. Vì p là số nguyên tố nên với $s \in S$ tùy ý luôn có duy nhất phần tử nghịch đảo $s' \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ theo môđun p (số nguyên a gọi là nghịch đảo của số nguyên b theo môđun m nếu $ab \equiv 1 \pmod m$). Hơn nữa $s' \neq 1, s' \neq p-1$ nên $s' \in S$. Rõ ràng $s' \neq s$ vì nếu không thì : $s^2 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow p \mid s-1$ hoặc $p \mid s+1$. Điều này không thể xảy ra vì $s+1 < p$.

Do đó ta có thể nhóm các phần tử của S thành $\frac{p-3}{2}$ cặp phân biệt (s, s') sao cho $ss' \equiv 1 \pmod{m}$. Nhân từng vế các đồng dư thức này ta được $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$. Suy ra $(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$.

Ví dụ : $2! = 2 \equiv -1 \pmod{3}$, $4! = 24 \equiv -1 \pmod{5}$, $6! = 720 \equiv -1 \pmod{7}$,
$10! = 3628800 \equiv -1 \pmod{11}$, $12! = 479001600 \equiv -1 \pmod{13}$, . . .

Chú ý : Mệnh đề đảo của định lí Wilson cũng đúng, nghĩa là :

Nếu $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$ thì n là số nguyên tố.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử n không là số nguyên tố, $n = n_1 n_2$ với các số nguyên $n_1, n_2 \geq 2$ nào đó. Từ giả thiết $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ suy ra $n_1 \mid 1.2....n_1...(n-1)$, vô lý. Vậy n là số nguyên tố.

Về mặt lí thuyết chú ý này cho ta một phương pháp mới xác định một số có là số nguyên tố hay không. Nhưng trong thực tế thì khó thực hành cách này vì chỉ cần số n lớn vừa phải thì số $(n-1)!$ cũng sẽ rất lớn!

∘ **Hàm số Euler** : Trước khi đưa ra định lí Euler, ta định nghĩa hàm số Euler φ (còn gọi là φ-hàm Euler). Với số nguyên dương m bất kỳ, ta định nghĩa hàm số Euler $\varphi = \varphi(m)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m. Ví dụ : $\varphi(2) = 1$; $\varphi(3) = 2$; $\varphi(4) = 2$; $\varphi(5) = 4$; . . .

Hàm số Euler φ có một số tính chất sau :

a) Với mọi số nguyên tố p thì $\varphi(p) = p - 1$.

b) Với mọi số nguyên dương m, n mà $(m, n) = 1$ thì $\varphi(m.n) = \varphi(m).\varphi(n)$.

c) Nếu số nguyên dương m có dạng phân tích chính tắc (dạng thành tích các thừa số nguyên tố) : $m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ thì

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

d) m là số nguyên dương thì $\sum_{d \mid m} \varphi(d) = m$.

Tính chất a) là khá hiển nhiên vì mọi số nguyên dương nhỏ hơn p thì nguyên tố cùng nhau với p và có $p - 1$ số như thế là $1, 2, ..., p - 1$. Bạn đọc hãy tự chứng minh ba tính chất còn lại.

Ví dụ : $\varphi(2011) = 2011 - 1 = 2010$ (do 2011 là số nguyên tố) ;
$\varphi(28) = \varphi(4.7) = \varphi(4).\varphi(7) = 2.6 = 12$;

$$20 = 2^2.5 \Rightarrow \varphi(20) = 20\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 8.$$

3. Định lí Euler. Cho m là số nguyên dương và a là số nguyên nguyên tố cùng nhau với m. Khi đó : $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Chứng minh. Xét tập hợp S tất cả các các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m : $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}\}$.

Do (a, m) = 1 nên $(aa_i, m) = 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, \varphi(m)$.

Do đó $S = \{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\varphi(m)}\}$.

Vậy $aa_1.aa_2.\ldots.aa_{\varphi(m)} \equiv a_1.a_2.\ldots.a_{\varphi(m)} \pmod{m}$

hay $a^{\varphi(m)}a_1.a_2.\ldots.a_{\varphi(m)} \equiv a_1.a_2.\ldots.a_{\varphi(m)} \pmod{m}$.

Lại do $(a_i, m) = 1$ $\forall i = 1, 2, \ldots, \varphi(m)$, suy ra $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Ví dụ : $(24, 3) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(24) = 8 \Rightarrow 24^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $3^8 \equiv 1 \pmod{24}$, ...

Chú ý. Khi m = p là số nguyên tố thì $\varphi(m) = \varphi(p) = p - 1$ và $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, định lí Euler lúc này chính là định lí Fermat bé. Vậy định lí Fermat bé là trường hợp riêng của định lí Euler.

4. Định lí Trung Quốc về phần dư : Cho $m_1, m_2, \ldots, m_r$ các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau từng đôi. Với các số nguyên $x_1, x_2, \ldots, x_r$ cho trước tùy ý, luôn tồn tại số nguyên z sao cho $z \equiv x_i \pmod{m_i}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$. Hơn nữa nếu có số nguyên z' mà $z' \equiv x_i \pmod{m_i}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$, thì $z \equiv z' \pmod{m_1.m_2 \ldots m_r}$.

Chứng minh. Đặt $m = m_1 m_2 \ldots m_r$ và $M_i = \dfrac{m}{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Chú ý rằng M_i là tích các số nguyên m_j với $j \neq i$. Vì $m_1, m_2, \ldots, m_r$ các số nguyên tố cùng nhau từng đôi nên $(M_i, m_i) = 1$. Do đó, với $i = 1, 2, \ldots, r$, tồn tại các số nguyên M_i' sao cho $M_i M_i' \equiv 1 \pmod{m_i}$. Đặt : $z = M_1 M_1' x_1 + M_2 M_2' x_2 + \ldots + M_r M_r' x_r$.

Vì $M_j \equiv 0 \pmod{m_i}$ với $j \neq i$ và $M_i M_i' \equiv 1 \pmod{m_i}$, nên $z \equiv x_i \pmod{m_i}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$. Bây giờ nếu $z' \equiv x_i \pmod{m_i}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$ thì $z' - z \vdots m_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$. Do $m_1, m_2, \ldots, m_r$ các số nguyên tố cùng nhau từng đôi nên $z' - z \vdots m_1.m_2 \ldots m_r$. Vậy $z \equiv z' \pmod{m_1.m_2 \ldots m_r}$.

Ví dụ : Tìm các số nguyên x thoả mãn : Khi chia cho 3 thì dư 1, chia cho 5 thì dư 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Giải. Ta cần tìm các số nguyên x sao cho các đồng dư thức : $x \equiv 1 \pmod 3$, $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 3 \pmod 7$ đồng thời xảy ra.

Đặt : $m = 3.5.7 = 105$, $M_1 = 5.7 = 35$, $M_2 = 3.7 = 21$, $M_3 = 3.5 = 15$.

Khi đó : $35M_i' \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow M_1' \equiv 2 \pmod 3$

$21M_2' \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow M_i' \equiv 1 \pmod 5$

$15M_3' \equiv 1 \pmod 7 \Leftrightarrow M_i' \equiv 1 \pmod 7$.

Theo định lí Trung Quốc về phần dư, ta có :

$x \equiv 35.2.1 + 21.1.2 + 15.1.3 \pmod{105}$, tức là $x \equiv 157 \pmod{105} \equiv 52 \pmod{105}$.

Các số nguyên cần tìm có dạng $x = 52 + 105t$ với $t \in \mathbf{Z}$.

V. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỒNG DƯ THỨC

1. Tìm số dư trong phép chia có dư

Ta biết rằng : Với hai số nguyên a và m, $m > 0$ luôn có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho $a = mq + r$, $0 \le r < m$. Như vậy để tìm số dư r trong phép chia a cho m ta cần tìm r thoả mãn $\begin{cases} a \equiv r \pmod m \\ 0 \le r < m \end{cases}$.

Ví dụ 19.1. Tìm số dư trong phép chia $3748^5 - 3$ cho 9.

Giải. Ta có : $3748 = 9.416 + 4 \equiv 4 \pmod 9$. Do đó $3748^5 - 3 \equiv 4^5 - 3 \pmod 9$.

Vì $4^5 - 3 = 1021 \equiv 4 \pmod 9$ nên ta được $3748^5 - 3 \equiv 4 \pmod 9$. Vậy số dư cần tìm là 4.

Ví dụ 19.2. Tìm số dư trong phép chia $\left(2009^{2010} + 2010^{2011} + 2011^{2012}\right)^{10}$ cho 111.

Giải. Ta phải tìm số tự nhiên r $(0 \le r < 111)$ sao cho

$$r \equiv \left(1997^{2012} + 1998^{2012} + 1999^{2012}\right)^{10} \pmod{111}.$$

Ta có : $1997 = 111.18 - 1 \Rightarrow 1997 \equiv -1 \pmod{111} \Rightarrow 1997^{2012} \equiv 1 \pmod{111}$

$1998 = 111.18 \Rightarrow 1998 \equiv 0 \pmod{111} \Rightarrow 1998^{2012} \equiv 0 \pmod{111}$

$1999 = 111.18 + 1 \Rightarrow 1999 \equiv 1 \pmod{111} \Rightarrow 1999^{2012} \equiv 1 \pmod{111}$.

Do đó : $\left(1997^{2012} + 1998^{2012} + 1999^{2012}\right)^{10} \equiv 2^{10} \pmod{111}$.

Vì $2^{10} = 1024 = 111.9 + 25 \equiv 25 \pmod{111}$ nên

$$\left(1997^{2012} + 1998^{2012} + 1999^{2012}\right)^{10} \equiv 25 \pmod{111}.$$

Vậy dư trong phép chia là 25.

Ví dụ 19.3. Hãy tìm :

a) Chữ số tận cùng của số 9^{9^9} ;

b) Hai chữ số tận cùng của số 2^{999}.

Giải. Nhận xét rằng chữ số tận cùng (hai chữ số tận cùng, ba chữ số tận cùng, ...) của một số là dư của số đó trong phép chia cho 10 (100, 1000, ...), do đó để tìm chữ số tận cùng (hai chữ số tận cùng, ba chữ số tận cùng, . . .) của một số ta tìm dư trong phép chia số đó cho 10 (100, 1000, ...).

a) Vì $9^{2n+1} = 9.81^n \equiv 9 \pmod{10}$ và 9^9 là số lẻ nên số 9^{9^9} có chữ số cuối là 9.

b) $2^{10} + 1 = 1025 \vdots 25 \Rightarrow 2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$.

$2^{999} = (2^{10})^{99}.2^9 \equiv -2^9 \equiv -12 \pmod{25}$. Vậy $2^{999} = 25k - 12,\ k \in \mathbb{N}$.

Do $2^{999} \vdots 4$ nên $k \vdots 4$ và k có dạng $k = 4m,\ m \in \mathbb{N}, m > 2$.

Suy ra $2^{999} = 100m - 12 = 100(m-1) + 88$. Vậy hai chữ số tận cùng của số 2^{999} là 88.

Ví dụ 19.4. Cho p là số nguyên tố và $p < 5$. Chứng minh rằng $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$.

Giải. Ta có : $240 = 2^4.3.5$. Theo định lí Fermat, ta có :

$$p^2 \equiv 1 \pmod 3,\ p^4 \equiv 1 \pmod 5.$$

Theo định lí Euler, ta có : $p^{\varphi(16)} = p^8 \equiv 1 \pmod{16}$. Do đó $p^8 \equiv 1 \pmod m$ với $m = 3, 5$ hoặc 16. Suy ra $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$.

2. Chứng minh sự chia hết

Khi số dư r trong phép chia a cho m bằng 0 thì a chia hết cho m. Như vậy để chứng tỏ a chia hết cho m ta cần chứng minh $a \equiv 0 \pmod m$.

Ví dụ 19.5. Chứng minh rằng $3^{2012} - 9$ chia hết cho 13.

Giải. Ta có : $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$.

Do đó : $3^{2010} = (3^3)^{670} \equiv 1 \pmod{13}$.

Vì vậy : $3^{2012} = 3^{2010}.3^2 \equiv 9 \pmod{13}$. Vậy $3^{2012} - 9 \vdots 13$.

Ví dụ 19.6. Chứng minh rằng với $n \in \mathbf{N}$ thì $6^{2n+1} + 5^{n+2}$ chia hết cho 31.

Giải. Vì $6^2 \equiv 5 \pmod{31}$ nên $6^{2n} \equiv 5^n \pmod{31}$ (1), mặt khác $6 \equiv -5^2 \pmod{31}$. (2)

Nhân từng vế (1) và (2), ta được :

$$6^{2n+1} \equiv -5^{n+2} \pmod{31} \text{ hay là } 6^{2n+1} + 5^{n+2} \equiv 0 \pmod{31}.$$

Vậy $6^{2n+1} + 5^{n+2} \vdots 31$.

Ví dụ 19.7. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5$ chia hết cho 22.

Giải. Theo định lí Fermat bé ta có : $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Ta có : $2^{4n+1} = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2,\ k \in \mathbf{Z}$.

$3^{4n+1} = 3.81^n \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 10m + 3,\ m \in \mathbf{Z}$.

Do đó : $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 = 3^{10k+2} + 2^{10m+3} + 5$

$= 3^2.(3^{10})^k + 2^3.(2^{10})^m + 5 \equiv 3^2 + 2^3 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$.

Mặt khác $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 2$. Do $(2, 11) = 1$ nên $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 22$.

3. Xác định dấu hiệu chia hết của một số

Cho số tự nhiên $a \neq 0$ được viết trong hệ thập phân dưới dạng : $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ trong đó $1 \leq a_n \leq 9$, $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ta sẽ tìm các điều kiện ràng buộc giữa các chữ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ để a chia hết cho một số tự nhiên nào đó.

Ta luôn có : $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0$. (1)

a) *Dấu hiệu chia hết cho* 2 :

Ta có : $10 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow a_i 10^i \equiv 0 \pmod{2}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv a_0 \pmod{2}$.

Vậy $a \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow a_0 = 0, 2, 4, 6, 8$.

b) *Dấu hiệu chia hết cho* 5 :

Ta có : $10 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a_i 10^i \equiv 0 \pmod{2}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv a_0 \pmod{5}$.

Vậy $a \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow a_0 = 0, 5$.

c) *Dấu hiệu chia hết cho* 3 :

Ta có : $10 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a_i 10^i \equiv a_i \pmod{3}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \pmod 3$.

Vậy $a \vdots 3 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 3$

$\Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \vdots 3$.

d) *Dấu hiệu chia hết cho* 9 :

Ta có : $10 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow a_i 10^i \equiv a_i \pmod 9, i = 1, 2, \ldots, n$. Do đó

$a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \pmod 9$.

Vậy $a \vdots 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \vdots 9$.

e) *Dấu hiệu chia hết cho* 4 :

Ta có : $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow a_i 10^i \equiv 0 \pmod 4, i = 2, \ldots, n$.

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv (a_1.10 + a_0) \pmod 4$.

Vậy $a \vdots 4 \Leftrightarrow a_1.10 + a_0 \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

f) *Dấu hiệu chia hết cho* 25 :

Ta có : $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow a_i 10^i \equiv 0 \pmod{25}, i = 2, \ldots, n$.

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv (a_1.10 + a_0) \pmod{25}$.

Vậy $a \vdots 25 \Leftrightarrow a_1.10 + a_0 \equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25$.

g) *Dấu hiệu chia hết cho* 11 :

Ta có : $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow a_i 10^i \equiv a_i \pmod{11}$ nếu số mũ i của 10 là chẵn và $a_i 10^i \equiv -a_i \pmod{11}$ nếu số mũ i của 10 là lẻ.

Do đó $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.10 + a_0 \equiv (a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots) \pmod{11}$.

Vậy $a \vdots 11 \Leftrightarrow (a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots) \equiv 0 \pmod{11}$, tức là khi hiệu của tổng các chữ số ở vị trí lẻ và tổng các chữ số ở vị trí chẵn (tính từ phải sang trái hoặc từ trái sang phải) bằng 0.

VI. MỘT SỐ VÍ DỤ KHÁC

Ví dụ 19.8. Chứng minh rằng có vô số các số nguyên tố p có dạng $4k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Giải. Trước hết ta chú ý rằng có ít nhất một số nguyên tố p có dạng $4k - 1$ (tức là $p \equiv 3 \pmod 4$, chẳng hạn $p = 3$). Giả sử rằng chỉ có hữu hạn các số nguyên tố có dạng $4k - 1$ là $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Gọi $P = p_1.p_2 \ldots p_n$ là tích của các số nguyên tố này. Ta có : $4P - 1 \equiv 3 \pmod 4$.

Nếu tất cả các ước của $4P - 1$ đồng dư với 1 môđun 4 thì theo tính chất 6), $4P - 1$ cũng đồng dư với 1 môđun 4. Vậy phải tồn tại ước p của $4P - 1$ đồng dư với 3 theo môđun 4. Mặt khác $(4P - 1, p_i) = 1$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, như vậy $p \neq p_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên. Vậy có vô số các số nguyên tố p có dạng $4k - 1$.

Ví dụ 19.9 (*Thi Olympic Toán Nga, năm 2001*). Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p + q = (p - q)^3$.

Giải. Vì $(p - q)^3 = p + q \neq 0$ nên $p \neq q$ và $(p, q) = 1$.

Vì $p - q \equiv 2p \pmod{p + q}$ nên $(p - q)^3 \equiv 8p^3 \pmod{p + q}$.

Nhưng vì $p + q = (p - q)^3$ nên ta có : $8p^3 \equiv 0 \pmod{p + q}$. (1)

Vì $(p, q) = 1$ nên $(p, p + 1) = 1$ và do đó $(p^3, p + q) = 1$. Từ (1) suy ra $8 \vdots (p + q)$.

Mà $p + q \geq 2 + 3 = 5 \Rightarrow p + q = 8 \Rightarrow p - q = 2$. Từ đó ta có $(p, q) = (5, 3)$.

Ví dụ 19.10. (*Thi đồng đội Toán các nước vùng Baltic, năm 2001*). Cho a là số nguyên lẻ. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m và n, $m \neq n$ thì $a^{2^n} + 2^{2^n}$ và $a^{2^m} + 2^{2^m}$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $m > n$. Với mọi ước nguyên tố p của $a^{2^n} + 2^{2^n}$ ta có : $a^{2^n} \equiv -2^{2^n} \pmod{p}$. Bình phương hai vế của đồng dư thức này $m - n$ lần, ta được : $a^{2^m} \equiv 2^{2^m} \pmod{p}$. Vì a là lẻ nên $a \neq 2$. Do đó $2^{2^m} + 2^{2^m} = 2^{2^m+1} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Từ đó $a^{2^m} \equiv 2^{2^m} \not\equiv -2^{2^m} \pmod{p}$.

Vì vậy $p \mid a^{2^m} + 2^{2^m}$. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 19.11. Liệu có tồn tại hay không vô hạn các số nguyên dương chẵn k sao cho với mọi số nguyên tố p thì $p^2 + k$ là hợp số ?

Giải. Trước tiên ta thấy với $p = 2$ thì $p^2 + k$ luôn là hợp số với mọi số nguyên dương chẵn k.

Với $p < 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Vì vậy với k là số nguyên dương chẵn mà $k \equiv 2 \pmod{3}$ thì $p^2 + k \equiv 0 \pmod{3}$, tức là $p^2 + k$ là hợp số ($p^2 + k > 3$ và $p^2 + k \vdots 3$).

Cuối cùng ta xét với $p = 3$ thì $3^2 + k$ có là hợp số không ? Câu trả lời là có vì nếu $k \equiv 1 \pmod{5}$ thì $3^2 + k \equiv 0 \pmod{5}$.

Tóm lại, ta thấy với mọi số nguyên dương k mà :

$$\begin{cases} k \equiv 0 \pmod 2 \\ k \equiv 2 \pmod 3 \\ k \equiv 1 \pmod 5 \end{cases} \qquad (*)$$

sẽ thoả mãn điều kiện của bài toán. Theo định lí Trung Quốc về phần dư, dễ tìm được các số nguyên dương k mà $k \equiv 26 \pmod{30}$ sẽ thoả mãn hệ (*), và do đó thoả mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 19.12. Cho m là số nguyên dương, a và b là hai số nguyên nguyên tố cùng nhau với m. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên x, y sao cho $a^x \equiv b^x \pmod m$, $a^y \equiv b^y \pmod m$ thì $a^{(x,y)} \equiv b^{(x,y)} \pmod m$.

Giải. Theo đồng nhất Bézout, tồn tại các số nguyên không âm u, v sao cho

$$(x, y) = ux - vy.$$

Từ giả thiết ta có : $a^{ux} \equiv b^{ux} \pmod m$, $b^{vy} \equiv a^{vy} \pmod m$.

Suy ra : $a^{ux}b^{vy} \equiv a^{vy}b^{ux} \pmod m$. Do $(a, m) = (b, m) = 1$ nên theo tính chất 9) ta có : $a^{(x,y)} = a^{ux-vy} \equiv b^{ux-vy} = b^{(x,y)} \pmod m$.

Ví dụ 19.13. Cho n là số nguyên. Chứng minh rằng :

a) $n^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $n^2 \equiv 1 \pmod 3$;

b) $n^2 \equiv 0 \pmod 5$ hoặc $n^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$;

c) $n^2 \equiv 0 \pmod 8$ hoặc $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ hoặc $n^2 \equiv 4 \pmod 8$;

d) $n^3 \equiv 0 \pmod 9$ hoặc $n^3 \equiv \pm 1 \pmod 9$;

e) $n^4 \equiv 0 \pmod{16}$ hoặc $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$.

Giải. Ta chứng minh câu a) và b), những câu còn lại chứng minh tương tự.

a) Khi chia n cho 3 số dư chỉ có thể là 0, 1, 2. Do đó :

– với $n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 = 3.3k^2 \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod 3$;

– với $n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 3$;

– với $n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 3$.

b) Khi chia n cho 5 số dư chỉ có thể là 0, ±1, ±2. Do đó :

– với $n = 5k \Rightarrow n^2 = 25k^2 = 5.5k^2 \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod 5$;

– với $n = 5k \pm 1 \Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 5$;

– với $n = 5k \pm 2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 40k + 4 = 5(5k^2 \pm 8k) + 4$

$\Rightarrow n^2 \equiv 4 \pmod 5 \equiv -1 \pmod 5$.

Ví dụ 19.14. (*Thi Olympic Rumani, năm 2003*).

Cho 31 số nguyên tố $p_1 < p_2 < \ldots < p_{31}$. Chứng minh rằng nếu $p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{31}^4 \vdots 30$ thì trong 31 số này sẽ tìm được 3 số nguyên tố liên tiếp.

Giải. Đặt $S = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{31}^4$. Trước tiên ta thấy $p_1 = 2$ vì nếu không thì 31 số nguyên tố đã cho là số lẻ. Do đó S là số lẻ, mâu thuẫn với giả thiết $S \vdots 30$.

Bây giờ ta chứng minh $p_2 = 3$.

Thật vậy nếu $p_2 \neq 3$ thì $p_i^4 = (p_i^2)^2 \equiv 1 \pmod 3$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 31$. Do đó $S \equiv 31 \equiv 1 \pmod 3$, mâu thuẫn với $S \vdots 30$.

Cuối cùng ta sẽ chứng minh $p_3 = 5$. Thật vậy nếu $p_3 \neq 5$ thì $p_i^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 31$. Do đó $p_i^4 \equiv 1 \pmod 5$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 31$. Suy ra $S \equiv 31 \equiv 1 \pmod 5$, mâu thuẫn với $S \vdots 30$. Vậy ba số nguyên tố liên tiếp là 2, 3, 5.

BÀI TẬP

19.1. Chứng minh các khẳng định sau :

a) Nếu $a \equiv b \pmod m$ và $n \mid m$ thì $a \equiv b \pmod n$.

b) Nếu p là số nguyên tố, x, y là các số nguyên sao cho $xy \equiv 0 \pmod p$ thì $x \equiv 0 \pmod p$ hoặc $y \equiv 0 \pmod p$.

19.2. Cho ví dụ chứng tỏ $a^2 \equiv b^2 \pmod m$ không kéo theo $a \equiv b \pmod m$.

19.3. Cho $a \equiv b \pmod m$. Chứng minh $(a, m) = (b, m)$.

19.4. Xác định dấu hiệu chia hết cho 8 của một số.

19.5. Chứng minh các khẳng định sau

a) Nếu a là số nguyên lẻ thì $a^2 \equiv 1 \pmod 8$;

b) Với mọi số nguyên a thì $a^3 \equiv 0 \pmod 7$, $a^3 \equiv 1 \pmod 7$ hoặc $a^3 \equiv 6 \pmod 7$;

c) Với mọi số nguyên a thì $a^4 \equiv 0 \pmod 5$ hoặc $a^4 \equiv 1 \pmod 5$;

d) Nếu a là số nguyên không chia hết cho cả 2 và 3 thì $a^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

19.6. Cho n là số nguyên tùy ý, (dùng kiến thức về đồng dư) hãy chứng minh :

a) $n^3 - n \vdots 3$; b) $n^5 - n \vdots 5$; c) $n^7 - n \vdots 7$;

d) $n^{11} - n \vdots 11$; e) $n^{13} - n \vdots 13$.

Chú ý : $n^9 - n$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n. Chẳng hạn :

$$2^9 - 2 = 510 \not\vdots 9.$$

19.7. a) Tìm các số dư khi chia 2^{50} và 41^{65} cho 7 ;

b) Tìm số dư trong phép chia tổng sau cho 4 :

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 99^5 + 100^5.$$

19.8. Chứng minh rằng :

a) $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$; b) $53^{103} + 103^{53} \vdots 39$;

c) $111^{333} + 333^{111} \vdots 7$.

19.9. Với $n \geq 1$, chứng minh rằng $(-13)^{n+1} \equiv (-13)^n + (-13)^{n-1} \pmod{181}$

19.10. Chứng minh rằng

a) $2^9 + 2^{99} \vdots 100$; b) $7.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19, \forall n \in \mathbb{N}$.

19.11. Chứng minh rằng

a) $1^{1991} + 2^{1991} + \ldots + 2013^{1991} \vdots 11$; b) $a^{6m} + a^{6n} \vdots 7 \Leftrightarrow a \vdots 7, a, m, n \in \mathbb{N}^*$.

19.12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì

a) $2^{2^{6n+2}} + 3 \vdots 19$; b) $2^{2^{2n+1}} + 3 \vdots 7$;

c) $2^{2^{4n+1}} + 7 \vdots 11$.

19.13. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$ là các số nguyên thoả mãn $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012} \vdots 30$.

Chứng minh rằng $a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_{2012}^5 \vdots 30$.

19.14. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p đều tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho $2^n - n \vdots p$.

19.15. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 14$ là số nguyên tố.

19.16. Hãy tìm :

a) Chữ số tận cùng của số 2^{3^4} ;

b) Hai chữ số tận cùng của các số : 3^{999} và $14^{14^{14}}$;

c) Ba chữ số tận cùng của số 2^{2012}.

19.17. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý và k là số lẻ thì tổng

$S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ chia hết cho tổng $S = 1 + 2 + \ldots + n$.

19.18. Tìm các chữ số x, y, z sao cho $\overline{13xy45z} \vdots 792$.

19.19. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng $ab^p - ba^p \vdots p$ với mọi số nguyên a, b.

19.20. Cho $p \geq 7$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng số $\underbrace{1111\ldots1}_{p-1 \text{ số } 1}$ chia hết cho p.

19.21. Tìm các số tự nhiên từ 200 đến 400 sao cho khi chia chúng cho 4, 5, 7 có số dư lần lượt là 2, 4, 5.

19.22. Tìm các số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 2011.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

Chuyên đề 1

1.1. a) $a^5 + b^5$.

b) $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$.

1.2. a) $6x^3 - 25x^2$.

b) $4x^{n+1}$.

1.3. a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) 0.

1.4. a) $D = 2x^4 - 5x^3$.

b) $|x - 2| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 1 \\ x - 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Với $x = 3$ thì $D = 27$; với $x = 1$ thì $D = -3$.

1.5. $E = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

$$|x| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Với $x = 2$ thì $E = 0$. Với $x = -2$ thì $E = -60$.

1.6. a) Biến đổi $f(49) = 49^6 - (49 + 1)49^5 + (49 + 1)49^4 - (49 + 1)49^3$

$+ (49 + 1)49^2 - (49 + 1)\,49 + (49 + 1) = 1$,

hoặc thay $50 = x + 1$ thì

$f(x) = x^6 - (x + 1)x^5 + (x + 1)x^4 - (x + 1)x^3 + (x + 1)x^2 - (x + 1)x + (x + 1) = 1$.

b) Đáp số : 1890.

1.7. a) $h(x) = -2$.

b) $k(x) = 3$.

1.8. a) $15.256 = (1 + 2 + 4 + 8).\,2^8 = 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11}$.

b) $775.625.5 = (5^2 + 5^3 + 5^4).\,5^5 = 5^7 + 5^8 + 5^9$.

1.9. Đặt $a = \dfrac{1}{1975}$; $b = \dfrac{1}{1945}$ thì

$$M = a(2b - 1) - b(1 - 2a) + (1 - a)(b + 1) - 3ab = 1 - 2a = 1 - \frac{2}{1975} = \frac{1973}{1975}.$$

1.10. a) $2ax^4 + 4bx^3 + 8cx^2 = 6x^4 - 20x^3 - 8x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6 \\ 4b = -20 \\ 8c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = -1. \end{cases}$

Tương tự a), đáp số : $a = 1$; $b = -1$; $c = -2$

(hoặc nhận xét có $ax.x^2 = x^3 \Rightarrow a = 1$; $b.2 = -2 \Rightarrow b = -1$.

Thay vào $(x - 1)(x^2 - cx + 2) = x^3 + x^2 - 2 \Rightarrow c = -2$.

1.11. a) $x = -5$. b) $x = 133$. c) $x = \frac{10}{3}$.

1.12. a) $(2 - n)(n^2 - 3n + 1) + n(n^2 + 12) + 8$

$= 2n^2 - 6n + 2 - n^3 + 3n^2 - n + n^3 + 12n + 8 = (5n^2 + 5n + 10) \vdots 5$.

b) Gọi hai số chẵn liên tiếp là x và x + 2.

$(x + 2)^2 - x^2 = 44 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 = 44 \Leftrightarrow 4x + 4 = 44 \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy hai số phải tìm là 10 và 12.

c) Hai số phải tìm là 11 và 13.

d) Gọi ba số là $(n - 1)$, n, $(n + 1)$ với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Ta có $n(n - 1) + n(n + 1) + (n - 1)(n + 1) = 74$.

Suy ra $3n^2 - 1 = 74 \Leftrightarrow 3n^2 = 75 \Leftrightarrow n^2 = 25 \Leftrightarrow n = 5$.

Vậy ba số phải tìm là 4 ; 5 ; 6.

1.13. a) $A = 123^2 + 2.123.77 + 77^2 = (123 + 77)^2 = 200^2 = 40000$.

b) $B = 3^{24} - (3^{12} - 1)(3^{12} + 1) = 3^{24} - (3^{24} - 1) = 1$.

c) $C = (85^2 - 15^2) + (75^2 - 25^2) + (65^2 - 35^2) + (55^2 - 45^2)$

$= 100.70 + 100.50 + 100.30 + 100.10 = 100(70 + 50 + 30 + 10) = 16000$.

d) $D = \frac{135^2 + 2.135.65 + 65^2}{(135 - 65)(135 + 65)} = \frac{(135 + 65)^2}{70.200} = \frac{20}{7}$.

e) $E = (1 - 2)(1 + 2) + (3 - 4)(3 + 4) + (5 - 6)(5 + 6) + \ldots + (2011 - 2012)(2011 + 2012)$

$-E = 3 + 7 + 11 + \ldots + 4023 = \frac{(4023 + 3)\left[(4023 - 3) : 4 + 1\right]}{2} = 2025078$.

Vậy $E = -2025078$.

1.14. a) *Cách 1* : $2011.2013 + 2012.2014 = (2012 - 1)(2012 + 1) + (2013 - 1)(2013 + 1)$

$= 2012^2 + 2013^2 - 2$.

Cách 2 : $2012^2 + 2013^2 - 2 = (2012^2 - 1) + (2013^2 - 1)$

$= (2012 - 1)(2012 + 1) + (2013 - 1)(2013 + 1)$

$= 2011.\ 2013 + 2012.\ 2014.$

b) Đặt $A = (9 + 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1)(9^8 + 1)(9^{16} + 1)(9^{32} + 1)$ và $B = 9^{64} - 1$.

thì $8A = (9 - 1)(9 + 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1)(9^8 + 1)(9^{16} + 1)(9^{32} + 1) = 9^{64} - 1 = B$

c) Với $x > y > 0$ thì $\dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{(x - y)(x + y)}{(x + y)^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} < \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

d) Với $x > y > 0$ thì ta có $\dfrac{(x + y)^3}{x^2 - y^2} = \dfrac{x^3 + y^3 + 3xy(x + y)}{x^2 - y^2}$

và $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = \dfrac{(x^2 - xy + y^2)(x + y)}{(x - y)(x + y)} = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$.

Vậy $\dfrac{(x + y)^3}{x^2 - y^2} > \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$.

1.15. a) $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 + c^2 - a^2 + b^2 + c^2)$

$= 4a^2(b^2 + c^2)$.

b) $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 - 4ac$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2ac - 2bc - 4ac = 4ab$.

c) Đáp số : $-(a^2 + b^2 + c^2)$.

d) Đáp số : $4(a^2 + b^2 + c^2)$.

1.16. a) $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2$

$= (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) - (a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2)$

$= (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$.

b) $(a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right]$

$= (a + b + c)(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2)$

$= 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

c) Thực hiện các phép tính ở cả hai vế ta cùng có kết quả :

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 6abc.$$

d) Bạn đọc tự giải.

1.17. a) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z$.

b) Biến đổi biểu thức đã cho về dạng $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$.

1.18. a) $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 5y + 6 = (x - y)^2 - 5(x - y) + 6 = 49 - 35 + 6 = 20.$

b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (2z - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 ; y = -2 ; z = 1,5.$

1.19. a) $5x(x - 3)(x + 3) - (2x - 3)^2 - 5(x + 2)^3 + 34x(x + 2) = 1$

$\Leftrightarrow 5x(x^2 - 9) - (4x^2 - 12x + 9) - 5(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 34x^2 + 68x = 1$

$\Leftrightarrow -25x = 50 \Leftrightarrow x = -2.$

b) Lưu ý $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 3^3.$

Bỏ ngoặc và rút gọn ta được $24x + 25 = 97 \Leftrightarrow x = 3.$

1.20. Từ $a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow a + b = -(c + d)$ nên $(a + b)^3 = -(c + d)^3.$

Suy ra $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 - d^3 - 3cd(c + d).$

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(a + b) - 3cd(c + d) = 3ab(c + d) - 3cd(c + d)$

$= 3(c + d)(ab - cd).$

1.21. a) $x^3 + 3x^2 + 3x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1$

$= (x + 1)^3 - 1 = 100^3 - 1 = 999999.$

b) $3(x^2 + y^2) - 2(x^3 + y^3) = 3x^2 + 3y^2 - 2(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= 3x^2 + 3y^2 - 2x^2 + 2xy - 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 1.$

c) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 + 3x + 3y + 2012$

$= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - 3(x^2 + 2xy + y^2) + 3(x + y) + 2012$

$= (x + y)^3 - 3(x + y)^2 + 3(x + y) + 2012.$

Đặt $x + y = a$, ta có $a^3 - 3a^2 + 3a + 2012 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + 2013$

$= (a - 1)^3 + 2013 = 100^3 + 2013 = 1002013.$

1.22. a) $2ab + b^2 + a^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$

$= (a + b + c)(a + b + c - 2c)$

$= 4m(4m - 2c) = 16m^2 - 8mc.$

b) Xét $\dfrac{a + b - c}{2} = \dfrac{a + b + c - 2c}{2} = \dfrac{4m - 2c}{2} = 2m - c.$

Tương tự $\dfrac{a - b + c}{2} = 2m - b$; $\dfrac{-a + b + c}{2} = 2m - a.$

Vế trái trở thành : $(2m - c)^2 + (2m - b)^2 + (2m - a)^2$

$= 4m^2 - 4mc + c^2 + 4m^2 - 4mb + b^2 + 4m^2 - 4ma + a^2$

$= 12m^2 - 4m(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2$

$= 12m^2 - 4m.4m + a^2 + b^2 + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 4m^2.$

1.23. a) Với $a \in \mathbb{Z}$ thì $a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+3a+2)(a^2+3a)+1$.

Đặt $a^2+3a = x$, ta có $(x+2)x+1 = x^2+2x+1 = (x+1)^2 = (a^2+3a+1)^2$ là số chính phương.

b) Ta có $n^2 < n^2+n+1 < n^2+2n+1$ hay $n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$.

Số n^2+n+1 nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên không phải là số chính phương.

Chuyên đề 2

2.1. a) Ta có $(x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz = 0 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0$.

Suy ra vế trái phải có một nhân tử bằng 0, chẳng hạn $x+y=0 \Rightarrow x=-y$

$\Rightarrow x^{2013} = -y^{2013}$

$\Rightarrow x^{2013}+y^{2013}+z^{2013} = -y^{2013}+y^{2013}+z^{2013} = z^{2013} = (x+y+z)^{2013}$.

b) Ta có $(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz$

nên $A = (x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$. Do $x+y+z \vdots 6$ nên trong ba số x, y, z có ít nhất một số chẵn $\Rightarrow 3xyz \vdots 6$. Vậy $A \vdots 6$.

2.2. a) $x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = x(x+3)-2(x+3) = (x+3)(x-2)$.

b) $(x+3)(x+2)$. c) $(x-1)(x-3)$.

d) $(x+4)(x+1)$. e) $(x+2)(x-3)$.

f) $2x^2+5x+3 = 2x^2+3x+2x+3 = x(2x+3)+(2x+3) = (2x+3)(x+1)$.

g) $(x-3)(2x-1)$. h) $(x+4)(3x-2)$.

i) $3x^2+7x-76 = 3x^2+19x-12x-76 = (x-4)(3x+19)$.

k) $2x^2+3881x-17505 = 2x^2+3890x-9x-17505 = (2x-9)(x+1945)$.

l) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{19}{6}x + 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x - 3x + 1 = (3x-1)\left(\frac{1}{6}x - 1\right)$.

2.3. a) $x^2 - x - 6 = \left(x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$= \left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = (x-3)(x+2).$$

b) $(x-2)(x-6)$. c) $(x-2)(x+5)$. d) $(x+1)(x-13)$.

e) *Cách 1* : $2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x^2 - 2.x.\frac{5}{4} + \frac{25}{16}\right) - \frac{49}{16}\right]$

$$= 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right] = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= (x - 3)(2x + 1).$$

Cách 2 : Đặt $y = 2x^2 - 5x - 3$ thì

$$2y = 4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 2.2x.\frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{49}{4}$$

$$= \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = (2x + 1)(2x - 6).$$

Vậy $y = (x - 3)(2x + 1)$.

f) $3(x + 2)(x - \frac{1}{3}) = (x + 2)(3x - 1)$.

g) $15\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{3}{5}\right) = (3x - 2)(5x + 3)$.

h) Đa thức $x^2 - 4x + 13 = x^2 - 4x + 4 + 9 = (x - 2)^2 + 3^2$ không phân tích được thành nhân tử.

2.4. a) $x^2 + bx + c = x^2 + 2.\frac{b}{2}.x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} - c\right)$.

Rõ ràng nếu $\left(\frac{b^2}{4} - c\right) = m^2$ ($m \in \mathbf{Q}$) thì xuất hiện dạng hiệu hai bình phương.

Khi đó $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - m^2 = \left(x + \frac{b}{2} - m\right)\left(x + \frac{b}{2} + m\right)$

Vậy : – Nếu $\left(\frac{b^2}{4} - c\right) = m^2$ ($m \in \mathbf{Q}$) thì đa thức phân tích được thành nhân tử.

– Nếu $\left(\frac{b^2}{4} - c\right) \neq m^2$ ($m \in \mathbf{Q}$) thì không phân tích được đa thức thành nhân tử (trong tập $\mathbf{Q}$).

b) Với $a \neq 1$; $a \neq 0$, ta có : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 + b_1x + c_1)$

với $b_1 = \frac{b}{a}$ và $c_1 = \frac{c}{a}$.

Như vậy : Điều kiện để $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ phân tích được thành nhân tử là

$\frac{b_1^2}{4} - c_1 = m^2$ $(m \in \mathbf{Q})$ với $b_1 = \frac{b}{a}$ và $c_1 = \frac{c}{a}$

hay : $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = m^2$ $(m \in \mathbf{Q})$.

Đa thức $2x^2 - 5x + 7$ không phân tích được thành nhân tử vì

$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{2} = -\frac{31}{16}$ không là bình phương của một số hữu tỉ.

2.5. a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

b) $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 3x^3 - 18x^2 - 33x - 18$

$= (x - 3)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

c) $(x - 7)(x - 3)(x + 2)$.

d) $(x - 3)(x + 1)(x + 2)(x + 5)$.

2.6. a) $6x^3 + x + 4 = 11x^2 \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1)(3x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$; $x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{4}{3}$.

b) Đặt $x^2 = y$ ta có $y^3 - 14y^2 + 49y - 36 = 0$

$\Leftrightarrow y^3 - 9y^2 - 5y^2 + 45y + 4y - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 9)(y - 4)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 9 \\ y = 4 \\ y = 1 \end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Có thể phân tích trực tiếp

$x^6 - 14x^4 + 49x^2 = 36 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

2.7. a) Thêm và bớt $4x^2$ vào đa thức :

$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$

$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

b) $x^4 + 324 = (x^4 + 36x^2 + 18^2 - 36x^2) = (x^2 - 6x + 18)(x^2 + 6x + 18)$.

c) $x^8 + 64 = (x^8 + 16x^4 + 64) - 16x^4 = (x^4 + 4x^2 + 8)(x^4 - 4x^2 + 8)$.

Lưu ý $(x^2)^2 + k^2 = (x^2)^2 + 2x^2k + k^2 - 2x^2k = (x^2 + k)^2 - 2x^2k$ $(k \in \mathbf{Q})$.

Nếu $2x^2k = m^2$ thì đa thức phân tích được thành nhân tử (trong tập $\mathbf{Q}$).

Khi ấy : $(x^2)^2 + k^2 = (x^2 + k)^2 - m^2 = (x^2 + k + m)(x^2 + k - m)$.

2.8. a) $x^{12} + x^6 + 1 = x^{12} + 2x^6 + 1 - x^6 = (x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)$.

b) $x^{16} + x^8 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$.

c) $x^8 + 7x^4 + 16 = x^8 + 8x^4 + 16 - x^4 = (x^4 + x^2 + 4)(x^4 - x^2 + 4)$.

d) $x^{40} + 2x^{20} + 9 = (x^{40} + 6x^{20} + 9) - 4x^{20} = (x^{20} + 2x^{10} + 3)(x^{20} - 2x^{10} + 3)$.

e) $x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + 1)^2 - (x^n)^2$

$= (x^{2n} + 1 + x^n)(x^{2n} + 1 - x^n)$.

Nếu n chẵn, tức là $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Khi ấy : $x^{2n} + 1 + x^n = x^{4k} + 1 + x^{2k}$ lại phân tích tiếp được thành nhân tử.

f) $x^{4n} + 5x^{2n} + 9 = (x^{4n} + 6x^{2n} + 9) - x^{2n} = (x^{2n} + x^n + 3)(x^{2n} - x^n + 3)$.

g) $x^{4n} + 4x^{2n} + 16 = (x^{2n} + 2x^n + 4)(x^{2n} - 2x^n + 4)$.

2.9. a) Thêm và bớt x^2. Đáp số $(x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$.

b) Thêm và bớt $x^2 + x$. Đáp số $(x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1)$.

c) Thêm và bớt x. Đáp số $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$.

d) Thêm và bớt $x^2 + x$. Đáp số $(x^2 + x + 1)(x^7 - x + 1)$.

e) $x^{10} + x^5 + 1 = x^8(x^2 + x + 1) - x^7(x^2 + x + 1) + x^5(x^2 + x + 1)$

$- x^4(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

2.10. a) $A = (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2)$. b) $B = (x^2 - 5x + 5)^2$.

c) $C = (x^2 - 10x + 21)(x^2 - 10x + 19)$. d) $D = (x^2 - 10x + 20)^2$.

e) $E = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24$.

Đặt $x^2 + 5x + 4 = t$.

Ta có : $E = t(t + 2) - 24 = t^2 + 2t + 1 - 25 = (t + 1)^2 - 25 = (t + 6)(t - 4)$.

Vậy $E = (x^2 + 5x + 10)(x^2 + 5x)$.

Chú ý. Có thể đặt $x^2 + 5x + 5 = v$. Ta có : $E = (v - 1)(v + 1) - 24 = (v - 5)(v + 5)$.

f) $F = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$.

2.11. a) Đặt $x^2 + 5xy + 4y^2 = k \in \mathbb{Z}$ do $x, y \in \mathbb{Z}$.

$S = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 = (k + y^2)^2$ là số chính phương.

b) Đặt $h = t^2 - 7t + 6$. Khi ấy :

1) $T = (t - 1)(t - 3)(t - 4)(t - 6) + 9 = (h + 3)^2 = (t^2 - 7t + 9)^2 \geq 0, \forall t$.

2) T là số chính phương với mọi $t \in \mathbb{Z}$.

2.12. a) $M = (x - a)(x - 2a)(x - 3a)(x - 4a) + m = [(x - a)(x - 4a)][(x - 2a)(x - 3a)] + m$

$= (x^2 - 5ax + 4a^2)(x^2 - 5ax + 6a^2) + m$. Đặt $x^2 - 5ax + 4a^2 = y$, ta có :

$M = y(y + 2a^2) + m = y^2 + 2ya^2 + m = y^2 + 2ya^2 + a^4 + m - a^4 = (y + a^2)^2 - (a^4 - m)$.

+ Nếu $m = a^4$ thì $M = (y + a^2)^2$.

+ Nếu $a^4 - m = n^2$ hay $m = a^4 - n^2$ thì $M = (y + a^2 + n)(y + a^2 - n)$,

với $y = x^2 - 5ax + 4a^2$; $a, m, n \in \mathbf{Q}$.

+ Nếu $a^4 - m \neq n^2$ thì M không phân tích được thành nhân tử (trong $\mathbf{Q}$).

$H = (x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 8) + 4$, không phân tích được thành nhân tử (trong $\mathbf{Q}$).

b) $N = (x + a)(x + b + n)(x + b)(x + a + n) + k$

$= [x^2 + (a + b + n)x + a(b + n)][x^2 + (a + b + n)x + b(a + n)] + k$.

Đặt $x^2 + (a + b + n)x + a(b + n) = y$.

Khi đó $x^2 + (a + b + n)x + b(a + n) = y - an + bn$.

Ta có $N = y(y - an + bn) + k = y^2 + n(b - a)y + k$

$= [y + \frac{1}{2}n(b - a)]^2 - [\frac{1}{4}n^2(b - a)^2 - k]$.

1) Để N phân tích được thành nhân tử thì $[\frac{1}{4}n^2(b - a)^2 - k] = t^2$.

2) Để N thành bình phương đúng thì $k = \frac{1}{4}n^2(b - a)^2$ (với $a, b, n, k, t \in \mathbf{Q}$).

2.13. a) $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc = (a - b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc)$.

b) $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc)$.

c) Đặt $a + b = x$; $b + c = y$; $c + a = z$ ta có $x + y + z = 2(a + b + c)$. Đa thức có dạng $x^3 + y^3 + z^3 - (x + y + z)^3$. Áp dụng kết quả câu b) ví dụ 2.3 ta có kết quả : $-3(x + y)(y + z)(z + x) = -3(a + 2b + c)(b + 2c + a)(c + 2a + b)$.

d) Đặt $x = a - b$; $y = b - c$ thì $c - a = -(x + y)$. Khi đó được

$-5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2) = 5(a - b)(b - c)(c - a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

2.14. a) Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$

$\Leftrightarrow a + b + c = 0$ hoặc $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)$

$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$

$\Leftrightarrow a - b = 0 ; b - c = 0 ; c - a = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$

b) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2c^2d^2 + d^4 - 4abcd + 2a^2b^2 + 2c^2d^2$

$= (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + (ab - cd)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = d.$

2.15. a) $x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - bc)x + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Leftrightarrow (x + a)^3 - 3bc(x + a) + b^3 + c^3 = 0.$ (*)

Đặt $x + a = y$ Ta có (*) $\Leftrightarrow y^3 + b^3 + c^3 = 3ybc.$

Theo bài tập 2.14b) ta có : $y + b + c = 0 \Leftrightarrow y = -b - c \Rightarrow x = -(a + b + c)$ hoặc $y = b = c$. Suy ra $x = b - a = c - a$.

b) Từ $x^3 + y^3 + 3xyz = z^3$, đặt $z = -t$, ta có $x^3 + y^3 + t^3 = 3xyt$.

Theo bài tập 2.14 ta có $x + y + t = 0$ hoặc $x = y = t$.

* Nếu $x + y + t = 0 \Leftrightarrow x + y = -t = z$.

Thay vào $z^3 = (2x + 2y)^2$, ta có $z = 4$ (Do $z \in \mathbf{Z}^+$)

Suy ra : $(x, y, z) = (1 ; 3 ; 4) ; (2 ; 2 ; 4) ; (3 ; 1 ; 4)$.

* Nếu $x = y = t = -z < 0$. Điều này không xảy ra.

2.16. a) $A = a^2b^2(a - b) + c^3(a^2 - b^2) - c^2(a^3 - b^3)$

$= (a - b)[a^2(b^2 - c^2) - c^2b(b - c) - c^2a(b - c)]$

$= (a - b)(b - c)[b(a^2 - c^2) + ac(a - c)]$

$= (a - b)(b - c)(a - c)(ab + ac + bc)$

(có thể thay $a - b = (c - b) - (c - a)$ như cách 2 Ví dụ 2.8)

b) $B = (a + 2b)(b + 2c)(c - 2a)$. c) $C = (b - a)(a - c)(b - c)$.

d) $D = (3a + b)(3b - c)(3c - a)$. e) $E = (a + b)(b + c)(c + a)$.

2.17. a) $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

* Với $a = 1$ ta có $2^2 = 1^2 + 2.1 + 1$

* Với $a = 2$ ta có $3^2 = 2^2 + 2.2 + 1$

* Với $a = 3$ ta có $4^2 = 3^2 + 2.3 + 1$

.....

* Với $a = n$ ta có $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Cộng vế với vế được $(n + 1)^2 = 1 + 2S_1 + n$ nên $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Tương tự sử dụng $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ và kết quả S_1 ở câu a)

tìm được $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Tương tự sử dụng $(a + 1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ và kết quả S_1 ở câu a)

và S_2 ở câu b) tìm được $S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2.18. a) 1) $A = n^3 + 2n^2 - 3 = (n - 1)(n^2 + 3n + 3)$.

Với $n = 2$ thì $n - 1 = 1$ và $n^2 + 3n + 3 = 13$. Khi đó $A = 13$ là số nguyên tố.

Vậy với $n > 2$ thì giá trị của A là hợp số.

2) $A = n^3 + 2n^2 - 3 = 2013 \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 - 2016 = 0$

$\Leftrightarrow (n - 12)(n^2 + 14n + 168) = 0$

$\Leftrightarrow n = 12$ (do $n^2 + 14n + 168 = (n + 7)^2 + 119 > 0, \forall n$).

b) $B = (n - 3)(n^3 + 2n^2 + 7)$.

Để B là số nguyên tố thì một trong hai thừa số phải bằng 1 và số còn lại là số nguyên tố.

Xét $n - 3 = 1 \Leftrightarrow n = 4$ thì $n^3 + 2n^2 + 7 = 103$ nên $B = 103$ là số nguyên tố.

Xét $n^3 + 2n^2 + 7 = 1 \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 + 6 = 0$ không tìm được $n \in N$ thoả mãn.

Vậy $n = 4$ là giá trị cần tìm.

2.19. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp hệ số bất định :

a) Đồng nhất $(ax + by + c)(mx + ny + d) = 2x^2 - 7xy + 6y^2 + 9x - 13y - 5$.

Đáp số : $(2x - 3y - 1)(x - 2y + 5)$.

b) Đồng nhất $(ax^2 + bx + c)(mx^2 + nx + d) = 2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 20x + 14$.

Đáp số : $(x^2 - 2x + 2)(2x^2 - 3x + 7)$.

c) Đáp số : $(x - 3)(x - 2)(2x^2 - 9x + 1945)$.

2.20. a) Gọi số chẵn đầu tiên là $2k$ ($k \in N^*$). Ta có

$$T = 2k(2k + 2)(2k + 4)(2k + 6) + 16 = 16k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 16$$
$$= 16[(k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1].$$

Đặt $k^2 + 3k = a$ thì $a \in N^*$ và $T = 16[a(a + 2) + 1] = [4(a + 1)]^2$ là số chính phương.

b) Với mọi x ta có $(x + a)(x - 2) - 7 = (x + b)(x + c)$ (1) nên với $x = 2$ thì

$$-7 = (2 + b)(2 + c).$$

Do $b, c \in \mathbb{Z}$ và vai trò của b và c như nhau nên có hai trường hợp :

Trường hợp 1 : $\begin{cases} 2 + b = -7 \\ 2 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -9 \\ c = -1 \end{cases}$. Thay vào (1) ta tìm được $a = -8$.

Ta có $(x - 8)(x - 2) - 7 = (x - 9)(x - 1)$.

Trường hợp 2 : $\begin{cases} 2 + b = 7 \\ 2 + c = -1 \end{cases}$. Tương tự ta có $(x + 4)(x - 2) - 7 = (x + 5)(x - 3)$.

Vậy $(a ; b ; c) \in \{(-8 ; -9 ; -1) ; (-8 ; -1 ; -9) ; (4 ; 5 ; -3) ; (4 ; -3 ; 5)\}$.

Chuyên đề 3

3.1. a) $a^{2013} - a^{2011} = a^{2010}(a^3 - a) \vdots 6$ do $a^3 - a \vdots 6$.

b) Xét hiệu $(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) \vdots 6$.

c) $a^3b - ab^3 = a^3b - ab + ba - ab^3 = b(a^3 - a) - a(b^3 - b) \vdots 6$.

d) Ta có $\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{3} = \frac{a^3 + 3a^2 + 2a}{6} = \frac{a(a + 1)(a + 2)}{6} \in \mathbb{Z}$ do tích của ba số nguyên liên tiếp $a(a + 1)(a + 2)$ chia hết cho 6.

e) Ta có $a^3 - a = a(a - 1)(a + 1)$.

Với a nguyên tố lớn hơn 3 thì a không chia hết cho 3, do đó :

Nếu $a = 3k + 1$ thì $a - 1 = 3k \vdots 3$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Nếu $a = 3k - 1$ thì $a + 1 = 3k \vdots 3 \Rightarrow (a - 1)(a + 1) \vdots 3$.

Với a nguyên tố lớn hơn 3 thì a lẻ $(a - 1)$ và $(a + 1)$ là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp có hai số chia hết cho 2, trong đó có một số chia hết cho 4 nên tích $(a - 1)(a + 1) \vdots 8$.

Ta có $(3 ; 8) = 1$ nên $(a - 1)(a + 1) \vdots 8 \times 3$,

tức là $(a - 1)(a + 1) \vdots 24 \Rightarrow a(a - 1)(a + 1) \vdots 24a$.

Vậy $a^3 - a \vdots 24a$ với a là số nguyên tố lớn hơn 3.

3.2. a) Ta có : $a^5 - a = (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5(a - 1)a(a + 1)$.

Ta có $(a - 1)a(a + 1) \vdots 6$ (vì là tích của ba số nguyên liên tiếp) nên $5(a - 1)a(a + 1) \vdots 30$.

Mặt khác $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) \vdots 30$ (vì là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên nó chia hết cho 5 và 6 mà $(5 ; 6) = 1$).

Vậy $a^5 - a \vdots 30$.

b) $a^5 + 59a = (a^5 - a) + 60a \vdots 30$ và $a^5 - 91a = (a^5 - a) - 90a \vdots 30$.

Tổng quát : $a^5 - (1 + 30k)a \vdots 30$ (với mọi $a, k \in \mathbf{Z}$).

c) $a^5 - 2b^5 + 3c^5 - 31a + 62b + 87c$

$= a^5 - 2b^5 + 3c^5 - a + 2b - 3c - 30a + 60b + 90c$

$= (a^5 - a) - 2(b^5 - b) + 3(c^5 - c) - 30a + 60b + 90c \vdots 30$.

d) Ta có $a^{2015}b^{2011} - a^{2011}b^{2015} = a^{2010}b^{2010}(a^5b - ab^5) \vdots 30$

(do $a^5b - ab^5 = a^5b - ab + ab - ab^5 = b(a^5 - a) - a(b^5 - b) \vdots 30$).

c) $\frac{a^5}{120} - \frac{a^3}{24} + \frac{a}{30} = \frac{a^5 - 5a^3 + 4a}{120} = \frac{(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)}{120} \in \mathbf{Z}$ (do tích của năm số nguyên liên tiếp $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) \vdots 120$).

3.3. Đề xuất các bài toán tương tự :

a) $a^7 - a \vdots 42$; $a^{n+7} - a^{n+1} \vdots 42$ $(a \in \mathbf{Z})$.

b) $a^7 - (1 + 42k)a \vdots 42$ $(a, k \in \mathbf{Z})$.

c) $a^7 + b^7 + c^7 - a - b - c \vdots 42$ $(a, b, c \in \mathbf{Z})$.

d) $a^7b - ab^7 \vdots 42$ $(a, b \in \mathbf{Z})$.

e) $\frac{a^7}{42} - \frac{a^5}{3} + \frac{7a^3}{6} - \frac{6a}{7} \in \mathbf{Z}$ $(a \in \mathbf{Z})$.

f) $3a^7 + 3b^7 - 3c^7 + 2013(a - c) - 2019b \vdots 126$ $(a, b, c \in \mathbf{Z})$

3.4. a) $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a = a(a+1)(a+2)(a+3) \vdots 3$ và $\vdots 8$ vì là tích của bốn số nguyên liên tiếp ; $(3 ; 8) = 1$ do đó chia hết cho $3.8 = 24$.

b) $a^5 - 5a^3 + 4a = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5 ; 3 ; 8, chúng đôi một nguyên tố cùng nhau.

Do đó $a^5 - 5a^3 + 4a \vdots 3.5.8 = 120$.

c) $3a^4 - 14a^3 + 21a^2 - 10a = a(a-1)(a-2)(3a-5)$

$= a(a-1)(a-2)(8a - 5a - 5) = a(a-1)(a-2)[8a - 5(a+1)]$

$= a(a-1)(a-2).8a - 5(a-2)(a-1)a(a+1)$.

$a(a-1)(a-2)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên $8a^2(a-1)(a-2) \vdots 24$.

Mặt khác $(a-2)(a-1)a(a+1)$ là tích của bốn số nguyên liên tiếp có chứa hai số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 24.

3.5. $(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = 3a^3 + 6a = 3a^3 - 3a + 9a = 3a(a-1)(a+1) + 9a \vdots 9$ do tích của ba số nguyên liên tiếp $(a-1)\,a\,(a+1) \vdots 3$.

3.6. a) $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = (2k)^4 - 4(2k)^3 - (2k)^2 + 16.2k$

$= 16k(k^3 - 2k^2 - k + 2) = 16(k-2)(k-1)\,k\,(k+1)$.

$(k-2)(k-1)k(k+1)$ chia hết cho 3 và chia hết cho 8 vì là tích của bốn số nguyên liên tiếp, mà $(3 ; 8) = 1$ do đó chia hết cho $3.8 = 24$.

Vậy $16\,(k-2)\,(k-1)\,k\,(k+1) \vdots 16.24 = 384$.

b) $m = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $m^3 + 20m = 8k^3 + 40k = 8k(k^2 - 1 + 6)$

$= 8(k-1)k(k+1) + 48k \vdots 48$ (do $(k-1)\,k\,(k+1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6).

c) $n^{12} - n^8 - n^4 + 513 = n^{12} - n^8 - n^4 + 1 + 512$

$= (n-1)^2(n+1)^2(n^{2+}1)^2\,(n^{4+}1) + 512$.

Với n lẻ, $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), suy ra

$n - 1 = 2k$; $n + 1 = 2(k+1)$; $n^2 + 1 = 2\,(2k^2 + 2k + 1) = 2q$ ($q \in \mathbb{Z}$)

$n^4 + 1 = (2k+1)^4 + 1 = (2k)^4 + 4.(2k)^3 + 6.(2k)^2 + 4.(2k) + 1 + 1 = 2p$ ($p \in \mathbb{Z}$)

$k(k+1) = 2t$ (vì là tích của hai số nguyên liên tiếp).

Do đó $n^{12} - n^8 - n^4 + 513 = 4k^2.\,4(k+1)^2\,4q^2.2p + 512 = 512t^2.q^2.p + 512 \vdots 512$.

3.7. a) $10^n + 18n - 55 = (10^n - 1) - 9n + 27n - 54 = 81k + 27n - 54 \vdots 27$.

b) $3^{3n+3} - 26n - 27 = 27.27^n - 27 - 26n = 27(27^n - 1) - 26n$

$= 26(27^n - 1) + (27^n - 1) - 26n$.

Ta có $26\,(27^n - 1) = 26.26\,k = 676k \vdots 169$.

$(27^n - 1) - 26n = 26(27^{n-1} + 27^{n-2} + \ldots + 27 + 1 - n) = 26.26\,t \vdots 169$.

Các bài trên đều có thể dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh.

3.8. a) $5^{n+3} - 3.5^{n+1} + 2^{6n+3} = 125.5^n - 15.5^n + 8.64^n$

$= 118.5^n - 8.5^n + 8.64^n = 118.5^n + 8(64^n - 5^n)$

$= 118.5^n + 8(64 - 5)k = 118.5^n + 8.59\,k \vdots 59$.

b) $8.\,5^{2n} + 11.\,6^n = 8.(25^{2n} - 6^n) + 19.6^n = 8.19k + 19.6^n \vdots 19$ ($n \in \mathbb{N}$).

3.9. a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $B = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 = 10^2.1000^{2n} + 10.1000^n + 1$

$= 10^2.(999+1)^{2n} + 10.(999+1)^n + 1$

$= 10^2.(111k_1 + 1) + 10.(111k_{2+}1) + 1$

$= 111.(10^2k_1 + 10k_2) + 111 \vdots 111$.

b) Với n lẻ ta có $10^3 + 1 = 1001 = 91.11 \vdots 91$

$$10^{6n} = (1001 - 1)^{2n} = (91.11 - 1)^{2n} = 91p + 1$$

$$10^{3n} = (1001 - 1)^n = (1001 - 1)^{2k+1}$$

$$= 1000.(1001 - 1)^{2k} = 1000.(91h + 1) = 91t + 1000.$$

Vậy $B = 10^2.10^{6n} + 10.10^{3n} + 1 = 10^2.(91p + 1) + 10.(91t + 1000)$

$$= 91d + 100 + 10000 + 1 = 91d + 10101 = 91d + 91.111 \vdots 91.$$

3.10. a) Với n chẵn $a^n - b^n = a^{2k} - b^{2k} = (a^2)^k - (b^2)^k$

$= (a^2 - b^2)[(a^2)^{k-1} + (a^2)^{k-2} b^2 + (a^2)^{k-3} (b^2)^2 + \ldots + (b^2)^{k-1}] \vdots a^2 - b^2$.

Với n chẵn $C = (16^n - 5^n) + (12^n - 1) \vdots 11$.

Theo câu a) : $16^n - 5^n \vdots (16 - 5)(16 + 5)$; $12^n - 1 \vdots (12 - 1)(12 + 1)$.

Đồng thời $C = (16^n - 1) + (12^n - 5^n) \vdots 17$.

Theo câu a) : $16^n - 1 \vdots (16 - 1)(16 + 1)$ và $12^n - 5^n \vdots (12 + 5)(12 - 5)$.

Do đó C chia hết cho 11 và 17 mà (11 ;17) = 1 nên $C \vdots 11.17$ hay $C \vdots 187$.

3.11. a) $12^{2000} - 2^{1000} = (12^4)^{500} - (2^4)^{250} = (...6) - (...6) = ...0 \vdots 10$.

b) $2011^{2013} + 2013^{2011} = (2011^{2013} + 1) + (2013^{2011} - 1)$

$= (2011 + 1)k + (2013 - 1)h \vdots 2012$.

3.12. a) $19^{2011} + 11^{2010} + 20^{11} = 19.(19^2)^{1005} + 11^{2010} + 20^{11}$

$= (...9) + (...1) + (...0) = 0 \vdots 10$.

b) $1930^{1930} + 1945^{1945} + (1954^2)^{977} + 1975^{1975} - 2011^{2011}$

$= (...0) + (...5) + (...6) + (...5) - (...1) = ...5 \vdots 5$.

3.13. a) Chứng minh $P \vdots 30$: Nhóm hai số hạng liên tiếp.

b) Chứng minh $P \vdots 126$: Nhóm $(5^1 + 5^4) + (5^2 + 5^5) + \ldots + (5^{97} + 5^{100})$.

c) Chữ số cuối cùng của P là 0.

3.14. a) $1983^{1983} - 1917^{1917} = 1983^3 (1983^4)^{495} - 1917.(1917^4)^{479} = (...7) - (...7) = ...0$.

b) $7^{2010^{2012}} - 3^{2008^{2010}} = 7^{4k} - 3^{4t} = (2400 + 1)^k - (80 + 1)^t$

$= (10m + 1) - (10s + 1) = 10(m - s) \vdots 10$.

c) $2222^{5555} = (7.317 + 3)^{5555} = 7k + 3^{5555}$

$5555^{2222} = (7.93 + 4)^{2222} = 7p + 4^{2222}$.

$E = 2222^{5555} + 5555^{2222} = 7(k + p) + (3^5)^{1111} + (4^2)^{1111}$.

Lại có $(3^5)^{1111} + (4^2)^{1111} \vdots (3^5 + 4^2) = 259 = 7.37$.

Vậy $E = 2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$.

3.15. Gọi số ấy là $\overline{abac}$ (a, b, c $\in$ N ; a, b, c $\leq$ 9 ; a $\neq$ 0).

a) $\overline{abac} \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{ac} \vdots 4$; $\overline{ac} = 10a + c = 4.2a + (2a + c) \vdots 4 \Leftrightarrow 2a + c \vdots 4$.

b) $\overline{abac} \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{bac} \vdots 8$;

$\overline{bac} = 100b + 10a + c = 8.12b + 8a + (4b + 2a + c) \vdots 8 \Leftrightarrow 4b + 2a + c \vdots 8$.

3.16. a) $n^2 + 8n + 17 = (n + 4)^2 + 1$ không chia hết cho $(n + 4)$.

b) $n^2 + 7n - 40 = (n + 9)(n - 2) - 22$.

Giả sử có số tự nhiên a sao cho $a^2 + 7a - 40 \vdots 121$

thì $(a + 9)(a - 2) - 22 = 121k \vdots 11$ (k $\in$ N).

Do $121 \vdots 11$ nên $(a + 9)(a - 2) \vdots 11$. Mà 11 là số nguyên tố nên $a + 9 \vdots 11$ hoặc $a - 2 \vdots 11$.

Ta lại có $(a + 9) - (a - 2) = 11 \vdots 11$ nên $a + 9 \vdots 11$ hoặc $a - 2 \vdots 11$ và $a - 2 \vdots 11$ $\Rightarrow (a + 9)(a - 2) \vdots 121 \Rightarrow 22 \vdots 121$, điều này vô lí.

Vậy $n^2 + 7n - 40 \not\vdots\ 121$.

c) $n^3 + 6n^2 + 11n + 7 = (n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 \not\vdots\ (n + 1)$; $(n + 2)$ và $(n + 3)$.

3.17. a) Gọi số $A = \overline{345abc} = 345000 + \overline{abc} = 168 \times 2053 + 96 + \overline{abc}$.

Do 3 ; 7 ; 8 đôi một nguyên tố cùng nhau nên để $A \vdots 3$; 7 ; 8 thì

$$A \vdots 3 \times 7 \times 8 = 168 \quad \Rightarrow 96 + \overline{abc} \vdots 168$$
$$96 + \overline{abc} = 168 \quad \Rightarrow \overline{abc} = 072$$
$$96 + \overline{abc} = 2 \times 168 \Rightarrow \overline{abc} = 240$$
$$96 + \overline{abc} = 3 \times 168 \Rightarrow \overline{abc} = 408$$
$$96 + \overline{abc} = 4 \times 168 \Rightarrow \overline{abc} = 576$$
$$96 + \overline{abc} = 5 \times 168 \Rightarrow \overline{abc} = 744$$
$$96 + \overline{abc} = 6 \times 168 \Rightarrow \overline{abc} = 912.$$

b) BCNN của 6 ; 7 ; 8 ; 9 và 11 là 5544.

Số cần tìm là $\overline{1975abcd} = 19750000 + \overline{abcd} = 3562 \times 5544 + 2272 + \overline{abcd}$.

Để $\overline{1975abcd} \vdots 5544$ thì $2272 + \overline{abcd} = 5544k$.

$2272 + \overline{abcd} = 5544 \Rightarrow \overline{abcd} = 3272$; $2272 + \overline{abcd} = 11088 \Rightarrow \overline{abcd} = 8816$.

3.18. a) Xét hiệu $5(20a + 11b) - (83a + 38b) = 17(a + b) \vdots 17$.

b) Xét $10(2a + 3b + 4c) - (13a + 23b + 33c) = 7(a + b + c) \vdots 7$.

3.19. a) Xét $n = 10t + r\ (1 \leq r \leq 9) \Rightarrow n^{10} + 1 = (10t + r)^{10} + 1 = 10k + r^{10} + 1$.

Để $n^{10} + 1 \vdots 10$ thì $r^{10} + 1 \vdots 10$.

Xét lần lượt r = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 thì chỉ có

$$3^{10} + 1 = 9^5 + 1 = (...9) + 1 = ...0 \vdots 10.$$

b) $2^n + 2015 = 2^n - 1 + 2016$ do $2016 \vdots 7$.

Ta xét $n = 3q + r$ ($q ; r \in \mathbb{N} ; 0 \le r \le 2$) thì $2^n - 1 = 2^r \times 2^{3q} - 1 = 2^r \times 8^q - 1$.

Với $r = 0$; $8^q - 1 = 7k \vdots 7$

Với $r = 1$; $2 \times 8^q - 1 = 2 \times (8^q - 1) + 1 = 2 \times 7h + 1 \not\vdots\ 7$.

Với $r = 2$; $4 \times 8^q - 1 = 4 \times (8^q - 1) + 3 = 2 \times 7h + 3 \not\vdots\ 7$. Vậy $n = 3q$.

c) $n^2 - 4n + 29 = (n - 2)^2 + 25$ do 5 là số nguyên tố nên $(n - 2)^2 \vdots 5$.

hay $(n - 2)$ chia hết cho $5 \Rightarrow n = 5k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$).

d) $n^2 + 2n + 6 = (n + 4)(n - 2) + 14 \vdots (n + 4) \Rightarrow 14 \vdots (m + 4) \Rightarrow m = 3 ; 10$

3.20. a) Xét tổng $(a - 2)^2 + (a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2 = 5(a^2 + 2)$.

Do a^2 không có tận cùng là 3 và 8 nên $(a^2 + 2) \not\vdots\ 5$.

Vậy $5(a^2 + 2)$ không chính phương.

b) Số chính phương có chữ số hàng đơn vị là 1 nên là bình phương của số có hàng đơn vị là 1 hoặc 9 tức là số $(10a \pm 1)^2$.

Xét $(10a \pm 1)^2 = 100a^2 \pm 20a + 1 = 10(10a^2 \pm 2a) + 1$.

Ta thấy $(10a^2 \pm 2a)$ chẵn và là số chục của số chính phương.

Vậy chữ số hàng chục của số chính phương có tận cùng bằng 1 là chữ số chẵn.

c) Một số chính phương có chữ số hàng chục là 3 nếu là số chẵn thì phải có tận cùng là 32 hoặc 36 (để chia hết cho 4). Nếu là số lẻ thì có tận cùng là 33 hoặc 37 (để chia 4 dư 1). Nhưng một số chính phương không có chữ số tận cùng là 2 ; 3 ; 7. Vậy một số chính phương có chữ số hàng chục là 3 thì chữ số hàng đơn vị của nó là 6.

3.21. a) $n \vdots 6 \Rightarrow n = 6k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow 1000n = 6000k = 15.k.20^2$. Để 1000n là số chính phương với $n \in \mathbb{N}^*$ thì 15k phải là số chính phương nên $k = 15t^2$ ($t \in \mathbb{N}^*$). Như vậy ta cần có $n = 6k = 90t^2$. Suy ra số nguyên dương n nhỏ nhất là 90.

b) Ta có $D = \dfrac{10^{2n} - 1}{9}$; $E = \dfrac{10^{n+1} - 1}{9}$; $F = 6.\dfrac{10^n - 1}{9}$.

$$D + E + F + 8 = \frac{10^{2n} + 10^{n+1} + 6.10^n + 64}{9} = \left(\frac{10^n + 8}{3}\right)^2 = \left(\underbrace{33...3}_{n-1 \text{ số } 3}6\right)^2$$

3.22. a) $E = \underbrace{11...1}_{n+1 \text{ chữ số } 1}\ \underbrace{00...0}_{n \text{ chữ số } 0} + \underbrace{11...1}_{n+1 \text{ chữ số } 1} = \underbrace{11...1}_{n+1 \text{ chữ số } 1} . 10^n + \underbrace{11...1}_{n+1 \text{ chữ số } 1}$

$= \underbrace{11...1}_{n+1 \text{ chữ số } 1} .(10^n + 1)$ là tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên là hợp số.

b) Đặt $\underbrace{11...1}_{n \text{ chữ số } 1} = k$ thì $9k + 1 = 10^n$.

Do đó $G = k.10^n + 2k = k(9k + 1 + 2)$

$= 3k(3k + 1) = \underbrace{33...3}_{n \text{ chữ số } 3} . \underbrace{33...3}_{n-1 \text{ chữ số } 3} .4$.

c) $Q = \overline{\underbrace{aa...a}_{n \text{ chữ số } a}\ \underbrace{bb...b}_{n \text{ chữ số } b}} = \overline{\underbrace{aa...a}_{n \text{ chữ số } a}\ \underbrace{00...0}_{n \text{ chữ số } 0}} + \overline{\underbrace{bb...b}_{n \text{ chữ số } b}}$

$= a. \underbrace{11...1}_{n \text{ chữ số } 1} .10^n + b. \underbrace{11...1}_{n \text{ chữ số } 1} = \underbrace{11...1}_{n \text{ chữ số } 1} .(a.10^n + b)$ nên là hợp số.

3.23. $n^2 - n = n(n - 1)$ là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

Do đó số $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) \vdots 2$.

Từ giả thiết $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2) \vdots 2$.

Do đó $(a + b + c + d) \vdots 2$. Mà $a + b + c + d > 2$ do $a, b, c, d \in N^*$

Vậy $a + b + c + d$ là một hợp số.

3.24. a) Gọi $(6n + 1 ; 5n + 1) = d$ $(d \in N^*)$ thế thì $6n + 1 \vdots d$ và $5n + 1 \vdots d$

$\Rightarrow 5(6n + 1) \vdots d$ và $6(5n + 1) \vdots d$ và $6(5n + 1) - 5(6n + 1) \vdots d$

$\Rightarrow 30n + 6 - 30n - 5 = 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Vậy $6n + 1$ và $5n + 1$ nguyên tố cùng nhau.

b) $2n - 1$ và $2n + 1$ là hai số lẻ liên tiếp. Gọi $(2n + 1 ; 2n - 1) = d$ thì $d \neq 2$.

Xét $2n + 1 - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

3.25. a) Đặt $a + 1 = p$, ta có $4a^2 + 8a + 5 = 4(a + 1)^2 + 1 = 4p^2 + 1$

và $6a^2 + 12a + 7 = 6(a + 1)^2 + 1 = 6p^2 + 1$.

Do $a + 1 = p$ nguyên tố nên $4p^2 + 1 > 5$ và $6p^2 + 1 > 5$. Ta có

$4p^2 + 1 = 5p^2 - (p - 1)(p + 1)$ và $6p^2 + 1 = 5p^2 + 5 + (p - 2)(p + 2)$.

Nếu p chia 5 dư 1 hoặc dư 4 thì $(p - 1)(p + 1) \vdots 5 \Rightarrow 4p^2 + 1$ không là số nguyên tố.

Nếu p chia 5 dư 2 hoặc dư 3 thì $(p - 2)(p + 2) \vdots 5 \Rightarrow 6p^2 + 1$ không là số nguyên tố.

Vậy để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố thì $p \vdots 5 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow a = 4$.
Thử lại $a = 4$ thoả mãn yêu cầu đầu bài.

b) Vì $p \neq 3$, p nguyên tố nên $p = 3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) = (p^2 - 1) \vdots 3.$$

Do đó số $A = 3n + 2014 + 2012p^2 = 3(n + 672 + 670p^2) + 2(p^2 - 1) \vdots 3$.

Do A lớn hơn 3 và chia hết cho 3 nên A là hợp số.

Chuyên đề 4

4.1. a) $2.8^{14} : 4^7 = 2.(2^3)^{14} : (2^2)^7 = 2^{43} : 2^{14} = 2^{29}$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{100} : \left(\frac{8}{27}\right)^{33} = \left(\frac{2}{3}\right)^{100} : \left(\frac{2}{3}\right)^{99} = \frac{2}{3}$.

c) $\frac{9^{25}.125^4.16^3.49^2}{3^{50}.50^7.21^3} = \frac{(3^2)^{25}.(5^3)^4.(2^4)^3.(7^2)^2}{3^{50}.(2.5^2)^7.(3.7)^3} = \frac{2^{12}.3^{50}.5^{12}.7^4}{2^7.3^{53}.5^{14}.7^3} = \frac{2^5.7}{3^3.5^2}$.

d) $(45.12^{10} + 8^7.81^3 - 16^5.27^4) : 4^{10}.9^6$

$= (3^2.5.3^{10}.2^{20} + 2^{21}.3^{12} - 2^{20}.3^{12}) : 2^{20}.3^{12}$

$= (5.2^{20}.3^{12} + 2.2^{20}.3^{12} - 2^{20}.3^{12}) : (2^{20}.3^{12}) = 5 + 2 - 1 = 6$.

4.2. a) $(-75x^4y^7) : (25x^2y^3) = -3x^2y^4 < 0$ do $x^2 > 0$; $y^4 > 0$.

b) $(x - 2y)^6 : (-2x^2 + 8xy - 8y^2) = (x - 2y)^6 : [-2(x - 2y)^2]$

$= -\frac{1}{2}(x - 2y)^4 < 0$ do $(x - 2y)^4 > 0$.

4.3. a) $\begin{cases} n + 2 \geq 4 \\ 2 \geq n - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{2 ; 3\}$.

b) $\begin{cases} 2n - 1 \geq 3 \\ 5 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

4.4. a) $a = -40,5$. b) $a = -2$.

c) Gọi thương là Q(x) dùng phương pháp trị số riêng :

$2x^2 + ax + 5 = (x + 3)Q(x) + 41$. Thay $x = -3$ tìm được $a = -6$.

4.5. a) Dùng phép chia đa thức hoặc phương pháp hệ số bất định.

Đáp số : $a = -1$; $b = -10$.

b) Đáp số : $a = 10$; $b = 18$.

c) Dùng phương pháp trị số riêng : $ax^3 + bx + 12 = (x - 1)(x + 2)P(x)$.

Thay $x = 1$ và $x = -2$ ta tìm được $a = 6$; $b = -18$.

4.6. Dùng phép chia đa thức hoặc phương pháp hệ số bất định.

a) Đáp số : $a = 8$; $b = 5$.

b) Đáp số : $a = 7$; $b = -6$.

c) Đáp số : $a = 5$; $b = -2$.

d) Đáp số : $a = 4$; $b = -5$.

4.7. a) *Cách 1* : Chia đa thức.

Cách 2 : Hệ số bất định.

Cách 3 : Xét $ax^3 + bx^2 - 11x + 30 = (x - 5)(x + 2)Q(x)$.

Với $x = 5$ ta có $125a + 25b - 55 + 30 = 0 \Leftrightarrow 5a + b = 1$.

Với $x = -2$ ta có $-8a + 4b + 22 + 30 = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 13$.

Từ đó tìm được $a = 2$; $b = -9$.

b) Đáp số : $a = 3$; $b = 4$.

c) Gọi thương trong phép chia $x^3 + ax + b$ cho $x - 2$ là $P(x)$ và cho $x + 1$ là $Q(x)$.

Ta có $x^3 + ax + b = (x - 2)P(x) + 12$

$x^3 + ax + b = (x + 1)Q(x) - 6$.

Lần lượt thay $x = 2$ và $x = -1$ vào ta có $\begin{cases} 8 + 2a + b = 12 \\ -1 - a + b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2. \end{cases}$

4.8. a) Phân tích $4x^4 + 81 = (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$.

Đáp số $a = 2$; $b = \pm 6$; $c = 9$.

b) Ta có :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x + 2)A(x) + 8$$
$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x + 1)B(x) + 8$$
$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - 1)C(x) + 8.$$

Thay $x = -2$; -1 ; 1 lần lượt vào ta có $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c = 8 \\ -1 + a - b + c = 8 \\ 1 + a + b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 6. \end{cases}$

4.9. $ax^3 + bx^2 + c = (x - 2).\ A(x)$

$ax^3 + bx^2 + c = (x^2 - 1).\ B(x) + 2x + 5$.

Từ đó có $\begin{cases} 8a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 7 \\ -a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 12. \end{cases}$

4.10. $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2015 = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 2015$.

Đặt $x^2 + 8x + 7 = y$ ta có $y(y + 8) + 2015 = y^2 + 8y + 15 + 2000$

$= (y + 3)(y + 5) + 2000$

$= (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) + 2000$.

Vậy số dư trong phép chia $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2015$ cho $x^2 + 8x + 10$ là 2000.

4.11. *Cách 1* : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 2)M(x) + 2012$

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 1)N(x) + 2012$

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + 1)P(x) + 2012$

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + 2)Q(x) + 2012.$

Suy ra $\begin{cases} 16 + 8a + 4b + 2c + d = 2012 \\ 1 + a + b + c + d = 2012 \\ 1 - a + b - c + d = 2012 \\ 16 - 8a + 4b - 2c + d = 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -5 \\ c = 0 \\ d = 2016. \end{cases}$

Cách 2 : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) + 2012$

$= x^4 - 5x^2 + 4 + 2012 = x^4 - 5x^2 + 2016.$

Vậy $a = c = 0$; $b = -5$; $d = 2016$.

4.12. a) $h(y) = y^4 - 5y^2 + 4 = (y^2 - 1)(y^2 - 4) = (y - 2)(y - 1)(y + 1)(y + 2)$

$k(y) = y^2 + 3y + 2 = (y + 1)(y + 2).$

Do vậy $g(y) = (y - 1)(y - 2) = y^2 - 3y + 2.$

b) $g(y) = y^2 - 3y + 2 = 72 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 70 = 0 \Leftrightarrow (y + 7)(y - 10) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -7 \\ y = 10. \end{array}\right.$

c)* Chia thông thường :

Đặt phép chia thông thường :

$$\begin{array}{rrrrr|l} & y^4 - 3y^3 & + ay^2 & - 6y + 2b & & y^2 - 3y + 2 \\ \cline{6-6} - & y^4 - 3y^3 & + 2y^2 & & & y^2 + (a - 2) \\ \cline{1-5} & & (a - 2)y^2 & + 6y + 2b & & \\ & - & (a - 2)y^2 & - (3a - 6)y + 2a - 4 & & \\ \cline{3-5} & & & (3a - 12)y + 2b - 2a + 4 & & \end{array}$$

Đa thức f(y) chia hết cho g(y) khi đa thức dư bằng 0 với mọi giá trị của y tức là

$(3a - 12)y + 2b - 2a + 4 = 0, \forall y \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 12 = 0 \\ 2b - 2a + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}.$

* Phương pháp hệ số bất định :

$f(y) = y^4 - 3y^3 + ay^2 - 6y + 2b = (y^2 - 3y + 2)(y^2 + mx + n)$. Khai triển và đồng nhất hệ số các hạng tử cùng bậc ta cũng có $m = 0$; $n = 2$; $a = 4$; $b = 2$.

* Phương pháp trị số riêng : $f(y) = (y - 1)(y - 2)q(y)$.

$$\begin{cases} f(1) = a + 2b - 8 = 0 \\ f(2) = 4a + 2b - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 8 \\ 4a + 2b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2. \end{cases}$$

Chuyên đề 5

5.1. a) $A.(9x^2 - 4) = (3x - 2)(15x^2 + 10x)$

hay $A.(3x - 2)(3x + 2) = 5x(3x - 2)(3x + 2)$. Vậy $A = 5x$.

b) $A.(x - 2) = (2x - 3)(3x^2 - 5x - 2)$

hay $A.(x - 2) = (2x - 3)(x - 2)(3x + 1)$.

Vậy $A = (2x - 3)(3x + 1) = 6x^2 - 7x - 3$.

c) $A.(x^2 - 4) = (x + 2)^2(x + 3)(x - 2)$

hay $A.(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x + 2)(x + 3)$.

Vậy $A = (x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$.

d) Phân tích các mẫu thành nhân tử, ta có :

$$\frac{2x + 1}{(x + 2)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \text{ hay } A.(x + 2) = (2x + 1)(x + 1).$$

Vậy $A = \dfrac{(2x + 1)(x + 1)}{x + 2}$.

5.2. a) $B = (x + 1)(2x - 5)$

nên $\dfrac{2x - 5}{3x^2 + 4} = \dfrac{(2x - 5)(x + 1)}{(3x^2 + 4)(x + 1)} = \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{3x^3 + 3x^2 + 4x + 4}$.

b) $\dfrac{(x + 1)(x^2 + x - 6)}{(x^2 - 9)(x^2 + 3x + 2)} = \dfrac{(x + 1)(x + 3)(x - 2)}{(x - 3)(x + 3)(x + 2)(x + 1)} = \dfrac{x - 2}{x^2 - x - 6}$.

5.3. a) $\dfrac{2^{18}.54^3 + 15.4^{10}.9^4}{2.12^9 + 6^{10}.2^{10}} = \dfrac{2^{21}.3^9 + 2^{20}.3^9.5}{2^{19}.3^9 + 2^{20}.3^{10}} = \dfrac{2^{20}.3^9(2 + 5)}{2^{19}.3^9(1 + 2.3)} = 2.$

b) $\dfrac{4^{15}.27^6.42 - 3.72^{10}}{4^4.25.36^{10} - 4^5.6^{19}.35} = \dfrac{2^{31}.3^{19}.7 - 2^{30}.3^{21}}{2^{28}.3^{20}.5^2 - 2^{29}.3^{19}.5.7} = \dfrac{2^{30}.3^{19}.(7.2 - 3^2)}{2^{28}.3^{19}.5.(3.5 - 7.2)} = 4.$

c) $\dfrac{880.(15^2.3^{18} + 27^7)}{4^2.15^4.3^{16} - 2^4.9^{11}} = \dfrac{55.2^4.(5^2.3^{20} + 3^{21})}{2^4.(5^4.3^{20} - 3^{22})} = \dfrac{11.5.3^{20}.(5^2 + 3)}{3^{20}.(5^2 - 3)(5^2 + 3)} = \dfrac{5}{2}$.

5.4. a) Đặt 2012 = a thì $M = \dfrac{2a(a+2)-2}{a-1+a(a+1)} = \dfrac{2(a^2+2a-1)}{a^2+2a-1} = 2.$

b) Đáp số : N = – 1.

c) Đặt 11111 = x ; 87560 = y.

Ta có $P = \dfrac{6x(y+4)-3x}{2xy+7x} = \dfrac{6xy+21x}{2xy+7x} = \dfrac{3x(2y+7)}{x(2y+7)} = 3.$

5.5. a) $Q = \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \dfrac{x-2}{x-3}.$

b) $R = \dfrac{(x+2y)(3x-y)}{(3x-y)(x-2y)} = \dfrac{x+2y}{x-2y}.$

c) $S = \dfrac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{(x^2-4)(x+1)(x+3)} = (x-1)(x-3).$

d) $T = \dfrac{(x^2-y^2)(x^4+y^4+x^2y^2)}{(x^4+y^4+x^2y^2)(x^2+y^2)} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

5.6. a) $A = \dfrac{(a^2-2)^2-a^2}{a^4-(a-2)^2} = \dfrac{(a^2-2-a)(a^2-2+a)}{(a^2-a+2)(a^2+a-2)} = \dfrac{a^2-2-a}{a^2-a+2}.$

b) $B = \dfrac{(a+2)(a-1)^2}{(2a-3)(a-1)^2} = \dfrac{a+2}{2a-3}.$

c) $C = \dfrac{(a-b-c)(a-b+c)}{(a-b+c)^2} = \dfrac{a-b-c}{a-b+c}.$

d) $D = \dfrac{(a+3)(a-1)(a-2)}{(a+3)^3(a-2)^2} = \dfrac{a-1}{(a+3)^2(a-2)}.$

e) Tử : $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$

Mẫu : $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$

Vậy $E = \dfrac{a+b+c}{2}.$

5.7. a) $A = \dfrac{(x-y)(y-z)(y+z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \dfrac{y+x}{z-x}$

b) Phân tích tử : $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(x^2-z^2)$;

mẫu : $(x-y)(y-z)(x-z)$.

Vậy $B = (x+y)(y+x)(z+x)$.

5.8. a) $A = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}{-3(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)} = \dfrac{-1}{3(x + y + z)}$.

b) $B = \dfrac{1}{2}(x - y + z)$.

c) Phân tích mẫu thành nhân tử : đặt $x^2 - y^2 = a$; $y^2 - z^2 = b$; $z^2 - x^2 = c$.

Ta có $a + b + c = 0$, do đó $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (xem bài tập 2.14)

Ta phân tích được : mẫu thành $3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)$

và tử thành $3(x - y)(y - z)(z - x)$.

Vậy $C = \dfrac{1}{(x + y)(y + z)(z + x)}$.

5.9. a) $\dfrac{(n + 2)!}{n!(n + 2)(n + 3)} = \dfrac{n!(n + 1)(n + 2)}{n!(n + 2)(n + 3)} = \dfrac{n + 1}{n + 3}$.

b) $\dfrac{n!}{n! + (n - 1)!} = \dfrac{(n - 1)!n}{(n - 1)!(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$.

c) $\dfrac{(n + 3)! - (n + 2)!}{(n + 2)! + (n + 3)} = \dfrac{n + 2}{n + 4}$.

5.10. a) Giả sử $(4n + 3, 3n + 2) = d$.

$3(4n + 3) - 4(3n + 2) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

b) Bạn đọc tự giải.

c) Gọi d là ước chung của $2n + 3$ và $2n^2 + 4n + 1$.

Ta có $\quad 2n + 3 \vdots d \Rightarrow n(2n + 3) = 2n^2 + 3n \vdots d$

$\Rightarrow (2n^2 + 4n + 1) - (2n^2 + 3n) = n + 1 \vdots d \Rightarrow 2(n + 1) \vdots d$

$\Rightarrow (2n + 3) - 2(n + 1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

5.11. Cả tử và mẫu đều chứa nhân tử $n^2 + n + 1 > 1$.

5.12. Xét $(x^4 + x^2 + 1).P = (x^{32} + x^{16} + 1).(x^{32} + x^{16} + 1)$.

Vậy $P = \dfrac{(x^{32} + x^{16} + 1)^2}{x^4 + x^2 + 1}$.

5.13. a) Với $x < 1$ thì

$$\frac{|x - 2| + |x - 1| + x}{2x^2 - 7x + 3} = \frac{2 - x + 1 - x + x}{3 - x - 6x + 2x^2} = \frac{3 - x}{(3 - x)(1 - 2x)} = \frac{1}{1 - 2x}.$$

b) Với $4 < x < 5$ thì $|x - 4| = x - 4$ và $|x - 5| = 5 - x$

nên $\dfrac{|x-4|.|x-5|}{x^3 - 9x^2 + 20x} = \dfrac{(x-4)(5-x)}{x(4-x)(5-x)} = -\dfrac{1}{x}$.

5.14. a) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) = (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12)$.

Đặt $x^2 + 7x + 11 = y$ thì $T = \dfrac{(y-1)(y+1)+1}{y} = \dfrac{y^2 - 1 + 1}{y} = y = x^2 + 7x + 11$

b) Phân tích tử thành $(x + 8)(x^2 - 8x + 11)$; mẫu thành $(x^2 - 8x + 11)^2$.

Đáp số : $U = \dfrac{x+8}{x^2 - 8x + 11}$.

5.15. Đặt $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z} = \dfrac{1}{k}$ thì $x = ak$; $y = bk$; $z = ck$.

Thay vào $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$ được kết quả cần tìm.

5.16. Từ $ax + by + cz = 0$, suy ra

$(ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(abxy + acxz + bcyz) = 0$.

Kết hợp với khai triển mẫu được mẫu là $(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2)$.

Vậy $V = \dfrac{1}{a+b+c}$.

5.17. Khai triển mẫu được $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(xy + yz + zx)$

Từ $x + y + z = 0$ suy ra $(x + y + z)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yx + xz)$.

Do đó mẫu bằng $3(x^2 + y^2 + z^2)$. Suy ra điều phải chứng minh.

5.18. Để ý rằng : $x^2 + y^2 - z^2 - 2zt + 2xy - t^2 = (x + y)^2 - (z + t)^2$

$x^2 - y^2 + z^2 - 2yt + 2xz - t^2 = (x + z)^2 - (y + t)^2$

5.19. Nhận xét : $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$

$= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 1 + 1)(n^2 + 2n + 1 + 1)$

$= [(n - 1)^2 + 1][(n + 1)^2 + 1]$.

Do đó : $X = \dfrac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)(11^2+1)(13^2+1)(15^2+1)}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)(11^2+1)(13^2+1)(15^2+1)(17^2+1)}$

$= \dfrac{1^2+1}{17^2+1} = \dfrac{1}{145}$.

Chuyên đề 6

6.1. a) Đáp số : $\dfrac{3(x-1)}{x+1}$; b) Đáp số : $\dfrac{x-y}{(x+y)^2}$;

c) $T = \dfrac{3x-2}{x+1930}.\dfrac{30x-4}{x+1975} - \dfrac{3x-2}{x+1975}.\dfrac{29x-1979}{x+1930}$

$= \dfrac{3x-2}{x+1930}.\left(\dfrac{30x-4}{x+1975} - \dfrac{29x-1979}{x+1975}\right) = \dfrac{3x-2}{x+1930}$.

d) $S = \dfrac{x+9}{(x+4)(x-1)} + \dfrac{x+12}{(x+1)(x+4)} + \dfrac{x-5}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x+23}{(x+4)(x+1)}$;

$P = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-5)(x+2)} : \dfrac{(3x+23)(x-1)}{(x+4)(x-1)} = \dfrac{(x+1)(x+4)}{(x-5)(3x+23)}$;

$S.P = \dfrac{1}{x-5}$.

e) Rút gọn $Q = \dfrac{(a+x-1)^2}{2ax}$. Thay $x = a^2 - a + 1$, ta được $Q = \dfrac{a^3}{2(a^2-a+1)}$.

6.2. a) $\dfrac{6x^2-x-1}{x^3-x} = \dfrac{(a+b+c)x^2+(b-c)x-a}{x^3-x}$.

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases} -a = -1 \\ b-c = -1 \\ a+b+c = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 1 ; b = 2 ; c = 3.$

Hoặc dùng phương pháp trị số riêng :

$$6x^2 - x - 1 = a(x-1)(x+1) + bx(x+1) + cx(x-1).$$

Lần lượt thay $x = 0 ; 1 ; -1$ ta được $a = 1 ; b = 2 ; c = 3$.

b) $\dfrac{6x^3-5x^2+3}{x^4-1} = \dfrac{(a+b+c)x^3+(a-b+d)x^2+(a+b-c)x+(a-b-d)}{x^4-1}$.

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases} a+b+c = 6 \\ a-b+d = -5 \\ a+b-c = 0 \\ a-b-d = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 1 ; b = 2 ; c = 3 ; d = -4.$

6.3. a) $A = \dfrac{b-c+a-c+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \dfrac{2}{(a-b)(b-c)}$.

b) $B = \dfrac{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$.

Ta có $bc(b-c) - a^2c + ac^2 + a^2b - ab^2 = bc(b-c) + a^2(b-c) - a(b^2 - c^2)$

$= (b-c)(bc + a^2 - ab - ac) = (b-c)[a(a-c) - b(a-c)]$

$= (b-c)(a-b)(a-c)$.

Vậy $B = \dfrac{1}{abc}$.

c) Để ý rằng $C = abc$. $B \Rightarrow C = 1$.

d) $D = \dfrac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \dfrac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1$.

e) $E = \dfrac{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$

$= \dfrac{(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = a + b + c$.

6.4. $M = \dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

Ta có $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \dfrac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)} = \dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a-c}$. (1)

Tương tự $\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \dfrac{1}{b-c} - \dfrac{1}{b-a}$ (2)

$\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \dfrac{1}{c-a} - \dfrac{1}{c-b}$. (3)

Cộng từng vế của (1) ; (2) ; (3) ta có điều phải chứng minh.

6.5. Từ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0$, suy ra $abc \neq 0$ và $bcx + acy + abz = 0$.

$\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 2 \Rightarrow xyz \neq 0$ và $\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2} + \dfrac{c^2}{z^2} + 2\left(\dfrac{ab}{xy} + \dfrac{ac}{xz} + \dfrac{bc}{yz}\right) = 4$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2} + \dfrac{c^2}{z^2} + 2.\dfrac{abz + acy + bcx}{xyz} = 4 \Rightarrow \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2} + \dfrac{c^2}{z^2} = 4$.

Chia hai vế cho abc, ta được $\dfrac{a}{bcx^2} + \dfrac{b}{acy^2} + \dfrac{c}{abz^2} = \dfrac{4}{abc}$.

6.6. $T = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \dfrac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \dfrac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$

Từ $a + b + c = 0$ suy ra $a + b = -c \Rightarrow (a + b)^2 = (-c)^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$

$\Rightarrow c^2 - a^2 - b^2 = 2ab.$

Tương tự : $b^2 - c^2 - a^2 = 2ac.$

$a^2 - b^2 - c^2 = 2bc.$

Do đó $T = \dfrac{a^2}{2bc} + \dfrac{b^2}{2ac} + \dfrac{c^2}{2ab} = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}.$

Ta đã biết nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (xem ví dụ 6.8)

nên $T = \dfrac{3abc}{2abc} = \dfrac{3}{2}.$

6.7. Theo giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0.$

Vì $a + b + c \neq 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$

$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow P = \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{2}{a}.\dfrac{2}{b}.\dfrac{2}{c} = \dfrac{8}{abc}.$

6.8. Từ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ suy ra $ab + ac + bc = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} = \dfrac{3}{abc}$ (xem ví dụ 6.8).

Vậy $\dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ac}{b^2} + \dfrac{ab}{c^2} = a.b.c\left(\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3}\right) = abc.\dfrac{3}{abc} = 3.$

6.9. a) Nhân tử và mẫu của phân thức thứ hai với a ; chia cả tử và mẫu phân thức thứ ba với c (hoặc nhân với ab) và để ý rằng $abc = 1$ ta có :

$$E = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{ab}{1 + ab + a} + \frac{1}{a + 1 + ab} = \frac{1 + a + ab}{1 + a + ab} = 1.$$

b) Giải tương tự a). Đáp số : $G = 1$.

6.10. Giải tương tự bài 6.9a). Đáp số : H = 1.

6.11. $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a-b} \Rightarrow \frac{1}{a-b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a}$.

Ta có $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c}=\frac{c+a-b}{(a-b)c}$ (1)

và $\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a}=\frac{a-b+c}{(b-c)a}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(a-b)c=(b-c)a$

$$\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}.$$

6.12. Đặt $x-y=a$; $y-z=b$; $z-x=c$ thì $a+b+c=0$.

Mặt khác $A=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$,

$$B=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=\frac{2ab+2ac+2bc}{abc}.$$

Do đó $A+B=\frac{(a+b+c)^2}{abc}=0$.

6.13. $C=\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz}$; $D=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz}$; $E=\frac{x+y+z}{xyz}$.

$(C-D):E=\frac{2xyz(x+y+z)}{xyz}:\frac{x+y+z}{xyz}=2xyz.$

6.14. Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, suy ra $ab+bc+ca=0$ nên $bc=-ab-ca$.

Do đó $a^2+2bc=a^2+bc-ab-ca=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c)$.

Tương tự : $b^2+2ac=(b-a)(b-c)$; $c^2+2ab=(c-a)(c-b)$.

a) $P=\frac{bc+1}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca+1}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab+1}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{(bc+1)(c-b)+(ca+1)(a-c)+(ab+1)(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

b) $Q = \dfrac{a^2 + bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2 + ca}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2 + ab}{(c-a)(c-b)} = 2.$

6.15. Do $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} = 0$ nên

$$a + b + c = \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c$$

$$= \frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b}$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}\right) = 1.$

6.16. Từ $\dfrac{a-(c-b)}{b-c} + \dfrac{b-(a-c)}{c-a} + \dfrac{c-(b-a)}{a-b} = 3$

$$\Rightarrow \frac{a}{b-c} + 1 + \frac{b}{c-a} + 1 + \frac{c}{a-b} + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b-c} = \frac{b}{a-c} + \frac{c}{b-a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(c-a)(a-b)}.$$

Nhân hai vế với $\dfrac{1}{b-c}$ ta được $\dfrac{a}{(b-c)^2} = \dfrac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$ (1)

Tương tự cũng có : $\dfrac{b}{(c-a)^2} = \dfrac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (2)

$$\frac{c}{(a-b)^2} = \frac{a^2 - ca + cb - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

6.17. Từ $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$, suy ra $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$. Do đó

$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}$; $b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c-a}{ca}$; $c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$.

Vì thế $(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}$

$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0$ (do $abc \neq 1$) $\Rightarrow a = b = c$.

6.18. a) Từ $ab + bc + ca = abc$, suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = 1$.

Ta lại có $a + b + c = 0$ suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = 4 \Rightarrow$ đpcm.

c) $4 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 2 + 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow ab + bc + ca = 1$. Chia hai vế cho abc ta được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$.

6.19. a) $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = bc + ac + ab$.

Ta có $(abc - 1) + (a + b + c) - (bc + ac + ab) = 0$

nên $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$. Suy ra một trong ba số a, b, c bằng 1.

b) Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc} = \frac{1}{n} = \frac{1}{a+b+c}$

$\Rightarrow (bc + ca + ab)(a + b + c) = abc \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

Tồn tại một tổng hai số bằng 0 nên số còn lại bằng n.

c) $\frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b^2 - c^2}{bc} + \frac{c^2 - a^2}{ca} = 0$

$\Rightarrow c(a^2 - b^2) + a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) = 0$

$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0$, suy ra điều phải chứng minh.

6.20. Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, suy ra $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{bc} = \frac{1}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{bc}$.

$$A = \frac{a^2(b^2 + c^2) - b^2c^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{bc}.$$

Tương tự : $B = \dfrac{b^2(a^2 + c^2) - a^2c^2}{a^2b^2c^2} = -\dfrac{2}{ac}$; $C = \dfrac{c^2(a^2 + b^2) - a^2b^2}{a^2b^2c^2} = -\dfrac{2}{ab}$.

Vậy $ABC = -\dfrac{8}{a^2b^2c^2}$.

6.21. $D = \dfrac{9!(3^2 - 1)(7^2 - 1)(11^2 - 1)(15^2 - 1)}{(5^2 - 1)(9^2 - 1)(13^2 - 1)(17^2 - 1)} = \dfrac{9!.2.4.6.8.10.12.14.16}{4.6.8.10.12.14.16.18} = \dfrac{9!}{9} = 8!.$

Với $n \in N^*$ ta có $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1) = (n + 1)(n^2 - 2n + 1 + n)$

$$= (n + 1)[(n - 1)^2 + n]$$

$$E = \frac{(1^3+1)(2^3+1)(3^3+1)...(9^3+1)}{(1^2+2)(2^2+3)...(8^2+9)} = \frac{2.3.(1^2+2).4.(2^2+3)...10.(8^2+9)}{(1^2+2)(2^2+3)...(8^2+9)} = 10!.$$

Vậy $\dfrac{D}{E} = \dfrac{8!}{10!} = \dfrac{1}{90}$.

Chuyên đề 7

7.1. a) $A = = \dfrac{y - 2x}{xy} : \dfrac{(2x - y)(2x + y)}{x} = \dfrac{-1}{y(2x + y)}$.

b) $B = \dfrac{y}{x}$.

c) $C = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 10x + 9x - 3}{x^2 + 5x - 2x - 10} : \dfrac{x^2 + 5x - 3x - 3}{x + 5}$

$$= \frac{(x^3 + 3x^2) - (x + 3)}{x(x + 5) - 2(x + 5)} . \frac{x + 5}{(x^2 + 3x) - (x + 3)}$$

$$= \frac{(x + 3)(x^2 - 1)}{(x + 5)(x - 2)} . \frac{x + 5}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{x + 1}{x - 2}.$$

d) $D = \left[x(x - 1) + \dfrac{4(x - 1)}{2 + x}\right] : \left[x^2 - \dfrac{2x^2 + 8}{x + 2}\right]$

$$= \frac{(x - 1)(2x + x^2 + 4)}{x + 2} . \frac{x + 2}{x^3 - 8} = \frac{x - 1}{x - 2}.$$

7.2. a) $E = \dfrac{a+x+1}{a+x-1}.\dfrac{2ax-1+a^2+x^2}{2ax} = \dfrac{a+x+1}{a+x-1}.\dfrac{(a+x)^2-1}{2ax} = \dfrac{(a+x+1)^2}{2ax}$.

b) $F = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{3+4x^2-4x+1} - \dfrac{3}{3+4x^2+4x+1}\right)\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$

$= \left(\dfrac{1}{x^2-x+1} - \dfrac{1}{x^2+x+1}\right).\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$

$= \dfrac{2x}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}.\dfrac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

c) Ta có $\dfrac{(x-y)-(y-z)-(z-x)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = \dfrac{2(x-y)}{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}$.

$\dfrac{x^2-yz}{1+\dfrac{y+z}{x}} + \dfrac{y^2-zx}{1+\dfrac{z+x}{y}} + \dfrac{z^2-xy}{1+\dfrac{x+y}{z}} = \dfrac{x(x^2-yz)}{x+y+z} + \dfrac{y(y^2-zx)}{x+y+z} + \dfrac{z(z^2-xy)}{x+y+z}$

$= \dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z} = \dfrac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{x+y+z}$,

$= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$.

Vậy $G = x - y$.

d) $H = \dfrac{(x+y)^2-z^2}{2xy}.\dfrac{x+y+z}{yz(x+y-z)}.\dfrac{4xy.x}{x+y+z} = \dfrac{2x(x+y+z)}{yz}$.

7.3. a) I xác định khi $x + 1 \neq \pm y$.

$$I = \frac{(x+y)^2-1}{(x+1)^2-y^2} = \frac{x+y-1}{x+1-y} = 2012.$$

b) K xác định khi $x \neq 1$; $x \neq -1$; $x \neq -2$.

$K = \left(\dfrac{x^4+1}{x^3-1} - x\right) : \left(\dfrac{x}{x^2+x+1} - \dfrac{2}{x-1}\right) = \dfrac{x+1}{x^3-1}.\dfrac{x^3-1}{-(x+1)(x+2)}$

$= -\dfrac{1}{x+2} = -\dfrac{1}{2015}$.

c) Với $y \neq 0$; $x \neq 3y$ thì giá trị phân thức L xác định.

Với $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$, ta có

$$L = \frac{4x^4(x-3y) - y^4(x-3y)}{y^2\left[2x^2(x-3y) + y^2(x-3y)\right]} = \frac{(x-3y)(2x^2+y^2)(2x^2-y^2)}{y^2(x-3y)(2x^2+y^2)}$$

$$= \frac{2x^2 - y^2}{y^2} = 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}.$$

7.4. a) $x = \pm 1$; b) $x = 2$; $x = 3$; $x = -5$; c) $x = 7$.

7.5. a) $x \in \{-3; -1; 0; 2\}$.

b) $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

c) ĐKXĐ : $x \neq -7$. Ta có

$$\frac{x^2 - 44}{x+7} = \frac{(x^2-49)+5}{x+7} = x - 7 + \frac{5}{x+7} \Rightarrow 5 \vdots (x+7)$$

$\Rightarrow x \in \{-12; -8; -6; -2\}$.

d) $(x+1) \vdots (x^2+1) \Rightarrow (x-1)(x+1) = (x^2+1) - 2 \vdots (x^2+1)$

$\Rightarrow 2 \vdots (x^2+1) \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$.

e) ĐKXĐ $x \neq 4$. Ta có

$$\frac{x^3 + x - 2}{x^3 - 3x^2 - 2x - 8} = \frac{\left(x^3 - 3x^2 - 2x - 8\right) + 3(x^2 + x + 2)}{(x-4)(x^2+x+2)} = 1 + \frac{3}{x-4}$$

$\Rightarrow 3 \vdots (x-4) \Rightarrow x \in \{1; 3; 5; 7\}$.

7.6. Đặt $\frac{15}{x^2+3} = k \Rightarrow x^2 = \frac{15-3k}{k} \geq 0$ nên $0 < k \leq 5$.

k	1	2	3	4	5
$x^2 = \frac{15-3k}{k}$	12	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{3}{4}$	0
$x \in \mathbf{Q}$					0

Vậy $x = 0$ là giá trị hữu tỉ duy nhất thoả mãn đầu bài.

7.7. a) Do $2x + 3y \neq 0$ nên giá trị phân thức M xác định.

Từ $x^2 - 2xy = 3y^2$, suy ra $x^2 - 2xy - 3y^2 = (x+y)(x-3y) = 0$

$\Rightarrow x = 3y$ (do $x + y \neq 0$).

Vậy : $\frac{2x-3y}{2x+3y}=\frac{3y}{9y}=\frac{1}{3}$.

b) Ta có $N=\frac{24xy}{49x^2-y^2}=\frac{24xy}{(7x-y)(7x+y)}$.

Do $7x>y>0$ nên $7x-y>0$; $7x+y>0$ giá trị phân thức N xác định và $x>0$.

Ta có $7x^2+y^2=8xy \Rightarrow (x-y)(7x-y)=0 \Rightarrow x=y$ do $7x-y>0$.

Vậy $N=\frac{24x^2}{48x^2}=\frac{1}{2}$.

7.8. $P^2=\frac{25x^2+16y^2-40xy}{25x^2+16y^2+40xy}=\frac{50xy-40xy}{50xy+40xy}=\frac{1}{9}$.

Vì $4y<5x<0 \Rightarrow 5x-4y>0$; $5x+4y<0 \Rightarrow P<0$. Vậy $P=-\frac{1}{3}$.

7.9. Từ $x+2y=13z$ và $x-3y=-12z \Rightarrow x=3z$; $y=5z$.

Thay vào $Q=\frac{2x^2-3xy}{x^2+3y^2}=\frac{18z^2-45z^2}{9z^2+75z^2}=-\frac{9}{28}$.

7.10. a) Với điều kiện của đầu bài thì giá trị của biểu thức R xác định.

Từ $2b-a=10 \Rightarrow 2b=a+10$ và $a=2b-10$. Thay a vào phân thức thứ nhất và 2b vào phân thức thứ hai, ta có

$$R=\frac{2b-10}{b-5}+\frac{5a+3(a+10)}{4a+15}=\frac{2(b-5)}{b-5}+\frac{2(4a+15)}{4a+15}=2+2=4.$$

b) $S=\frac{7a-2(2a-5)}{3a+10}-\frac{7b-2(b+5)}{15b-30}=\frac{3a+10}{3a+10}-\frac{5b-10}{3(5b-10)}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

7.11. Với điều kiện của đầu bài thì giá trị của biểu thức T xác định.

$$T=\frac{5a-b}{4a-b}+\frac{3b-2a}{4a+b}=\frac{(5a-b)(4a+b)+(4a-b)(3b-2a)}{(4a-b)(4a+b)}$$

$$=\frac{12a^2+15ab-4b^2}{16a^2-b^2}.$$

Thay $15ab=4a^2+3b^2$, ta được $T=\frac{16a^2-b^2}{16a^2-b^2}=1$.

7.12. a) Từ $x^2-52x+2=0$, suy ra $x^2+2=52x$.

Ta có $x^4+4=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$.

Do đó $x^2+2+2x=54x$ và $x^2+2-2x=50x$. Thay vào được $U=100$.

b) Tương tự $X=16$.

7.13. Từ $\left(x-\frac{1}{x}\right):\left(x+\frac{1}{x}\right)=n$ suy ra $\frac{x^2-1}{x^2+1}=n \Rightarrow x^2-nx^2=n+1 \Rightarrow x^2=\frac{1+n}{1-n}$.

Thay vào được $V=\frac{2n}{1+n^2}$.

7.14. Cộng theo vế của (1) ; (2) ; (3), ta được $2(ax+by+cz)=5(a+b+c)$.

Do $by+cz=5a$ nên $2a(x+5)=5(a+b+c)$.

Suy ra $\frac{1}{x+5}=\frac{2a}{5(a+b+c)}$.

Tương tự $\frac{1}{y+5}=\frac{2b}{5(a+b+c)}$; $\frac{1}{z+5}=\frac{2c}{5(a+b+c)}$

Do đó $M=\frac{2(a+b+c)}{5(a+b+c)}=\frac{2}{5}$.

7.15. a) Ta có $(5x+5y+5z)^2-(25xy+25yz+25zx)$

$=25[(x+y+z)^2-(xy+yz+zx)]$.

Xét $(x+y+z)^2-(xy+yz+zx)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-xy-yz-zx=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx=0$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+y^2+2yz+z^2+z^2+2zx+x^2=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=0 \Leftrightarrow x+y=y+z=z+x=0$

$\Leftrightarrow x=y=z=0$.

Vậy để phân thức A xác định thì x, y, z không đồng thời bằng 0.

b) Đặt $x^2+y^2+z^2=a$ và $xy+yz+zx=b$ thì $(x+y+z)^2=a+2b$.

Khi đó $A=\frac{a(a+2b)+b^2}{5(a+2b-b)}=\frac{a^2+2ab+b^2}{5(a+b)}=\frac{(a+b)^2}{5(a+b)}=\frac{a+b}{5}$.

Vậy $A=\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{5}$.

7.16. a) $B=\frac{(a+2)(a^2-1)}{a^n(a^2-2a-3)}\left[\frac{4(a+1)}{4(a-1)(a+1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right]$

$=\frac{(a+2)(a-1)(a+1)}{a^n(a+1)(a-3)}\left[\frac{1}{a-1}-\frac{3}{a(a-1)}\right]$

$=\frac{(a+2)(a-1)(a+1)(a-3)}{a^n(a+1)(a-3)a(a-1)}=\frac{a+2}{a^{n+1}}$.

b) Với $a \neq \pm 1$; $a \neq 3$; $a \neq 0$ thì giá trị của B xác định. Khi đó với n = 1 thì

$$B = \frac{a+2}{a^2} = 3 \Leftrightarrow 3a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(3a+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Trường hợp a = 1 loại vì không thoả mãn ĐKXĐ. Vậy $a = -\dfrac{2}{3}$.

7.17. $$C = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} = \frac{(x^2-y^2)+(x^3+y^3)}{(x+y)(1-y)(1+x)}$$

$$= \frac{(x+y)(x-y+x^2-xy+y^2)}{(x+y)(1-y)(1+x)} = \frac{x-y+x^2-xy+y^2}{(1-y)(1+x)}.$$

$$D = \frac{x^2y^2+x^2y^3}{1+x-y^2-xy^2} = \frac{x^2y^2(1+y)}{(1+x)(1-y^2)} = \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}.$$

Khi đó $$C - D = \frac{x-y+x^2-xy+y^2-x^2y^2}{(1-y)(1+x)}$$

$$= \frac{(1-y)(1+x)(x-y+xy)}{(1-y)(1+x)} = x - y + xy.$$

b) Với $x \neq -1$; $y \neq \pm 1$; $x \neq -y$ thì giá trị của (C – D) xác định.

C – D = 9 nghĩa là $x - y + xy = 10 \Leftrightarrow y(x-1) + (x-1) = 10 - 1$

$\Leftrightarrow (x-1)(y+1) = 9$. Do $x \in \mathbf{Z}$; $y \in \mathbf{Z}$ nên ta có :

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y+1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x-1=-1 \\ y+1=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-10 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x-1=3 \\ y+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x-1=-3 \\ y+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x-1=9 \\ y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x-1=-9 \\ y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Các cặp số này đều thoả mãn ĐKXĐ nên :

$(x ; y) = (2 ; 8) ; (4 ; 2) ; (10 ; 0) ; (0 ; -10) ; (-2 ; -4) ; (-8 ; -2)$.

7.18. a) $E = \dfrac{(x+3)^2}{(x-3)(x^2+6x-9)}.\left[\dfrac{x^2-9}{(x+3)^2} + \dfrac{2}{3x}.\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}\right]$

$= \dfrac{(x+3)^2}{(x-3)(x^2+6x-9)}.\dfrac{x^2+6x-9}{(x+3)^2} = \dfrac{1}{x-3}.$

$F = \dfrac{(3+x)(3-x)^2}{(3-x).9x^2}.\left[\dfrac{3}{3-x} - \dfrac{9(x^2-3x+9)}{(3+x)(x^2-3x+9)(3-x)}\right]$

$= \dfrac{(3+x)(3-x)}{9x^2}.\left[\dfrac{3}{3-x} - \dfrac{9}{(3-x)(3+x)}\right]$

$= \dfrac{(3+x)(3-x)}{9x^2}.\dfrac{3(x+3)-9}{(3-x)(3+x)} = \dfrac{1}{3x}.$

Với $x \neq 0$; $x \neq \pm 3$; $(x+3)^2 \neq 18$ (do $x^2 + 6x - 9 = (x+3)^2 - 18 \neq 0$ còn $x^2 - 3x + 9 = x^2 - 2x\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4} = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} \neq 0, \forall x$) thì giá trị của E và F xác định.

b) Ta có $\dfrac{E}{F} = \dfrac{3x}{x-3} = \dfrac{3x-9+9}{x-3} = 3 + \dfrac{9}{x-3}$. Suy ra $x - 3$ là ước của 9. Từ đó tìm được $x \in \{-6; 2; 4; 6; 12\}$ (loại $x = 0$).

c) $\left|\dfrac{E}{F}\right| = 9 \Rightarrow \dfrac{E}{F} = \dfrac{3x}{x-3} = \pm 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} \\ x = \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$

d) $\dfrac{E}{F} > 2$, tức là $\dfrac{E}{F} = \dfrac{3x}{x-3} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{x-3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+6}{x-3} > 0.$

Xét $\begin{cases} x+6>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow x > 3$; $\begin{cases} x+6<0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow x < -6.$

Vậy $x > 3$ hoặc $x < -6$.

e) $\dfrac{E}{F} = 2013$ tức là $\dfrac{3x}{x-3} = 2013 \Rightarrow x = \dfrac{2013}{670}$.

f) $|x - 1| = 2012 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2013 \\ x = -2011 \end{array}\right.$. Từ đó $\dfrac{E}{F} = \dfrac{2013}{670}$ và $\dfrac{E}{F} = \dfrac{6033}{-2014}$

7.19. a) Ta có $P = \frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a}$.

Theo giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0$.

* Nếu $a+b+c=0$ tức là $a+b=-c$; $b+c=-a$; $c+a=-b$

thì $P = \frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a} = \frac{-cab}{bca} = -1$.

* Nếu $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$

tức là $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ hay $a=b=c$

thì $P = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) = 2.2.2 = 8$.

b) Đặt $M = \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}$.

Ta có $M.\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a-b}.\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)+1$

$$= \frac{c}{a-b}.\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}+1$$

$$= \frac{c}{a-b}.\frac{(a-b)(c-a-b)}{ab}+1 = \frac{2c^2}{ab}+1 = \frac{2c^3}{abc}+1.$$

Tương tự : $M.\frac{a}{b-c} = 1+\frac{2a^3}{abc}$; $M.\frac{b}{c-a} = 1+\frac{2c^3}{abc}$.

Do đó $Q = \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+3$. Với $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$ (xem bài tập 2.14) nên $Q=9$.

7.20. a) Nhận xét $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$.

Do đó $E = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

$$= 1-\frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}.$$

b) Nhận xét $\frac{3}{n(n+3)} = \frac{(n+3)-n}{n(n+3)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}$.

Do đó $3F = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3} = \frac{n+2}{n+3}$.

Vậy $F = \frac{n+2}{3(n+3)}$.

c) Ta có $1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$.

Từ đó $G = \left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right)\left(1 - \frac{2}{4.5}\right)\left(1 - \frac{2}{5.6}\right)...\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$

$= \frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}.\frac{4.7}{5.6}.\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{3n}$.

7.21. a) $1 + \frac{bc}{a(a+n)} = \frac{a(a+b+c)+bc}{a(a+n)} = \frac{a(a+b)+c(a+b)}{a(a+n)} = \frac{(a+b)(a+c)}{a(a+n)}$.

$A = \left(1 + \frac{2}{1.4}\right)\left(1 + \frac{2}{2.5}\right)...\left(1 + \frac{2}{100.103}\right)$

$= \frac{2.3}{1.4}.\frac{3.4}{2.5}.....\frac{101.102}{100.103} = \frac{2.3.....101}{1.2.....100}.\frac{3.4.....102}{4.5.....103} = \frac{303}{103}$.

b) $1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{a^2+ac+ab+bc-bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} = \frac{a(a+n)}{(a+b)(a+c)}$

$B = \left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right)...\left(1 - \frac{2}{101.102}\right) = \frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.....\frac{100.103}{101.102}$

$= \frac{1.2.....100}{2.3.....101}.\frac{4.5.....103}{3.4.....102} = \frac{103}{303}$.

Chuyên đề 8

8.1. a) $x = 2$; b) $x = -2$; c) $x = 5$; d) $x = -\frac{2}{5}$; e) $x = -2$.

8.2. a) $x = -\frac{23}{48}$; b) $x = 2$; c) $x = 1$.

8.3. a) $y = 2$; b) $y = -4$; c) $y = 0,1$.

8.4. Để $x = 4$ là nghiệm ta phải có

$$9 - (2 + n) - 49 = 2(5 - n) + 10n + 10 + 1 \Leftrightarrow n = -7.$$

8.5. Giải phương trình $(x + 1)(x + 3) = x(x - 3) + 24$ được nghiệm $x = 3$. Như vậy nghiệm phương trình thứ nhất là 1, tức là :

$$1 - \frac{2n-3}{4} - 2 + 5n = 1 - 9 + 10. \text{ Ta tìm được } n = \frac{1}{2}.$$

8.6. a) Thêm 1 vào mỗi phân thức ở cả hai vế rồi biến đổi được :

$$(2x + 100)\left(\frac{1}{95} + \frac{1}{94} + \frac{1}{93} - \frac{1}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = -50.$$

b) Biến đổi thành :

$$\left(\frac{74-x}{26}+1\right)+\left(\frac{75-x}{25}+1\right)+\left(\frac{76-x}{24}+1\right)+\left(\frac{77-x}{23}+1\right)+\left(\frac{78-x}{22}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (100 - x)\left(\frac{1}{26} + \frac{1}{25} + \frac{1}{24} + \frac{1}{23} + \frac{1}{22}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 100.$$

c) Biến đổi thành :

$$\left(\frac{x-50}{50}-1\right)+\left(\frac{x-51}{49}-1\right)+\left(\frac{x-52}{48}-1\right)+\left(\frac{x-53}{47}-1\right)+\left(\frac{x-200}{25}+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x - 100)\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \frac{1}{47} + \frac{1}{25}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 100.$$

d) Biến đổi thành :

$$\left(\frac{5x-150}{50}-1\right)+\left(\frac{5x-102}{49}-2\right)+\left(\frac{5x-56}{48}-3\right)+\left(\frac{5x-12}{47}-4\right)$$
$$+\left(\frac{5x-660}{46}+10\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (5x - 200)\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \frac{1}{47} + \frac{1}{46}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 40.$$

8.7. a) ĐKXĐ : $a \neq \pm 3$.

Biến đổi phương trình thành $(x - a)(a - 3) + (x - 3)(a + 3) = -6a$

$$\Leftrightarrow 2ax = (a - 3)^2.$$

Nếu $a \neq 0$ và $a \neq \pm 3$ thì $x = \dfrac{(a-3)^2}{2a}$.

Nếu $a = 0$ thì phương trình trở thành $0x = 9$, phương trình vô nghiệm.

b) Do $abc \neq 0$ nên $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$.

Nhân hai vế của phương trình với $abc \neq 0$ ta được phương trình tương đương :

$$a(x-a) - ac + b(x-b) - ab + c(x-c) - bc = ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow x(a+b+c) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(a+b+c) - (a+b+c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)[x - (a+b+c)] = 0$$

* Nếu $a + b + c \neq 0$ thì nghiệm của phương trình là $x = a + b + c$.

* Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm.

8.8. a) ĐKXĐ $a \neq 2$; $b \neq 2$; $a \neq -b$.

Biến đổi phương trình thành :

$$\left(\frac{x-a}{b-2} - 1\right) + \left(\frac{x-b}{a-2} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{a+b} - 1\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-a-b+2}{b-2} + \frac{x-b-a+2}{a-2} + \frac{x+2-a-b}{a+b} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b+2)\left(\frac{1}{b-2} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+b}\right) = 0.$$

Nếu $\frac{1}{b-2} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+b} \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = a + b - 2$.

Nếu $\frac{1}{b-2} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+b} = 0$ phương trình trở thành $0.(x - a - b + 2) = 0$ thoả mãn với mọi x. Phương trình có vô số nghiệm.

b)Biến đổi phương trình về dạng :

$$\left(\frac{x-b-c}{a} - 1\right) + \left(\frac{x-c-a}{b} - 1\right) + \left(\frac{x-a-b}{c} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow [x - (a+b+c)]\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0.$$

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0$ thì $x = a + b + c$.

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm.

8.9. a) $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}\right).503x$

$$= 2013 + \frac{2014}{2} + \frac{2015}{3} + ... + \frac{4023}{2011} + \frac{4024}{2012} - 2012.$$

Ta có $\frac{2013}{1}+\frac{2014}{2}+\frac{2015}{3}+...+\frac{4023}{2011}+\frac{4024}{2012}-2012$

$=\left(\frac{2013}{1}-1\right)+\left(\frac{2014}{2}-1\right)+\left(\frac{2015}{3}-1\right)+...+\left(\frac{4023}{2011}-1\right)+\left(\frac{4024}{2012}-1\right)$

$=2012.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}\right)$. Vậy $x=4$.

b) $\left(\frac{0,6+\frac{3}{7}-\frac{3}{11}}{1+\frac{5}{7}-\frac{5}{11}}+\frac{\frac{2}{3}-1,5+\frac{2}{9}}{\frac{5}{3}-3,75+\frac{5}{9}}\right)=\frac{3\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)}{5\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)}+\frac{2\left(\frac{1}{3}-0,75+\frac{1}{9}\right)}{5\left(\frac{1}{3}-0,75+\frac{1}{9}\right)}$

$=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=0$ nên ta có $1+93x=0-7x+21 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$.

8.10. a) $\left(1-\frac{1}{57}\right)+\frac{58}{57}+2(x-1)=\frac{2x+7}{3}+\frac{5x-8}{4}$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{2x+7}{3}+\frac{5x-8}{4} \Leftrightarrow 24x=8x+28+15x-24 \Leftrightarrow x=4.$

b) $\left(\frac{3030}{1212}+\frac{3030}{2020}+...+\frac{3030}{9090}\right)=\left(\frac{30}{12}+\frac{30}{20}+...+\frac{30}{90}\right)$

$=30\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{9.10}\right)=30\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)=30.\frac{7}{30}=7.$

$\frac{2013.2014-2011}{2014.2011+2017}=1$. Do đó $\Leftrightarrow 7(2x-1)=x+12x+12 \Leftrightarrow x=19.$

c) Đặt $A=\left(\frac{2011}{1.11}+\frac{2011}{2.12}+...+\frac{2011}{100.110}\right)$

$=\frac{2011}{10}\left(\frac{10}{1.11}+\frac{10}{2.12}+...+\frac{10}{100.110}\right)$

$=\frac{2011}{10}\left(\frac{11-1}{1.11}+\frac{12-2}{2.12}+...+\frac{110-100}{100.110}\right)$

$=\frac{2011}{10}\left(1-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{110}\right)$

$=\frac{2011}{10}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-...-\frac{1}{110}\right)$

Xét $\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{110}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{110}\right)$

$+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{100}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{110}\right)=M$ nên $A=\frac{2011}{10}.M$

Đặt $B=\frac{2012}{1.101}+\frac{2012}{2.102}+...+\frac{2012}{10.110}$

$=\frac{2012}{100}\left(\frac{101-1}{1.101}+\frac{102-2}{2.102}+...+\frac{110-10}{10.110}\right)$

$=\frac{2012}{100}\left(1-\frac{1}{101}+\frac{1}{2}-\frac{1}{102}+...+\frac{1}{10}-\frac{1}{110}\right)=\frac{2012}{100}M.$

Vậy $\frac{2011}{10}Mx=\frac{2012}{100}M.$

Suy ra $x=\frac{2012}{100}:\frac{2011}{10}=\frac{2012}{100}.\frac{10}{2011}=\frac{2012}{20110}=\frac{1006}{10055}.$

Chuyên đề 9

9.1 a) $x=7$, $x=-1$; b) $x=-5$, $x=1$;

c) $x=3$, $x=-3$, $x=-5$; d) $x=-1$, $x=\frac{11}{5}$.

9.2. a) $x^3-x^2+x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ (do $x^2+1>0, \forall x$).

b) $x^3+x^2-x-1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)=0$, suy ra $x=-1$, $x=1$.

c) $x^3+x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+2)=0$.

Suy ra $x=-1$; $x=2$; $x=-2$.

d) $x^3+x^2+4=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-x+2)=0$.

Do $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0, \forall x$ nên $x=-2$.

c) $(x-1)^2(x-3)+(x-1)^2(x+3)=72$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot 2x = 72$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2+x-36=0$

$\Leftrightarrow x^3-4x^2+2x^2-8x+9x-36=0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x^2+2x+9)=0.$

Do $x^2+2x+9=(x+1)^2+8>0, \forall x$ nên $x=4$.

9.3. a) $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2)(x-1)(x+1)=0.$

Suy ra $x=-1$; $x=1$; $x=2$; $x=3$.

b) $x^6-4x^4-x^2+4=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=0.$

Suy ra $x=\pm 1$; $x=\pm 2$.

c) $24x^3-10x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)(3x+1)(4x-1)=0.$

Suy ra $x=\frac{1}{2}$; $x=-\frac{1}{3}$; $x=\frac{1}{4}$.

9.4. a) *Cách 1* : Biến đổi thành $(x+1)(x-2)(x^2-x+6)=0$. Suy ra nghiệm của phương trình là $x=-1$; $x=2$.

Cách 2 : $(x^2-x)^2=12+4x-4x^2 \Leftrightarrow (x^2-x)^2+4(x^2-x)-12=0$

Đặt $x^2-x=y$ ta có phương trình $y^2+4y-12=0 \Leftrightarrow (y+6)(y-2)=0.$

* $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$ nên $x=-1$; $x=2$.

* $x^2-x+6=0$ vô nghiệm vì $x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0.$

Nghiệm của phương trình là $x=-1$; $x=2$.

b) *Cách 1* : Khai triển rồi phân tích thành $(x-2)(x+3)(x^2+x+4)=0.$

Nghiệm của phương trình là $x=-2$; $x=3$.

Cách 2 : $(x^2-x)(x^2+3x+2)=24 \Leftrightarrow (x-1)x(x+1)(x+2)=24$

$\Leftrightarrow (x^2+x)(x^2+x-2)=24.$

Đặt $x^2+x=y$ phương trình trở thành $y(y-2)=24 \Leftrightarrow (y-6)(y+4)=0.$

Suy ra $x^2+x-6=0$ ($x^2+x+4=0$ vô nghiệm vì $x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$)

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0$ nên $x=-2$; $x=3$.

Nghiệm của phương trình là $x = -2$; $x = 3$.

c) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = 40$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) = 40$

$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) - 40 = 0.$

Đặt $x^2 - 6x + 5 = y$ phương trình trở thành $y(y + 3) - 40 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 3y - 40 = 0 \Leftrightarrow (y + 8)(y - 5) = 0.$

Với $y + 8 = 0$, ta có $x^2 - 6x + 13 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Với $y - 5 = 0$, ta có $x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = 6$.

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0$; $x = 6$.

9.5. a) Đặt $a = x - 2$; $b = x + 1$ thì $a + b = 2x - 1$.

Phương trình trở thành : $a^3 + b^3 = (a + b)^3 \Leftrightarrow -3ab(a + b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{array}\right. \quad \text{hay} \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ x = 0,5 \end{array}\right..$$

b) Đặt $x + 4 = y$, phương trình trở thành $(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16$

$\Leftrightarrow y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 16$

$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 + 7) = 0.$

Do $y^2 + 7 > 0$, $\forall y$ nên $y^2 - 1 = 0$. Suy ra $(x + 4)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -5. \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình là $x = -3$; $x = -5$.

c) Đặt $x + \frac{1}{2} = y$ phương trình trở thành $(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 82$.

Giải tương tự b). Nghiệm của phương trình là $x = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{5}{2}$.

9.6. a) Với $a = 2$ phương trình trở thành $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$. Suy ra $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

b) Để $x = -2$ là nghiệm, ta phải có $-8 - 36 - 26a - 12a = 0$. Vậy $a = -\frac{22}{19}$.

9.7. a) Thay $x = 2$ ta có $-4a^2 + 4a = 0$, tức là $a^2 - a = 0$ nên $a = 0$ hoặc $a = 1$.

b) Thay $a^2 - a = 0$, ta có $(x - 1)^3 - 7(x - 1) + 6 = 0$.

Đặt $x - 1 = y$, ta có $y^3 - 7y + 6 = 0$ nên $y = 1$; 2 ; -3.

Vậy phương trình có ba nghiệm : $x = 2$; $x = 3$; $x = -2$.

9.8. a) Biến đổi thành $(ax - 3)(4x^2 - 1) = 0$.

Nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{3}{a}$; $x = \pm\frac{1}{2}$.

Nếu $a = 0$ thì $x = \pm\frac{1}{2}$.

b) Biến đổi thành $(ax - 2)(ax + 2)(2x + 5) = 0$.

Nếu $a \neq 0$ thì $x = -\frac{5}{2}$; $x = \pm\frac{2}{a}$.

Nếu $a = 0$ thì $x = -\frac{5}{2}$.

9.9. a) Nhân 2 vào nhân tử thứ hai, nhân 4 vào nhân tử thứ ba ở vế trái và nhân 8 vào vế phải ta có :

$(8x + 5)^2(4x + 3)(2x + 1) = 9 \Leftrightarrow (8x + 5)^2(8x + 6)(8x + 4) = 72.$

Đặt $8x + 5 = t$. Ta có $t^2(t + 1)(t - 1) = 72$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 9)(t^2 + 8) = 0.$$

* Với $t^2 - 9 = 0$ tức là $(8x + 5)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (8x + 5 - 3)(8x + 5 + 3) = 0.$

Suy ra $x = -1$; $x = -\frac{1}{4}$.

* Với $t^2 + 8 = 0$, vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$; $x = -\frac{1}{4}$.

b) Nhân hai vế của phương trình với 4 được phương trình tương đương

$(2x + 3)(2x + 4)^2(2x + 5) = 1260$. Đặt $2x + 4 = t$ tìm được $t = \pm 6$.

Suy ra $x = 1$; $x = -5$

c) Vế trái : Nhân 4 vào nhân tử thứ ba ; nhân 2 vào nhân tử thứ tư. Vế phải nhân với 8 ta có :

$$(8x - 7)(8x - 5)(2x - 1)(4x - 1) = 9$$
$$\Leftrightarrow (8x - 7)(8x - 5)(8x - 4)(8x - 2) = 72$$
$$\Leftrightarrow (64x^2 - 72x + 14)(64x^2 - 72x + 20) = 72.$$

Đặt $64x^2 - 72x + 17 = y$ ta có $(y - 3)(y + 3) = 72 \Leftrightarrow y^2 - 9 = 72$

$$\Leftrightarrow y^2 = 81 \Leftrightarrow y = \pm 9.$$

* Với $64x^2 - 72x + 17 = 9$, ta tìm được $x = 1$; $x = \frac{1}{8}$.

* Với $64x^2 - 72x + 17 = -9$, vô nghiệm vì

$$64x^2 - 72x + 26 = \left(8x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0,\ \forall x.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$; $x = \frac{1}{8}$.

d) $(x^2 + 3x + 2)(2x + 3)(2x + 5) = 30$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(2x + 3)(2x + 5) = 30$

$\Leftrightarrow (2x + 2)(2x + 4)(2x + 3)(2x + 5) = 120$

$\Leftrightarrow (4x^2 + 14x + 10)(4x^2 + 14x + 12) = 120.$

Đặt $4x^2 + 14x + 11 = y$.

Giải tương tự câu c) ta tìm được nghiệm là $x = 0$ và $x = -\frac{7}{2}$.

9.10. a) Biến đổi thành $(x + 1)(2x^2 + 3x + 2) = 0$.

Do $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0, \forall x$ nên $x = -1$.

b) $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên $x \neq 0$. Do đó chia cả hai vế cho x^2 ta được $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$.

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Do đó ta có $2y^2 - 9y + 10 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(2y - 5) = 0$.

Giải phương trình $x + \frac{1}{x} - 2 = 0$, ta được $x = 1$, giải phương trình $2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$, ta được $x = 2$ và $x = \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x = 1$; $x = 2$ và $x = \frac{1}{2}$.

c) Tương tự b) ta có $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$.

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$, biến đổi phương trình có $(2y + 5)(3y - 10) = 0$.

Phương trình có bốn nghiệm là $x = 3$; $x = \frac{1}{3}$; $x = -2$ và $x = -\frac{1}{2}$.

d) Chia cả hai vế cho x^2 $(x \neq 0)$ ta được $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0.$$

Đặt $x + \frac{5}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$.

Do đó ta có $2(y^2 - 10) - 21y + 74 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 21y + 54 = 0$

$$\Leftrightarrow (y - 6)(2y - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 6 \\ y = \frac{9}{2}. \end{array}\right.$$

* Với $y = 6$, ta có $x + \frac{5}{x} = 6$, giải được $x = 1$; $x = 5$.

* Với $y = \frac{9}{2}$, ta có $x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2}$, giải được $x = 2$; $x = \frac{5}{2}$.

Phương trình có bốn nghiệm : $x = 1$; $x = 5$; $x = 2$; $x = \frac{5}{2}$.

9.11. a) Đặt $x - 2012 = a$, $x - 2014 = b$; $2x - 4026 = a + b$.

Cách 1 : Ta có $a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3ab(a + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{array}\right.$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 2012 \\ x = 2014 \\ x = 2013. \end{array}\right.$

Cách 2 : $(x - 2012)^3 + (x - 2014)^3 + (4026 - 2x)^3 = 0$.

$x - 2012 = a$, $x - 2014 = b$; $4026 - 2x = c$ thì $a + b + c = 0$.

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 0 \Rightarrow x = 2012$; 2013 ; 2014.

b) Đặt $x - 4 = y$ ta được $y = \pm 1 \Rightarrow x = 5$ hoặc $x = 3$.

c) Đặt $x - 9 = a$; $x - 10 = b$ ta có $a^4 + b^4 - (a + b)^4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4ab\left[\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. . \text{ Suy ra } \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 10 \end{array}\right. .$$

d) Đặt $x - 5 = y$ rồi rút gọn được $y^4 + 2y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Chuyên đề 10

10.1. a) ĐKXĐ $x \neq 3$; $x \neq -4$. Đáp số : $x = 20$.

b) ĐKXĐ $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$. Đáp số : $x = 5$; $x = 1,5$.

c) ĐKXĐ $x \neq -1$; $x \neq 2$. Đáp số : $x = \frac{1}{2}$.

10.2. a) ĐKXĐ : $x \neq \pm 4$; Đáp số : $x = 8$.

b) ĐKXĐ : $x \neq 1$. Quy đồng, khử mẫu và giải tìm được hai giá trị $x = 0$ và $x = 1$; loại $x = 1$. Nghiệm của phương trình là $x = 0$.

c) ĐKXĐ : $x \neq 0$; $x \neq -4$; $x \neq \frac{1}{2}$.

Để ý rằng $2x^2 + 7x - 4 = (x + 4)(2x - 1)$.

Đáp số : $x = -\frac{1}{3}$ (loại $x = \frac{1}{2}$ không thoả mãn điều kiện)

10.3. a) ĐKXĐ : $x \neq 0$. Đáp số : $x = \frac{3}{2}$.

b) ĐKXĐ : Với mọi giá trị thực của x.

Phân tích $x^4 + 4x^2 + 16 = x^4 + 8x^2 + 16 - 4x^2 = (x^2 + 4)^2 - 4x^2$

$= (x^2 + 4 + 2x)(x^2 + 4 - 2x)$.

Đáp số : $x = 1$.

c) ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbf{R}$

Để ý rằng : $x^4 + 4 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$.

Khử mẫu : $4x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 = 20x^2 - 100 + 25x^4 + 100$

$\Leftrightarrow 17x^4 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(17x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

10.4. a) ĐKXĐ : $x \neq 0$.

Ta có $4x^2 + 4 = x^2 + 2x^3 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

b) ĐKXĐ : $x \neq 0$. Ta có $3x^3 + 3 = 7x^2 + 7x \Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $x = 3$; $x = \frac{1}{3}$.

c) Do $x^2 - 4x + 10 = (x - 2)^2 + 6 > 0$ nên phương trình xác định với mọi x.

Đặt $x^2 - 4x + 10 = t > 0$ ta có $\frac{21}{t} - (t - 4) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 21 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 7)(t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 7$ (do $t > 0$). Suy ra $x^2 - 4x + 10 = 7$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

d) ĐKXĐ : $x \neq 1$.

Đặt $\dfrac{x^2+x+1}{x-1} = t$, biến đổi phương trình thành $2t^2 - 7 = 13t$

$$\Leftrightarrow (t-7)(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

* Với $t = 7$ thì $\dfrac{x^2+x+1}{x-1} = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$

* Với $t = -\dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{x^2+x+1}{x-1} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

10.5.a) ĐKXĐ : $x \neq -1$.

Đặt $x^2 + 2x = z$, phương trình trở thành : $\dfrac{z+1}{z+2} - \dfrac{z}{z+1} = \dfrac{1}{90}$.

Khử mẫu của phương trình được $z^2 + 3z - 88 = 0$

$$\Leftrightarrow (z-8)(z+11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 8 = 0 \\ z + 11 = 0. \end{array}\right.$$

* Với $z - 8 = 0$ thì $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

* Với $z + 11 = 0$ thì $x^2 + 2x + 11 = 0$. vô nghiệm
(vì $x^2 + 2x + 11 = (x+1)^2 + 10 > 0\ \forall x$).
Phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -4$.

b) ĐKXĐ : $\forall x \in \mathbf{R}$

Đặt $x^2 - 2x + 2 = t > 0$, phương trình trở thành $\dfrac{t-1}{t} + \dfrac{t}{t+1} = \dfrac{7}{6}$.

Khử mẫu của phương trình được $6(t+1)(t-1) + 6t^2 = 7t(t+1)$
$\Leftrightarrow 5t^2 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(5t+3) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (do $t > 0$).

Suy ra $x^2 - 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$; $x = 0$.

c) $2x^2 - 5x + 3 = (2x-3)(x-1) \neq 0$ khi $x \neq \dfrac{3}{2}$ và $x \neq 1$.

$$2x^2 + x + 3 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} > 0, \forall x.$$

Do đó ĐKXĐ : $x \neq \frac{3}{2}$ và $x \neq 1$.

Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm $\Rightarrow x \neq 0$. Chia cả tử và mẫu mỗi phân thức ở vế trái cho x, ta được :

$$\frac{2}{2x + \frac{3}{x} - 5} + \frac{13}{2x + \frac{3}{x} + 1} = 6 \text{ nên } \frac{2}{y - 5} + \frac{13}{y + 1} = 6 \text{ với } 2x + \frac{3}{x} = y.$$

Giải phương trình theo y ta được $2y^2 - 13y + 11 = 0$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(2y - 11) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ hoặc } y = \frac{11}{2}.$$

Với $y = 1$ tức là $2x + \frac{3}{x} = 1$ thì $2x^2 - x + 3 = 0$, phương trình này vô nghiệm vì

$$2x^2 - x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} > 0.$$

Với $y = \frac{11}{2}$ tức là $2x + \frac{3}{x} = \frac{11}{2}$ thì $2x^2 - \frac{11x}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$; $x = \frac{3}{4}$.

10.6. Việc tìm ĐKXĐ khá phức tạp, ta có thể dùng cách sau :

$$\frac{x + 5}{x(2x - 5) + 2} + \frac{x + 2}{x(2x - 7) + 3} = \frac{2x + 7}{2x^2 - 7x + 3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 5}{2x^2 - 5x + 2} + \frac{x + 2}{2x^2 - 7x + 3} - \frac{2x + 7}{2x^2 - 7x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 5}{2x^2 - 5x + 2} - \frac{x + 5}{2x^2 - 7x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)\left(\frac{1}{2x^2 - 5x + 2} - \frac{1}{2x^2 - 7x + 3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x + 5)(1 - 2x)}{(2x^2 - 5x + 2)(2x^2 - 7x + 3)} = 0$$

Xét tử số $(x + 5)(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

* Với $x = \frac{1}{2}$ thì $2x^2 - 5x + 2 = 0$, phương trình đã cho không xác định.

* Với $x \neq -5$ thì $(2x^2 - 5x + 2)(2x^2 - 5x + 2) \neq 0$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = -5$.

10.7. ĐKXĐ : $x \neq \pm a$.

Với ĐKXĐ trên, ta có $\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2}{4(x^2 - a^2)}$

$$\Leftrightarrow 4x(x-a) + 8x(x+a) = 5a^2$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 4ax - 5a^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - a)(6x + 5a) = 0.$$

a) Để phương trình có nghiệm $x = 5$ thì :

$$(10 - a)(30 + 5a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 10 \\ a = -6 \end{array}\right., \text{ thoả mãn ĐKXĐ}$$

b) Khi $a = 6$ thì :

$$(2x - 6)(6x + 30) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -5 \end{array}\right., \text{ thoả mãn ĐKXĐ.}$$

10.8. Với các điều kiện đã cho : $\frac{x^2+1}{n^2x - 2n} - \frac{1}{2 - nx} = \frac{x}{n} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{n(nx-2)} + \frac{1}{nx-2} = \frac{x}{n}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 + n - nx^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(n-1) - 2x - (1+n) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(n-1) + x(n-1) - x(n+1) - (n+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(n-1)(x+1) - (n+1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[x(n-1) - (n+1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x(n-1) = n+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{n+1}{n-1}. \end{array}\right.$$

10.9. a) ĐKXĐ : $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$;

Biến đổi phương trình

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{3}{(x-1)(x-2)} - \frac{4}{(x-1)(x-3)} = \frac{5}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3(x-3) - 4(x-2) = 5(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}.$$

b) ĐKXĐ : $x \notin \{0; -1; -2; -3; ...; -99; -100\}$.

Nhận xét : $\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \dfrac{(x+n+1)-(x+n)}{(x+n)(x+n+1)} = \dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{x+n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

Biến đổi phương trình đã cho thành :

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + ... + \frac{1}{(x+99)(x+100)} = \frac{25}{51}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + ... + \frac{1}{x+99} - \frac{1}{x+100} = \frac{25}{51}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+100} = \frac{25}{51} \Leftrightarrow 25x^2 + 2500x - 5100 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(25x+2550) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -102 \end{array}\right.$$, thoả mãn ĐKXĐ.

c) ĐKXĐ : $x \neq -2$; $x \neq -3$; $x \neq -4$; $x \neq -5$;

Biến đổi phương trình :

$$\frac{(x^2+4x+4)+2}{x+2} - \frac{(x^2+6x+9)+3}{x+3}$$

$$= \frac{(x^2+8x+16)+4}{x+4} - \frac{(x^2+10x+25)+5}{x+5} - \frac{4}{(x+3)(x+4)}$$

$$\Leftrightarrow (x+2) + \frac{2}{x+2} - (x+3) - \frac{3}{x+3} = (x+4) + \frac{4}{x+4} - (x+5) - \frac{5}{x+5} - \frac{4}{(x+3)(x+4)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{x+2} + \frac{5}{x+5}\right) - \left[\frac{3}{x+3} + \frac{4}{x+4} - \frac{4}{(x+3)(x+4)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x+20)\left[\frac{1}{(x+2)(x+5)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(7x+20).2}{(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{20}{7}.$$

Chuyên đề 11

11.1. Gọi vận tốc của xe đạp là x (km/giờ) (x > 0) thì vận tốc người đi xe máy là 3x (km/giờ).

Thời gian đi hết đoạn đường AB của xe máy ít hơn của xe đạp là $1 + \dfrac{1}{3}$ (giờ).

Ta có phương trình : $\frac{30}{x} - \frac{30}{3x} = 1\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 15$.

Vận tốc người đi xe đạp là 15km/giờ ; vận tốc người đi xe máy là 45km/giờ.

11.2. Gọi thời gian ô-tô đi đến khi cách đều xe đạp và xe máy là x(giờ) (x > 0). Đến 8 giờ xe đạp đi được 30km, xe máy đi được 35km. Ta có phương trình :

$$50x - (30 + 15x) = (35 + 35x) - 50x \Leftrightarrow x = 1,3.$$

Thời điểm ô-tô cách đều xe đạp và xe máy là 9 giờ 18 phút.

11.3. Gọi đoạn đường lên dốc dài x (km) (x > 0), thì đoạn đường bằng dài là x + 100 (km). Vận tốc của ô-tô trên đường bằng là $10 : \frac{1}{5} = 50$ (km/giờ) và trên đoạn lên dốc là 25 km/giờ. Thời gian đi trên đoạn đường dốc là $\frac{x}{25}$ (giờ). Thời gian đi trên đoạn đường bằng là $\frac{x+100}{50}$ (giờ). Ta có 2 giờ 18 phút = $\frac{23}{10}$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình : $\frac{x}{25} + \frac{x+100}{50} = \frac{23}{10}$.

Giải phương trình được x = 5 (thoả mãn điều kiện)

Vậy đoạn lên dốc dài 5 km. Quãng đường người đó đi là 5 + (100 + 5) = 110 (km).

11.4. Gọi vận tốc riêng của ca-nô là x (km/giờ) x > 0 . Ta có 15 phút = $\frac{1}{4}$ giờ ; 750m = $\frac{3}{4}$ km. Vận tốc dòng nước chính là vận tốc bèo trôi là $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3$(km/giờ).

Vận tốc ca-nô khi xuôi là x + 3 (km/giờ) ; khi ngược là x – 3 (km/giờ).

Ta có phương trình : $\frac{5}{2}(x+3) = \frac{13}{4}(x-3) \Leftrightarrow x = 23$.

Vận tốc riêng của ca-nô là x = 23 km/giờ.

11.5. Gọi vận tốc xe thứ hai là x(km/giờ) ; x > 10. Gọi độ dài đoạn đường AB dài a km (a > 0) . Ta có : $\frac{a}{x} - \frac{a}{x+10} = \frac{1}{2}$ (1) và $\frac{a}{x-10} - \frac{a}{x} = \frac{3}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $3\left(\frac{a}{x} - \frac{a}{x+10}\right) = 2\left(\frac{a}{x-10} - \frac{a}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} - \frac{3}{x+10} = \frac{2}{x-10} - \frac{2}{x}.$$

Giải phương trình tìm được x = 50.

Thay vào (1) có $\frac{a}{50} - \frac{a}{60} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 150$.

Đáp số : Vận tốc ba xe lần lượt là : 40km/giờ ; 50km/giờ ; 60km/giờ.

Quãng đường AB dài 150km.

Thời gian ba xe đi hết quãng đường lần lượt là 2 giờ 30 phút ; 3 giờ ; 3 giờ 45 phút.

11.6. Gọi số sản phẩm tổ I phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm).

Tổ II phải làm theo kế hoạch là (900 – x) (sản phẩm) ; ($x \in \mathbb{N}^*$, $x < 900$).

Tổ I đã làm được $x + 15\%x = 1,15x$ (sản phẩm).

Tổ II đã làm được $(900 - x) + 10\% (900 - x) = 1,1(900 - x)$ (sản phẩm).

Theo bài ra ta có phương trình : $1,15x + 1,1(900 - x) = 1010$.

Giải phương trình có $x = 400$ thoả mãn điều kiện.

Vậy : Tổ I đã làm được 460 sản phẩm. Tổ II đã làm được 550 sản phẩm.

11.7. Gọi x là số sản phẩm mỗi ngày tổ phải làm theo kế hoạch ($x \in \mathbb{N}^*$) thì (x + 5) là số sản phẩm mỗi ngày tổ thực làm được.

Thời gian làm theo kế hoạch là : $\frac{200}{x}$ (ngày).

Số sản phẩm thực làm là 200 + 10 = 210 (sản phẩm).

Thời gian thực làm : $\frac{210}{x+5}$ (ngày).

Theo bài ra ta có phương trình là : $\frac{200}{x} - \frac{210}{x+5} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 15x - 1000 = 0 \Leftrightarrow (x + 40)(x - 25) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -40 \\ x = 25 \end{array}\right.$.

$x = 25$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy lúc đầu mỗi ngày tổ phải làm theo kế hoạch là 25 sản phẩm.

11.8. Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ) ; $x > 0$.

Một giờ vòi thứ nhất chảy một mình được $\frac{1}{x}$ bể nước, một giờ vòi thứ hai chảy một mình được $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right)$ bể nước.

Ta có phương trình : $\frac{2}{x} + 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right) = \frac{7}{12}$.

Đáp số : 6 giờ và 12 giờ.

11.9. Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ) ; $0 < x < 30$.

Ta có phương trình $2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{30}\right) + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} - \frac{1}{30}\right) = 1 \Leftrightarrow x = 5$.

Đáp số : 5 giờ.

11.10. Gọi thời gian vòi chảy vào thứ hai chảy một mình đầy bể là x (giờ), $x > 0$.

Ta có phương trình :

$$\frac{10}{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right) = \frac{2}{3}.$$

Đáp số : 15 giờ.

11.11. Gọi x (giờ) là thời gian đội II làm một mình sửa xong con đường ($x > 0$).

Ta có phương trình : $4.\frac{1}{12} + \frac{40}{3}.\frac{1}{x} = 1$.

Đáp số : 20 giờ .

11.12. Gọi chữ số hàng chục là x ($x \in \mathbb{N}$; $0 < x \leq 9$).

Ta có phương trình : $10x + 3x + 54 = 10.3x + x$

Giải được $x = 3$. Số phải tìm là 39.

11.13. Gọi chữ số hàng đơn vị là x ($x \in \mathbb{N}$; $0 \leq x \leq 9$) thì chữ số hàng trăm là $14 - x$.

Chữ số hàng chục là $(x - 1)$. Ta có phương trình :

$$\overline{(14 - x)(x - 1)x} - \overline{x(x - 1)(14 - x)} = 396$$

$$\Leftrightarrow (14 - x)100 + (x - 1)10 + x - x100 - (x - 1)10 - (14 - x) = 396$$

$$\Leftrightarrow 198x = 990 \Leftrightarrow x = 5.$$

Số phải tìm là : 945.

11.14. Gọi số có bốn chữ số còn lại sau khi xóa hai chữ số 9 là x ; ($1000 \leq x < 10000$).

Ta có phương trình : $\overline{9x9} = 109x \Leftrightarrow 900009 + 10x = 109x \Leftrightarrow x = 9091$.

Số phải tìm là 990919.

11.15. Gọi số thỏ là x ($x \in \mathbb{N}^*$) thì số chó là 4x, số gà là $100 - 5x$. Thỏ và chó đều có 4 chân, gà có 2 chân nên ta có phương trình :

$$4x + 16x + 2(100 - 5x) = 350 \Leftrightarrow x = 15.$$

Số thỏ là 15 con, số chó 60 con ; số gà 25 con.

11.16. Gọi chiều dài lúc đầu của thửa vườn là x (m) ; $0 < x < 100$, thì chiều rộng lúc đầu là $100 - x$ (m).

Diện tích lúc đầu là $x(100 - x)$ (m^2).

Sau khi thay đổi, diện tích là $(x + 10)(100 - x - 5)$ (m^2).

Ta có phương trình $(x + 10)(95 - x) - x(100 - x) = 50$.

Giải được $x = 60$.

Đáp số : Chiều dài : 70m, rộng : 35m.

11.17. Gọi tuổi con hiện nay là x ($x \in N^*$). Ta có phương trình

$$2(x + 15) - 6(x - 5) = 20.$$

Đáp số : Tuổi con hiện nay là 10 ; tuổi mẹ là 35.

11.18. Gọi nồng độ phần trăm của dung dịch NaCl loại I là x% ($x > 5$).

Khối lượng NaCl trong dung dịch loại I là $\frac{400x}{100}$ (g),

trong dung dịch loại II là $\frac{(x-5)600}{100}$ (g).

Theo bài ra ta có phương trình

$$\frac{400x}{100} + \frac{(x-5)600}{100} = \frac{27(400+600)}{100}.$$

Giải phương trình tìm được nồng độ phần trăm của dung dịch NaCl loại I là 30% và loại II là 25%.

11.19. $1cm^3$ đồng có khối lượng 8,9g ; $1cm^3$ kẽm có khối lượng 7g. Gọi x là khối lượng đồng có trong vật ($0 < x < 505$). Ta có phương trình $\frac{x}{8,9} + \frac{505-x}{7} = 64$.

Đáp số : 267g đồng và 238g kẽm.

11.20. Đáp số : 67°.

11.21. Gọi số cam của người thứ nhất bán là x (quả) ($0 < x < 200$; $x \in N^*$ và $x \neq 100$) thì số cam của người thứ hai bán là $200 - x$ (quả).

Gọi a đồng và b đồng lần lượt là giá bán mỗi quả cam của người thứ nhất và người thứ hai.

Theo giả thiết $(200 - x)a = 7200000$ nên $a = \frac{720000}{200-x}$ và $xb = 320000$ nên $b = \frac{320000}{x}$.

Số tiền bán cam của hai người bằng nhau nên $xa = (200 - x)b$

$$\Leftrightarrow \frac{720000x}{200-x} = \frac{320000(200-x)}{x} \Leftrightarrow x^2 + 320x - 32000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 400)(x - 80) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -400 \\ x = 80 \end{array}\right.$$

$x = 80$ thoả mãn điều kiện.

Vậy số cam người thứ nhất bán là 80 quả ; người thứ hai bán là 120 quả.

Giá bán mỗi quả cam của người thứ I là 6000 đồng và của người thứ II là 4000 đồng.

11.22. Ta có phương trình : $\frac{8}{81}x + \frac{136}{9} = \frac{1}{9}x + 8$ nếu gọi tổng số cây trồng là x

(hoặc $9 + \frac{9y^2 - 9}{9} = 9y$ nếu gọi số lớp là y).

Đáp số : Tổng số 576 cây và 8 lớp.

Chuyên đề 12

12.1. a) * Nếu a và b cùng dấu thì ab > 0. Từ $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Chia hai vế của bất đẳng thức cho ab > 0 ta có $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

* Nếu a và b trái dấu thì ab < 0. Từ $(a + b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq -2ab$.

Chia hai vế của bất đẳng thức cho ab < 0 ta có $\frac{a^2 + b^2}{ab} \leq \frac{-2ab}{ab} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow a = -b$.

b) $A^2 - 3A + 2 = (A - 1)(A - 2)$

* Nếu a và b cùng dấu thì $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Do đó $(A - 1)(A - 2) \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

* Nếu a và b trái dấu thì $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. Do đó $(A - 1)(A - 2) \geq 0$

Dấu " =" xảy ra khi $a = -b$.

12.2. a) $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (1). Chia hai vế của (1) cho 4 ta được đpcm.

b) Dễ dàng chứng minh : $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2ac + 2bc$

$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$. (2)

Chia hai vế của (2) cho 9 ta có điều phải chứng minh.

Tổng quát : $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}\right)^2$.

12.3. a) Xét hiệu $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+4-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$. Đặt $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=A$, ta có

$A^2-3A+2=(A-1)(A-2)$. Áp dụng bài tập 12.1 ta có kết quả.

b) Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2\geq 2xy$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2\geq 2\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=2\frac{a}{c}$.

Xét tương tự rồi cộng vế với vế các bất đẳng thức, ta tìm được điều phải chứng minh.

12.4. a) $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$. Mặt khác cũng theo kết quả bài 12.2 ta có : $\frac{a^4+b^4}{2}\geq\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$. Vậy $\frac{a^4+b^4}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

b) Vì a, b, c > 0 nên a + b + c > a + b > 0 nên $\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}$.

Tương tự $\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{b+c}$ và $\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{c+a}$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được :

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

12.5. a) Do abcd = 1 nên $cd=\frac{1}{ab}$; $ac=\frac{1}{bd}$; $bc=\frac{1}{ad}$.

Ta đã có $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 2(ab+cd)\geq 4$ (1) (xem ví dụ 12.1)

Mặt khác a(b + c) + b(c + d) + d(c + a) = ab + ac + bc + bd + dc + da

$$=(ab+cd)+(ac+bd)+(bc+da)$$

$$=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(bd+\frac{1}{bd}\right)+\left(ad+\frac{1}{ad}\right)\geq 6. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.

b) Xét hiệu $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)$

$=(0,25a^2-ab+b^2)+(0,25a^2-ac+c^2)+(0,25a^2-ad+d^2)+(0,25a^2-ae+e^2)$

$=(0,5a-b)^2+(0,5a-c)^2+(0,5a-d)^2+(0,5a-e)^2\geq 0\Rightarrow$ đpcm.

12.6. a) Xét hiệu $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc=(a-b+c)^2\geq 0$.

b) $a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$.

c) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c).\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0$.

12.7. a) Xét hiệu :

$$a^2 - 3(ab + ac + bc - b^2 - c^2) = \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 3ac + 6bc - 9bc$$

$$= 3\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 - 2.\frac{1}{2}ab - 2.\frac{1}{2}ac + 2bc\right) + \frac{1}{4}a^2 - 9bc$$

$$= 3\left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^3 - 36abc}{4a} \geq 0 \text{ (do } abc = 1 \text{ và } a^3 > 36).$$

b) Đặt $a_1 = \frac{1}{n} + x_1$; $a_2 = \frac{1}{n} + x_2$; $a_3 = \frac{1}{n} + x_3$;... ; $a_n = \frac{1}{n} + x_n$ thì

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 0$. Giải tương tự câu c) ví dụ 12.2.

12.8. Do $x, y, z \in \mathbf{Z}$ nên ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - xy - 3y - 2z \leq -1$

$\Leftrightarrow (x^2 - xy + 0{,}25y^2) + (0{,}75y^2 - 3y + 3) + (z^2 - 2z + 1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x - 0{,}5y)^2 + 3(0{,}5y - 1)^2 + (z - 1)^2 \leq 0$. Vậy $(x, y, z) = (1 ; 2 ; 1)$.

12.9. a) Ta có $[(x + y) + (y + z) + (z + x)]\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \geq 9$.

Đặt $x + y = a$; $y + z = b$; $z + x = c$, ta được

$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ (chứng minh ở ví dụ 12.3b).

b) $(3x + 3y + 3z + 3t)\left(\frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{y+z+t} + \frac{1}{z+t+x} + \frac{1}{t+x+y}\right) \geq 16$.

Đặt $x + y + z = a$; $y + z + t = b$; $z + t + x = c$; $t + x + y = d$, ta có bài toán :

Chứng minh rằng, với a, b, c, d dương, ta có

$(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16$. Giải tương tự ví dụ 12.3.

c) Tương tự câu c) ví dụ 12.4.

12.10. a) $\forall x \in \mathbf{R}$ ta có : $x^4(x^2 - 2x + 2) - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

$= x^4(x - 1)^2 + x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) = (x - 1)^2(x^4 + x^2 + 1) \geq 0$.

b) Biến đổi vế trái : $(x^6 + x^3 + 1)(x^2 - x + 1) > 0$

(do $a^2 \pm a + 1 = \left(a \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall a \in \mathbf{R}$ (*)).

c) $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = \dfrac{x^{10} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1} > 0$ (do(*))

d) $(x + 4)(x + 7)(x + 8)(x + 11) + 36 = (x^2 + 15x + 44)(x^2 + 15x + 56) + 36$.

Đặt $x^2 + 15x + 50 = y$, ta có $(y - 6)(y + 6) + 36 = y^2 - 36 + 36 = y^2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 0$. Suy ra $x^2 + 15x + 50 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = -5 ; x = -10$.

12.11. a) $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b} = (a + b + c)\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}\right) \geq 4{,}5 > 4$.

b) Dễ dàng chứng minh $(x + y)^2 \geq 4xy$.

Ta có $4(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 4(b + c)(1 - b)(1 - c)$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $4(b + c)(1 - c) \leq (b + c + 1 - c)^2 = (b + 1)^2$.

Vì thế $4(b + c)(1 - b)(1 - c) \leq (b + 1)^2(1 - b) = (1 + b)(1 - b^2) \leq 1 + b = a + 2b + c$

12.12. a) $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b+c} + a + \dfrac{b^2}{c+a} + b + \dfrac{c^2}{a+b} + c \geq \dfrac{3}{2}(a + b + c)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a(a+b+c)}{b+c} + \dfrac{b(a+b+c)}{c+a} + \dfrac{c(a+b+c)}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}(a + b + c)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ (xem ví dụ 12. 4).

b) $(a + b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \dfrac{ab}{a+b} \leq \dfrac{1}{4}(a+b)$; $\dfrac{bc}{b+c} \leq \dfrac{1}{4}(b+c)$; $\dfrac{ac}{a+c} \leq \dfrac{1}{4}(a+c)$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

12.13. a) Do $|x| < 1 ; |y| < 1$ nên $x^2 < 1 ; y^2 < 1$. Ta có $(1 - x^2)(1 - y^2) > 0$.

Mà $(1 - x^2)(1 - y^2) = 1 + x^2y^2 - (x^2 + y^2) = (1 + 2xy + x^2y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$

$= (1 + xy)^2 - (x + y)^2 > 0$. Do đó $(1 + xy)^2 > (x + y)^2$ hay $|x + y| < |1 + xy|$.

b) Giả sử có đồng thời $|y - z| > |x|; |z - x| > |y|; |x - y| > |z|$

thì $(y - z)^2 > x^2 ; (z - x)^2 > y^2 ; (x - y)^2 > z^2$.

Do đó $(y - z - x)(y - z + x) > 0 ; (z - x - y)(z - x + y) > 0 ; (x - y - z)(x - y + z) > 0$.

Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên sẽ dẫn tới điều vô lí.

12. 14. a) Theo bất đẳng thức tam giác có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$.

Tương tự $b^2 < bc + ba$, $c^2 < cb + ca \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc$. (1)

Mặt khác $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ac$;

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$. (2)

Từ (1) và (2) có $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$.

b) Xét hiệu và biến đổi $[a^3 - a^2(b + c)] + [b^3 + c^3 - b^2c - c^2b] + (2abc - b^2a - c^2a)$

$= a^2(a - b - c) + (b^2 - c^2)(b - c) - a(b - c)^2 = (a - b - c)(a + b - c)(a + c - b) < 0$

vì $a + b > c$; $a + c > b$; $a < b + c \Rightarrow$ đpcm.

c) Ta có $-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 > 0$ Phân tích vế trái thành nhân tử được $(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \Rightarrow$ đpcm.

d) Do $a \leq b$ nên $a + b + c \leq 2b + c$.

Ta chứng minh $(2b + c)^2 \leq 9bc \Leftrightarrow 4b^2 - 5bc + c^2 \leq 0 \Leftrightarrow 4b^2 - 4bc - bc + c^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (b - c)(4b - c) \leq 0$ đúng vì $b \leq c$ và $4b - c \geq (a + b) - c + 2b > 0$.

12.15. a) Với x ; $y > 0$ dễ dàng chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$. Áp dụng kết quả này và để ý rằng $m = a + b + c$ ta có

$$\frac{1}{m - 2a} + \frac{1}{m - 2b} \geq \frac{4}{(m - 2a) + (m - 2b)} = \frac{4}{2(m - a - b)} = \frac{2}{c}.$$

Tương tự : $\frac{1}{m - 2b} + \frac{1}{m - 2c} \geq \frac{2}{a}$; $\frac{1}{m - 2a} + \frac{1}{m - 2c} \geq \frac{2}{b}$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi độ dài 6 đoạn thẳng là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

Giả sử $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6 \leq 15$. Nếu bất kì ba đoạn thẳng nào cũng không lập thành một tam giác thì : $a_3 \geq a_1 + a_2 \geq 2 + 2 = 4$; $a_4 \geq a_2 + a_3 \geq 2 + 4 = 6$; $a_5 \geq a_3 + a_4 \geq 4 + 6 = 10$; $a_6 \geq a_4 + a_5 \geq 6 + 10 = 16$; vô lí.

12.16. a) $A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2013}\right) < \frac{1}{2}$.

b) $B = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{15}\right) + ...$

$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}} + ... + \frac{1}{2^n - 1}\right)$

$< 1 + 2.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{4} + 8.\frac{1}{8} + ... + 2^{n-1}.\frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n.$

c) Xét với một số $k \in \mathbb{N}$ $(k > 1)$ bất kì, ta có

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{(k+1)-(k-1)}{(k-1)k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right]$$

nên $$C < 1006\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= 1006\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] < 1006 \times \frac{1}{2} = 503.$$

12.17. a) Do $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ nên $D = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

b) $E < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1).n}$.

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1} < 2.$$

c) Ta có $1 + \frac{1}{k(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Do đó

$$F = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right)...\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}...\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$= \frac{2(n+1)}{n+2} < 2.$$

12.18. a) Nhận xét $\frac{1}{k^2} < \frac{4}{4k^2 - 1} = 2\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Ta có $$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{2}{3}$$

nên $E = \frac{1}{1^2} + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}) < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

b) $F < \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{5^2 - 1} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + ... + \frac{1}{2n(2n+2)}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right) < \frac{1}{4}.$$

c) Nhận xét $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right]$. Áp dụng nhận xét trên, ta có

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] < \frac{1}{4}.$$

Vậy $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$.

12.19. a) Nhận xét với $k \in \mathbf{N}$; $k > 1$, ta có : $\frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{(k-1)!k} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$.

Áp dụng : $G = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!} < 1$.

b) Nhận xét với $k \in \mathbf{N}$; $k > 1$, ta có :

$$\frac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \frac{k(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{k(k+1)}{(k-1)!k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$H = \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{(n-1)!}\right) - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + ... + \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} < 2.$$

12.20. a) Ta có $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ với $k = 1 ; 2 ; 3 ;... ; n-1$ và $k < n$.

Đặt $G = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}$

$$= n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Mặt khác $\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-k+1} = \frac{3n+1}{2n^2+nk+n+k-k^2} < \frac{3}{2n}$.

Thật vậy : $2n^2 + nk + n + k - k^2 > 0$ do $nk > k^2$ nên

$$\frac{3n+1}{2n^2+nk+n+k-k^2} < \frac{3}{2n} \Leftrightarrow 6n^2 + 2n < 6n^2 + 2n + (3kn + n + 3k - 3k^2).$$

Hiển nhiên đúng vì $3kn > 3k^2$ do $n > k$. Do đó

$$2G = \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{2n-2}\right)+...+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$< \frac{3}{2n}+\frac{3}{2n}+\frac{3}{2n}+...+\frac{3}{2n} = n.\frac{3}{2n} = \frac{3}{2} \Rightarrow G < \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

b) Dễ dàng chứng minh tính chất :

Với ba số dương x, y, z nếu

$$\frac{x}{y} < 1 \text{ thì } \frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z} \text{ và } \frac{x}{y} > \frac{x}{y+z}.$$

Áp dụng, ta có : $\dfrac{a}{a+b+c+d} < \dfrac{a}{a+b+c} < \dfrac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d} \qquad (2)$$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{a+b+c+d} \qquad (3)$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}. \qquad (4)$$

Cộng vế với vế của (1) ; (2) ; (3) ; (4) ta có điều phải chứng minh.

12.21. Do $0 < a < b + c \Rightarrow \dfrac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \dfrac{a}{a+b+c} < \dfrac{a}{b+c} < \dfrac{2a}{a+b+c}$.

Tương tự : $\dfrac{b}{a+b+c} < \dfrac{b}{a+c} < \dfrac{2b}{a+b+c}$; $\dfrac{c}{a+b+c} < \dfrac{c}{b+a} < \dfrac{2c}{a+b+c}$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

Chuyên đề 13

13.1. a) $x > 1$;

b) Biến đổi được $0x < 1$, nghiệm đúng với mọi x.

c) Biến đổi được $0x \geq 10 \Rightarrow$ Vô nghiệm.

d) Thêm -8 vào hai vế $x^3 > 2x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 8 > 2x - 4$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) - 2(x-2) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+2) > 0$

$\Leftrightarrow x > 2$ do $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0, \forall x$.

13.2. a) Đáp số : $x \le -29,5$; b) Đáp số : $x > 6$.

c) Biến đổi tương đương ta được :

$$30(x-1) + 20(x-2) + 15(x-3) > 12(x-4) + 10(x-5)$$

$$\Leftrightarrow 43x > 17 \Leftrightarrow x > \frac{17}{43}.$$

d) Biến đổi thành : $(x^2+1)(5x-9) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{9}{5}$.

13.3. a) Bất phương trình (1) có nghiệm $x < 13$.

Bất phương trình (2) có nghiệm $x > \frac{35}{32}$.

Giá trị của x thoả mãn cả hai bất phương trình là : $\frac{35}{32} < x < 13$.

b) Bất phương trình (3) có nghiệm là $x \le 0$. Bất phương trình (4) có nghiệm $x < 1$. Giá trị của x thoả mãn cả hai bất phương trình là $x \le 0$.

13.4. a) Bất phương trình (1) có nghiệm $x > \frac{47}{33}$.

Bất phương trình (2) có nghiệm $x < 9$. Đáp số $x \in \{2;3;4;5;6;7;8\}$.

b) Bất phương trình (3) có nghiệm $x \ge -5$.

Bất phương trình (4) có nghiệm $x \le -3$. Đáp số : $x \in \{-5;-4;-3\}$.

13.5. a) Ta có $\frac{x-2}{6} - \frac{x-3}{3} > 2 \Leftrightarrow x < -8$ và $\frac{x-2}{6} - \frac{x-3}{3} < 3 \Leftrightarrow x > -14$.

Vậy $x \in \{-13;-12;-11;-10;-9\}$.

b) Giải $2(x-1) - 3 < \frac{3x-5}{4} \Leftrightarrow x < 3$ và $\frac{3x-5}{4} < \frac{2+3x}{3} + 1 \Leftrightarrow x > -\frac{35}{3}$.

Vậy $-\frac{35}{3} < x < 3$.

13.6. a) (1) $\Leftrightarrow a^2x - b^2x > a - b \Leftrightarrow (a-b)(a+b)x > a - b$.

Do $a > 0$; $b > 0$ nên $a + b > 0$.

Nếu $a > b$ thì $x > \frac{1}{a+b}$. Nếu $a < b$ thì $x < \frac{1}{a+b}$.

Nếu $a = b$ thì $0x > 0$, vô nghiệm.

b) Điều kiện : $a \ne 0$. Biến đổi ta có

$$x + (a+b)x > \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow (a+b+1)x > \frac{2b}{a}.$$

* Nếu $a + b + 1 > 0$; $a \neq 0$ thì $x > \dfrac{2b}{a(a+b+1)}$.

* Nếu $a + b + 1 < 0$; $a \neq 0$ thì $x < \dfrac{2b}{a(a+b+1)}$.

* Nếu $a + b + 1 = 0$; $a \neq 0$ thì $0x > \dfrac{2b}{a}$, khi ấy :

Nếu $ab \geq 0$: Vô nghiệm.

Nếu $ab < 0$: Tập nghiệm là **R**.

c) Với $a \neq -2$ thì $\dfrac{x}{a^2 - 2a + 4} - \dfrac{1}{a+2} < \dfrac{x-1}{a^2 - 2a + 4} + \dfrac{a(3-2x) - 2 - a^2}{8 + a^3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a^2 - 2a + 4} - \frac{1}{a+2} < \frac{x}{a^2 - 2a + 4} - \frac{1}{a^2 - 2a + 4} + \frac{3a - 2ax - 2 - a^2}{8 + a^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2 - 2a + 4} - \frac{1}{a+2} - \frac{-a^2 - 2ax + 3a - 2}{(a+2)(a^2 - 2a + 4)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + 2 - a^2 + 2a - 4 + a^2 + 2ax - 3a + 2}{(a^2 - 2a + 4)(a+2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ax}{(a^2 - 2a + 4)(a+2)} < 0.$$

Do $a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3 > 0$, $\forall a$ nên ta chỉ xét $\dfrac{2ax}{a+2} < 0$.

Xét dấu của $\dfrac{a}{a+2}$, ta có :

Nếu $a < -2$ hoặc $a > 0$ thì nghiệm là $x < 0$.

Nếu $-2 < a < 0$ thì nghiệm là $x > 0$.

Nếu $a = 0$ thì bất phương trình trở thành $0x < 0$, vô nghiệm.

13.7. a) (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \dfrac{2x+5}{8} - x < 1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Tìm được $\dfrac{5}{6} \geq x > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 0$.

b) Đáp số : $x \in \{-3; -2; -1\}$.

c) (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \dfrac{4x+1}{6} - (3x-1) < 1 \\ 3x - 1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Tìm được $\frac{1}{2} \geq x > \frac{1}{14} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 1 \geq 3x - 1 > -\frac{11}{14} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

13.8. ĐKXĐ : $x \neq 1$ và $m \neq 2$, giải được $x = \frac{4}{2-m}$. Để $x \neq 1$ thì $m \neq -2$.

Do đó $\begin{cases} m \neq \pm 2 \\ \frac{4}{2-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < 2 \end{cases}$.

13.9. $5mx - 2 > 2x \Leftrightarrow x(5m - 2) > 2$. (1)

Nếu $m > \frac{2}{5}$ thì nghiệm của (1) là $x > \frac{2}{5m-2}$;

Nếu $m < \frac{2}{5}$ thì nghiệm của (1) là $x < \frac{2}{5m-2}$.

Để nghiệm của (1) là $x > 3$ ta phải có $\begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5m-2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{8}{15}$;

Để nghiệm của (1) là $x < -3$ ta phải có $\begin{cases} m < \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5m-2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{4}{15}$.

13.10. *Cách 1* : $x^2 - 2.x.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 1 < 9 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4}$

$\Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x - \frac{3}{2} < \frac{7}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} + \frac{3}{2} < x < \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow -2 < x < 5.$

Cách 2 : $x^2 - 3x - 1 < 9 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 2) < 0$.

Lập bảng xét dấu. Nghiệm của bất phương trình là : $-2 < x < 5$.

13.11. a) Lập bảng xét dấu. Nghiệm là $x < -\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9} < x < \frac{5}{19}$.

b) (2) $\Leftrightarrow (1000 - x)(9x + 2010) + (1000 - x)(x + 1) > 0$

$\Leftrightarrow (1000 - x)(10x + 2011) > 0$

Lập bảng xét dấu. Nghiệm là : $-\frac{2011}{10} < x < 1000$.

c) (3) $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) \leq 0$. Đáp số : $\left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ 2 \leq x \leq 3. \end{array}\right.$

d) (4) $\Leftrightarrow x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9) > 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3) > 0$. Đáp số $\left[\begin{array}{l} x < -3 \\ -2 < x < -1 \\ 1 < x < 2 \\ x > 3. \end{array}\right.$

13.12. a) Biến đổi vế trái có $(x^4 - 10)(x^4 - 4) \geq 72$.

Đặt $x^4 - 7 = y$ bất phương trình trở thành $(y - 3)(y + 3) \geq 72$

$\Leftrightarrow y^2 - 9 - 72 \geq 0 \Leftrightarrow (y - 9)(y + 9) \geq 0$ hay $(x^4 - 16)(x^4 + 2) \geq 0$.

Do $x^4 + 2 > 0$, $\forall x$ nên $x^4 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) \geq 0$.

Do $x^2 + 4 > 0$, $\forall x$ nên $(x + 2)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$.

b) (2) $\Leftrightarrow (x^4 + 4) - (x^2 + 2x + 2)(3x + 16) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2) - (x^2 + 2x + 2)(3x + 16) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) - (x^2 + 2x + 2)(3x + 16) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 5x - 14) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x - 7)(x + 2) \leq 0$.

Do $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$, $\forall x$ nên ta chỉ xét $(x - 7)(x + 2) \leq 0$

Đáp số: $-2 \leq x \leq 7$

c) (3) $\Leftrightarrow (x^3 - 1)(x^3 - 8)(x^2 + x - 6) > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 3)(x - 2) > 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)(x + 3)(x - 1) > 0$.

Ta có $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$; $(x - 2)^2 \geq 0$.

$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0$. Vì thế $(x + 3)(x - 1) > 0$.

Giải được nghiệm : $x > 1$ hoặc $x < -3$ và $x \neq 2$ (vì nếu $x = 2$ thì $x^3 - 8 = 0$)

13.13. Điều kiện : $x \neq -\frac{1931}{80}$. Lập bảng xét dấu.

Nghiệm của bất phương trình là : $-\frac{1931}{80} < x < \frac{3}{26}$.

13.14. a) ĐKXĐ $x \neq 3$; (1) $\Leftrightarrow \frac{1 - 3x}{x - 3} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4 - 4x}{x - 3} \geq 0$.

Lập bảng xét dấu $\Rightarrow$ Nghiệm của bất phương trình là : $1 \leq x < 3$.

b) ĐKXĐ : $x \neq \pm 3$; (2) $\Leftrightarrow \dfrac{11x+3}{(x+3)(x-3)} > 0$.

Lập bảng xét dấu suy ra $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -3 < x < -\dfrac{3}{11} \end{array}\right.$.

c) Đáp số : $-2 < x < 5$

d) ĐKXĐ : $x \neq 5$ và $x \neq 1$; (4) $\Leftrightarrow \dfrac{7x+5}{(x-1)(x-5)} < 0$.

Lập bảng xét dấu, suy ra $\left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{5}{7} \\ 1 < x < 5 \end{array}\right.$.

13.15. Điều kiện : $x \neq 2$; $x \neq -1$; Rút gọn $A = \dfrac{(x-2014)(2x^2-2x+5)}{3-6x}$.

Do $2x^2 - 2x + 5 = 2(x-0,5)^2 + 4,5 > 0$ nên $A \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2014}{3-6x} \geq 0$.

Đáp số : $0,5 < x \leq 2014$ và $x \neq 2$.

13.16. Điều kiện : $x \neq \pm 2$; $x \neq 3$; Rút gọn được $B = \dfrac{3-x}{x+2}$.

Lập bảng xét dấu.

Đáp số : a) $x < -2$; $x > 3$. b) $-2 < x \leq -\dfrac{4021}{2013}$.

13.17. Ta có $1 < \dfrac{x+2}{x-5} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-5} > 1 \\ \dfrac{x+2}{x-5} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ \left[\begin{array}{l} x > 12 \\ x < 5. \end{array}\right. \end{cases}$

Đáp số : $x > 12$

13.18. a) Với $x \neq 2$ ta có $m - 2 = (x-2)(2+m) \Leftrightarrow x(m+2) = 3m+2$.

* Với $m = -2$ phương trình trở thành $0x = 8$ vô nghiệm.

* Với $m \neq -2$ thì $x = \dfrac{3m+2}{m+2}$.

Để $x > 2$ ta phải có : $\dfrac{3m+2}{m+2} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{m+2} > 0$.

Lập bảng xét dấu tìm được $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

b) Với $x \neq 1$ ta có $x(3 - m) = 8 - m$.

* Với $m = 3$ phương trình trở thành $0x = 5$ vô nghiệm.

* Với $m \neq 3$ thì $x = \dfrac{8 - m}{3 - m}$.

Để $x < 0$ ta phải có : $\dfrac{8 - m}{3 - m} < 0 \Leftrightarrow 3 < m < 8$.

13.19. a) ĐKXĐ : $x \notin \{-11; -9; -7; -5; -3; -1\}$

Biến đổi $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} + \dfrac{1}{(x+3)(x+5)} + ... + \dfrac{1}{(x+9)(x+11)} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} + ... - \frac{1}{x+11}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+11}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{(x+1)(x+11)} > 0.$$

Lập bảng xét dấu được $\left[\begin{array}{l} x < -11 \\ x > -1 \end{array}\right.$.

b) Xét $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{99.100} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{99} - \dfrac{1}{100}$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{50}\right)$$

$$= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + ... + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}.$$

Vậy $x^2 - x + 1982 < 2012 \Leftrightarrow x^2 - x - 30 < 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x + 5) < 0$.

Lập bảng xét dấu được $-5 < x < 6$.

13.20. $C = \dfrac{1.4}{2.3}.\dfrac{2.5}{3.4}.\dfrac{3.6}{4.5}.\dfrac{4.7}{5.6}.\dfrac{5.8}{6.7}.\dfrac{6.9}{7.8}.\dfrac{7.10}{8.9} = \dfrac{5}{12}$;

$D = \dfrac{3^2}{2.4}.\dfrac{4^2}{3.5}.\dfrac{5^2}{4.6}.\dfrac{6^2}{5.7}.\dfrac{7^2}{6.8}.\dfrac{8^2}{7.9}.\dfrac{9^2}{8.10} = \dfrac{27}{20}$.

a) $\dfrac{25}{60} < \dfrac{x}{60} < \dfrac{27}{60} \Rightarrow x = 26$.

b) Ta có $5(x^2 - 5x + 6) > 0 \Leftrightarrow 5(x - 2)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2. \end{array}\right.$

Chuyên đề 14

14.1. a) $x \in \{\pm 1; \pm 3\}$; b) $x = -2,5$.

14.2. a) $-1,5 \le x \le 1,5$; b) $x \in \left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$; c) $x \in \{5,5; 1\}$.

14.3. $x \in \{-3; 1\}$.

14.4. Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - 2|x| = |2 - x| - 3 \\ 3 - 2|x| = 3 - |2 - x| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2 - x| + 2|x| = 6 \\ |2 - x| - 2|x| = 0. \end{array}\right.$

Giải tương tự ví dụ 14.4, ta được $x \in \left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$.

14.5. Đặt $|x - 10| = t$. Phương trình thành $|2t - 5| + |2t - 9| = 10$.

Với $t \le \frac{5}{2}$ tìm được $t = 1 \Leftrightarrow |x - 10| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = 9. \end{array}\right.$

Với $t \ge \frac{9}{2}$ tìm được $t = 6 \Leftrightarrow |x - 10| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = 4. \end{array}\right.$

14.6. a) (1) $\Leftrightarrow -4 < x^2 - x - 2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - x + 2 > 0. \end{cases}$

$* \; x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0.$

$* \; x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3.$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-2 < x < 3$.

b) Ta có $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \; \forall x$ nên

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < x - 5 < x^2 + x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0. \end{cases}$

Ta có

$* \; x^2 + 7 > 0, \; \forall x.$

$* \; x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3. \end{array}\right.$

Nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3. \end{array}\right.$

Ta còn cách chứng minh khác : $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 4$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 > 4 \Leftrightarrow |x+1| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1>2 \\ x+1<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-3 \end{array}\right.$.

c) (3) $\Leftrightarrow -2010 \le 5x - 1000 \le 2010 \Leftrightarrow -1010 \le 5x \le 3010$

$\Leftrightarrow -202 \le x \le 602$.

d) Đáp số : $\frac{1}{4} < x < 1$.

14.7. * Với $x < -\frac{1}{3}$ thì $\frac{3x+1}{2} < 0$. Do đó bất phương trình đúng với $x < -\frac{1}{3}$.

* Với $x > -\frac{1}{3}$ thì (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(3x-1) > 3x+1 \\ 2(3x-1) < -3x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x > 3 \\ 9x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < \frac{1}{9} \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<\frac{1}{9} \end{array}\right.$.

b) Với $x \ne 1$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x-1}+2>5 \\ \frac{1}{x-1}+2<-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x-1}-3>0 \\ \frac{1}{x-1}+7<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4-3x}{x-1}>0 \\ \frac{7x-6}{x-1}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<\frac{4}{3} \\ \frac{6}{7}<x<1. \end{array}\right.$$

Hợp nghiệm ta được nghiệm bất phương trình là : $\frac{6}{7} < x < \frac{4}{3}$ và $x \ne 1$.

c) Với $x \ne 1$ thì $\left|\frac{x}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{1}{x-1}\right| > 2011 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x-1} > 2011 \\ \frac{1}{x-1} < -2011 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2012-2011x}{x-1} > 0 \\ \frac{2011x-2010}{x-1} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < \frac{2012}{2011} \\ \frac{2010}{2011} < x < 1. \end{array}\right.$$

Hợp nghiệm được $\frac{2010}{2011} < x < \frac{2012}{2011}$ và $x \ne 1$.

14.8. a) $1 + 3 + 5 + ... + 89 = \dfrac{(1+89).45}{2} = 45^2$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow |2x - 9| \geq 45 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 9 \geq 45 \\ 2x - 9 \leq -45 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 27 \\ x \leq -18 \end{array}\right.$.

b) Với $x \neq 1$ thì

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 1\right| > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4-2x}{x-1} > 0 \\ \dfrac{4x-2}{x-1} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{array}\right..$$

Nghiệm của bất phương trình là : $\dfrac{1}{2} < x < 2$; $x \neq 1$.

c) Với $x \neq 2$ thì $\left|\dfrac{1}{2x-4} - 3\right| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{33-16x}{2x-4} > 0 \\ \dfrac{4x-7}{2x-4} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < \dfrac{33}{16} \\ \dfrac{7}{4} < x < 2. \end{array}\right.$

Nghiệm của bất phương trình : $\dfrac{7}{4} < x < \dfrac{33}{16}$ và $x \neq 2$.

d) * Với $x \geq 1$ thì (4) đúng vì $(1 - x \leq 0)$.

* Với $x < 1$ thì (4) $\Leftrightarrow |x^2 - 1| \geq 1 - x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 \geq 1 - x \\ x^2 - 1 \leq x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+2) \geq 0 \\ x(x-1) \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{array}\right. \\ 0 \leq x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ta có nghiệm : $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -2. \end{array}\right.$

e) $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0, \ \forall x$ nên

$$(5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 5 > x^2 + 2x + 3 \\ 3x + 5 < -(x^2 + 2x + 3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - x - 2 < 0 & (1) \\ x^2 + 5x + 8 < 0. & (2) \end{array}\right.$$

(1) có nghiệm $-1 < x < 2$;

(2) vô nghiệm ;

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < 2$.

14.9. a) Đáp số : $-4 < x < \dfrac{2}{3}$; b) Đáp số : $x > \dfrac{5}{2}$;

c) Đáp số : $0 < x < 2$; d) Đáp số : $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{13}{6}$.

14.10. a) $\left||x-1|-8\right|+3>4 \Leftrightarrow \left||x-1|-8\right|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-1|-8>1\\|x-1|-8<-1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-1|>9\\|x-1|<7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x-1>9\\x-1<-9\end{array}\right.\\-7<x-1<7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x>10\\x<-8\end{array}\right.\\-6<x<8.\end{array}\right.$$

b) $\left||2x-1|-10\right|+4<5 \Leftrightarrow \left||2x-1|-10\right|<1 \Leftrightarrow -1<|2x-1|-10<1$

$$\Leftrightarrow 9<|2x-1|<11 \Leftrightarrow \begin{cases}-11<2x-1<11\\\left[\begin{array}{l}2x-1>9\\2x-1<-9\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-10<2x<12\\\left[\begin{array}{l}2x>10\\2x<-8\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5<x<6\\\left[\begin{array}{l}x>5\\x<-4.\end{array}\right.\end{cases}$$

Hợp nghiệm ta được nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l}5<x<6\\-5<x<-4\end{array}\right.$.

14.11. a) Do $-x^2+x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$ nên $\left|-x^2+x-1\right|=x^2-x+1$;

$$x^2-3x+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

nên (1) $\Leftrightarrow x^2-x+1\le x^2-3x+4 \Leftrightarrow 2x\le 3 \Leftrightarrow x\le 1{,}5$.

b) Giải tương tự. Đáp số : $x\ge\frac{5}{2}$.

Chuyên đề 15

15.1. a) $A(x)=2(x+2)^2-3\ge -3$. Do đó min $A(x)=-3 \Leftrightarrow x=-2$.

b) $A(y)=y^2+6y+9+2y^2-4y+2=3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{32}{3}\ge\frac{32}{3}$.

Vậy min $A(y)=\frac{32}{3} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}$.

c) $A(u)=3u^2-12u+14=3(u-2)^2+2\ge 2$; Vậy min $A(u)=2 \Leftrightarrow u=2$.

d) $A(z) = (z-2)^2(z^2+1) + 10 \geq 10$. Vậy min $A(z) = 10 \Leftrightarrow z = 2$.

e) $A(x, y, z, t) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + (t-4)^2 - 30 \geq -30$.

Vậy min $A(x, y, z, t) = -30 \Leftrightarrow (x = 1 ; y = 2 ; z = 3 ; t = 4)$.

15.2. a) $P = (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x + 10)$. Đặt $x^2 - 6x + 9 = y$, ta có

$P = (y-1)(y+1) = y^2 - 1 \geq -1$. Vậy min $P = -1 \Leftrightarrow y = 0$ hay $x = 3$.

b) $Q = -(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 4)$. Đặt $x^2 + 3x = y$ ta có

$Q = -(y-4)(y+4) = 16 - y^2 \leq 16$. Vậy max $Q = 16 \Leftrightarrow y = 0$ hay $x = 0$; $x = -3$.

c) $R = (x^2 + 3x - 10)(x^2 + 3x + 2)$.

Đặt $x^2 + 3x - 4 = y$, ta có $R = (y-6)(y+6) = y^2 - 36 \geq -36$.

Vậy min $R = -36 \Leftrightarrow y = 0$ hay $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -4$; $x = 1$.

d) $S = (x^2 - 4x)(x^2 - 4x + 6) + 109$.

Đặt $x^2 - 4x + 3 = y$ thì $S = (y-3)(y+3) + 109 = y^2 + 100 \geq 100$.

Vậy min $S = 100 \Leftrightarrow y = 0$ hay $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x = 3$.

e) Đặt $x - 2014 = y$ thì $V = 2012 - \left[(y+1)^4 + (y-1)^4\right] = 2010 - 2(y^4 + 6y^2) \leq 2010$.

Vậy max $V = 2010 \Leftrightarrow y = 0$ hay $x = 2014$.

15.3. a) $B(y) = \frac{29}{4} - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2$; max $B(y) = \frac{29}{4} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$.

b) $B(z) = -3\left(z - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{25}{3} \leq \frac{25}{3}$; max $B(z) = \frac{25}{3} \Leftrightarrow z = \frac{4}{3}$.

c) Tử : $(3x-2)^2 + 10$. Mẫu : $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)...\left(-\frac{99}{100}\right) = -\frac{1}{100}$.

$B(x) = -100\left[(3x-2)^2 + 10\right] \leq -1000$. Vậy max $B(x) = -1000 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

15.4. a) $M = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 + 1)^2 + ... + (x_n + 1)^2 - n \geq -n$

Do đó min $M = -n \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = -1$.

b) Với $i = 1, 2, ..., n$, ta có $i^2x_i^2 - 2ix_i + 1 = (ix_i - 1)^2$. Do đó

$N = (x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 1)^2 + (3x_3 - 1)^2 + ... + (nx_n - 1)^2 - n \geq -n$.

Do đó min $N = -n \Leftrightarrow x_1 = 1 ; x_2 = \frac{1}{2} ; x_3 = \frac{1}{3} ; ... ; = x_n = \frac{1}{n}$.

c) Với i = 1, 2, ..., n, ta có $x_i^2 - 2ix_i + i^2 = (x_i - i)^2$. Do đó

$$P = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 + ... + (x_n - n)^2 - (1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$$

$$\geq -(1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2), \forall x_i.$$

Vậy min $P = -(1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$\Leftrightarrow (x_1 = 1 ; x_2 = 2 ; x_3 = 3 ; ... ; x_n = n)$.

15.5. a) $D = (x - y - 5)^2 + 3(y - 1)^2 + 4$; min $D = 4 \Leftrightarrow (x = 6 ; y = 1)$.

b) $E = 2010 - (x - y + 5)^2 - 2(y - 1)^2$; max $E = 2010 \Leftrightarrow (x = -4 ; y = 1)$.

c) $G = (x^2 - 2y)^2 + (x - 3)^2 + 1$; min $G = 1 \Leftrightarrow (x = 3 ; y = 4,5)$.

d) $L = (y - x + 1)^2 + 2(x - 3)^2 + 1930$; min $L = 1930 \Leftrightarrow (x = 3 ; y = 2)$.

15.6. a) $C = \frac{100}{(25x^2 - 2.5x.2 + 4) + 10} = \frac{100}{(5x - 2)^2 + 10} \leq \frac{100}{10} = 10$.

Vậy max $C = 10 \Leftrightarrow x = 0,4$.

b) $D = \frac{-30}{(4x^2 - 4x + 1) + 5} = \frac{-30}{(2x - 1)^2 + 5} \geq \frac{-30}{5} = -6$.

Vậy min $D = -6 \Leftrightarrow x = 0,5$.

c) $E = \frac{1000}{(x - 10)^2 + (y - 10)^2 + 2010} \leq \frac{1000}{2010}$,

Vậy max $E = \frac{100}{201} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$.

d) $G = \frac{2012}{(x - 2)^2 + (x - 2y - 1)^2 + 2013} \leq \frac{2012}{2013}$.

Đáp số : max $G = \frac{2012}{2013} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0,5 \end{cases}$.

15.7. a) $B = \frac{2(x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} = 2 + \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \geq 2$.

Vậy min $B = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

b) $C = \frac{1}{4} - \frac{503}{x^2 + 1} \geq -\frac{2011}{4}$. Vậy min $C = -\frac{2011}{4} \Leftrightarrow x = 0$.

c) $D = \dfrac{2(x^2+4)+1}{x^2+4} = 2 + \dfrac{1}{x^2+4} \le \dfrac{9}{4} \Rightarrow \max D = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x = 0.$

d) $E = \dfrac{(x^2+5)+2(x^2-4x+4)}{x^2+5} = 1 + \dfrac{2(x-2)^2}{x^2+5} \ge 1.$

Vậy $\min E = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

e) $Q = 5 + \dfrac{7}{(x+1)^2+6} \le 5 + \dfrac{7}{6}$. Vậy $\max Q = \dfrac{37}{6} \Leftrightarrow x = -1.$

15.8. a) $g(x) = \dfrac{2(x+1)-2}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$. Đặt $\dfrac{1}{x+1} = u$ thì g(x) thành

$$g(u) = 2u - 2u^2 = -2\left(u^2 - 2u.\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4}\right) = -2\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}.$$

Vậy $\max g(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{2}$ hay $x = 1$.

b) $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ hay $h(y) = 1 + y + y^2 = \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \ge \dfrac{3}{4}$ với $\dfrac{1}{x-1} = y$.

Vậy $\min h(x) = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$ hay $x = -1$.

c) $k(x) = 5 - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$ hay $k(y) = 5 - 2y + y^2 = (y-1)^2 + 4 \ge 4,\ \forall y,$

với $\dfrac{1}{x-2} = y$.

Vậy $\min k(x) = 4 \Leftrightarrow y = 1$ hay $x = 3$.

15.9. a) Với $x > 5$ thì $A < 0$. Xét $x < 5$ thì mẫu $5 - x$ là số nguyên dương. Phân số A có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên A lớn nhất $\Leftrightarrow$ mẫu $(5 - x)$ nhỏ nhất. Do đó $5 - x = 1 \Leftrightarrow x = 4$. Khi đó $A = 19$.

Vậy $\max A = 19 \Leftrightarrow x = 4$.

b) Với $x \ne 3$ thì $B = \dfrac{x-8}{x-3} = \dfrac{(x-3)-5}{x-3} = 1 - \dfrac{5}{x-3} = 1 + \dfrac{5}{3-x}$.

Để B lớn nhất thì $\dfrac{5}{3-x}$ lớn nhất. Nếu $x > 3$ thì $\dfrac{5}{3-x} < 0$.

Nếu $x < 3$ thì $\dfrac{5}{3-x} > 0$ nên $\dfrac{5}{3-x}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (3 - x)$ nhỏ nhất.

Suy ra $\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 3 - x \in \mathbb{Z} \\ (3-x) \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Rightarrow 3 - x = 1$ hay $x = 2$. Khi đó $\max B = 6$.

c) Với $x \neq 1930$ thì $C = \dfrac{1945 - x}{x - 1930} = \dfrac{15 - (x - 1930)}{x - 1930} = \dfrac{15}{x - 1930} - 1.$

Đặt $D = \dfrac{15}{x - 1930}$. Ta có C nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ D nhỏ nhất.

* Với $x > 1930$ thì $D > 0$.

* Với $x < 1930$ thì $D < 0$ nên D nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ số đối của D lớn nhất

$\Leftrightarrow \dfrac{15}{1930 - x}$ lớn nhất.

Do $1930 - x > 0$ nên $\dfrac{15}{1930 - x}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (1930 - x)$ nhỏ nhất.

Suy ra $\begin{cases} 1930 - x > 0 \\ 1930 - x \in \mathbf{Z} \\ (1930 - x) \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Rightarrow 1930 - x = 1$. Khi đó $C = -16$.

Vậy $\min C = -16 \Leftrightarrow x = 1929$.

15.10. a) Ta có $A = \dfrac{(x^2+2)-(x^2-2x+1)}{x^2+2} = 1 - \dfrac{(x-1)^2}{x^2+2} \leq 1$. Do đó $\max A = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Mặt khác $A = \dfrac{2x+1}{x^2+2} = \dfrac{4x+2}{2(x^2+2)} = \dfrac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{2(x^2+2)}$

$= \dfrac{(x+2)^2}{2(x^2+2)} - \dfrac{1}{2} \geq -\dfrac{1}{2}.$

Do đó $\min A = -0,5 \Leftrightarrow x = -2$.

b) Ta có $B = \dfrac{(4x^2+2)-(4x^2-4x+1)}{4x^2+2} = 1 - \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+2} \leq 1.$

Do đó $\max B = 1 \Leftrightarrow x = 0,5$

Mặt khác $B = \dfrac{(2x^2+4x+2)-(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \dfrac{(x+1)^2}{2x^2+1} - \dfrac{1}{2} \geq -\dfrac{1}{2}.$

Do đó $\min B = -0,5 \Leftrightarrow x = -1$.

c) Ta có $C = \dfrac{(x^2-36x+324)-(x^2+81)}{x^2+81} = \dfrac{(x-18)^2}{x^2+81} - 1 \geq -1.$

Do đó $\min C = -1 \Leftrightarrow x = 18$.

Mặt khác $C = \dfrac{(4x^2+324)-(4x^2+36x+81)}{x^2+81} = 4 - \dfrac{(2x+9)^2}{x^2+81} \leq 4.$

Do đó $\max C = 4 \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{2}$.

d) $D = \dfrac{4(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)+x} = \dfrac{4}{1+\dfrac{x}{x^2+x+1}} \le 4, \forall x \ge 0$. Vậy max $D = 4 \Leftrightarrow x = 0$.

* Xét với $x > 0$ thì $D = 4 - \dfrac{4x}{x^2+2x+1} = 4 - \dfrac{4}{x+\dfrac{1}{x}+2}$

Do $x + \dfrac{1}{x} \ge 2, \forall x > 0$ nên $4 - \dfrac{4}{x+\dfrac{1}{x}+2} \ge 3, \forall x > 0$. Vậy min $D = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

15.11. a) $B = \dfrac{10x^2+41x+40}{x} = 10x + \dfrac{40}{x} + 41$.

Ta có với $x > 0$ thì $10x$ và $\dfrac{40}{x}$ là hai số dương có tích bằng 400 không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi $10x = \dfrac{40}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4$. Nghiệm $x = 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài. Vậy min $B = 81 \Leftrightarrow x = 2$.

b) $C = \dfrac{(x^2+6x+9)+4-6(x+3)}{x+3} = (x+3) + \dfrac{4}{x+3} - 6$.

Ta có với $x \ge -3$, hai số dương $x + 3$ và $\dfrac{4}{x+3}$ có tích bằng 4 không đổi nên C nhỏ nhất $\Leftrightarrow x + 3 = \dfrac{4}{x+3} \Leftrightarrow (x+3)^2 = 4$. Nghiệm $x = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài. Vậy min $C = -2 \Leftrightarrow x = -1$.

15.12. a) Với $x > 0$ thì $P > 0$. Do đó P lớn nhất khi $\dfrac{1}{P}$ nhỏ nhất.

Xét $\dfrac{1}{P} = \dfrac{4x^2+4x+1+16}{2x+1} = (2x+1) + \dfrac{16}{(2x+1)}$.

Vậy max $P = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

b) Với $\dfrac{1}{3} < a < 1$ thì $Q = \dfrac{1}{3}(3-3a)(3a-1)$ thì $3 - 3a$ và $3a - 1$ là hai số dương có tổng bằng 2 không đổi nên tích $(3-3a)(3a-1)$ lớn nhất khi hai số bằng nhau tức là $3 - 3a = 3a - 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{2}{3}$.

c) $(x^2 - 3x + 5) + (25 - x^2 + 3x) = 30$ không đổi nên R lớn nhất khi hai số bằng nhau, tức là

$$x^2 - 3x + 5 = 25 - x^2 + 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 ; x = 5.$$

Vậy max R = 15.15 = 225 $\Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 5$.

15.13. a) Vai trò x, y, z như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z > 0$.

Ta có $x - z \geq 0$ và $y(x - z) \geq z(x - z) \Rightarrow xy - yz + z^2 \geq xz$

$$\Rightarrow \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x} \geq 1. \qquad (1)$$

Mặt khác $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ nên $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$.

Vậy min G = 3 $\Leftrightarrow x = y = z$.

b) $H = 4 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{x}{t} + \frac{t}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{y}{t} + \frac{t}{y}\right) + \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right)$

$\geq 4 + 2.6 = 16.$

Vậy min H = 16 $\Leftrightarrow x = y = z = t$.

15.14. a) min $K = n^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$.

b) min $Q = 2^n \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$.

15.15. a) *Cách 1* : Xem ví dụ 12.4.

Cách 2 : Đặt $x + y = a$; $y + z = b$; $z + x = c$.

Ta có $x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$.

Từ đó $x = \frac{a + b + c}{2} - (y + z) = \frac{a + b + c}{2} - b = \frac{a - b + c}{2}$.

Tương tự $y = \frac{a + b - c}{2}$ $z = \frac{-a + b + c}{2}$.

Do đó $C = \frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} = \frac{a - b + c}{2b} + \frac{a + b - c}{2c} + \frac{-a + b + c}{2a}$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) - 3\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với $a, b > 0$, ta có :

$C \geq \frac{1}{2}(2 + 2 + 2 - 3) = \frac{3}{2}$. Vậy min $C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow x = y = z$.

b) (Xem ví dụ 12.4) : min D = 7,5 $\Leftrightarrow$ x = y = z.

c) Xét $3E = \left(\frac{3x}{y+z+t} + \frac{y+z+t}{3x}\right) + \left(\frac{3y}{x+z+t} + \frac{x+z+t}{3y}\right)$

$$+\left(\frac{3z}{x+y+t} + \frac{x+y+t}{3z}\right) + \left(\frac{3t}{x+y+z} + \frac{x+y+z}{3t}\right)$$

$$+\frac{8}{3}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right)\right]$$

$$\geq 2.4 + \frac{8}{3}.2.6 = 40.$$

Vậy min $E = \frac{40}{3} \Leftrightarrow x = y = z = t$.

1.5.16. a) $a + b = 2 \Rightarrow 4 = a^2 + b^2 + 2ab = 2(a^2 + b^2) - (a - b)^2$

$\Rightarrow 4 \leq 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2$. Vậy min D = 2 $\Leftrightarrow$ a = b = 1.

b) $E = a^3 + b^3 + ab = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab = a^2 + b^2 = a^2 + (1 - a)^2$

$$= 2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a^2 - 2.a.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy min $E = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

c) Đặt $a - 1 = x$; $b - 1 = y$ thì $(a - 1) + (b - 1) = 3 - 2 = 1$ hay $x + y = 1$

$$G = \frac{(a-1)+1}{a-1}.\frac{(b-1)+1}{b-1} = \left[1+\frac{1}{a-1}\right].\left[1+\frac{1}{b-1}\right] = \left(1+\frac{1}{x}\right).\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

$G = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1 + \frac{x+y}{xy} + \frac{1}{xy} = 1 + \frac{2}{xy}$. Do $(x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 1 \geq 4xy$

$\Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geq 4$ nên $G \geq 9$. Vậy min $G = 9 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = \frac{3}{2}$.

d) $2a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 2a \Rightarrow H = ab = 2(1 - a).a = -2(a^2 - a)$

$= -2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$. Vậy max $H = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ và b = 1.

e) Đặt $a + 1 = x$; $b + 1 = y$; $c + 1 = z$ thì $x + y + z \leq 6$

nên $\frac{1}{x+y+z} \geq \frac{1}{6}$. Ta có $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \geq \frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

Vậy min $K = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 2 \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

15.17. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski cho bộ n số 1, 1, 1,..., 1 và $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ta có :

$$(x_1+x_2+x_3+...+x_n)^2 \leq (1^2+1^2+1^2+...+1^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2)$$

hay $(x_1+x_2+x_3+...+x_n)^2 \leq n.(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2)$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2 \geq (x_1+x_2+x_3+...+x_n)^2 : n = k^2 : n.$$

Do đó $D_n \geq k^2 : n$. Vậy min $D_n = k^2 : n \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = k : n$.

15.18. Ta có $2xy \leq x^2+y^2 \Rightarrow (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 2025$

$$\Rightarrow |x+y| \leq 45 \Rightarrow -45 \leq x+y \leq 45.$$

Vậy max $(x+y) = 45 \Leftrightarrow x = y = 22,5$

min $(x+y) = -45 \Leftrightarrow x = y = -22,5.$

15.19. a) Đặt $D_1 = |x-10|+|x-13|$; $D_2 = |x-11|+|x-12|$.

Tương tự cách giải của ví dụ 15.11c) : min $D_1 = 3 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 13$

min $D_2 = 1 \Leftrightarrow 11 \leq x \leq 12.$

Vậy min $D = 4 \Leftrightarrow 11 \leq x \leq 12.$

b) min $E = 1000 \Leftrightarrow 1010 \leq x \leq 2010.$

c) Đặt $|3x-5| = y$ thì $F = y^2-6y+9+1 = (y-3)^2+1 \geq 1.$

Vậy min $F = 1 \Leftrightarrow y = 3 \Leftrightarrow |3x-5| = 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$; $x = \frac{2}{3}$.

d) max $G = 6 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$.

e) max $H = -9 \Leftrightarrow x = 1,5.$

15.20. a) Đặt $L_1 = |x-a|+|x-d|$

$L_2 = |x-b|+|x-c|.$

Tương tự cách giải ví dụ 15.11c) : min $L_1 = d-a \Leftrightarrow a \leq x \leq d$

min $L_2 = c-b \Leftrightarrow b \leq x \leq c.$

Vậy min $L = d - a + c - b \Leftrightarrow b \le x \le c$.

b) Đặt $K_1 = |x - 1| + |x - 2012|$

$K_2 = |x - 2| + |x - 2011|$

$K_3 = |x - 3| + |x - 2010|$

.....

$K_{1005} = |x - 1005| + |x - 1008|$

$K_{1006} = |x - 1006| + |x - 1007|$.

Ta có : min $K_1 = 2011 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2012$

min $K_2 = 2009 \Leftrightarrow 2 \le x \le 2011$

min $K_3 = 2007 \Leftrightarrow 3 \le x \le 2010$

.....

min $K_{1005} = 3 \Leftrightarrow 1005 \le x \le 1008$

min $K_{1006} = 1 \Leftrightarrow 1006 \le x \le 1007$.

Chứng minh $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Áp dụng vào bài toán, ta có :

min $K = 1 + 3 + ... + 2009 + 2011 = 1006^2 \Leftrightarrow 1006 \le x \le 1007$.

Chuyên đề 16

16.1. a) Đáp số : $p(x) = (x + 7)(x + 2)(x - 3)$.

b) Đáp số : $q(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

c) Đáp số : $f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 5)(x - 7)$.

d) Đáp số : $h(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

16.2. a) Coi A là đa thức đối với x.

Thay $x = -y$, ta có $A(-y) = (-y + y + z)^3 - (-y)^3 - y^3 - z^3 = 0$.

Theo hệ quả định lí Bézout ta có A chứa nhân tử $(x + y)$ hay $A \vdots (x + y)$.

Vai trò x, y, z trong A như nhau nên ta có $A \vdots (y + z)$ và $A \vdots (z + x)$.

Vậy $A \vdots (x + y)(y + z)(z + x)$. Khi khai triển A thì A chỉ còn bậc hai đối với x. Do đó A có dạng $A = k(x + y)(y + z)(z + x)$. Cho (x, y, z) một giá trị cụ thể ta tìm được k. Chẳng hạn cho x = 2 ; y = 1 ; z = 1, ta có

$$(2 + 1 + 1)^3 - 8 - 1 - 1 = k(2 + 1)(1 + 1)(1 + 2) \Rightarrow k = 3.$$

Vậy $\quad (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x).$

b) Coi B là đa thức với x. Ta thấy $B(-y) = 0$ nên theo hệ quả định lí Bézout B chứa nhân tử $(x + y)$. Do đó khai triển $(x + y)^5$ theo nhị thức Newton và rút gọn

$$B = 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = 5xy[(x^3 + x^2y) + (x^2y + xy^2) + (xy^2 + y^3)]$$
$$= 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2).$$

16.3. a) Ta có $x^{21} = x^{21} - x + x = x(x^{20} - 1) + x$

$$= x[(x^4)^5 - 1] + x = x(x^4 - 1).p(x) + x$$
$$= x(x^2 - 1)(x^2 + 1).p(x) + x.$$

Vậy $x^{21} : (x^2 + 1)$ dư x.

b) $x^{63} = x[(x^2)^{31} + 1] - x = x(x^2 + 1).q(x) - x.$

Vậy $x^{63} : (x^2 + 1)$ dư $-x$.

16.4. a) Đáp số : -4

b) $f(x) = x[(x^2)^{33} + 1] + x[(x^2)^{23} + 1] + x[(x^2)^{13} + 1] + x[(x^2)^3 + 1] - 3x + 1$

$= x(x^2 + 1).\ h(x) + x(x^2 + 1).\ k(x) + x(x^2 + 1).\ p(x) + x(x^2 + 1).\ q(x) - 3x + 1.$

Đáp số : Dư $-3x + 1$.

c) $f(x) = (x - 1)(x + 1).t(x) + ax + b.$

$f(1) = a + b = 6$; $f(-1) = -a + b = -4 \Rightarrow a = 5$; $b = 1$. Dư là $5x + 1$.

16.5. a) $f\left(-\frac{5}{3}\right) = 18.\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -50.$

b) $g(-2) = 0 \Rightarrow a = -8.$

c) $h(-5) = 3 \Rightarrow a = 8.$

16.6. a) Ta có $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

$f(3) = 0 \Rightarrow 3a + b = -27$; $\qquad f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = -8.$

Suy ra $a = -19$; $b = 30$.

b) $g(x) = (x + 2)(x - 1)p(x) + 2x + 1$.

$g(-2) = -12 - 2a + b = -3$; $g(1) = -3 + a + b = 3$.

Tìm được $a = -1$; $b = 7$.

c) $h(-1) = -3 - a + b = 6$; $h(3) = 81 + 3a + b = 70$.

Tìm được $a = -5$; $b = 4$.

16.7. a) Ta có $g(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.

Do $f(x) \vdots g(x)$ nên $f(x) \vdots (x - 1)$.

Theo định lí Bézout thì $f(1) = 0$ hay $1 + 3 + 3 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = -6$.

b) $f(x) = (x + 2).\ h(x)$.

Ta có :

Hệ số f(x)		1	3	3	−1	k
Hệ số h(x)	−2	1	3 + (−2).1 = 1	3 + (−2).1 = 1	−1 + (−2). 1 = −3	k + (−2).(−3) = 0 = r

Như vậy : $k + 6 = 0 \Rightarrow k = -6$.

16.8. Ta có $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$ và đa thức chia bậc hai nên dư là $ax + b$.

Vậy $f(x) = (x - 2)(x + 5)(x^2 + 1) + ax + b$.

Theo định lí Bézout, số dư trong phép chia $f(x)$ cho $x - 2$ là $f(2) = 4$, cho $x + 5$ là $f(-5) = -17$ nên ta có :

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ -5a + b = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2. \end{cases}$$

Đa thức cần tìm là $(x - 2)(x + 5)(x^2 + 1) + 3x - 2 = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 6x - 12$.

16.9. *Cách 1* : Chia đa thức : đặt phép chia $f(n)$ cho $g(n)$ được thương là $n^2 - n + 3$ và dư $8 \Rightarrow n + 3$ là ước của $8 \Rightarrow n = 1$ và $n = 5$.

Cách 2 : Dùng lược đồ Horner tìm được dư là $8 \Rightarrow n + 3$ là ước của 8 $\Rightarrow n = 1$ và $n = 5$.

Cách 3 : Theo định lí Bézout thì dư của $f(n)$ chia cho $(n + 3)$ là

$f(-3) = -27 + 18 + 17 = 8 \Rightarrow n = 1$ và $n = 5$.

16.10. a) Dư của f(k) chia cho (k – 2) là f(2) = 5 ; k – 2 là ước của 5 $\Rightarrow k \in \{-3; 1; 3; 7\}$.

b) Dư của g(k) chia cho (2k – 3) là $g\left(\frac{3}{2}\right) = 2.\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5.\frac{3}{2} - 19 = -7$

2k – 3 là ước của –7 $\Rightarrow k \in \{-2; 1; 2; 5\}$.

16.11. $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Ta có f(–1) = 0 và f(1) = 0. Vậy $f(x) \vdots (x^2 - 1)$

16.12. Với mọi x ta có $P_n(x) = (x - a).\ Q_{n-1}(x) + r$, hay là :

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0) + r$$

$$= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - a.b_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - a.b_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (b_1 - a.b_2)x^2$$

$$+ (b_0 - a.\ b_1)x - a.b_0 + r.$$

Đồng nhất hệ số ở hai vế ta có :

$b_{n-1} = a_n \quad \Rightarrow \quad b_{n-1} = a_n$

$b_{n-2} - a.b_{n-1} = a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad b_{n-2} = a_{n-1} + a.\ b_{n-1}$

$b_{n-3} - a.b_{n-2} = a_{n-2} \quad \Rightarrow \quad b_{n-3} = a_{n-2} + a.\ b_{n-2}$

.....

$b_1 - a.b_2 = a_2 \quad \Rightarrow \quad b_1 = a_2 + a.\ b_2$

$b_0 - a.\ b_1 = a_1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = a_1 + a.\ b_1$

$r - a.b_0 = a_0 \quad \Rightarrow \quad r = a_0 + a.\ b_0$ (r là số dư).

16.13. Số dư trong phép chia f(n) cho $n^2 - n$ là 3 ; $n^2 - n = n(n - 1)$ chẵn nên không là ước của 3.

Chuyên đề 17

17.1. a) Có thể rút y theo x là $y = 2 + \frac{5}{x - 3}$ (với $x \neq 3$), rồi suy luận x – 3 là ước số của 5 ; hoặc có thể biến đổi phương trình thành (x – 3)(y – 2) = 5, rồi suy ra x – 3 và y – 2 là các ước số của 5.

Đáp số $(x ; y) = (4 ; 7), (8 ; 3), (2 ; -3), (-2 ; 1)$.

b) Biến đổi phương trình thành $(x - y)(x + y) = 1999$.

Đáp số : $(x ; y) = (1000 ; 999)$.

17.2. Sử dụng nhận xét bình phương của một số nguyên chia cho 4 dư 0 hoặc 1. Vế trái chia 4 dư 0 hoặc 1 hoặc 2, vế phải chia 4 dư 3.

17.3. a) Nhận thấy $x \vdots 2$, đặt $x = 2t$ $(t \in \mathbb{Z})$ dẫn đến $7t - 3y = 100$

$\Leftrightarrow y = 2t - 33 + \dfrac{t-1}{3}$. Để y nguyên thì $\dfrac{t-1}{3} = k$ $(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 3k + 1$.

Suy ra $x = 6k + 2$ và $y = 7k - 31$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Vế trái chia hết cho 5, còn vế phải không chia hết cho 5. Vì vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

17.4. a) Tương tự như Ví dụ 17.5. Đáp số $(x ; y) = (503 ; 503)$.

b) Do vai trò x, y, z như nhau nên có thể giả thiết $1 \le x \le y \le z$.

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow x \le 3. \text{ Vậy } x \in \{1 ; 2 : 3\}.$$

∘ Với $x = 1$ thì $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$, vô lí.

∘ Với $x = 2$ thì $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (y - 2)(z - 2) = 4$.

Tìm được $(y, z) = (4 ; 4), (3 ; 6)$.

∘ Với $x = 3$ thì $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{3}$.

Nếu $y = 3$ thì $z = 3$.

Nếu $y \ge 4$ thì $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \le \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$.

Đáp số : Các nghiệm $(x ; y ; z)$ là $(2 ; 4 ; 4), (2 ; 3 ; 6), (3 ; 3 ; 3), (4 ; 2 ; 4), (4 ; 4 ; 2), (2 ; 6 ; 3), (3 ; 2 ; 6), (3 ; 6 ; 2), (6 ; 2 ; 3), (6 ; 3 ; 2)$.

c) $(x ; y)$ là $(4 ; 12), (12 ; 4), (6 ; 6)$

d) $(x ; y ; z)$ là $(1 ; 2 ; 3), (1 ; 3 ; 2), (2 ; 1 ; 3), (2 ; 3 ; 1), (3 ; 2 ; 1), (3 ; 1 ; 2), (2 ; 2 ; 2)$.

17.5. Ta có $x + y + z + t = xyzt$. (1)

Giả sử $1 \le x \le y \le z \le t$ thì $xyzt = x + y + z + t \le 4t$ nên $xyz \le 4$.

∘ Với $xyz = 1$ thì $x = y = z = 1$. Thay vào (1) được $t = 3 + t$, loại.

∘ Với $xyz = 2$ thì $x = y = 1$, $z = 2$. Thay vào (1) được $t = 4$.

∘ Với $xyz = 3$ thì $x = y = 1$, $z = 3$. Thay vào (1) được $t = \frac{5}{2}$, loại.

∘ Với $xyz = 4$ thì $x = 1$, $y = z = 2$ hoặc $x = y = 1$, $z = 4$. Thay vào (1) đều không tìm được t nguyên.

Đáp số : bốn số phải tìm là 1 ; 1 ; 2 ; 4.

17.6. Cách giải tương tự Ví dụ 17.10.

a) $(x ; y ; z) = (0 ; 0 ; 0)$.

b) $(x ; y ; z ; t) = (0 ; 0 ; 0 ; 0)$.

c) $(x ; y ; z) = (0 ; 0 ; 0)$.

17.7. a) Chỉ ra $x = 1$ là nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất (cách giải tương tự Ví dụ 17.11).

b) Do vai trò x, y, z như nhau, giả sử $1 \le x \le y \le z \le 9$.

Chia hai vế cho $2^x \ne 0$ ta được

$$1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{9-x}. \quad (*)$$

Do $2^{9-x} > 1$ nên 2^{9-x} chia hết cho 2.

Nếu $x = z$ thì $x = y = z$, dẫn đến $1 + 2^0 + 2^0 = 2^{9-x}$ (vô lí).

Vậy $x < z$, nên 2^{z-x} là bội của 2, do đó $1 + 2^{y-x}$ chia hết cho 2, suy ra $2^{y-x} = 1$.

Vậy $y = x$.

Thay vào phương trình (*) được

$$1 + 1 + 2^{z-x} = 2^{9-x} \Leftrightarrow 2 + 2^{z-x} = 2^{9-x} \Leftrightarrow 1 + 2^{z-x-1} = 2^{8-x}$$

Lập luận tương tự, suy ra $2^{z-x-1} = 1$ và $2^{8-x} = 2$.

Từ đó $x = 7$; $z = 8$; $y = 7$.

Đáp số : Nghiệm $(x ; y ; z)$ là $(7 ; 7 ; 8)$, $(7 ; 8 ; 7)$, $(8 ; 7 ; 7)$.

Nhận xét. Tổng quát, phương trình $2^x + 2^y + 2^z = 2^n$ $(n \ge 2)$ có các nghiệm $(x ; y ; z)$ nguyên là

$$(n-2 ; n-2 ; n-1) ; (n-2 ; n-1 ; n-2) ; (n-1 ; n-2 ; n-2).$$

c) Điều kiện $x \geq 0$, $y \geq 0$

Bình phương hai vế rồi chuyển vế được

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} = y^2 - x = k \ (k \in \mathbb{N}).$$

Bình phương hai vế được

$$x + \sqrt{x} = k^2 \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{N}.$$

Nhận thấy $x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$ là số chính phương khi $\sqrt{x} = 0$.

Suy ra $x = 0$; $y = 0$ (thoả mãn phương trình).

17.8. Với $x \geq 5$ thì vế trái có tận cùng bằng 3 nên không thể là số chính phương.

Xét $x < 5$, thử trực tiếp ta có $(x ; y) = (1 ; 1), (3 ; 3)$.

17.9. a) Giải tương tự Ví dụ 17.13.

Với $x = 0$ thì $y = \pm 1$.

Với $x = -1$ thì $y = \pm 1$.

Xét $x > 0$ thì $x^2 < y^2 < (x + 1)^2$: vô lí

Xét $x < -1$ thì $(x + 1)^2 < y^2 < x^2$: vô lí

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(x ; y)$ là $(0 ; 1), (0 ; -1), (-1 ; 1), (-1 ; -1)$.

b) $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$.

Cách làm tương tự Ví dụ 17.14. Đáp số : $(x ; y) = (1 ; 0), (-1 ; -1)$.

17.10. Nhận xét $(x^2 + y^2) \vdots 121 \Rightarrow x \vdots 11$ và $y \vdots 11$.

Từ 1 đến 1000 có $\left[\dfrac{1000}{11}\right] = 90$ số chia hết cho 11.

Vì vậy sẽ tạo được $90 . 90 = 8100$ (cặp số $(x ; y)$) thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chuyên đề 18

Các bài tập từ 18.1 đến 18.9 học sinh tự làm.

18.10. Giả sử mệnh đề đúng với n, cần chứng minh mệnh đề đúng với n + 1.

Ta có : $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ số } 3} + \underbrace{33\ldots3}_{n+1 \text{ số } 3} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} + \underbrace{33\ldots3}_{n+1 \text{ số } 3}$

$$= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} + 3.10^n + 3.10^{n-1} + ... + 3$$

$$= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} + 3(10^n + 10^{n-1} + ... + 1)$$

$$= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} + 3.\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} \text{ (theo bài 2.b)}$$

$$= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} + \frac{10^{n+1} - 1}{3} = \frac{10.10^{n+1} - 9n - 19}{27} = \frac{10^{n+2} - 9(n+1) - 10}{27}.$$

Vậy mệnh đề đúng với n + 1.

18.11. Mệnh đề đúng với n = 0. Giả sử mệnh đề đúng với n, tức là

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9m, m \in \mathbf{Z},$$

cần chứng minh mệnh đề đúng với n + 1.

Ta có $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 - n^3$

$$= 9m + (n+3-n)[(n+3)^2 + n(n+3) + n^2]$$

$$= 9m + 9(n^2 + 3n + 3) \vdots 9.$$

Theo PMI thì mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên n.

18.12. Với $n = 1$ thì $2 = f_0 f_2 = 1^2 + (-1)^2 = f_1^2 + (-1)^{1+1}$, mệnh đề đúng.

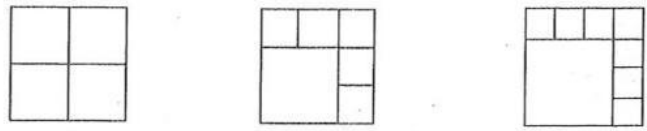
Nếu $f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^{n+1}$ thì do $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ta có :

$$f_n f_{n+2} = f_n(f_n + f_{n+1}) = f_n^2 + f_n f_{n+1} = f_{n-1}f_{n+1} - (-1)^{n+1} + f_n f_{n+1}$$

$$= f_{n+1}(f_{n-1} + f_n) + (-1)^{n+2} = f_{n+1}^2 + (-1)^{n+2}.$$

Suy ra mệnh đề đúng với mọi số nguyên $n \geq 1$.

18.13. Chia 4 một hình vuông thì số các hình vuông sẽ tăng thêm 3 (thêm 4 hình vuông mới và mất đi hình vuông gốc như hình a).



a) b) c)

Giả sử ta đã chia hình vuông ban đầu thành n hình vuông. Chia 4 mỗi hình vuông trong n hình vuông này, thì sau mỗi lần chia số các hình vuông đều tăng thêm 3 :

$$\{n, n+3, n+6, n+9, \ldots\}.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán với $n = 6$ và $n = 8$. Nhưng điều này là rõ ràng với cách chia ở hình b) và c).

18.14. Đầu tiên ta chứng minh nếu n tốt thì $2n + 8$ và $2n + 9$ cũng là tốt. Giả sử rằng

$$n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k \text{ và } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1 \text{ với } a_i \subset N^*, i = 1, 2, \ldots, k.$$

Ta có : $2n + 8 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k) + 4 + 4$

và $$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 ;$$

$$2n + 9 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k) + 3 + 6$$

và $$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Vì vậy nếu n tốt thì $2n + 8$ và $2n + 9$ cũng là tốt (1).

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp theo n.

Gọi M(n) là mệnh đề "Với mọi số nguyên n thì $n, n+1, \ldots, 2n+7$ là tốt".

Theo giả thiết, mệnh đề M(33) đúng. Do (1) nên mệnh đề M(n + 1) đúng.

18.15. Gọi M(n) là mệnh đề : $n \in N, n > 5$, n viết được dưới dạng tổng các số hạng mà mỗi số hạng là 2 hoặc 5.

Vì $6 = 2 + 2 + 2$ nên mệnh đề M(6) đúng.

Với mỗi $n > 6$, giả sử mệnh đề các mệnh đề M(7), . . ., M(n) đúng.

Do M(n −1) đúng nên $n - 1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ với $a_i = 2$ hoặc $a_i = 5$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Khi đó $n + 1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_p + 2$. Vậy mệnh đề M(n + 1) đúng. Theo PSMI thì mệnh đề M(n) đúng với mọi số tự nhiên $n > 5$.

Nhận xét. Nếu dùng PMI thì ở bước quy nạp, việc chứng minh từ M(n) đúng suy ra M(n + 1) đúng sẽ khá khó khăn, bạn đọc tự kiểm tra điều này!

18.16. Với $n = 0$, thì $a_0 = 0 = 0.2^0$, mệnh đề đúng.

Với $n = 1$, thì $a_1 = 2 = 1.2^1$, mệnh đề đúng.

Với $n = 2$, thì $a_2 = 4(a_1 - a_0) = 4.2 = 2.2^2$, mệnh đề đúng.

Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, giả sử với mọi số nguyên j, $2 \leq j \leq n$, ta có $a_n = n.2^n$.

Ta phải chứng minh $a_{n+1} = (n+1).2^{n+1}$.

Ta có : $a_{n+1} - 4(a_n - a_{n-1})$

$= 4\left[n.2^n - (n-1)2^{n-1}\right]$ (theo giả thiết quy nạp)

$= 4\left[2n.2^{n-1} - n.2^{n-1} + 2^{n-1}\right]$

$= 4\left[n.2^{n-1} + 2^{n-1}\right] = 4(n+1)2^{n-1}$

$= (n+1)2^{n+1}$.

Vậy mệnh đề đúng với $n+1$. Theo PSMI thì mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên n.

Chuyên đề 19

19.1. HS tự làm.

19.2. Chẳng hạn : $5^2 \equiv 3^2 \pmod 4$ nhưng $5 \not\equiv 3 \pmod 4$.

19.3. $a \equiv b \pmod m \Rightarrow \exists t \in \mathbf{Z} : a = b + mt \Rightarrow (a, m) = (b, m)$.

19.4. Một số chia hết cho 8 khi ba chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 8.

19.5. HS tự làm.

19.6. HS tự làm.

19.7. a) ∘ $2^{10} = 1024 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 2^{50} = (2^{10})^5 \equiv 2^5 \equiv 4 \pmod 7$.

Vậy 2^{50} chia cho 7 dư 4.

∘ $41 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 41^{65} \equiv (-1)^{65} \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$. Vậy 41^{65} chia cho 7 dư 6.

b) Dư 0.

19.8. a) Ta có : $2222 \equiv -4 \pmod 7$, $5555 \equiv 4 \pmod 7$

$$\Rightarrow 2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-4)^{5555} + 4^{2222} \pmod 7 \equiv -4^{5555} + 4^{2222} \pmod 7$$

$$\equiv -4^{2222}(4^{3333} - 1) \pmod 7 \equiv -4^{2222}\left((4^3)^{1111} - 1)\right) \pmod 7$$

Mặt khác : $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 4^3 - 1 \equiv 0 \pmod 7$.

Do đó : $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0 \pmod 7$. Vậy $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$.

b) Ta có : $53 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 53^{103} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 53^{103} \equiv 14 \pmod{13}$. (1)

$53 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 53^{103} \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 53^{103} \equiv 14 \pmod 3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $53^{103} \equiv 14 \pmod{[3; 13]} = 14 \pmod{39}$. (3)

$103 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 103^{53} \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 103^{53} \equiv 25 \pmod 3$. (4)

$103 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 103^{53} \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 103^{53} \equiv 25 \pmod{13}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $103^{53} \equiv 25 \pmod{[3; 13]} = 25 \pmod{39}$. (6)

Từ (3) và (6) suy ra : $53^{103} + 103^{53} \equiv 14 + 25 \equiv 39 \equiv 0 \pmod{39}$.

Vậy $53^{103} + 103^{53} \vdots 39$.

c) HS tự chứng minh.

19.9. *HD* : Chú ý rằng $(-13)^2 \equiv -13 + 1 \pmod{181}$, và dùng phương pháp quy nạp toán học theo n .

19.10. a) Rõ ràng $2^9 + 2^{99} \equiv 0 \pmod 4$, ta còn phải chứng minh $2^9 + 2^{99} \equiv 0 \pmod{25}$.

Thật vậy, do $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$ nên

$$2^9 + 2^{99} = 2^9(1 + 2^{90}) = 2^9\left(1 + (2^{10})^9\right) \equiv 0 \pmod{25}.$$

b) $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n$

$$\equiv 19.6^n \equiv 0 \pmod{19}.$$

19.11. a) Theo định lí Fermat, ta có :

$$a^{11} \equiv a \pmod{11} \Rightarrow a^{1991} \equiv (a^{11})^{181} \equiv a^{181} \pmod{11}.$$

Ta có $a^{181} = (a^{11})^{16}.a^5 \equiv a^{21} = a^{11}.a^{10} = a \pmod{11}$. Do đó $a^{1991} \equiv a \pmod{11}$.

Vậy $1^{1991} + 2^{1991} + ... + 2013^{1991} \equiv 1 + 2 + ... + 2013 \pmod{11}$.

Mặt khác : $1 + 2 + ... + 2013 = \frac{1 + 2013}{2}.2013 = 1007.2013 \equiv 0 \pmod{11}$

(vì $2013 \vdots 11$). Từ đó : $1^{1991} + 2^{1991} + ... + 2013^{1991} \equiv 0 \pmod{11}$.

b) ($\Rightarrow$) Giả sử $a \not\vdots 7$, khi đó $(a, 7) = 1$. Theo định lí Fermat : $a^6 \equiv 1 \pmod 7$.

Do đó : $a^{6m} + a^{6n} \equiv 2 \pmod 7$, vô lí. Vậy $a \vdots 7$.

($\Leftarrow$) Nếu $a \vdots 7$ thì $a^{6m} \vdots 7$ và $a^{6n} \vdots 7$, suy ra $a^{6m} + a^{6n} \vdots 7$.

19.12. a) $2^{18} = 1 \pmod{19}$; $2^{6n+2} = 4.(2^3)^{2n} = 4.(9-1)^{2n} \equiv 4 \pmod{18}$

$$\Rightarrow 2^{6n+2} = 18k + 4,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Do đó $2^{2^{6n+2}} + 3 = 2^{18k+4} + 3 \equiv 2^4 + 3 \equiv 0 \pmod{19}$.

b) $2^6 \equiv 1 \pmod 7$, $2^{2n+1} = 2.(2^2)^n = 2.(3+1)^n \equiv 2 \pmod 6$

$$\Rightarrow 2^{2n+1} = 6k + 2,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Do đó $2^{2^{2n+1}} + 3 = 2^{6k+2} + 3 \equiv 2^2 + 3 \equiv 0 \pmod 7$.

c) $2^{10} = 1 \pmod{11}$, $2^{4n+1} = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2,\ k \in \mathbf{Z}$.

Do đó $2^{2^{4n+1}} + 7 = 2^{10k+2} \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$.

19.13. Đặt $A = a_1^5 + a_2^5 + ... + a_{2012}^5$, $B = a_1 + a_2 + ... + a_{2012}$.

Hãy chứng minh $n^5 - n \vdots 30\ \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó :

$A - B = a_1^5 - a_1 + a_2^5 - a_2 + ... + a_{2012}^5 - a_{2012} \vdots 30$, lại do $B \vdots 30$ nên $A \vdots 30$.

19.14. ∘ $p = 2$ thì $2^n - n \vdots 2$ với mọi n chẵn.

∘ $p = 2$ thì do $(2, p) = 1$ nên $2^{p-1} - 1 \vdots p$, suy ra $2^{(p-1)^{2k}} - 1 \vdots p\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

Mặt khác : $(p-1)^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod p$, do đó :

$$2^{(p-1)^{2k}} - (p-1)^{2k} = \underbrace{[2^{(p-1)^{2k}} - 1]}_{\vdots p} - \underbrace{[(p-1)^{2k} - 1]}_{\vdots p} \vdots p.$$

Vậy tồn tại vô số số tự nhiên n có dạng $n = (p-1)^{2k}\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ sao cho $2^n - n \vdots p$.

19.15. Với $p = 3$ thì $p^2 + 14 = 23$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, cho nên $p^2 + 14 \equiv 0 \pmod 3$.

Vậy $p^2 + 14 \vdots 3$, mặt khác $p^2 + 14 > 3$ nên $p^2 + 14$ là hợp số.

Vậy chỉ có một số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

19.16. a) Vì $2^{3^4} = 2^{81} = (2^4)^{20}.2 \equiv 6.2 \equiv 2 \pmod{10}$. Vậy chữ số cuối của số 2^{3^4} là 2.

b) • *Cách 1 :* $3^{999} = (3^3)^{333} \equiv 2^{333} \pmod{25}$, $2^{333} = (2^{10})^{33}.2^3 \equiv -8 \pmod{25}$.

Vậy $3^{999} = 25k - 8$, $k \in \mathbb{N}$. Mặt khác $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod 4$, nên

$3^{999} = (3^4)^{249}.3^3 \equiv 3^3 \equiv 3 \pmod 4$. Do đó $3^{999} = 4m + 3$, $m \in \mathbb{N}$.

Ta cần tìm $k, m \in \mathbb{N}$ sao cho $3^{999} = 25k - 8 = 4m + 3$ (1). Từ (1) ta có :

$m = \dfrac{25k - 11}{4} = 6k - 2 + \dfrac{k-3}{4}$. Đặt $\dfrac{k-3}{4} = t, t \in \mathbb{N}$ thì : $k = 4t + 3$,

$m = 25t + 16, t \in \mathbb{N}$. Do đó : $3^{999} = 25(4t + 3) - 8 = 100t + 67$.

Vậy hai chữ số tận cùng của số 3^{999} là 67.

Cách 2 : Vì $(3, 100) = 1$ và $\varphi(100) = 40$ nên $3^{40} = 1 \pmod{100} \Rightarrow 3^{1000} \equiv 1 \equiv 201 \pmod{100}$

$\Rightarrow 3^{999} \equiv 67 \pmod{100}$. Vậy hai chữ số tận cùng của số 3^{999} là 67.

• $14^{14} \equiv 4^{14} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 14^{14^{14}} = 14^{10k+6} = 14^6.14^{10k}$.

Từ $2^{20k} \equiv 76 \pmod{100}$, $7^{4k} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 14^6.14^{10k} \equiv 14^6.76 \pmod{100}$.

Mặt khác $14^6 = 7^4.7^2.2^6 \equiv 7^2.2^6 \equiv 36 \pmod{100}$. Do đó

$14^6.76 \equiv 36.76 \equiv 36 \pmod{100}$. Vậy hai chữ số tận cùng của số $14^{14^{14}}$ là 36.

c) $1000 = 125.8$. Ta tìm số dư của 2^{2012} cho 125.

Nhận xét : Vì $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ nên nếu $a \vdots 25$

thì $(a+b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}$. Vì $2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$ nên $2^{10} = 25k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Áp dụng nhận xét trên ta có : $2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$.

Vì vậy : $2^{2012} = (2^{50})^{40}.2^{12} \equiv (-1)^{40}.2^{12} \equiv 24.2^2 \equiv 96 \pmod{125}$.

Vậy $2^{2012} = 125m + 96, m \in \mathbb{N}$. Vì $2^{2012} \vdots 8$ nên $m \vdots 8$. Đặt $m = 8t, t \in \mathbb{N}$.

Ta có : $2^{2012} = 125.8t + 96 = 1000t + 96$. Vậy số 2^{2012} có ba chữ số tận cùng là 096.

19.17. $S = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ nên chỉ cần chứng minh $S_k \vdots \dfrac{n(n+1)}{2}$ khi k lẻ.

19.18. $x = 8, y = 0, z = 6$.

19.19. Nếu $p \mid ab$ thì $p \mid (ab^p - ba^p)$. Nếu $p \nmid ab$ thì $(a, p) = (b, p) = 1$.

Do đó $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Suy ra $p \mid (a^{p-1} - b^{p-1})$. Vậy $p \mid (ab^p - ba^p)$.

19.20. Do p nguyên tố, $p \le 7$, $(10, p) = 1$ và $(9, p) = 1$, suy ra $\underbrace{1111\ldots1}_{p-1 \text{số} 1} = \dfrac{10^{p-1} - 1}{9} \vdots p$.

19.21. Sử dụng định lí Trung Quốc về phần dư tìm được : 334.

19.22. Theo định lí Fermat bé : $2^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ (1). Từ yêu cầu bài toán $2^n \equiv 1 \pmod{2011}$ (2) với n là số nguyên dương nhỏ nhất, nên suy ra $n \le 2010$. Viết $2010 = nq + r$ với $0 \le r < n$. Do (1) ta có $2^{2010} = 2^{nq+r} \equiv 1 \pmod{2011}$ (3), do (2) ta có : $2^{nq} \equiv 1 \pmod{2011}$ (4). Do đó $2^{nq}(2^r - 1) \equiv 0 \pmod{2011}$. Suy ra $2^r \equiv 1 \pmod{2011}$ (vì dễ thấy $(2^r, 2011) = 1$) $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow n \in Ư(2010)$. Do (2) nên $n > 10$. Mặt khác $2010 = 2.3.5.67$ nên $n \in \{15, 30, 67, 134, 201, 402, 670, 1005, 2010\}$.

Dễ kiểm tra được : các số $2^{15}, 2^{30}, 2^{67}, 2^{134}, 2^{201}$ không đồng dư 1 theo môđun 2011, nhưng $2^{402} \equiv 1 \pmod{2011}$. Vậy $n = 402$ là số cần tìm.

Mục lục