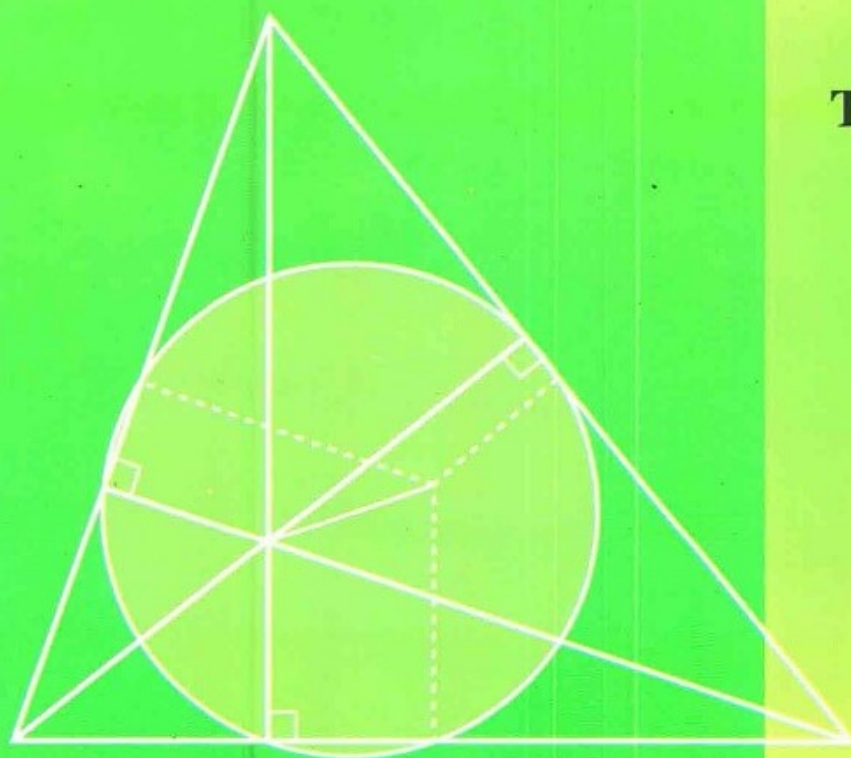


VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO
VÀ PHÁT TRIỂN
TOÁN

7

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN²

TOÁN 7

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ mười)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III

THỐNG KÊ

§11. BẢNG "TẦN SỐ" VÀ BIỂU ĐỒ

Khi nghiên cứu một hiện tượng tự nhiên hay xã hội, người ta thường tiến hành thống kê. Các số liệu thống kê thường được thể hiện bằng các giá trị số, chúng thường được viết thành một bảng (gọi tắt là bảng "tần số").

Số lần xuất hiện của một giá trị trong bảng gọi là *tần số* của giá trị đó. Tỉ số giữa tần số của một giá trị và số tất cả các giá trị được thống kê là *tần suất* của giá trị đó.

Ví dụ 47

Hai đội tuyển của trường A và trường B thi học sinh giỏi Toán của Quận đạt điểm (chấm điểm 20) như sau :

Trường A : 7, 12, 17, 8, 12, 19, 8, 18, 8, 18.

Trường B : 10, 7, 12, 9, 10, 9, 17, 18, 12, 16.

Lập bảng "tần số" thống kê điểm của từng đội tuyển gồm các cột : điểm, tần số, tần suất (tính theo phần trăm).

Giải :

Điểm	Trường A		Trường B	
	Tần số n	Tần suất f	Tần số n	Tần suất f
7	1	10%	1	10%
8	3	30%		
9			2	20%
10			2	20%
12	2	20%	2	20%
16			1	10%
17	1	10%	1	10%
18	2	20%	1	10%
19	1	10%		
	N = 10	100%	N = 10	100%

Bài tập

167. Bạn Tâm đếm các chữ cái trong dòng chữ “NGÀN HOA VIỆC TỐT DÂNG LÊN CÔ THẦY” để cắt khẩu hiệu. Lập bảng thống kê các chữ cái (không kể dấu) với tần số xuất hiện của chúng. Tìm các chữ cái xuất hiện từ ba lần trở lên và tính tần suất của các chữ cái đó.

168. Năng suất lúa của cả năm 1999 tính theo tạ/ha như sau (theo *Niên giám 2000*) :

.....

Đồng bằng sông Hồng : 54,6

Đồng Bắc : 37,3

Tây Bắc : 28,0

Bắc Trung Bộ : 38,9

Duyên hải Nam Trung Bộ : 39,2

Tây Nguyên : 30,8

Đồng Nam Bộ : 30,5

Đồng bằng sông Cửu Long : 40,9

Lập biểu đồ cột đứng.

169. Cơ cấu kinh tế nước ta (theo *Niên giám 2000*) :

Năm	Nông, lâm, thủy sản	Công nghiệp và xây dựng	Dịch vụ
1988	46%	24%	30%
1993	30%	29%	41%
1999	25%	35%	40%

Lập biểu đồ hình quạt cơ cấu kinh tế trong các năm trên.

170. Nhiệt độ không khí trung bình (tính theo độ C) trong các tháng năm 1999 của một số địa phương như sau (theo *Niên giám 2000*) :

Tháng Địa phương	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hà Nội	17,9	19,8	19,8	25,4	26,4	29,4	30,1	28,7	28,5	25,4	22,0	16,3
Huế	19,7	21,5	21,5	25,8	26,6	28,6	29,2	28,7	27,3	25,4	23,6	17,8
Đà Lạt	16,5	16,4	16,4	18,9	18,8	18,4	18,5	18,2	18,6	18,2	17,7	15,9

Trong mỗi địa phương trên :

a) Tháng nào nóng nhất ? Tháng nào lạnh nhất ?

b) Chênh lệch nhiệt độ giữa tháng nóng nhất và tháng lạnh nhất là bao nhiêu độ ?

§12. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

Để đại diện cho một dấu hiệu, người ta thường dùng *số trung bình cộng*, đó là trung bình cộng của tất cả các giá trị được thống kê.

Có trường hợp người ta quan tâm đến giá trị có số lần xuất hiện nhiều nhất (tức là giá trị có tần số lớn nhất), giá trị đó gọi là *mốt* (xem bài tập 175).

Ví dụ 48

Tính trung bình cộng điểm Toán của mỗi đội tuyển của trường A và trường B trong ví dụ 47.

Giải :

Trung bình cộng điểm Toán của đội tuyển trường A :

$$(7 + 8.3 + 12.2 + 17 + 18.2 + 19) : 10 = 12,7.$$

Trung bình cộng điểm Toán của đội tuyển trường B :

$$(7 + 9.2 + 10.2 + 12.2 + 16 + 17 + 18) : 10 = 12,0.$$

Ví dụ 49

Trung bình cộng của tám số là 12. Do thêm số thứ chín nên trung bình cộng của chín số là 13. Tìm số thứ chín.

Giải :

Tổng của tám số lúc đầu là : $12.8 = 96.$

Tổng của chín số là : $13.9 = 117.$

Số thứ chín : $117 - 96 = 21.$

Bài tập

171. Điểm trung bình 10 bộ môn của hai học sinh An và Bách như sau :

An : 6,2 ; 6,3 ; 7,2 ; 7,5 ; 7,5 ;

8,4 ; 8,6 ; 8,8 ; 8,8 ; 9,0.

Bách : 6,8 ; 6,8 ; 7,0 ; 7,0 ; 7,2 ;

7,2 ; 7,2 ; 7,5 ; 7,5 ; 7,5.

Tính điểm trung bình các môn của mỗi học sinh trong các trường hợp sau :

a) Các môn không tính hệ số.

b) Một điểm 6,3 và một điểm 8,4 của An tính hệ số 2, các điểm còn lại hệ số 1.

Hai điểm 6,8 của Bách tính hệ số 2, các điểm còn lại hệ số 1.

172. Điểm của Ban giám khảo cho các thí sinh A và B như sau :

Thí sinh A : 8 ; 8,5 ; 9 ; 9 ; 9.

Thí sinh B : 8 ; 8 ; 8,5 ; 8,5 ; 8.

Tính điểm trung bình của mỗi thí sinh.

173. Số giờ làm thêm của các công nhân hai tổ 1 và 2 trong một tháng như sau (mỗi tổ có 8 công nhân) :

Tổ 1 : 6, 6, 15, 18, 20, 20, 25, 30.

Tổ 2 : 3, 6, 6, 10, 10, 15, 20, 30.

Tính số giờ làm thêm trung bình của các công nhân mỗi tổ.

174. Hai xạ thủ A và B thi bắn súng, mỗi người bắn 10 phát súng, kết quả điểm như sau :

A : 5, 7, 8, 10, 9, 7, 8, 10, 5, 8.

B : 7, 8, 6, 6, 7, 5, 6, 7, 6, 6.

Tính điểm trung bình của mỗi xạ thủ.

175. Các ngành kinh tế có dự án đầu tư trực tiếp của nước ngoài được cấp giấy phép trong năm 1999 như sau :

Ngành	Số dự án được cấp giấy phép
Nông lâm nghiệp	23
Thủy sản	3
Công nghiệp	218
Xây dựng	12
Khách sạn, du lịch	6
Giao thông vận tải, bưu điện	4
Tài chính, ngân hàng	5
Văn hóa, y tế, giáo dục	6
Các ngành dịch vụ khác	35
Cộng	312

Ngành kinh tế nào có số dự án được cấp giấy phép nhiều nhất ?

176. Trung bình cộng của các giá trị thay đổi thế nào nếu :

a) Mỗi giá trị tăng a đơn vị.

b) Mỗi giá trị tăng 10%.

177. Một bảng thống kê cho biết tỉ số giữa số nữ và số nam là 11 : 10. Tuổi trung bình của nữ là 34, tuổi trung bình của nam là 32. Tính tuổi trung bình của những người được thống kê.

178. Trung bình cộng của sáu số là 4. Do thêm số thứ bảy nên trung bình cộng của bảy số là 5. Tìm số thứ bảy.

179. Một học sinh viết 27 số rồi tính trung bình cộng của chúng, nhưng sau đó lại viết tiếp số trung bình cộng đó bên cạnh rồi tính luôn số trung bình cộng của 28 số. Số trung bình cộng lúc sau lớn hơn, nhỏ hơn hay bằng số trung bình cộng lúc đầu (trung bình cộng của 27 số).

180. Để tính trung bình cộng của ba số a, b, c bạn Tâm đã lấy trung bình cộng của a và b , rồi lấy trung bình cộng của kết quả này và c . Cho biết $a > b > c$. Chứng minh rằng cách tính của Tâm cho kết quả nhỏ hơn kết quả đúng.

Chương IV

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§13. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Để tính giá trị của một biểu thức đại số ứng với một giá trị nào đó của biến số, ta thường thay giá trị đó của biến vào biểu thức rồi làm các phép tính theo thứ tự thực hiện đã được quy ước. Tuy nhiên trong một số bài, cần quan sát biểu thức để tính toán một cách hợp lí.

Ví dụ 50

Tính giá trị của biểu thức :

$$A = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 19^2 + 20^2)(a + b)(a + 2b)(a + 3b)$$

với $a = \frac{3}{5}$, $b = -0,2$.

Giải : Chú ý rằng $a + 3b = \frac{3}{5} + 3(-0,2) = 0,6 - 0,6 = 0$.

Vậy $A = 0$.

Ví dụ 51

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết rằng $f(0), f(1), f(2)$ có giá trị nguyên. Chứng minh rằng :

a) $2a$ và $2b$ có giá trị nguyên ;

b) $f(3), f(4), f(5)$ cũng có giá trị nguyên.

Giải : a) Ta có $f(0) = c, f(1) = a + b + c, f(2) = 4a + 2b + c$. Theo đề bài ta có $c, a + b + c, 4a + 2b + c$ là các số nguyên. Suy ra :

$(a + b + c) - c = a + b, (4a + 2b + c) - c = 4a + 2b$ cũng là các số nguyên. Do đó $2a + 2b \in \mathbb{Z}$, suy ra $(4a + 2b) - (2a + 2b) = 2a \in \mathbb{Z}, 2b \in \mathbb{Z}$.

b) Do $2a, 2b, c, a + b + c \in \mathbb{Z}$ nên dễ dàng suy ra :

$$f(3) = 9a + 3b + c = 8a + 2b + (a + b + c) \in \mathbb{Z};$$

$$f(4) = 16a + 4b + c \in \mathbb{Z};$$

$$f(5) = 25a + 5b + c = 24a + 4b + a + b + c \in \mathbb{Z}.$$

Chú ý : Ta cũng chứng minh được rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì $f(n) \in \mathbb{Z}$. Thật vậy : Nếu n là số chẵn ($n = 2k, k \in \mathbb{Z}$) thì :

$$f(n) = a(2k)^2 + b.2k + c = 4ak^2 + 2b.k + c \in \mathbb{Z} \text{ (vì } 2a, 2b, c \in \mathbb{Z}).$$

Nếu n là số lẻ ($n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$) thì :

$$f(n) = a(2k + 1)^2 + b(2k + 1) + c = 4ak^2 + 4ak + a + 2bk + b + c \in \mathbb{Z}$$

(vì $2a, 2b, a + b + c \in \mathbb{Z}$).

Ví dụ 52

Hai đa thức $ax + b$ và $a'x + b'$ có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của x . Chứng minh rằng $a = a', b = b'$.

Giải :

$$ax + b = a'x + b' \text{ với mọi } x \quad (1)$$

Thay $x = 0$ vào (1) ta được : $a.0 + b = a'.0 + b'$, suy ra $b = b'$. Do đó :

$$ax = a'x \text{ với mọi } x \quad (2)$$

Thay $x = 1$ vào (2) ta được : $a.1 = a'.1$, suy ra $a = a'$.

Bài tập

181. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $x^3 - 6x^2 - 9x - 3$ với $x = -\frac{2}{3}$;

b) $\frac{2a-5b}{a-3b}$ với $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$;

c) $\frac{3a-b}{2a+7} + \frac{3b-a}{2b-7}$ với $a-b=7$; $a \neq -3,5$; $b \neq 3,5$.

182. Cho $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Tính $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-3)$.

183. Tìm các hệ số a và b của đa thức $f(x) = ax + b$ biết rằng $f(1) = 1$, $f(2) = 4$.

184. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ bằng 0 với mọi giá trị của x . Chứng minh rằng $a = b = c = 0$.

185. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ trong đó các hệ số a, b, c là các số nguyên. Biết rằng giá trị của đa thức chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên của x . Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3.

186. Cho $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số nguyên. Biết rằng giá trị của đa thức chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của x . Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5.

187. Hai đa thức $ax^2 + bx + c$ và $a'x^2 + b'x + c'$ có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của x . Chứng minh rằng $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

188. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $f(1) = f(-1)$. Chứng minh rằng $f(x) = f(-x)$.

189. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + x.f(-x) = x + 1$ với mọi giá trị của x . Tính $f(1)$.

§14. TÍCH CÁC ĐƠN THỨC

Đơn thức là một biểu thức đại số trong đó các phép toán trên các biến chỉ là những phép nhân hoặc lũy thừa không âm.

Muốn tìm tích của hai đơn thức, ta nhân phân hệ số với nhau, nhân phân biến với nhau rồi lấy tích của chúng.

Ví dụ 53

Xác định dấu của c , biết rằng $2a^3bc$ trái dấu với $-3a^5b^3c^2$.

Giải :

$2a^3bc$ và $-3a^5b^3c^2$ trái dấu nên $(2a^3bc)(-3^5b^3c^2) < 0$.

Do đó $-6a^8b^4c^3 < 0$.

Do $a^8b^4 \geq 0$ và a, b, c khác 0 nên $-6a^8b^4 \leq 0$, suy ra $c^3 > 0$. Vậy $c > 0$.

Bài tập

190. Hai đơn thức $-3x^4y$ và $5x^2y^3$ có thể cùng có giá trị dương được không ?

191. Chứng minh rằng ba đơn thức $-\frac{1}{4}x^3y^4$, $-\frac{4}{5}x^4y^3$, $\frac{1}{2}xy$ không thể cùng có giá trị âm.

192. Hai đơn thức $-2a^5b^2$ và $3a^2b^6$ cùng dấu. Tìm dấu của a .

193. Các đơn thức ad , $-bc$, $-ac$, $-bd$ có thể cùng có giá trị âm được không ?

§15. CỘNG VÀ TRỪ ĐƠN THỨC, ĐA THỨC

Đa thức là tổng của các đơn thức.

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Để cộng hay trừ các đơn thức, đa thức, ta áp dụng quy tắc "dấu ngoặc" rồi thu gọn các số hạng đồng dạng (nếu có).

Ví dụ 54

Chứng minh rằng :

a) Tổng của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 3.

b) Tổng của năm số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5.

c) Tổng quát, tổng của $2k + 1$ số nguyên liên tiếp ($k \in \mathbb{N}$) thì chia hết cho $2k + 1$.

Giải : a) Gọi ba số nguyên liên tiếp là $n - 1$, n , $n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Ta có

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n : 3.$$

b) Gọi năm số nguyên liên tiếp là $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$ ($n \in \mathbb{Z}$). Tổng của năm số đó bằng $5n : 5$.

c) Gọi $2k + 1$ số nguyên liên tiếp là $n - k, n - k + 1, \dots, n - 1, n, n + 1, \dots, n + k - 1, n + k$ ($n \in \mathbb{Z}$). Tổng của chúng bằng $(2k + 1)n : 2k + 1$.

Ví dụ 55

Tìm các số có ba chữ số, sao cho hiệu của số ấy và số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

Giải : Gọi số có ba chữ số phải tìm là $\overline{abc}$ ($1 \leq a \leq 9 ; 0 \leq b, c \leq 9$), số viết ngược lại là $\overline{cba}$. Ta có :

$$\overline{abc} - \overline{cba} = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = n^2$$

$$99a - 99c = n^2$$

$$3^2 \cdot 11(a - c) = n^2.$$

Để $11(a - c)$ là số chính phương, ta phải có $a - c = 11 \cdot k^2$ nên $a - c : 11$. Do đó $a = c$. Các số thoả mãn bài toán có dạng $\overline{aba}$.

Bài tập

194. Rút gọn các biểu thức :

a) $10^{n+1} - 6 \cdot 10^n$;

b) $2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n$;

c) $90 \cdot 10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}$;

d) $2,5 \cdot 5^{n-3} \cdot 10 + 5^n - 6 \cdot 5^{n-1}$.

195. Hãy viết tích $7 \cdot 32$ thành tổng của ba lũy thừa cơ số 2 với các số mũ là ba số tự nhiên liên tiếp.

196. Rút gọn các biểu thức :

a) $M + N - P$ với $M = 2a^2 - 3a + 1, N = 5a^2 + a, P = a^2 - 4$;

b) $2y - x - \{2x - y - [y + 3x - (5y - x)]\}$ với $x = a^2 + 2ab + b^2, y = a^2 - 2ab + b^2$;

c) $5x - 3 - |2x - 1|$.

197. Tìm x biết rằng :

a) $(0,4x - 2) - (1,5x + 1) - (-4x - 0,8) = 3,6$;

b) $(\frac{3}{4}x + 5) - (\frac{2}{3}x - 4) - (\frac{1}{6}x + 1) = (\frac{1}{3}x + 4) - (\frac{1}{3}x - 3)$.

198. Xác định đa thức M biết rằng : $M + (6x^2 - 4xy) = 7x^2 - 8xy + y^2$.

199. Chứng minh rằng :

a) Tổng của một số tự nhiên có hai chữ số với số gồm hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là một số chia hết cho 11.

b) Hiệu của một số tự nhiên có hai chữ số với số gồm hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là một số chia hết cho 9.

200. Tìm các số tự nhiên có hai chữ số, sao cho tổng của số ấy và số viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

201. Tìm số tự nhiên $\overline{abc}$ ($a > b > c > 0$) sao cho

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 666.$$

202. Có số tự nhiên $\overline{abc}$ nào mà tổng $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ là một số chính phương hay không ?

203. Tìm số tự nhiên chia hết cho 7 có ba chữ số, biết rằng tổng các chữ số của số đó bằng 14.

204. a) Tìm các số tự nhiên $\overline{abc}$ có ba chữ số khác nhau sao cho $3a + 5b = 8c$.

b) Tìm các số tự nhiên $\overline{abc}$ có ba chữ số khác nhau và khác 0 sao cho $\overline{abc}$ bằng trung bình cộng của $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$.

205. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho số đó bằng :

a) sáu lần tích các chữ số của số đó ;

b) hai lần tích các chữ số của số đó.

206*. Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho số đó chia hết cho tích của $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$.

§16. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Nghiệm của đa thức $f(x)$ là giá trị của x để $f(x) = 0$.

Tìm nghiệm của đa thức $f(x)$ là tìm các giá trị của x để $f(x) = 0$.

Ví dụ 56

Chứng minh rằng đa thức $x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

Giải :

Cách 1. $f(x) = x^2 + x + 1 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$$= x\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Với mọi x ta đều có $f(x) \neq 0$. Vậy $f(x)$ không có nghiệm.

Cách 2. Xét từng khoảng giá trị của x :

– Xét $x \geq 0$ thì $x + 1 > 0$. Do đó

$$x(x + 1) \geq 0 \Rightarrow x(x + 1) + 1 > 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0.$$

– Xét $-1 < x < 0$ thì $x + 1 > 0$. Ta lại có $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + x + 1 > 0$.

– Xét $x \leq -1$ thì $x < 0$ và $x + 1 \leq 0$. Do đó

$$x(x + 1) \geq 0 \Rightarrow x(x + 1) + 1 > 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0.$$

Trong cả ba khoảng trên, ta đều có $x^2 + x + 1 \neq 0$.

Vậy đa thức $x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

Ví dụ 57

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện :

$$x \cdot f(x + 1) = (x + 2) \cdot f(x).$$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1.

Giải :

Ta có $x \cdot f(x + 1) = (x + 2) \cdot f(x)$ với mọi x

(1)

Thay $x = 0$ vào (1) ta được : $0 \cdot f(1) = 2 \cdot f(0)$.

Do đó $0 = 2 \cdot f(0)$ nên $f(0) = 0$. Vậy 0 là một nghiệm của $f(x)$.

Thay $x = -1$ vào (1) ta được : $-1 \cdot f(0) = 1 \cdot (f(-1))$ nên $-f(0) = f(-1)$. Do $f(0) = 0$ nên $f(-1) = 0$. Vậy -1 cũng là một nghiệm của $f(x)$.

Đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1.

Bài tập

207. Tìm nghiệm của các đa thức :

- a) $3x - 1$; b) $x^2 - 4$; c) $x^2 + 5x$; d) $x^2 + 1$.

208. a) Chứng tỏ rằng đa thức $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x - 2$ có một trong các nghiệm bằng 1.

b) Chứng tỏ rằng đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có một trong các nghiệm bằng 1 nếu $a + b + c + d = 0$.

209. a) Chứng tỏ rằng đa thức $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ có một trong các nghiệm bằng -1.

b) Chứng tỏ rằng đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có một trong các nghiệm bằng -1 nếu $a + c = b + d$.

210. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + 2x + 2$ không có nghiệm.

211. Cho đa thức $f(x)$ thoả mãn điều kiện :

$$x.f(x - 2) = (x - 4).f(x).$$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

Phản chứng là một trong các phương pháp chứng minh gián tiếp : để chứng tỏ kết luận của bài toán là đúng, ta chứng minh rằng điều trái lại với nó là sai.

Như thế sơ đồ của chứng minh bằng phản chứng gồm ba bước :

Bước 1 (phủ định kết luận) : Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.

Bước 2 (đi đến mâu thuẫn) : Từ điều giả sử trên và từ giả thiết của bài toán, ta suy ra điều mâu thuẫn với giả thiết hay với các kiến thức đã học.

Bước 3 (khẳng định kết luận) : Vậy kết luận của bài toán là đúng.

Ví dụ 58 (1)

Chứng minh rằng nếu $(a, b) = 1$ thì $(a^2, a + b) = 1$.

Giải : Giả sử a^2 và $a + b$ không nguyên tố cùng nhau thì a^2 và $a + b$ cùng chia hết cho một số nguyên tố d . Suy ra $a : d$, do đó $b : d$.

Như vậy a và b cùng chia hết cho một số nguyên tố d , điều này trái với giả thiết $(a, b) = 1$.

Do đó $(a^2, a + b) = 1$.

Ví dụ 59 (1)

Chứng minh rằng nếu một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục của nó là chữ số lẻ.

Giải : Giả sử có một số chính phương tận cùng bằng 6 mà có chữ số hàng chục là chữ số chẵn thì số chính phương đó tận cùng bằng 06, 26, 46, 66 hoặc 86. Các số chính phương này không chia hết cho 4 (1).

Mặt khác số chính phương tận cùng bằng 6 thì chia hết cho 2. Số chính phương phải chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, do đó mọi số chính phương tận cùng bằng 6 phải chia hết cho 4, trái với (1).

Vậy số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục phải là chữ số lẻ.

Có những số chính phương như vậy, chẳng hạn : $16 = 4^2$, $36 = 6^2$.

Ví dụ 60 (1)

Có tồn tại số tự nhiên có ba chữ số nào sao cho cộng nó với số gồm chính ba chữ số ấy nhưng viết theo thứ tự khác để được tổng bằng 999 hay không ?

Giải : Giả sử ta có phép cộng :

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ a' b' c' \\ \hline 9 \ 9 \ 9 \end{array}$$

trong đó a, b, c là các chữ số của số đã cho abc . Gọi $a + b + c = m$ thì $a' + b' + c' = m$. Chú ý rằng phép cộng trên không có nhớ ở tất cả các cột, do đó $c + c' = 9$, $b + b' = 9$, $a + a' = 9$. Suy ra :

$$(a + b + c) + (a' + b' + c') = 27$$

$$m + m = 27$$

$$2m = 27$$

$$m = 13,5 ; \text{ vô lí.}$$

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào có ba chữ số sao cho cộng nó với số gồm chính ba chữ số ấy nhưng viết theo thứ tự khác để được tổng bằng 999.

Ví dụ 61 (1)

Trong một vòng thi đấu cờ tướng có 9 đấu thủ tham gia.

a) Có thời điểm nào mà mỗi đấu thủ đều đã đấu đúng 5 ván hay không?

b) Chứng minh rằng số ván đã đấu của mỗi người không thể đều là số lẻ.

Giải : a) Giả sử mỗi người đều đã đấu đúng 5 ván thì số ván cờ đã đấu của giải là $\frac{5 \cdot 9}{2}$, vô lí vì số ván cờ lại không là số tự nhiên. Vậy không có thời điểm nào mà mỗi đấu thủ đều đã đấu đúng 5 ván.

b) Giả sử chín đấu thủ đã đấu lần lượt là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ ván (a_i lẻ, $1 \leq i \leq 9$).

Khi đó số ván đã đấu của giải là $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{2}$. Phân số trên có tử là số lẻ (là tổng của 9 số hạng, mỗi số hạng đều lẻ), mẫu bằng 2, nên không là số tự nhiên, vô lí.

Vậy số ván đã đấu của mỗi người không thể đều là số lẻ.

Bài tập

212(1). Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng $(a^3, b^2) = 1$.

213(1). Chứng minh rằng không tồn tại số chính phương nào có dạng :

a) $\overline{abab}$;

b) $\overline{abcabc}$.

214(1). Chứng minh rằng nếu một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 4 thì chữ số hàng chục của nó phải là chữ số chẵn.

215(1). Nhốt 45 con thỏ vào 7 lồng. Chứng minh rằng tồn tại một lồng có số thỏ là số lẻ.

216(1). Trên mặt phẳng có 13 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Có tồn tại hình vẽ mà mỗi điểm trong hình được nối (thành đoạn thẳng) với đúng ba điểm khác hay không?

217(1). Một nhóm học sinh gồm 35 người chơi ở công viên trong đó có những người quen nhau và có những người không quen nhau. Chứng minh rằng có ít nhất một người có số người quen trong nhóm đó là số chẵn.

218(1). Người ta xếp chín số tự nhiên từ 1 đến 9 vào bảng vuông 3×3 sao cho tổng các số trong mỗi hàng, trong mỗi cột, trong mỗi đường chéo đều bằng nhau.

a) Hãy chỉ ra một cách xếp thoả mãn điều kiện trên.

b*) Chứng tỏ rằng không có cách xếp nào mà số 1 đứng ở chính giữa bảng hoặc ở góc bảng.

219(1). Có chín viên bi có màu xanh hoặc đỏ xếp cách đều nhau thành một hàng ngang. Chứng minh rằng tồn tại một viên bi cách đều hai viên bi cùng màu với nó.

220(1). Trên vòng tròn người ta xếp 10 bi đỏ và một số bi xanh. Biết rằng đối diện với một bi đỏ qua tâm vòng tròn là một bi xanh. Chứng minh rằng tồn tại hai bi xanh đặt cạnh nhau.

NGUYÊN LÝ Đİ-RICH-LÊ

Nếu 6 con chim đậu trên 5 cành cây thì thế nào cũng tìm được một cành có ít nhất 2 con ; nhốt 9 con gà vào một chuồng có 4 ngăn thì phải có một ngăn nào đó có từ 3 con trở lên ; không thể xếp 7 người ngồi trên 3 ghế băng mà không ghế nào có quá 2 người. Tất cả những điều đơn giản này chính là nội dung của một nguyên lý toán học, "nguyên lý nhốt thỏ" mang tên nhà toán học Đİ-rich-lê⁽¹⁾ (*Peter Lejeune Dirichlet*, 1805 – 1859) :

Nếu ta nhốt n chú thỏ vào $n - 1$ lồng thì tồn tại một lồng có từ 2 chú thỏ trở lên.

Ta hãy chứng minh bài toán sau : Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 lồng mà mỗi lồng chứa không quá 2 con.

Thật vậy, nếu mỗi lồng chứa không quá 2 con thỏ thì 3 lồng chứa không quá : $2.3 = 6$ con thỏ, vô lí. Vậy không thể nhốt được 7 con thỏ vào 3 lồng mà mỗi lồng chứa không quá 2 con.

Tổng quát, nếu nhốt n chú thỏ vào k lồng mà phép chia $\frac{n}{k}$ được m còn dư thì tồn tại một lồng chứa $m + 1$ chú thỏ trở lên.

Nguyên lý Đİ-rich-lê là một dạng của phương pháp phản chứng, nó khẳng định sự tồn tại hoặc không tồn tại của một sự kiện nào đó. Ta hãy xét sự vận dụng đa dạng của nguyên lý này trong các ví dụ dưới đây.

(1) Đİ-rich-lê xuất thân trong một gia đình Pháp nhập cư sang Đức. Kế tục Gau-xơ ở trường đại học Göttingen ông được đánh giá là "Gau-xơ thứ hai".

I – SỰ TRÙNG LẬP

Ví dụ 62 (1)

Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Giải : Có $45 - 2 = 43$ học sinh phân chia vào 8 loại điểm (từ 2 đến 9). Giả sử mỗi loại trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp học có không quá : $5 \cdot 8 = 40$ học sinh, ít hơn 43 học sinh. Vậy tồn tại 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Trong bài toán này, "thỏ" là 43 điểm kiểm tra từ 2 đến 9, "lồng" là 8 loại điểm nói trên. Phép chia 43 cho 8 được 5 còn dư. Tồn tại $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

II – SỰ CHIA HẾT

Ví dụ 63 (1)

Cho 12 số tự nhiên khác nhau có hai chữ số. Chứng minh rằng tồn tại hai số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau.

Giải : Có 12 số tự nhiên khác nhau, mà chỉ có 11 số dư trong phép chia cho 11, do đó tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 11. Hiệu của chúng là một số chia hết cho 11, đó là số có hai chữ số như nhau.

Ví dụ 64 (1)

Chứng minh rằng tồn tại một bội số của 17 :

a) gồm toàn các chữ số 1 và 0 ;

b) gồm toàn các chữ số 1.

Giải : a) Xét 18 số : 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11\dots1}_{18}$

Có 18 số, mà phép chia cho 17 chỉ gồm 17 số dư (0, 1, 2, ..., 16) nên tồn tại hai số có cùng số dư. Gọi hai số đó là $\underbrace{11\dots1}_m$ và $\underbrace{11\dots1}_n$ ($1 \leq n < m \leq 18$).

Hiệu của chúng bằng $\underbrace{11\dots1}_{m-n} \underbrace{00\dots0}_n$ chia hết cho 17, hiệu này là số gồm toàn các chữ số 1 và 0.

b) Theo câu a, tồn tại một bội của 17 có dạng $A = \underbrace{11\dots1}_{m-n} \underbrace{00\dots0}_n = \underbrace{11\dots1}_{m-n} \cdot 10^n$ mà $(10^n, 17) = 1$ nên $\underbrace{11\dots1}_{m-n}$ chia hết cho 17, tức là tồn tại một bội của 17 gồm toàn các chữ số 1.

Chú ý: Tổng quát, trong câu a có thể thay số 17 bởi số tự nhiên n bất kì, trong câu b có thể thay số 17 bởi số tự nhiên n nguyên tố cùng nhau với 2 và 5 (tức là các số có chữ số tận cùng bằng 1, 3, 7, 9).

Ví dụ 65(1)

Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho 3^k tận cùng bằng 001.

Giải: Trước hết ta chứng tỏ rằng tồn tại hai lũy thừa của 3 có cùng số dư khi chia cho 1000. Thật vậy trong phép chia cho 1000 có 1000 số dư là 0, 1, 2, ..., 999. Ta xét 1001 số là $3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{1001}$ thì tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 1000.

Gọi hai số đó là 3^m và 3^n ($1 \leq n < m \leq 1001$). Như vậy $3^m - 3^n : 1000$, do đó $3^n(3^{m-n} - 1) : 1000$. Ta lại có $(3^n, 1000) = 1$ suy ra $3^{m-n} - 1 : 1000$, tức là 3^{m-n} tận cùng bằng 001.

Ví dụ 66(1)

a) Viết 20 số tự nhiên vào 20 tấm bìa. Chứng minh rằng ta có thể chọn một hay nhiều tấm bìa để tổng các số trên đó chia hết cho 20.

b*) Anh Nam là một vận động viên chơi cờ. Để luyện tập, mỗi ngày anh chơi ít nhất một ván. Để khỏi mệt, mỗi tuần anh không chơi quá 12 ván. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp trong đó anh chơi đúng 20 ván.

Giải: a) Gọi các số trên 20 tấm bìa là $a_1, a_2, \dots, a_{20}$. Xét 20 tổng sau:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots$$

$$s_{20} = a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$$

Nếu một trong 20 tổng ấy chia hết cho 20 thì bài toán được giải xong.

Nếu không tồn tại tổng nào chia hết cho 20 thì tồn tại hai tổng có cùng số dư khi chia cho 20 (vì có 20 tổng, chỉ có 19 số dư khác 0 là 1, 2, ..., 19). Hiệu của hai tổng đó chia hết cho 20. Chẳng hạn hai tổng đó là s_m và s_n ($1 \leq n < m \leq 20$) thì $s_m - s_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m$ chia hết cho 20.

b) Gọi số ván cờ mà anh Nam chơi ngày thứ nhất, thứ hai, ..., thứ hai mươi là $a_1, a_2, \dots, a_{20}$.

Xét 20 tổng : $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, a_{20} = a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$. Ta có $s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_{20} < 36$ (vì trong 20 ngày anh Nam chơi ít hơn $12.3 = 36$ ván cờ).

Theo câu a, tồn tại $s_k : 20$ hoặc $s_m - s_n : 20$ ($1 \leq k \leq 20, 1 \leq n < m \leq 20$). Giá trị này bằng 20.

Như vậy nếu $s_k = 20$ thì $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 20$;

nếu $s_m - s_n = 20$ thì $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m = 20$.

Ví dụ 67*(1)

Cho 51 số nguyên dương không vượt quá 100. Chứng minh rằng :

a) Mỗi số đều viết được dưới dạng $a = 2^k \cdot b$ ($k, b \in \mathbb{N}$, b lẻ, chú ý k có thể bằng 0 và $2^0 = 1$). Xác định khoảng giá trị của k và b .

b) Tồn tại hai số trong 51 số nói trên mà một số chia hết cho số còn lại.

Giải : a) Mỗi số nguyên dương đã cho đều viết được dưới dạng

$$a = 2^k \cdot b \text{ với } k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}, b \in \{1; 3; 5; \dots; 99\}.$$

Chẳng hạn : $9 = 2^0 \cdot 9, 24 = 2^3 \cdot 3$.

b) Có 51 số, chỉ có 50 giá trị của b (là 1, 3, 5, ..., 99) nên tồn tại hai số có giá trị của b bằng nhau. Chẳng hạn $a_i = 2^m \cdot b, a_j = 2^n \cdot b$ ($m \geq n$), thế thì $a_i : a_j = 2^{m-n} \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 68*(1)

Cho 51 số nguyên dương khác nhau, nhỏ hơn 100 ($a_1 < a_2 < \dots < a_{51}$). Chứng minh rằng trong 51 số đó :

a) Tồn tại hai số a_k, a_m mà $a_k = a_m - a_1$.

b) Tồn tại ba số mà một số bằng tổng hai số còn lại.

Giải : a) Ta có $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{51} < 100$. Xét 100 số sau chia thành hai nhóm :

– Nhóm thứ nhất gồm 50 số : $a_2 < a_3 < \dots < a_{51}$.

– Nhóm thứ hai gồm 50 hiệu : $a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \dots < a_{51} - a_1$.

Có 100 số nhỏ hơn 100 nên tồn tại hai số bằng nhau, hai số này không cùng thuộc một nhóm, nên phải thuộc hai nhóm, chẳng hạn a_k và $a_m - a_1$. Vậy tồn tại hai số a_k, a_m mà $a_k = a_m - a_1$.

b) Hiển nhiên $a_k \neq a_m$ (vì nếu $a_k = a_m$ thì $a_1 = 0$), $a_k \neq a_1$, $a_m \neq a_1$, do đó a_k, a_m, a_1 là ba số khác nhau trong 51 số tự nhiên đã cho. Ta có $a_k = a_m - a_1 \Rightarrow a_1 + a_k = a_m$.

III – SỰ TƯƠNG HỒ

Trong các bài tập loại này, nếu A có một quan hệ nào đó với B thì B cũng có quan hệ ấy với A (ví dụ A quen B hoặc A đã thi đấu với B,...).

Ví dụ 69(1)

Chứng minh rằng trong 10 người bất kì, tồn tại hai người có số người quen như nhau (kể cả trường hợp quen 0 người).

Giải : Xét 10 lồng : lồng 0 chứa những người có 0 người quen, lồng 1 chứa những người có 1 người quen, ..., lồng 9 chứa những người có 9 người quen. Chú ý rằng lồng 0 và lồng 9 không thể đồng thời chứa người vì nếu lồng 0 có người (tức là có người không quen mọi người khác) thì lồng 9 không thể có người (không thể có ai quen cả 9 người còn lại). Như vậy thực sự chỉ có nhiều nhất là 9 lồng có người, mà có 10 người. Do đó tồn tại một lồng chứa hai người trở lên, đó là hai người có số người quen như nhau.

Chú ý : Bài toán cũng đúng nếu thay số 10 bởi số tự nhiên n bất kì lớn hơn 1.

Ví dụ 70(1)

Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

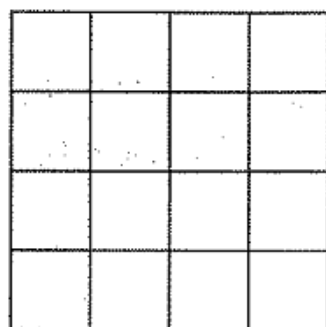
Giải : Gọi 5 lồng 0, 1, 2, 3, 4 thứ tự chứa các đấu thủ đã đấu 0, 1, 2, 3, 4 trận. Cũng chú ý rằng hai lồng 0 và 4 không thể cùng chứa người. Như vậy chỉ có 4 lồng, mà có 5 người, tồn tại hai người trong cùng một lồng tức là tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Chú ý : Bài toán cũng đúng nếu thay số 5 bởi số tự nhiên n bất kì lớn hơn 1.

IV – SỰ SẮP XẾP

Ví dụ 71 (1)

Cho một bảng vuông 4×4 . Trên 16 ô của bảng, ta đặt 16 số tự nhiên từ 1 đến 16. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (tức là hai ô có một cạnh chung) sao cho hiệu các số ở hai ô đó lớn hơn hoặc bằng 3.



Hình 1

Giải (h.1) : Chuyển từ một ô bất kì sang ô kề nó gọi là một bước. Xét hai ô ghi số 1 và số 16. Chuyển từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 16 chỉ cần không quá 6 bước chuyển (nhiều nhất là 3 bước theo hàng ngang, 3 bước theo hàng dọc). Tồn tại một bước chuyển có hiệu lớn hơn hoặc bằng 3.

Thật vậy, giả sử tất cả các bước chuyển đều có hiệu nhỏ hơn hoặc bằng 2 thì từ số 1, qua không quá 6 bước chuyển tăng thêm không quá 12, không đạt được đến số 16.

Vậy tồn tại hai ô kề nhau có hiệu các số ở hai ô đó lớn hơn hoặc bằng 3.

Ví dụ 72(1)

Viết 16 số, mỗi số có giá trị bất kì là 1, 2, 3, 4. Ghép thành từng cặp hai số được 8 cặp số. Chứng minh rằng tồn tại hai cặp số mà tổng các số trong hai cặp đó bằng nhau.

Giải : Tổng hai số của mỗi cặp trong 8 cặp số có giá trị nhỏ nhất là : $1 + 1 = 2$, có giá trị lớn nhất là : $4 + 4 = 8$. Như vậy 8 tổng đó nhận 7 giá trị (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Theo nguyên lí Đê-rich-lê, tồn tại hai tổng bằng nhau, tức là tồn tại hai cặp có tổng bằng nhau.

Bài tập

Sự trùng lặp

221(1). Một trường học có 1000 học sinh gồm 23 lớp. Chứng minh rằng phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên.

222(1). Một lớp học có 50 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau.

223(1). Một lớp học có 50 học sinh, có duy nhất một học sinh thiếu nhiều bài tập nhất là thiếu 3 bài tập. Chứng minh rằng tồn tại 17 học sinh thiếu số bài tập như nhau (trường hợp không thiếu bài tập coi như thiếu 0 bài).

- 224(1). Một lớp học có 34 học sinh, tổng số tuổi của các học sinh là 460. Có tồn tại 20 học sinh mà tổng số tuổi của họ lớn hơn 260 không ?
- 225(1). Bốn lớp 6A, 6B, 6C, 6D có tất cả 44 học sinh giỏi, trong đó số học sinh giỏi của lớp 6D không quá 10 người. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba lớp 6A, 6B, 6C có số học sinh giỏi từ 12 trở lên.
- 226(1). Kết thúc năm học, mỗi học sinh của một lớp đều tặng ảnh cho một hay nhiều bạn trong lớp và ai cũng nhận được ít nhất một ảnh. Chứng minh rằng có ít nhất hai học sinh nhận được một số ảnh như nhau.
- 227(1). Chia 50 chiếc kẹo cho 10 em bé (em nào cũng được chia kẹo). Chứng minh rằng dù chia cách nào cũng tồn tại hai em có số kẹo bằng nhau.
- 228(1). Có 33 con chim đậu trên một sân hình vuông cạnh 4m. Chứng minh rằng có ít nhất 3 con đậu trong một đường tròn có bán kính 1m.
- 229*(4). Cho 50 số tự nhiên, trong đó nếu có bốn số khác nhau thì chúng phải lập được thành một tỉ lệ thức. Chứng minh rằng trong 50 số đó :
- Có nhiều nhất 4 số khác nhau.
 - Có ít nhất 13 số bằng nhau.

Sự chia hết

- 230 (1). Phải lấy ít nhất bao nhiêu số tự nhiên để chắc chắn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 5 ?
- 231(1). a) Chứng minh rằng tồn tại một bội của 23 gồm toàn các chữ số 4.
b) Chứng minh rằng tồn tại một bội của 17 tận cùng bằng 219.
- 232(1). Cho ba số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng trong ba số đó :
- Tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 2.
 - Tồn tại hai số có tổng chia hết cho 2.
- 233(1). Cho năm số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng trong năm số đó :
- Tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 4.
 - Tồn tại ba số có tổng chia hết cho 3.
- 234(1). Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng trong ba số đó, tồn tại hai số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 12.
- 235(1). Cho 51 số nguyên dương khác nhau không quá 100. Chứng minh rằng tồn tại hai số trong 51 số ấy :
- hơn kém nhau 50 đơn vị ;
 - b*) có tổng bằng 101.

236*(1). Cho dãy số : 1, 2, 3, ..., 2018 (1)

Có thể chọn được trong dãy trên nhiều nhất bao nhiêu số để tổng của hai số bất kì trong các số đã chọn đều chia hết cho 26 ?

Sự tương hỗ

237(1). *Đố vui. Toán học trong bóng đá*

Trong vòng thi đấu loại bóng đá, ở một bảng có năm đội thi đấu vòng tròn (mỗi đội gặp đội khác một lần). Ba bạn A, B, C yêu bóng đá và cũng yêu toán có các nhận xét sau :

A : Bất cứ đội nào ra sân cũng phải có hai cầu thủ mang số áo có hiệu chia hết cho 10.

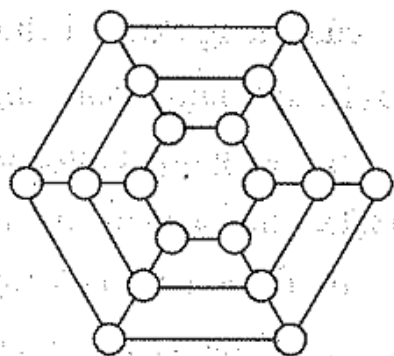
B : Trong suốt thời gian thi đấu loại, bao giờ cũng tìm được hai đội có số trận đã đấu như nhau.

C (sau khi xem xong trận đấu sôi nổi với tỉ số 4 - 3) : Nếu đây là trận duy nhất có số lần bóng vào lưới nhiều nhất (7 lần) thì khi vòng đấu loại kết thúc, phải có ba trận có số lần bóng vào lưới bằng nhau.

Những nhận xét trên đúng hay sai ?

Sự sắp xếp

238 (1). Có thể xếp được 18 số tự nhiên từ 1 đến 18 vào 18 vòng tròn ở hình 2 sao cho hiệu hai số ở hai vòng tròn cạnh nhau không quá 3 được không ? (hai vòng tròn cạnh nhau được nối với nhau bởi một đoạn thẳng trên hình).



Hình 2

239(1). Cho 64 ô vuông xếp thành một hàng ngang. Viết vào mỗi ô một số tự nhiên bất kì từ 1 đến 16. Ghép thành từng cặp hai ô ở đầu và cuối và các ô cách đều hai ô đầu và cuối. Chứng minh rằng tồn tại hai cặp có tổng các số ở hai ô trong mỗi cặp bằng nhau.

240*(1). Một hội nghị học sinh giỏi có 100 học sinh tham dự, mỗi người đều quen ít nhất 50 người khác. Chứng minh rằng có thể chọn được bốn học sinh xếp ngồi quanh một bàn tròn sao cho bất cứ hai người nào ngồi cạnh nhau cũng quen nhau.

CÁC BÀI TOÁN SUY LUẬN

Các bài toán suy luận thường không đòi hỏi nhiều về kĩ năng tính toán, để giải chúng không cần trang bị nhiều kiến thức toán học. Điều cần thiết hơn cả là phải có phương pháp suy luận đúng đắn, chặt chẽ, hợp lí, đôi khi cần cả sự thông minh sáng tạo.

Ta đã gặp nhiều bài toán suy luận được giải bằng phương pháp tính ngược từ cuối, bằng sơ đồ Ven (xem *Nâng cao và phát triển Toán 6*), bằng phương pháp phản chứng và nguyên lí Đê-rích-lê. Người ta còn dùng nhiều phương pháp khác để giải các bài toán suy luận.

I – PHƯƠNG PHÁP LẬP BẢNG

Ví dụ 73 (1)

Trong một bảng đấu loại bóng đá có năm đội bóng A, B, C, D, E. Khi thăm dò ý kiến về thứ tự xếp loại trong bảng, Ban tổ chức nhận được năm ý kiến sau :

- Đội E thứ nhất, đội D thứ tư.
- Đội B thứ nhất, đội C thứ ba.
- Đội C thứ nhì, đội D thứ tư.
- Đội B thứ nhì, đội E thứ tư.
- Đội E thứ nhất, đội A thứ năm.

Kết quả trong các ý kiến trên, mỗi ý kiến đều có ít nhất một điều đúng. Biết thứ tự xếp loại của các đội là khác nhau, hãy xác định thứ tự của mỗi đội.

Giải : Trước hết ta ghi các dự đoán vào bảng :

Thứ Dự đoán	1	2	3	4	5
a	E			D	
b	B		C		
c		C		D	
d		B		E	
e	E				A

- Vì có nhiều dự đoán đề cập đến đội xếp thứ tư nên ta xét đội xếp thứ tư.

Giả sử đội E xếp thứ tư là đúng thì đội D xếp thứ tư là sai, do đó theo a đội E xếp thứ nhất, mâu thuẫn.

Vậy đội E không xếp thứ tư, do đó theo d đội B xếp thứ nhì. Đội B không xếp thứ nhất nên theo b đội C xếp thứ ba. Đội C không xếp thứ nhì nên theo c đội D xếp thứ tư.

Còn lại vị trí thứ nhất và thứ năm thuộc hai đội A và E. Nếu đội A xếp thứ nhất, đội E xếp thứ năm thì dự đoán cuối cùng sai cả hai điều. Vậy đội E xếp thứ nhất, đội A xếp thứ năm.

Thứ tự các đội như sau : E, B, C, D, A.

II – PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ^(*)

Ví dụ 74 (1)

Ba chị Bích, Cẩm, Dung học lớp chuyên Nga, Anh, Pháp và thi vào các trường Sư phạm, Ngoại ngữ, Tổng hợp. Biết rằng :

a) Cẩm không thi Sư phạm, Bích không thi Ngoại ngữ.

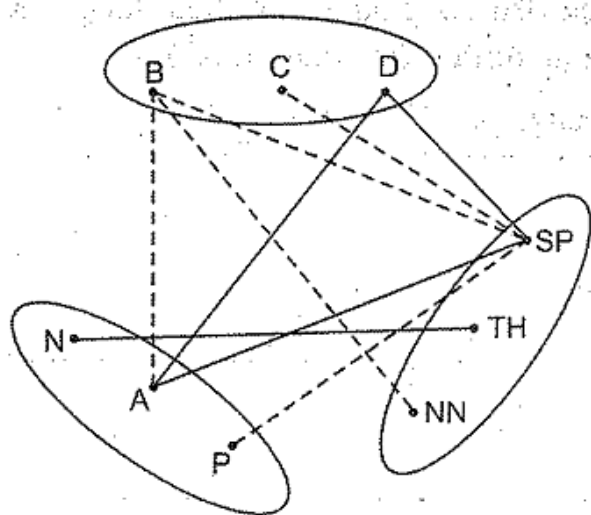
b) Chị thi Sư phạm không học chuyên Pháp.

c) Chị thi Tổng hợp học chuyên Nga.

d) Bích không học chuyên Anh.

Hỏi mỗi người học lớp nào và thi vào trường nào ?

Giải : Biểu thị tên các chị Bích, Cẩm, Dung bởi ba điểm B, C, D, các lớp chuyên Nga, Anh, Pháp bởi các điểm N, A, P, các trường Sư Phạm, Ngoại ngữ, Tổng hợp là SP, NN, TH.



Hình 3

Các điểm thuộc ba nhóm tên người, môn học và trường thi được nối với nhau bởi đường nét liền nếu giữa chúng có sự tương ứng, bởi đường nét đứt nếu không có sự tương ứng.

Theo đề bài ta có hình 3. Từ hình vẽ ta thấy : N – TH liền nét nên N – SP đứt nét. Mà SP – P đứt nét nên SP – A liền nét.

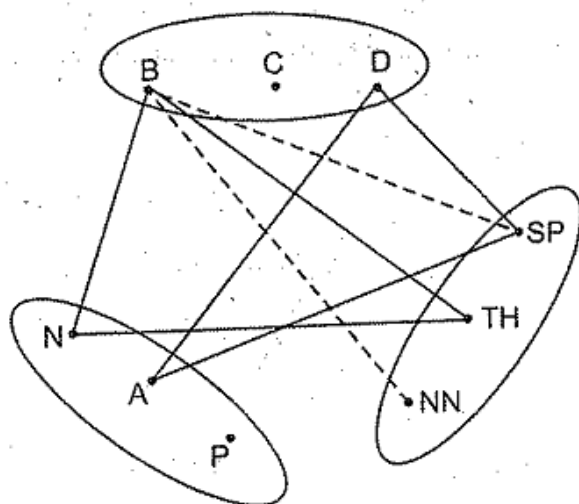
(*) Còn gọi là phương pháp graph (tiếng Anh : graph, tiếng Pháp : graphe là đồ thị).

SP – B liền nét thì vô lí nên SP – B đứt nét, mà SP – C đứt nét nên SP – D liền nét. Suy ra D – A liền nét. Ta có hình 4.

B – SP đứt nét, B – NN đứt nét nên B – TH liền nét, do đó B – N liền nét. Còn lại C – P – NN liền nét.

Vậy : Dung học chuyên Anh thi Sư phạm, Bích học chuyên Nga thi Tổng hợp, Cẩm học chuyên Pháp thi Ngoại ngữ.

Chú ý : Trong bài toán trên có chín đối tượng chia thành ba nhóm (tên người, tên môn học, tên trường), giữa chúng có những quan hệ nào đó. Trên hình vẽ các đối tượng được biểu diễn bởi các điểm, các mối quan hệ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng (hay mũi tên). Hình biểu diễn như vậy gọi là graph (các điểm gọi là đỉnh, các đoạn thẳng hoặc mũi tên gọi là cạnh của graph).



Hình 4

Phương pháp graph rất thuận lợi để tìm lời giải của các bài toán tìm sự tương ứng như bài toán trên. Khi trình bày lời giải, ta cũng có thể dùng lời mà không cần minh họa bằng hình vẽ. Chẳng hạn với bài toán trên :

Chị học chuyên Nga thi Tổng hợp nên không thi Sư phạm (câu c), chị học chuyên Pháp không thi Sư phạm (câu b), vậy chị học chuyên Anh thi Sư phạm.

Bích không thi Sư phạm (vì theo d Bích không học chuyên Anh mà chị học chuyên Anh thi Sư phạm). Cẩm không thi Sư phạm (câu a) nên Dung thi Sư phạm, do đó Dung học chuyên Anh.

Bích không thi Sư phạm mà Bích không thi Ngoại ngữ (câu a) nên Bích thi Tổng hợp, do đó theo c Bích học chuyên Nga.

Còn lại Cẩm học chuyên Pháp, thi Ngoại ngữ.

Ví dụ 75 (1)

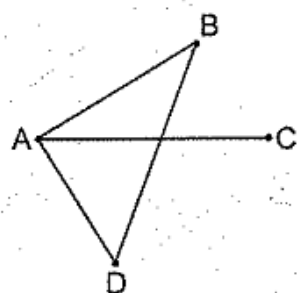
Chứng minh rằng trong sáu người bất kì, tồn tại ba người đôi một quen nhau hoặc không quen nhau.

Giải : Gọi A là một trong sáu người tùy ý. Còn lại năm người mà có hai quan hệ : quen A hoặc không quen A nên tồn tại ba người có cùng một quan hệ đối với A, gọi ba người đó là B, C, D.

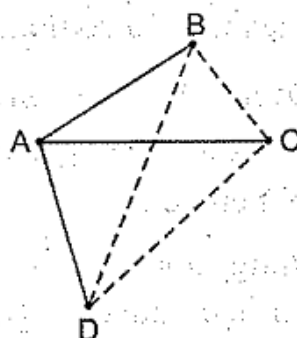
1. Xét trường hợp B, C, D cùng quen A :

Ta biểu thị quan hệ quen nhau bởi đường nét liền, không quen nhau bởi đường nét đứt.

a) Nếu trong ba người B, C, D, tồn tại một cặp quen nhau thì hai người đó và A là ba người quen nhau đôi một (chẳng hạn hai người đó là B và D trên hình 5).



Hình 5



Hình 6

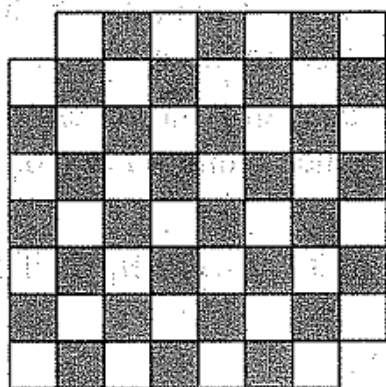
b) Nếu trong ba người B, C, D, không tồn tại cặp nào quen nhau thì B, C, D là ba người đôi một không quen nhau (h. 6)

2. Xét trường hợp B, C, D cùng không quen A : Giải tương tự như trên.

III – PHƯƠNG PHÁP TÔ MÀU BÀN CỜ

Ví dụ 76 (1)

Trên một bàn cờ hình vuông có 64 ô, bỏ đi hai ô ở hai góc đối diện, còn lại 62 ô. Có thể dùng 31 quân cờ có kích thước 1×2 ô để lấp kín bàn cờ được không ?



Hình 7

Giải : Tô màu các ô ở bàn cờ bằng hai màu đen trắng xen kẽ nhau, trong đó hai ô bỏ đi là hai ô đen như hình 7. Như vậy bàn cờ còn lại 62 ô, gồm 32 ô trắng, 30 ô đen.

Mỗi quân cờ kích thước 1×2 ô xếp trên bàn cờ bao giờ cũng lấp một ô đen, một ô trắng, do đó 30 quân cờ sẽ lấp 30 ô đen, 30 ô trắng. Còn lại 2 ô trắng không thể lấp được bởi một quân cờ còn lại.

Vậy không thể dùng 31 quân cờ kích thước 1×2 ô để lấp kín bàn cờ nói trên.

Bài tập

Sự lặp lại

241(1). Người ta cắt một tờ giấy thành 4 mảnh, lấy một mảnh đem cắt làm 4, lại lấy một trong các mảnh đó cắt làm 4,... Cứ làm như vậy nhiều lần, có thể được tổng cộng 90 mảnh hay không ?

242(1). a) Cho dãy số 1, 2, 3, 6, 1, 0... viết theo quy luật : kể từ số hạng thứ tư (từ trái sang phải) mỗi số hạng của dãy bằng chữ số hàng đơn vị của tổng ba số hạng liền trước. Hỏi bộ số 3, 5, 6 (viết theo thứ tự ấy) có mặt trong dãy trên hay không ?

b) Cũng hỏi như câu a đối với dãy số 2, 3, 4, 9, 6, 9, ... và bộ số 6, 9, 3.

243(1). Cho dãy số 2, 5, 7, 2, 9, ... viết theo quy luật : kể từ số hạng thứ ba (từ trái sang phải) mỗi số hạng của dãy bằng chữ số hàng đơn vị của tổng hai số hạng liền trước. Hỏi bộ số 2, 4, 6 (viết theo thứ tự ấy) có mặt trong dãy trên hay không ?

Sự ngẫu nhiên

244(1). Có 20 viên bi gồm 10 bi đỏ, 5 bi xanh, còn lại là bi vàng và bi trắng để trong hộp. Không nhìn vào hộp, lấy ra ít nhất bao nhiêu viên bi thì chắc chắn trong số bi lấy ra có :

a) 5 bi cùng màu ?

b) 5 bi đỏ ?

c) cả bi đỏ lẫn bi xanh ?

Sự tương ứng

245(1). Ba bạn Thu, Oanh, Hằng gặp nhau tại hội nghị học sinh giỏi của quận. Họ của ba bạn là Lê, Nguyễn, Phạm. Trường các bạn đó học là trường Trung Vương, Quang Trung, Hoàn Kiếm. Biết rằng :

a) Hằng không mang họ Lê.

b) Oanh không mang họ Phạm.

c) Oanh học ở trường Hoàn Kiếm.

d) Hằng không học ở trường Trung Vương.

e) Bạn họ Phạm không học ở trường Quang Trung.

Hãy xác định họ tên từng bạn và trường học tương ứng của mỗi bạn.

246(1). Bốn người A, B, C, D tham dự một hội nghị. Biết rằng :

a) Mỗi người chỉ biết hai trong bốn thứ tiếng Việt, Nga, Anh, Pháp.

b) A biết tiếng Việt, không biết tiếng Pháp.

c) B biết tiếng Anh, không biết tiếng Pháp, nhưng phiên dịch được cho A và C.

d) D không biết tiếng Việt, tiếng Nga nhưng nói chuyện trực tiếp được với A.

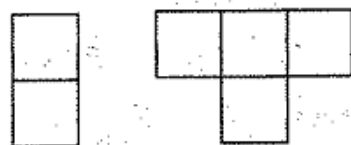
Hỏi mỗi người biết các thứ tiếng nào ?

247(1). Một mạng lưới thông tin có 17 trạm, trạm nào cũng liên lạc được trực tiếp với mỗi trạm khác bởi một và chỉ một trong ba phương tiện liên lạc a, b, c. Chứng minh rằng tồn tại ba trạm liên lạc được với nhau bởi cùng một phương tiện.

Bảng

248(1). Trên một bảng vuông 4×4 gồm 16 ô, người ta đặt 6 quân cờ vào 6 ô tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại 2 hàng và 2 cột chứa tất cả 6 quân cờ.

249(1). Cho một bàn cờ 8×8 gồm 64 ô. Có thể lấp kín bàn cờ được không bằng 2 hình chữ I và 15 hình chữ T (xem hình 8) ?



Hình 8

250(1). Cho một bảng vuông 4×4 . Chứng minh rằng có thể đặt các số tự nhiên từ 1 đến 16 vào các ô của bảng sao cho tổng các số trong mỗi cột bằng nhau.

Cân đồng

251(1). Với một chiếc cân có hai đĩa và một quả cân 1 kg, chỉ bằng một lần cân, hãy lấy ra 2,5 kg bột trong 4 kg bột.

252(1). Có chín chiếc nhẫn giống nhau trong đó có một chiếc nhẹ hơn. Với một chiếc cân có hai đĩa và không dùng quả cân, hãy tìm chiếc nhẫn nhẹ đó bằng hai lần cân.

253(1). Tại một phòng kiểm tra sản phẩm, người ta nhận được 10 hộp mì chính của 10 tổ sản xuất, mỗi hộp 10 gói, mỗi gói 100g. Biết rằng trong 10 hộp đó có một hộp làm sai quy định, mỗi gói chỉ có 90g. Dùng một cái cân và chỉ cân một lần, hãy phát hiện ra hộp nào chứa sản phẩm làm sai quy định.

254(1). Với bốn quả cân 1g, 3g, 9g, 27g và một cái cân đĩa có hai đĩa cân, hãy chứng tỏ rằng có thể cân được :

a) Các vật có khối lượng 5g, 6g, 7g, 8g ;

b) Mọi vật có khối lượng m gam ($m \in \mathbb{N}$; $1 \leq m \leq 40$).

255(1). Trên bảng có 50 dấu (+) và 50 dấu (-). Cứ mỗi lần, người ta xoá hai dấu bất kì và ghi lại một dấu (+) nếu hai dấu bị xoá giống nhau, ghi lại một dấu (-) nếu hai dấu bị xoá khác nhau. Cuối cùng trên bảng chỉ còn một dấu, dấu đó là dấu gì ?

256(1). Trên bảng có 2001 số : 1, 2, 3, ..., 2001. Cứ mỗi lần, người ta xoá hai số bất kì rồi thay bằng tổng của hai số đó. Cuối cùng trên bảng chỉ còn một số, số đó là số chẵn hay số lẻ ?

257(1). Trên bảng có 15 hình tròn và 20 hình vuông. Cứ mỗi lần, người ta xoá hai hình theo quy tắc sau :

– Nếu xoá hai hình tròn thì vẽ thêm hai hình vuông.

– Nếu xoá hai hình vuông thì vẽ thêm hai hình tròn.

– Nếu xoá một hình tròn, một hình vuông thì vẽ thêm một hình vuông, một hình tròn.

a) Có khi nào trên bảng chỉ gồm toàn hình tròn hay không ?

b) Có khi nào trên bảng chỉ gồm toàn hình vuông hay không ?

Sự sắp xếp

258(1). a) Có 130 học sinh đứng thành vòng tròn.

Chọn lấy một bạn bằng cách sau đây : Bắt đầu từ một học sinh (ta gọi là bạn thứ nhất), tính theo chiều kim đồng hồ, giữ lại bạn thứ nhất, loại bạn thứ hai, giữ lại bạn thứ ba, loại bạn thứ tư,... Cứ tiếp tục làm như vậy đến khi còn lại một bạn. Hỏi bạn được giữ lại là bạn số mấy trong lần đánh số đầu tiên ?

b) Cũng hỏi như trên nếu số người là 1991.

259(1). Có hai viên xúc xắc hình lập phương, mỗi viên có 6 mặt. Cần ghi số vào 12 mặt của hai viên xúc xắc như thế nào để biểu thị được tất cả các ngày trong một tháng ?

260*(1). Có 10 bóng đèn được dán số từ 1 đến 10, mỗi bóng có một công tắc. Lúc đầu cả 10 bóng đều tắt.

Bước 1. Thay đổi trạng thái bật tắt của các bóng đèn dán số chia hết cho 1 (tức là cả 10 bóng đèn).

Bước 2. Thay đổi trạng thái bật tắt của các bóng đèn dán số chia hết cho 2 (tức là các bóng đèn số 2, 4, 6, 8, 10).

Bước 3. Thay đổi trạng thái bật tắt của các bóng đèn dán số chia hết cho 3 (tức là các bóng đèn số 3, 6, 9)

Cứ như vậy đến bước 10 : thay đổi trạng thái bật tắt của các bóng đèn dán số chia hết cho 10 (tức là bóng đèn số 10).

Hỏi sau 10 bước đó, những bóng đèn nào bật ?

Sự thi đấu

261(1). Trong một cuộc thi đấu bóng bàn, mỗi đấu thủ đấu với mỗi người còn lại một trận, không có trận hoà. Kết quả có hai đấu thủ A và B có số trận thắng bằng nhau trong đó A thắng B. Chứng minh rằng tồn tại đấu thủ C mà B thắng C, C thắng A.

262(1). Có sáu đội bóng tham gia giải, mỗi đội phải đấu một trận với các đội khác, đội thắng được 2 điểm, thua 0 điểm, không có hoà. Kết quả có hai đội đạt giải được 10 và 6 điểm, bốn đội không đạt giải được 4 ; 4 ; 4 ; 2 điểm. Hỏi các đội đạt giải thua mấy trận khi đấu với các đội không đạt giải ?

Trò chơi

263(1). *Dồn bò về chuồng* : Có 20 ô xếp thành hàng ngang được đánh số từ 1 đến 20, ô số 10 là chuồng bò. Một con bò ở ô số 1, một con ở ô số 20. Hai người lần lượt đi, mỗi người đến lượt phải đưa một trong hai con bò (con nào cũng được) đi một hay nhiều ô tùy ý (không được lùi, không được đi vượt qua chuồng). Ai đưa được con bò cuối cùng vào chuồng thì người đó thắng.

Hãy nêu quy luật chơi để người đi trước thắng.

264*(1). Hai người chơi một trò chơi như sau : Người thứ nhất chọn một số bất kì trong bảy số : 3, 2, 1, -1, -2, -3, -4. Sau đó, người thứ nhất thêm vào số đó một trong bảy số trên. Tiếp theo, người thứ hai thêm vào tổng thu được một trong bảy số đã cho. Biết rằng ai lần đầu chọn số dương thì các lần sau cũng phải chọn số dương, nếu lần đầu chọn số âm thì các lần sau cũng phải chọn số âm. Người nào tạo được tổng là 30 hoặc -30 là người thắng cuộc. Hãy chứng tỏ rằng người thứ hai luôn có cách chơi để thắng cuộc.

Các bài toán vui

Trong các bài toán vui ở mục này, có một số bài toán của Xem Lôi-đơ ((*Sam Loyd*, Mĩ, 1841 – 1911) : các bài 262 đến 276). Ở các bài toán đó có một số đơn vị không quen thuộc :

1 acơ $\approx 4047m^2$.

1 galông Mĩ $\approx 3,78$ lít (chú ý : 1 galông Anh $\approx 4,55$ lít).

1 đôla = 100 xen (*cent*).

265(1). *Hai nghìn đồng mất đi đâu ?*

Ba anh Hùng, Nam, Sơn góp mỗi người 5 nghìn đồng cùng ăn chung. Họ ăn hết 11 nghìn đồng. Bác chủ quán trả lại họ bốn tờ 1 nghìn đồng. Họ chia nhau mỗi người một tờ, còn một tờ cho cậu bé bán báo.

Bỗng Hùng chợt nghĩ ra :

– Chúng ta mất 2 nghìn đồng rồi. Này nhé : Mỗi người thực chi là 4 nghìn đồng, tổng cộng 12 nghìn đồng, cộng 1 nghìn đồng cho cậu bé là 13 nghìn đồng. Thế mà lúc đầu chúng ta góp 15 nghìn đồng cơ mà !

Nam và Sơn ngẩn-người ra. Vậy 2 nghìn đồng mất đi đâu ?

266(1). *Số bưu ảnh*

An và Bách có một số bưu ảnh, số bưu ảnh của mỗi người chưa đến 100, số bưu ảnh hoa của An bằng số bưu ảnh thú rừng của Bách. Bách nói với An :

– Nếu tôi cho bạn các bưu ảnh thú rừng của tôi thì số bưu ảnh của bạn gấp bảy lần số bưu ảnh của tôi.

An trả lời :

– Còn nếu tôi cho bạn các bưu ảnh hoa của tôi thì số bưu ảnh của tôi gấp bốn lần số bưu ảnh của bạn.

Tính số bưu ảnh của mỗi người.

267(1). Có bao nhiêu tiền ?

Một ông già tích trữ được một số đồng tiền vàng loại 5, 10, 20 đôla. Ông ta rất thích làm công việc, phân loại "kho vàng" : Ông cất tiền vào năm cái túi, mỗi túi chứa một số lượng như nhau các đồng tiền cùng loại. Rồi ông lại đổ tất cả tiền lên bàn, chia thành bốn đồng, mỗi đồng chứa một số lượng như nhau các đồng tiền cùng loại. Sau đó ông lấy hai đồng bất kì, trộn lại, chia làm ba đồng, mỗi đồng cũng chứa số lượng như nhau các đồng tiền cùng loại. Hỏi ông già có ít nhất bao nhiêu đôla ?

268*(1). Còn lại thùng nào ?

Một cửa hàng có sáu thùng đựng dầu hoặc dấm, trên thùng có ghi lượng dầu hoặc dấm tính bằng galông : 8, 13, 15, 17, 19, 31. Giá một galông dầu gấp đôi giá một galông dấm. Một khách hàng mua năm thùng, số tiền mua dầu và số tiền mua dấm đều bằng 14 đôla.

Hỏi còn lại thùng nào ? Giá mỗi thùng dầu ? Giá mỗi thùng dấm ?

269(1). Tìm chữ số bị xoá

Một giáo sư đề nghị Xem Lôi-đơ làm như sau :

Bước 1. Dùng cả 10 chữ số từ 0 đến 9, mỗi chữ số một lần, để viết hai số bất kì (chẳng hạn : 342195 và 6078)

Bước 2. Cộng hai số đó lại (được : 348273).

Bước 3. Xoá đi một chữ số (chẳng hạn xoá chữ số 2).

Giáo sư nhìn kết quả sau cùng (số 348 *73, chữ số xoá được kí hiệu là *) và đã nói đúng chữ số mà Xem Lôi-đơ đã xoá.

Làm thế nào mà giáo sư tìm ra chữ số bị xoá ?

270(1). Chiếc mũ ế

Một chủ hiệu định giá chiếc mũ là 20 đôla nhưng không bán được. Ông ta hạ giá mũ xuống còn 8 đôla, vẫn không có ai mua. Ông chủ lại hạ giá xuống 3,2 đôla, rồi 1,28 đôla. Thêm một lần hạ giá nữa thì bán được chiếc mũ.

Chiếc mũ được bán với giá bao nhiêu xen, biết rằng ông chủ hạ giá mũ theo một quy tắc nhất định ?

271(1). Cô gái từ thiện

Một cô gái hay làm việc thiện. Gặp một người nghèo, cô cho người đó một số tiền nhiều hơn một xen so với nửa số tiền cô có trong ví. Gặp người thứ hai, cô cho người đó một số tiền nhiều hơn 2 xen so với nửa số tiền còn lại lúc đó. Với người thứ ba, cô lại cho nhiều hơn nửa số tiền có lúc đó là 3 xen.

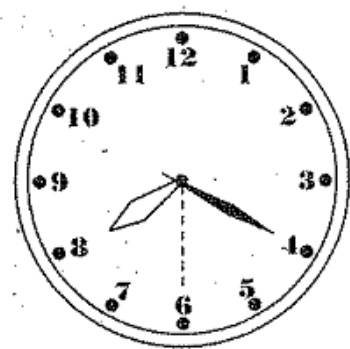
Cuối cùng cô chỉ còn một xen. Hỏi trước khi đi chơi, cô gái có bao nhiêu tiền ?

272(5). Chia hạt dẻ

Ba cô bé nhặt được 770 hạt dẻ và quyết định chia theo tỉ lệ tuổi. Cứ Me-ri được 4 hạt thì Ne-li được 3 hạt và sau khi Me-ri được 6 hạt thì Xu-di được 7 hạt. Vậy mỗi cô được chia bao nhiêu hạt dẻ ?

273 (1). Chiếc đồng hồ

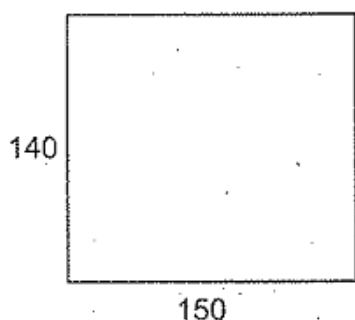
Đồng hồ chỉ vào khoảng 8 giờ 20 phút (h.9). Biết rằng kim phút và kim giờ ở vị trí cách đều số 6 (tức là hai kim đồng hồ "đối xứng" nhau qua trục thẳng đứng). Tính giờ chính xác lúc đó là mấy giờ ?



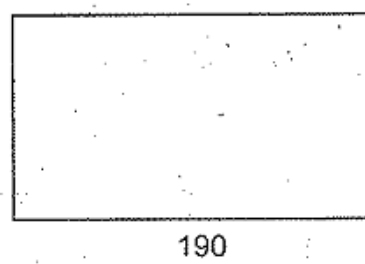
Hình 9

274(1). Hai ông chủ trại lằm cắm mất bao nhiêu bí ?

Hai ông chủ trại già có một mảnh đất hình chữ nhật dài 150 gậy, rộng 140 gậy (h.10a), còn anh chàng Xây-cơ mới tốt nghiệp trung học có một mảnh đất hình chữ nhật dài 190 gậy, rộng 110 gậy (h.10b)



a)



b)

Hình 10

Hai ông chủ trại bàn nhau đổi mảnh đất của mình (có chu vi 580 gậy) lấy mảnh đất của Xây-cơ (có chu vi 600 gậy). Hai ông nghĩ rằng chu vi lớn thì diện tích lớn và họ tưởng rằng lừa được anh chàng Xây-cơ trẻ tuổi. Dĩ nhiên anh chàng Xây-cơ đã học trung học và biết rằng trong việc đổi chác này, anh ta có lợi hơn.

Giả thiết rằng trên cả hai mảnh đất đó, mỗi acơ cho 840 quả bí. Như vậy hai ông chủ trại lằm cằm sẽ mất bao nhiêu quả bí trên mỗi acơ trong vụ đổi chác này ?

275(1). *Hai mươi chiếc kẹo*

Bốn em bé mua 20 chiếc kẹo hết 20 xen. Kẹo sôcôla giá 4 xen một chiếc, kẹo caramen giá 1 xen bốn chiếc, còn kẹo bi giá 1 xen hai chiếc. Vậy các em mua mỗi loại bao nhiêu chiếc ?

276(5). *Bản di chúc khó thực hiện*

Một ông già sắp được làm bố đã di chúc rằng sẽ trao $\frac{2}{3}$ gia tài cho con trai và $\frac{1}{3}$ cho vợ nếu vợ ông đẻ con trai, trao $\frac{2}{3}$ gia tài cho vợ và $\frac{1}{3}$ cho con gái nếu vợ ông đẻ con gái. Nhưng vợ ông đã đẻ sinh đôi một trai một gái. Ông già làm thế nào để thực hiện được lời hứa của mình ?

277(1). *Du khách ở làng nào ?*

Tại một vùng biên giới Pháp – Ý có hai làng người Pháp và Ý cạnh nhau. Dân Ý sống ở làng này có phong tục đặc biệt : thay cho câu trả lời "có" thì họ lắc đầu, còn "không" thì họ gật đầu.

Một khách du lịch đến vùng này đã hỏi một người dân mà ông ta gặp :

– Anh có phải là người làng này không ?

Người khách đã xác định được ngay mình đang ở làng người Pháp hay ở làng người Ý. Hãy giải thích vì sao ?

278(1). *Đường chạy quanh hồ*

Khôi và Tuấn chạy chung quanh một cái hồ với vận tốc theo thứ tự là 5m/s và 4m/s. Họ xuất phát từ cùng một địa điểm, Khôi chạy theo hướng này, còn Tuấn chạy theo hướng kia. Hai người hẹn nhau sẽ dừng chạy khi gặp nhau tại địa điểm xuất phát. Hỏi đến lần gặp nhau thứ mấy thì hai người dừng chạy ?

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

§12. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

Ở chương II, ta đã biết : Trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau. Ở mục này, mối quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam giác được thể hiện trong định lí : Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn ; đảo lại, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

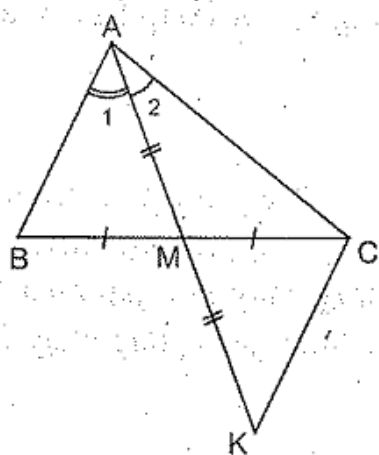
Ví dụ 16

Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC.

a) Cho biết $\widehat{MAB} > \widehat{MAC}$, chứng minh rằng $AC > AB$.

b) Cho biết $AC > AB$, chứng minh rằng $\widehat{MAB} > \widehat{MAC}$.

Giải (h.11) :



Hình 11

Trên tia đối của tia MA, lấy điểm K sao cho $MK = MA$.

$\triangle AMB = \triangle KMC$ (c.g.c) suy ra

$$AB = CK \quad (1)$$

và $\widehat{A_1} = \widehat{K} \quad (2)$

a) Do $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$ nên $\widehat{K} > \widehat{A_2}$.

$\triangle AKC$ có $\widehat{K} > \widehat{A_2}$ nên $AC > CK \quad (3)$

Từ (1) và (3) suy ra $AC > AB$.

b) Do $AC > AB$ nên $AC > CK$.

$\triangle AKC$ có $AC > CK$ nên $\widehat{K} > \widehat{A_2} \quad (4)$

Từ (2) và (4) suy ra $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$

Bài tập

77. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D.
- So sánh AB và AD.
 - So sánh AD và DC.
78. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Chứng minh rằng $BD < DC$.
79. Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Kẻ AH vuông góc với BC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tia AD nằm giữa hai tia AH và AM.
80. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm M nằm trong tam giác sao cho $MB < MC$. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$.
- 81*. Trong các tam giác có một góc bằng α và tổng hai cạnh kề góc ấy bằng s, tam giác nào có chu vi nhỏ nhất?
- 82*. Gọi C là điểm bất kì nằm trên đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều ACD, BCE. Tìm vị trí của điểm C để DE có độ dài nhỏ nhất.

~ Bài tập : 121, 126.

§13. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

Xét các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm ở ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó, ta có các định lí:

- Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.
- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau. Đảo lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

Ví dụ 17

Cho tam giác ABC có $AC > AB$, M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Tìm vị trí của điểm M để AM có độ dài nhỏ nhất.

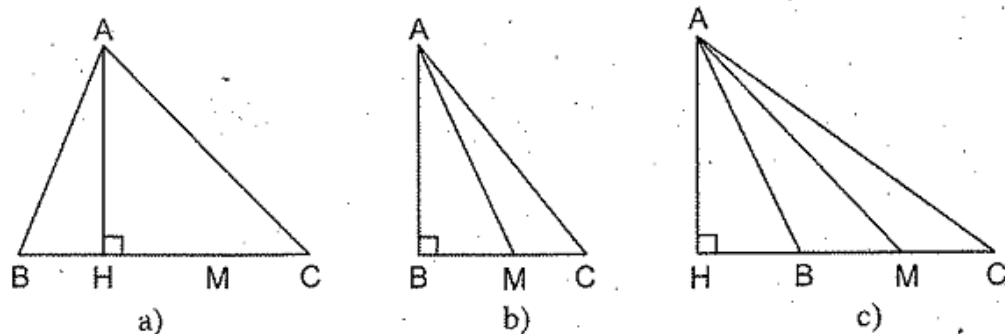
Giải : Kẻ đường vuông góc AH đến BC. Xét ba trường hợp :

a) Trường hợp $\widehat{B} < 90^\circ$ (khi đó $\widehat{C} < 90^\circ$) (h.12a) :

Theo quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc : $AM \geq AH$. Ta có AM nhỏ nhất bằng AH khi và chỉ khi M trùng H.

b) Trường hợp $\widehat{B} = 90^\circ$ (h.12b) :

Ta có $AM \geq AB$ nên AM nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi M trùng B.



c) Trường hợp $\widehat{B} > 90^\circ$ (h.12c)

Ta có $HM \geq HB$ nên $AM \geq AB$ (hình chiếu lớn thì đường xiên lớn).

AM nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi M trùng B.

Kết luận :

Nếu $\widehat{B} < 90^\circ$ thì vị trí phải tìm của M là H (chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC).

Nếu $\widehat{B} \geq 90^\circ$ thì vị trí phải tìm của M là B.

Chú ý : Trong trường hợp $\widehat{B} > 90^\circ$ (h.12c), mặc dù ta có $AM \geq AH$ nhưng không xảy ra $AM = AH$ (vì điểm M thuộc đoạn thẳng BC), do đó không thể kết luận được rằng AM nhỏ nhất bằng AH.

Bài tập

83. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Gọi AH là đường vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng BC. Gọi M là một điểm thuộc đoạn thẳng AH. So sánh các độ dài MB và MC.
84. Cho AB và CD là hai đoạn thẳng song song và bằng nhau, A'B' và C'D' là các hình chiếu của chúng trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng $A'B' = C'D'$.
- 85*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh rằng $BC + AH > AB + AC$.

§14. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

Giữa ba cạnh của một tam giác có quan hệ : mỗi cạnh nhỏ hơn tổng của hai cạnh kia và lớn hơn hiệu của chúng.

Ba đoạn thẳng có độ dài a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nếu chúng thoả mãn một trong các điều kiện sau :

- Hoặc $a < b + c, b < a + c, c < a + b$;
- Hoặc $|b - c| < a < b + c$;
- Hoặc đoạn thẳng lớn nhất nhỏ hơn tổng của hai đoạn thẳng kia.

Ví dụ 18

Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh rằng $BC + EF < 2BF$.

Giải (h.13) :

Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho $CK = EF$. Khi đó

$$BC + EF = BC + CK = BK \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \widehat{E}_1 = \widehat{C}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \text{ nên } \widehat{E}_2 = \widehat{C}_2.$$

$\triangle BEF$ và $\triangle FCK$ có :

$$EF = CK$$

$$\widehat{E}_2 = \widehat{C}_2$$

$$BE = CF$$

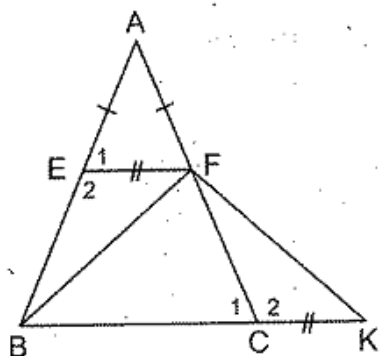
$$\text{Do đó } \triangle BEF = \triangle FCK \text{ (c.g.c), suy ra } BF = FK \quad (2)$$

$$\text{Xét } \triangle BFK \text{ ta có } BK < BF + FK \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$BC + EF = BK < BF + FK = 2BF.$$

Vậy $BC + EF < 2BF$.



Hình 13

Bài tập

86. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC.

$$\text{Chứng minh rằng } AM < \frac{AB + AC}{2}.$$

87. Tính chu vi tam giác cân ABC biết rằng :

a) $AB = 8\text{cm}, AC = 5\text{cm}.$

b) $AB = 25\text{cm}, AC = 12\text{cm}.$

88. Cho điểm M nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng tổng $MA + MB + MC$ lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi tam giác.

89. Cho điểm D nằm trên cạnh BC của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{AB + AC - BC}{2} < AD < \frac{AB + AC + BC}{2}$$

90. Cho tam giác ABC có $AC > AB$, tia phân giác của góc A cắt BC ở D, điểm E nằm trên đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng $AC - AB > EC - EB$.

91*. Cho tam giác đều ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC, mỗi đoạn thẳng không lớn hơn tổng của hai đoạn thẳng kia (định lí Pom-piu).

~ Bài tập : 122.

§15. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

Đường trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng nối đỉnh của tam giác với trung điểm của cạnh đối diện.

Ta có định lí : Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm.

Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Giao điểm của các đường trung tuyến gọi là *trọng tâm* của tam giác.

Ví dụ 19

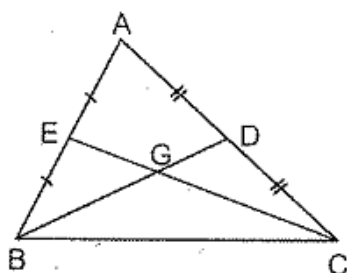
Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE. Chứng minh rằng

$$BD + CE > \frac{3}{2} BC.$$

Giải (h.14) :

Gọi G là giao điểm của BD và CE. Trong $\triangle GBC$, ta có $BG + CG > BC$.

Ta lại có $BG = \frac{2}{3} BD$, $CG = \frac{2}{3} CE$ (tính chất các đường trung tuyến của $\triangle ABC$) nên :



Hình 14

$$\frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BC$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(BD + CE) > BC$$

$$\Rightarrow BD + CE > \frac{3}{2}BC.$$

Bài tập

92. Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.
93. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau. Tính độ dài BC biết $BD = 9\text{cm}$, $CE = 12\text{cm}$.
94. Cho tam giác ABC có $BC = 10\text{cm}$, các đường trung tuyến BD và CE có độ dài theo thứ tự bằng 9cm và 12cm . Chứng minh rằng BD vuông góc với CE.
95. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BD. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = BD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, CE. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của AM, AN với BE. Chứng minh rằng $BI = IK = KE$.
- 96*. Tam giác ABC có đường trung tuyến $AD = 12\text{cm}$, trung tuyến $BE = 9\text{cm}$, trung tuyến $CF = 15\text{cm}$. Tính độ dài cạnh BC (chính xác đến $0,1\text{cm}$).
- 97*. Chứng minh rằng tổng các độ dài ba đường trung tuyến của một tam giác lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của tam giác ấy.

~ Ví dụ : 37, 38.

Bài tập : 156 đến 159, 169, 170, 176, 177, 179, 180.

§16. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó. Đảo lại, điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

Trong một tam giác, ba đường phân giác cùng đi qua một điểm, điểm này cách đều ba cạnh của tam giác.

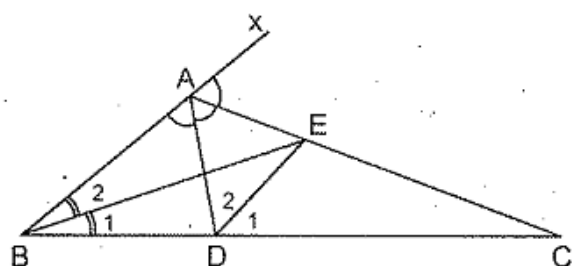
Hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác và tia phân giác của góc trong không kể chúng cũng gặp nhau tại một điểm.

Đối với tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy cũng đồng thời là đường phân giác của tam giác đó.

Ví dụ 20

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, các đường phân giác AD và BE. Tính số đo của góc BED.

Giải (h.15) :



Hình 15

Gọi Ax là tia đối của tia AB. Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{CAx} = 60^\circ$.

Xét $\triangle ABD$ có AE là tia phân giác của góc ngoài đỉnh A, BE là tia phân giác của góc B, chúng cắt nhau tại E nên DE là tia phân giác ngoài của góc D.

$$\text{Do đó} \quad \widehat{BED} = \widehat{D}_1 - \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{ADC} - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = 30^\circ.$$

Bài tập

98. Cho góc vuông xOy và tam giác vuông cân ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, B thuộc Ox, C thuộc Oy, A và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BC. Chứng minh rằng OA là tia phân giác của góc xOy.

99. Cho tam giác ABC có AH vuông góc với BC và $\widehat{BAH} = 2\widehat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở E.

a) Tia phân giác của góc BAH cắt BE ở I. Chứng minh rằng tam giác AIE vuông cân.

b) Chứng minh rằng HE là tia phân giác của góc AHC.

100*. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, đường phân giác AD. Đường phân giác của góc ngoài tại C cắt đường thẳng AB ở K. Gọi E là giao điểm của DK và AC. Tính số đo của góc BED.

101*. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, các đường phân giác AD, BE, CF.

a) Chứng minh rằng DE là tia phân giác góc ngoài của tam giác ADB.

b) Tính số đo của góc EDF.

102*. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC. Kẻ MH vuông góc với AB. Gọi E là một điểm thuộc đoạn thẳng AH. Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $\widehat{AEF} = 2\widehat{EMH}$. Chứng minh rằng FM là tia phân giác của góc EFC.

103*. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I và $ID = IE$. Chứng minh rằng $\widehat{B} = \widehat{C}$ hoặc $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$.

~ Ví dụ : 25.

Bài tập : 127, 130 đến 132, 135.

§17. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó. Đảo lại, điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác và là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó (ta gọi đường tròn đó là đường tròn ngoại tiếp tam giác).

Đối với tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy cũng đồng thời là đường trung trực của tam giác đó.

Ví dụ 21

Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Trên cạnh CA lấy điểm E sao cho $CE = AB$. Các đường trung trực của BE và của AC cắt nhau ở O. Chứng minh rằng :

- $\triangle AOB = \triangle COE$.
- AO là tia phân giác của góc A.

Giải (h.16) :

- $\triangle AOB$ và $\triangle COE$ có

$OA = OC$ (O thuộc đường trung trực của AC)

$OB = OE$ (O thuộc đường trung trực của BE)

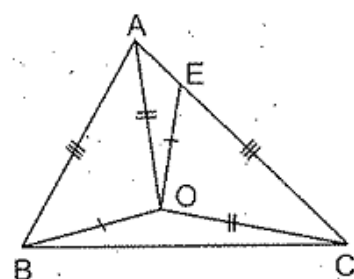
$AB = CE$ (giả thiết)

Do đó $\triangle AOB = \triangle COE$ (c.c.c).

$$\text{b) } \triangle AOB = \triangle COE \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OCE} \quad (1)$$

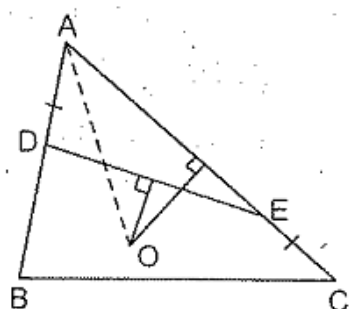
$$\triangle AOC \text{ cân tại O} \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$, do đó AO là tia phân giác của góc A.



Hình 16

Chú ý



Hình 17

1. Tổng quát hơn, ta có bài toán : Cho ΔABC , điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = CE$. Các đường trung trực của DE và của AC cắt nhau ở O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc A. (h.17).

Giải tương tự như bài trên.

2. Bài toán tổng quát này còn có thể diễn đạt dưới dạng :

Cho ΔABC , các điểm D và E thay đổi vị trí trên các cạnh AB, AC sao cho $AD = CE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn luôn đi qua một điểm cố định (đó là giao điểm của đường trung trực của AC và tia phân giác của góc A).

Bài tập

104. Cho tam giác ABC trong đó $\widehat{A} = 110^\circ$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở E và F. Tính $\widehat{EAF}$.
105. Cho tam giác ABC trong đó hai đỉnh A và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường trung trực của AB. Chứng minh rằng $CA < CB$.
106. Cho tam giác ABC. Tìm điểm E thuộc đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh A sao cho tam giác EBC có chu vi nhỏ nhất.
107. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm điểm M trên cạnh BC sao cho nếu vẽ các điểm D, E trong đó AB là đường trung trực của MD, AC là đường trung trực của ME thì DE có độ dài nhỏ nhất.
108. Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy. Tìm điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.
109. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ AH vuông góc với BC. Tia phân giác của góc HAB cắt BC ở D, tia phân giác của góc HAC cắt BC ở E. Chứng minh rằng giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC là giao điểm các đường trung trực của tam giác ADE.
110. Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm D và E theo thứ tự di chuyển trên hai cạnh AB và AC sao cho $AD = CE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.

111*. a) Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Các điểm D và E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AC sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.

b) Như câu a, nhưng D thuộc cạnh AB, còn E thuộc tia đối của tia CA.

112**. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Trên đoạn thẳng AD lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CBF}$. Chứng minh rằng $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

~ Bài tập : 133, 161.

§18. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

Đường cao của tam giác là đường thẳng kẻ từ đỉnh của tam giác vuông góc với đường thẳng chứa cạnh đối diện.

Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó gọi là *trực tâm* của tam giác đó.

Vị trí của trực tâm, trọng tâm và tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác được nêu trong bài toán về đường thẳng O-le (bài 182).

Đối với tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy cũng đồng thời là đường cao (và đồng thời là đường phân giác).

Do trong tam giác cân có duy nhất một đường trung tuyến, một đường cao, một đường phân giác ứng với cạnh đáy nên ta cũng có :

– Đường cao ứng với cạnh đáy của tam giác cân cũng là đường trung tuyến, đường phân giác.

– Đường phân giác ứng với cạnh đáy của tam giác cân cũng là đường trung tuyến, đường cao.

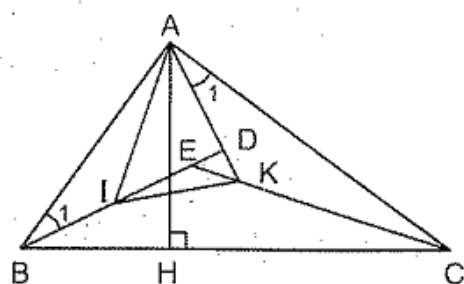
Ta cũng có thêm các dấu hiệu nhận biết tam giác cân :

– Nếu một tam giác có một đường cao cũng là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân.

– Nếu một tam giác có một đường cao cũng là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

Ví dụ 22

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, I, K theo thứ tự là giao điểm các đường phân giác của các tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh rằng AE vuông góc với IK.



Hình 18

Giải (h.18) :

Ta có $\widehat{B} = \widehat{CAH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$),
 $\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{B}$, $\widehat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{CAH}$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$.

Ta có $\widehat{A}_1 + \widehat{BAD} = 90^\circ$ nên $\widehat{B}_1 + \widehat{BAD} = 90^\circ$,
 do đó $BD \perp AK$. Chứng minh tương tự, $CK \perp AI$.

Tam giác AIK có $ID \perp AK$, $KE \perp AI$ nên E là trực tâm của tam giác. Suy ra $AE \perp IK$.

Bài tập

113. Đường cao của tam giác đều cạnh a bằng :

A) $\frac{3a}{2}$

B) $a\sqrt{3}$

C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{a}{2}$

Chọn câu trả lời đúng.

114. Gọi D là điểm nằm trên cạnh AB của tam giác vuông cân ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$). Trên tia đối của tia AC, lấy điểm E sao cho $AE = AD$. Chứng minh rằng CD vuông góc với BE.

115. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Vẽ ở phía ngoài tam giác ấy các tam giác vuông cân ABD, ACE ($\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^\circ$).

a) Qua điểm C vẽ đường thẳng vuông góc với BE, cắt đường thẳng HA tại K. Chứng minh rằng CD vuông góc với BK.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, BE, CD đồng quy.

116. Tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và h_a , h_b là độ dài các đường cao tương ứng. Xác định dạng của tam giác biết rằng :

a) $h_a = h_b$;

b) $a = h_b$;

c*) $a = h_a$, $b = h_b$.

117*. Gọi H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng :

a) $HA + HB + HC < AB + AC$.

b) $HA + HB + HC < \frac{2}{3} (AB + BC + CA)$.

~ Ví dụ : 28, 33.

Bài tập : 123, 124, 136, 160, 171, 172, 174, 175, 178, 181, 182.

CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

I – THẾ NÀO LÀ PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG ?

Trong nhiều bài toán, để thay cho chứng minh B là đúng người ta chứng minh rằng không B là sai (không B còn gọi là phủ định của B).

Chẳng hạn : Để chứng minh a song song với b , ta chứng minh rằng a không song song với b là sai ; để chứng minh $AB < CD$, ta chứng minh rằng $AB \geq CD$ là sai.

Phương pháp phản chứng là phương pháp chứng minh gián tiếp, trong đó để chứng tỏ kết luận của bài toán là đúng, ta chứng tỏ phủ định của kết luận là sai.

II – CÁC BƯỚC CỦA PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

– *Bước 1* (phủ định kết luận) : Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.

– *Bước 2* (đưa đến mâu thuẫn) : Từ điều giả sử trên và từ giả thiết của bài toán, ta suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay với các kiến thức đã học.

– *Bước 3* (khẳng định kết luận) : Vậy kết luận của bài toán là đúng.

Trong chứng minh bằng phản chứng, cần biết cách lập câu phủ định của kết luận. Chẳng hạn :

Kết luận	Phủ định của kết luận
$a > b$	$a \leq b$
ΔABC có $\hat{A} < 90^\circ$	ΔABC có $\hat{A} \geq 90^\circ$
Mọi cặp tam giác có một cặp cạnh bằng nhau và hai cặp góc bằng nhau đều bằng nhau	Có một cặp tam giác có một cặp cạnh bằng nhau và hai cặp góc bằng nhau mà không bằng nhau

III – VÍ DỤ

Ví dụ 23(10)

Chứng minh rằng nếu một tam giác có một góc 30° và cạnh đối diện với góc ấy bằng nửa một cạnh khác thì tam giác đó là tam giác vuông.

Giải : Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = \frac{BC}{2}$. Ta sẽ chứng minh rằng : $\widehat{A} = 90^\circ$.

Thấy vậy giả sử $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$.

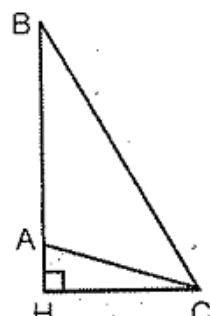
Qua C ta vẽ $CH \perp AB$ thì H không trùng A (h.19), do đó

$$CH < CA \quad (1)$$

Tam giác vuông HBC có $\widehat{B} = 30^\circ$ nên $CH = \frac{BC}{2}$, mà

$$AC = \frac{BC}{2} \text{ (giả thiết), do đó}$$

$$CH = CA \quad (2)$$



Hình 19

mâu thuẫn với (1).

Vậy $\widehat{BAC}$ phải bằng 90° .

Bài tập

Chứng minh bằng phản chứng (bài 118 – 124) :

118(1). Qua điểm O trên mặt phẳng, vẽ bốn đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng trong các góc đỉnh O, có ít nhất một góc có số đo không quá 45° .

119(2). Tam giác ABC có $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là các góc nhọn, kẻ AH vuông góc với đường thẳng BC. Chứng minh rằng điểm H nằm giữa hai điểm B và C.

120(9). a) Chứng minh bằng phản chứng : Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = \frac{1}{2} BA$.

Chứng minh rằng $\widehat{C} = 90^\circ$.

b) Áp dụng câu a để giải : Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 2\text{dm}$, $BA = 3\text{dm}$. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AD = AC$.

121(12). Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Trên nửa mặt phẳng bờ DB không chứa A, vẽ tia Dx sao cho $\widehat{BDx} = 15^\circ$. Dx cắt tia AB ở E. Chứng minh rằng $HD = HE$.

122*(14). Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 > 5c^2$ thì c là độ dài của cạnh nhỏ nhất.

123*(18). Tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH, đường trung tuyến BI, đường phân giác CK cắt nhau tại ba điểm phân biệt D, E, F. Chứng minh rằng tam giác DEF không thể là tam giác đều.

124**(18). Tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường phân giác AD, đường trung tuyến BM và đường cao CH đồng quy. Chứng minh rằng $\widehat{A} > 45^\circ$.

TƯƠNG TỰ

I – TƯƠNG TỰ LÀ GÌ ?

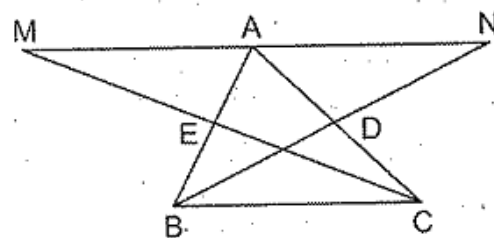
Trong lời giải nhiều bài toán, ta gặp những từ *chứng minh tương tự như trên, giải tương tự như bài...* Tương tự được hiểu là giống nhau, nhưng có nhiều mức độ giống nhau : hoàn toàn giống nhau, gần hoàn toàn giống nhau, có một số nét giống nhau. Do đó, sự vận dụng tương tự trong chứng minh hình học cũng rất đa dạng.

II – TÁC DỤNG CỦA TƯƠNG TỰ

Người ta thường dùng tương tự để :

1. Thu gọn lời giải bằng cách không lặp lại các chứng minh như nhau

Một ví dụ. Cho tam giác ABC, D là trung điểm của AC, E là trung điểm của AB. Vẽ các điểm M, N sao cho E là trung điểm của CM, D là trung điểm của BN. Chứng minh rằng A là trung điểm của MN (h.20)



Hình 20

Sau khi chứng minh $\triangle AEM = \triangle BEC$ (c.g.c) để suy ra $AM = BC$ và $AM \parallel BC$, ta có thể nói : Chứng minh tương tự $AN = BC$ và $AN \parallel BC$.

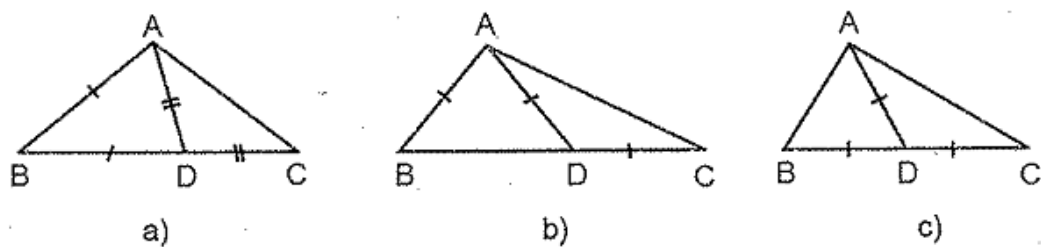
Chứng minh $AN = BC$ cũng hoàn toàn giống như chứng minh $AM = BC$, chứng minh $AN \parallel BC$ cũng hoàn toàn giống như chứng minh $AM \parallel BC$. Do đó để cho gọn, ta dùng từ *chứng minh tương tự* mà không cần lặp lại chứng minh như trên. Ở đây chứng minh tương tự là một suy diễn chính xác.

Ví dụ 24*(9)

Tam giác ABC có $\widehat{A} = 105^\circ$. Một đường thẳng qua A cắt BC ở D chia tam giác ABC thành hai tam giác cân. Tính số đo các góc B và C của tam giác ABC.

Nhận xét : Bài toán này đòi hỏi xét nhiều trường hợp vì đề bài không xác định rõ đáy của các tam giác cân ADB, ADC. Ta hãy chú ý đến sự tương tự giữa hai góc ADB, ADC : nếu thay B bởi C, thay C bởi B thì lời giải của bài toán không đổi. Ta nói rằng hai góc đó có vai trò như nhau và nhờ sự tương tự ấy ta có thể sắp xếp chúng theo thứ tự $\widehat{ADC} \geq \widehat{ADB}$ mà không mất tính tổng quát của bài toán.

Giải : Giả sử $\widehat{ADC} \geq \widehat{ADB}$ thì $\widehat{ADC} \geq 90^\circ$, dẫn đến tam giác cân ADC phải có đáy AC. Ta chỉ phải xét ba trường hợp : tam giác cân ADB có đáy AD (h.21a), hoặc BD (h.21b) hoặc AB (h.21c) mà không phải xét đến 9 trường hợp.



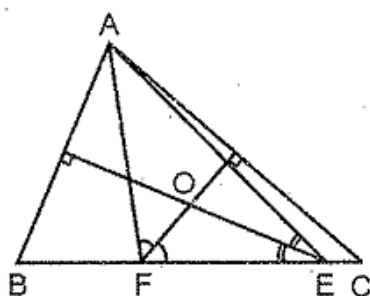
Hình 21

Đặt $\widehat{C} = \alpha$, trường hợp 1 cho ta $3\alpha = 105^\circ$ nên $\alpha = 35^\circ$, trường hợp 2 cho ta $\alpha + (180^\circ - 4\alpha) = 105^\circ$ nên $\alpha = 25^\circ$, trường hợp 3 không xảy ra vì khi đó $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

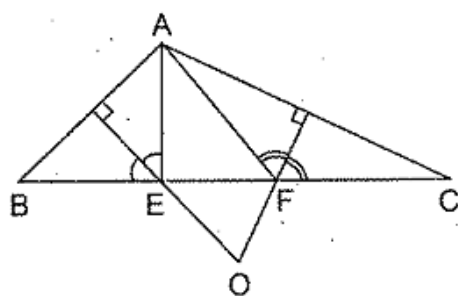
Ví dụ 25(16)

Tam giác ABC có $\widehat{A} \neq 90^\circ$, B và C là các góc nhọn, các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau ở O và cắt BC theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc EAF.

Giải : Ta có EA = EB nên EO là tia phân giác của góc AEB (h.22). Chứng minh tương tự, FO là tia phân giác của góc AFC. Vì EO và FO là các tia phân giác của các góc trong đỉnh E và F của $\triangle AEF$ nên AO là tia phân giác của góc EAF. Lời giải này ứng với trường hợp $\widehat{A} < 90^\circ$.



Hình 22



Hình 23

Nếu $\widehat{A} > 90^\circ$ (h.23), lời giải cũng tương tự như trên, chỉ khác ở chỗ EO và FO là các tia phân giác của góc ngoài đỉnh E và F của $\triangle AEF$. Ta vẫn có AO là tia phân giác của góc EAF (đpcm).

Trong trường hợp này, sự tương tự không hoàn toàn như nhau. Không cần lập lại toàn bộ chứng minh như trên, nhưng cần nêu lên chỗ khác nhau đó. Ở đây, chứng minh tương tự cũng là một suy diễn chính xác.

2. Phát hiện tính chất mới, đề xuất bài toán mới

Tương tự còn có nghĩa là có những nét giống nhau. Từ một số tính chất giống nhau của hai đối tượng, ta dự đoán các tính chất giống nhau khác của chúng. Chẳng hạn : Nếu đối tượng X có các tính chất a, b, c, d, còn đối tượng Y có các tính chất a, b, c, thế thì Y cũng có thể có tính chất d.

Một ví dụ. Các đường trung tuyến, đường cao, phân giác của tam giác có một số tính chất giống nhau. Chẳng hạn trong tam giác cân, các đường trung tuyến ứng với cạnh bên thì bằng nhau. Các đường phân giác, đường cao cũng có tính chất như vậy. Biết các đường trung tuyến của tam giác gặp nhau tại một điểm, ta phỏng đoán rằng các đường phân giác, đường cao cũng có tính chất ấy. Các giả thuyết này cũng được khẳng định.

Ở đây tương tự có vai trò như một phương pháp thực nghiệm. Nhờ so sánh các đối tượng có một số thuộc tính giống nhau mà ta đề ra giả thuyết tương tự rồi kiểm tra các giả thuyết ấy. Đó chính là tác dụng của tương tự trong quá trình sáng tạo toán học, nhờ đó mà ta có thể đề xuất các bài toán mới.

Chú ý rằng cách nhìn hai đối tượng là tương tự cũng rất khác nhau tùy theo mục đích nghiên cứu. Các đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao có thể xem là tương tự vì có một số tính chất giống nhau trong tam giác. Tam giác và tứ giác có thể xem là tương tự vì chúng là các trường hợp riêng của đa giác. Chu vi và diện tích có thể xem là tương tự vì chúng được nghiên cứu bằng phương pháp giống nhau. Đường thẳng có khi được xem là tương tự với đường tròn, có khi được xem là tương tự với mặt phẳng. Chính sự đa dạng ấy làm cho khả năng sáng tạo bài toán bằng tương tự thêm phong phú.

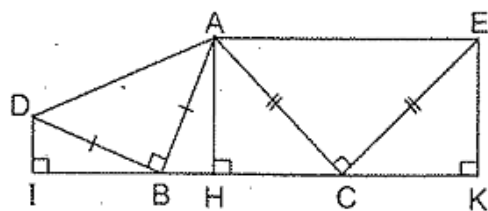
Nhưng suy luận bằng tương tự thuộc loại "suy luận nghe có lí", nó mới cho ta những dự đoán, còn để khẳng định hay bác bỏ dự đoán đó thì phải chứng minh. Sẽ sai lầm nếu bằng tương tự, ta cho rằng giao điểm các đường phân giác của tam giác cũng cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường phân giác đi qua đỉnh ấy (!) hoặc cho rằng trong hai tam giác bất kì, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau (!).

3. Tìm tòi cách giải một bài toán

a) Bằng cách nghĩ đến bài toán có nét tương tự với bài toán đang giải.

Ví dụ 26(11)

Vẽ ở phía ngoài tam giác ABC ($\widehat{B} < 90^\circ$, $\widehat{C} < 90^\circ$) các tam giác vuông cân ABD, ACE ($\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^\circ$). Gọi I và K là chân các đường vuông góc kẻ từ D và E đến BC. Chứng minh rằng BI = CK (h.24).



Hình 24

Nhận xét : Rõ ràng $\triangle BID$ có cạnh BI và $\triangle CKE$ có cạnh CK không phải là hai tam giác bằng nhau. Một câu hỏi được đặt ra : Có bài toán nào tương tự với bài toán này, hoặc với một phần của bài toán này ?

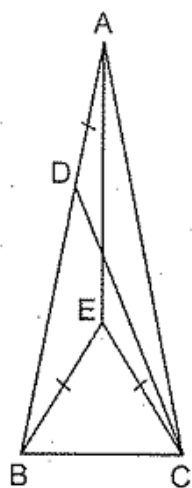
Các dữ kiện của bài toán : $\triangle ABD$ vuông cân, đường thẳng IK đi qua đỉnh góc vuông,... làm ta nhớ lại một bài toán đã giải cũng có các dữ kiện tương tự (bài 38). Do sự liên hệ đó, ta vẽ thêm $AH \perp IK$, được $BI = AH$. Tương tự với $\triangle ACE$ vuông cân, được $CK = AH$. Do đó $BI = CK$.

Nhờ liên hệ đến một bài toán tương tự đã giải mà ta tạo ra đoạn thẳng AH làm trung gian để so sánh BI và CK.

Giải : Bạn đọc tự trình bày.

b) Bằng cách dùng phương pháp tương tự với phương pháp đã sử dụng ở một bài toán khác.

Ví dụ 27*(9)



Hình 25

Tam giác ABC cân có góc đỉnh $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy D sao cho $AD = BC$. Tính $\widehat{ACD}$ (h.25).

Nhận xét :

Nhớ lại bài 51 : $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ$, K là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{KBC} = 10^\circ$, $\widehat{KCB} = 30^\circ$. Tính $\widehat{BAK}$.

Ở bài 51 ta có $\widehat{ABC} + \widehat{KBC} = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$, do đó ta vẽ $\triangle EBC$ đều (E và A cùng phía đối với BC), xuất hiện $\widehat{ABE} = \widehat{KBC}$.

Còn trong ví dụ 27 ta có $\widehat{BCA} - \widehat{A} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, cũng là góc của tam giác đều. Do đó, mặc dù hai bài toán hoàn toàn khác nhau, nhưng sự tương tự trên gợi ra cách vẽ tam giác đều BEC.

Giải : Vẽ $\triangle BEC$ đều (E và A cùng phía đối với BC). Cách vẽ này làm xuất hiện $\widehat{ECA} = \widehat{DAC}$, dẫn đến $\triangle ECA = \triangle DAC$ (c.g.c) suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{ACD}$. Ta dễ dàng tính được $\widehat{CAE} = 10^\circ$, do đó $\widehat{ACD} = 10^\circ$.

Chú ý : Các cách giải khác, xem bài 138.

Bài tập

125(9). Giải bài toán sau trong đó có dùng chứng minh tương tự :

Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác vuông cân ABD, ACE có đáy BD, CE. Kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng các điểm D và E cách đều đường thẳng AH.

126(12). Giải bài toán sau trong đó có sắp xếp thứ tự độ dài các cạnh của tam giác :

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng :

a) $(a - b)(\widehat{A} - \widehat{B}) + (b - c)(\widehat{B} - \widehat{C}) + (a - c)(\widehat{A} - \widehat{C}) \geq 0$;

b) $2(\widehat{A}a + \widehat{B}b + \widehat{C}c) \geq \widehat{A}b + \widehat{A}c + \widehat{B}a + \widehat{B}c + \widehat{C}a + \widehat{C}b$.

127(16). Hãy xét xem kết luận ở ví dụ 25 có gì thay đổi nếu $\widehat{B} > 90^\circ$.

Nêu và giải bài toán tương tự với các bài toán sau (bài 128, 129) :

128(9). Cho tam giác ABC. Vẽ ở phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABD, ACE. Tính góc tạo bởi các đường thẳng BE, CD.

129(9). Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến AM. Gọi d là đường thẳng đi qua A sao cho B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ d. Kẻ BH và CK vuông góc với d. Chứng minh rằng tam giác MHK là tam giác vuông cân.

TÍNH SỐ ĐO GÓC

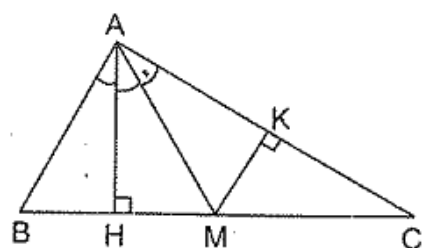
Dễ dàng tính được số đo các góc của tam giác đều, tam giác vuông cân, tính được các góc của tam giác cân khi biết một góc của nó, tính được các góc của tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền. Nhưng chúng ta cũng gặp nhiều bài toán tính số đo góc phức tạp hơn nhiều, và chính điều đó đòi hỏi sự sáng tạo. Khi giải bài toán về tính số đo góc, cần chú ý :

1. Vẽ hình chính xác, đúng với các số liệu trong đề bài để có hướng chứng minh đúng.

2. Phát hiện các tam giác đều, "nửa tam giác đều", tam giác vuông cân, tam giác cân,... trong hình vẽ.

Ví dụ 28(18)

Tính các góc của tam giác ABC biết rằng đường cao AH và đường trung tuyến AM chia góc A thành ba góc bằng nhau.



Hình 26

Giải (h. 26) :

Vẽ $MK \perp AC$ thì $\triangle KAM = \triangle HAM$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $MK = MH$. Do đó $MK = \frac{MB}{2} = \frac{MC}{2}$. $\triangle MKC$ vuông có $MK = \frac{MC}{2}$

nên $\widehat{C} = 30^\circ$. Suy ra $\widehat{HAC} = 60^\circ$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$.

3. Chú ý đến liên hệ giữa các góc của tam giác, liên hệ giữa cạnh và góc của tam giác, phát hiện các cặp tam giác bằng nhau. Vẽ đường phụ hợp lí làm xuất hiện những góc đặc biệt, những cặp góc bằng nhau. Trong các đường phụ vẽ thêm, có thể vẽ đường phân giác, đường vuông góc, tam giác đều,...

Ví dụ 29(8)

Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Các tia phân giác của các góc B, C cắt cạnh đối diện theo thứ tự ở D, E và cắt nhau ở I. Tính các góc của tam giác DIE.

Giải : Vẽ tia phân giác góc I của $\triangle BIC$ cắt BC ở K, xuất hiện hai cặp tam giác bằng nhau (xem ví dụ 8).

Ví dụ 30*(9)

Tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính $\widehat{ADB}$.

Giải (h.27) : Ta có $\widehat{ACD} = 60^\circ$, do đó vẽ thêm $DH \perp AC$ thì $\widehat{CDH} = 30^\circ$, $CH = \frac{CD}{2}$, suy ra $CH = CB$.

Ở hình vẽ xuất hiện các tam giác cân CBH và BHD do đó $\widehat{CBH} = 30^\circ$, $\widehat{ABH} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Ta cũng có $\widehat{BAH} = 15^\circ$ nên $\triangle AHB$ cân. Từ đó $\triangle AHD$ là tam giác vuông cân.

Vậy $\widehat{ADB} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

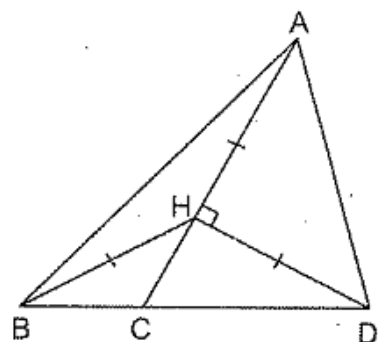
Ví dụ 31(9)

Lấy lại ví dụ 27.

Hướng giải : Vẽ $\triangle EBC$ đều làm xuất hiện $\triangle ECA = \triangle DAC$ (c.g.c).

4. Có thể dùng chữ để diễn đạt mối quan hệ giữa các góc.

Xem ví dụ 24. Một ví dụ khác :



Hình 27

Ví dụ 32 (9)

Tính các góc của tam giác ABC cân tại A biết rằng trên cạnh AB có điểm D sao cho $AD = DC = CB$.

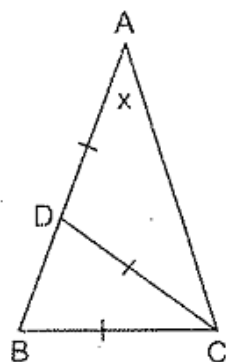
Giải (h.28)

Đặt $\widehat{A} = x$ thì $\widehat{ACD} = x$, do đó $\widehat{CDB} = 2x$, $\widehat{B} = 2x$.

ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $x + 2x + 2x = 180^\circ$ tức là $5x = 180^\circ$.

Vậy $x = 36^\circ$.

ΔABC có $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^\circ$.



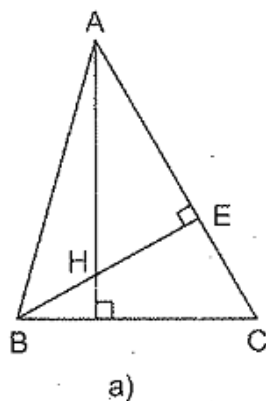
Hình 28

5. Xét đủ các trường hợp về số đo góc có thể xảy ra (ví dụ góc nhọn, góc tù...).

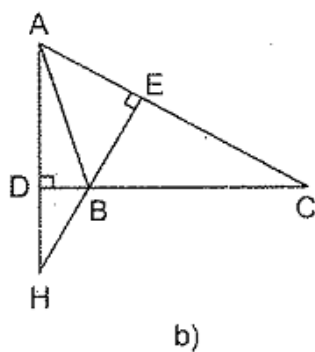
Ví dụ 33(18)

Cho tam giác ABC, trực tâm H, $AH = BC$. Tính $\widehat{BAC}$.

Nhận xét : Bài toán này khó vẽ chính xác được ngay vì góc A của ΔABC có giá trị xác định mà ta lại chưa biết. Trong các bài toán có liên quan đến trực tâm của tam giác, ta thường xét các trường hợp trực tâm nằm trong, nằm ngoài, hoặc trùng với đỉnh của tam giác. Do đó ta phải xét các trường hợp $\widehat{A} < 90^\circ$ hoặc $\widehat{A} > 90^\circ$ (còn trường hợp $\widehat{A} = 90^\circ$ không xảy ra vì khi đó H trùng A, không thoả mãn $AH = BC$).

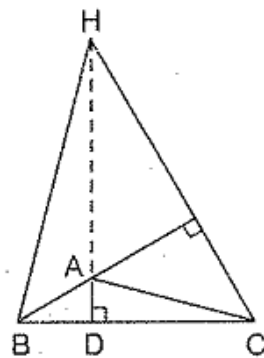


a)



b)

Hình 29



Hình 30

Giải :

a) Xét trường hợp $\widehat{A} < 90^\circ$ (h.29).

$\Delta AHE = \Delta BCE$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra $AE = BE$. Do đó $\widehat{BAE} = 45^\circ$.

b) Xét trường hợp $\widehat{A} > 90^\circ$.

Đổi chỗ A và H ở hình 29a cho nhau, ta được hình 30. Ta có $\widehat{BHC} = 45^\circ$ nên $\widehat{BAC} = 135^\circ$.

c) Xét trường hợp $\widehat{A} = 90^\circ$, Khi đó H trùng A, không thoả mãn $AH = BC$, loại.
Như vậy góc BAC có thể bằng 45° hoặc 135° .

Bài tập

130*(16). Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$. Lấy điểm D trên cạnh AC, điểm E trên cạnh AB sao cho $\widehat{ABD} = 20^\circ$, $\widehat{ACE} = 10^\circ$. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Tính các góc của tam giác KDE.

131*(16). Cho tam giác ABC ($\widehat{A} \neq 90^\circ$, $\widehat{B}, \widehat{C} < 90^\circ$), kẻ AH vuông góc với BC. Vẽ các điểm D và E sao cho AB là đường trung trực của HD, AC là đường trung trực của HE. Gọi I và K thứ tự là giao điểm của DE với AB và AC. Tính $\widehat{AIC}, \widehat{AKB}$.

132*(16). Tam giác ABC có AH vuông góc với BC, đường phân giác BD, $\widehat{AHD} = 45^\circ$. tính $\widehat{ADB}$.

133*(17). Tam giác ABC có K là giao điểm các đường phân giác, O là giao điểm các đường trung trực, BC là đường trung trực của OK. Tính các góc của tam giác ABC.

134(9). Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Trong góc ABC vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = 15^\circ$. Đường vuông góc với AB tại A cắt Bx ở I. Tính $\widehat{ICB}$.

135(16). Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Đường vuông góc với DC tại C cắt tia phân giác của góc ADC tại E. Tính $\widehat{CBE}$.

136*(18). Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABE, ACF. Gọi I là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABE. Tính các góc của tam giác FIH.

137*(9). Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên nửa mặt phẳng không chứa B có bờ AC, vẽ tia Cx sao cho $\widehat{ACx} = 60^\circ$, trên tia ấy lấy điểm D sao cho $CD = CB$. Tính $\widehat{ADC}$.

138(9). Giải ví dụ 27 bằng các cách khác.

139*(9). Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm E nằm trong tam giác sao cho ΔEAC cân ở E và có góc ở đáy bằng 15° . Tính $\widehat{AEB}$.

- 140*(9). Tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 75^\circ$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm H sao cho $BH = 2AC$. Tính $\widehat{BHC}$.
- 141*(9). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$. Trên tia AC lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính $\widehat{ABD}$.
- 142*(9). Tam giác ABC cân có $\widehat{A} = 100^\circ$, điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 10^\circ$, $\widehat{MCB} = 20^\circ$. Tính $\widehat{AMB}$.
- 143*(9). Tam giác ABC cân có $\widehat{A} = 108^\circ$, điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 12^\circ$, $\widehat{MCB} = 18^\circ$. Tính $\widehat{AMB}$.
- 144*(9). Tam giác ABC cân có $\widehat{A} = 100^\circ$, điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 30^\circ$, $\widehat{MCB} = 20^\circ$. Tính $\widehat{MAC}$.
- Hướng dẫn :* Vẽ điểm K sao cho BC là đường trung trực của MK, sau đó chứng minh $AK = AB$ bằng phản chứng.
- 145*(9). Tam giác ABC cân có $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = 30^\circ$. Gọi I là giao điểm của AD và BE. Chứng minh rằng tam giác IDE là tam giác cân, tính các góc của tam giác đó.
- 146*(10). Điểm M nằm bên trong tam giác ABC vuông cân tại B sao cho $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$. Tính $\widehat{AMB}$.
- 147*(10). Điểm M nằm bên trong tam giác đều ABC sao cho $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$. Tính $\widehat{AMB}$.
- 148*(9). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh bên AB, AC sao cho $\widehat{BCM} = 50^\circ$, $\widehat{CBN} = 60^\circ$. Tính $\widehat{MNA}$.

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ BỔ SUNG

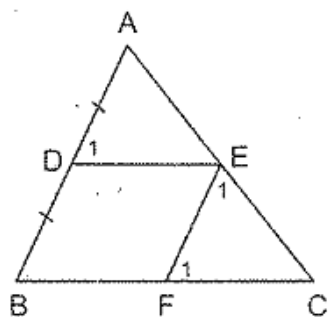
Mục này giới thiệu ba định lý bổ sung về đường trung bình của tam giác và tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông. Chúng được giới thiệu trong chương trình Hình học 8. Tuy nhiên có thể chứng minh được các định lý trên bằng kiến thức Hình học 7, và như vậy nhiều bài toán hình học sẽ được giải chỉ với các kiến thức của lớp 7.

I - ĐỊNH LÝ VỀ ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

Định lý bổ sung 1. Ví dụ 34(8)

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

Chứng minh : Xét $\triangle ABC$ có D là trung điểm của AB, $DE \parallel BC$ (h.31). Kẻ $EF \parallel AB$.



Hình 31

Ta có $DE \parallel BF$, $DB \parallel EF$ nên dễ dàng chứng minh được $EF = DB$, do đó $EF = AD$.

$\triangle ADE$ và $\triangle EFC$ có :

$$\widehat{A} = \widehat{E}_1 \text{ (đồng vị, } AB \parallel EF)$$

$$AD = EF$$

$$\widehat{D}_1 = \widehat{F}_1 \text{ (cùng bằng } \widehat{B})$$

Do đó $\triangle ADE = \triangle EFC$ (g.c.g), suy ra $AE = EC$.

Ta gọi đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác là *đường trung bình* của tam giác ấy.

Định lý bổ sung 2. Ví dụ 35(8)

Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Chứng minh : Xét $\triangle ABC$, có D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC (h.32). Vẽ điểm K sao cho E là trung điểm của DK.

$\triangle AED = \triangle CEK$ (c.g.c) suy ra $AD = CK$ và $\widehat{A} = \widehat{C}_1$. Do đó $DB = CK$ (cùng bằng AD) và $DB \parallel CK$.

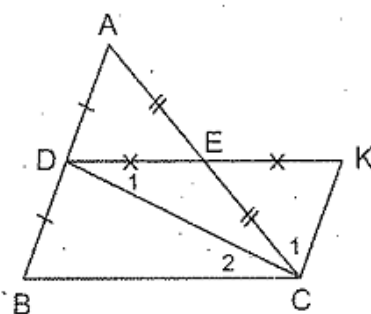
$\triangle BDC$ và $\triangle KCD$ có :

CD : cạnh chung

$$\widehat{BDC} = \widehat{KCD} \text{ (so le trong, } DB \parallel CK)$$

$$DB = CK.$$

Do đó $\triangle BDC = \triangle KCD$ (c.g.c), suy ra $BC = DK$ và $\widehat{C}_2 = \widehat{D}_1$. Từ đó $DK \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}DK = \frac{1}{2}BC$.



Hình 32

Ví dụ 36(9)

Cho tam giác ABC cân tại A, D là trung điểm của AC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng tam giác BDE là tam giác cân.

Giải (h.33) : Gọi F là trung điểm của AB.

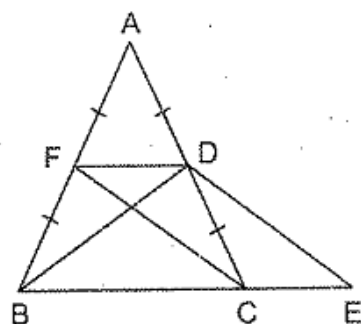
FD là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $FD \parallel BC$,

$FD = \frac{BC}{2}$. Ta lại có $CE = \frac{BC}{2}$ nên $FD = CE$.

$$\triangle FDC = \triangle ECD \text{ (c.g.c) nên } FC = DE \quad (1)$$

$$\triangle ABD = \triangle ACF \text{ (c.g.c) nên } BD = CF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BD = DE$. Vậy $\triangle BDE$ cân tại D.



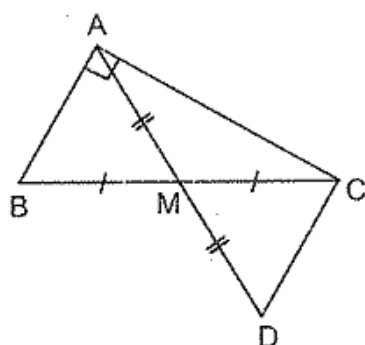
Hình 33

II – TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Định lý bổ sung 3. Ví dụ 37(15)

Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Chứng minh :



Hình 34

Gọi AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của $\triangle ABC$ vuông, lấy điểm D sao cho M là trung điểm của AD (h.34)

Cách 1 (dùng đến kiến thức của §7). Ta dễ dàng chứng minh được $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $\widehat{ACD} = 90^\circ$. Do đó $\triangle ACD = \triangle CAB$ (c.g.c), suy ra $AD = CB$. Vậy

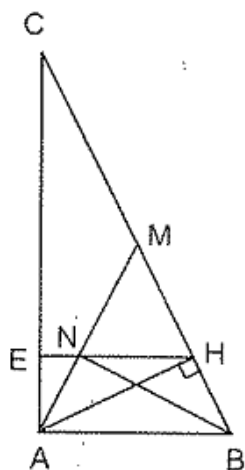
$$AM = \frac{BC}{2}.$$

Cách 2. (dùng đến kiến thức của §12). Chứng minh bằng phản chứng :

Giả sử $AM > BM$ thì $AM > MC$. Do đó $\widehat{B} > \widehat{BAM}$, $\widehat{C} > \widehat{MAC}$, suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{BAC}$, vô lí.

Giả sử $AM < BM$ thì $AM < MC$. Do đó, $\widehat{B} < \widehat{BAM}$, $\widehat{C} < \widehat{MAC}$, suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{BAC}$, vô lí.

Vậy $AM = BM$, do đó $AM = \frac{1}{2}BC$.



Hình 35

Ví dụ 38(15)

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Kẻ AH vuông góc với BC. Qua H vẽ đường vuông góc với AC, cắt AM ở N. Chứng minh rằng BN vuông góc với AM.

Giải (h.35) :

AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của $\triangle ABC$ vuông nên $MA = MB$. Để thấy các tam giác MAB, MNH cân tại M.

$$\triangle BMN = \triangle AMH \text{ (c.g.c) nên } \widehat{BNM} = \widehat{AHM} = 90^\circ.$$

Bài tập

Đường trung bình của tam giác

149(8). Cho hai điểm A và B nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Gọi C là trung điểm của AB. Kẻ AD, BE, CH vuông góc với d. Cho biết $AD = 4$, $BE = 6$, tính CH.

150(8). Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM, D là giao điểm của CI và AB. Chứng minh rằng $AD = \frac{1}{2} DB$.

151(8). Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $BD = \frac{1}{2} DC$. Kẻ BH và CK vuông góc với AD. Chứng minh rằng $BH = \frac{1}{2} CK$.

152(8). Cho hình 36.

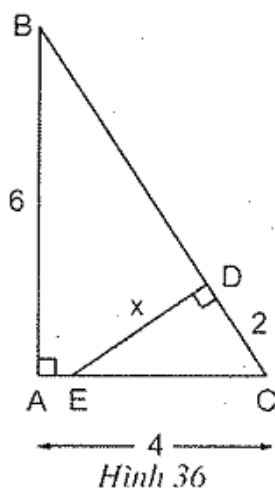
Tính độ dài DE biết $AC = 4$, $AB = 6$, $CD = 2$.

153(8). Cho tam giác ABC. Gọi I và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A đến đường phân giác các góc B và C.

a) Chứng minh rằng IK song song với BC.

b) Tính độ dài IK theo các cạnh của $\triangle ABC$.

154(8). Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác ấy, vẽ các đoạn thẳng FK vuông góc và bằng FA, EG vuông góc và bằng EA. Chứng minh rằng :



Hình 36

a) $\Delta KFD = \Delta DEG$.

b) DKG là tam giác vuông cân.

155(8). Cho tam giác ABC. Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AC, AB sao cho $AD = \frac{1}{3}AC$, $AE = \frac{1}{3}AB$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng các đường thẳng BD, CE, AM đồng quy.

156(15). Cho tam giác ABC. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, BC. Vẽ các điểm M, N sao cho C là trung điểm của EM, B là trung điểm của DN. Gọi K là giao điểm của DM và AC. Chứng minh rằng ba điểm N, E, K thẳng hàng.

157(15). Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của BM. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IA$. Gọi N là trung điểm của EC. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua điểm N.

158(15). Chứng minh rằng độ dài mỗi đường trung tuyến của một tam giác nhỏ hơn tổng độ dài của hai đường trung tuyến kia.

159*(15). Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến CD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Chứng minh rằng $CD = \frac{1}{2}CK$.

160(18). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của BH, AH. Chứng minh rằng CE vuông góc với AD.

161(17). Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các điểm A', B', C' sao cho BC, CA, AB theo thứ tự là các đường trung trực của OA', OB', OC'. Chứng minh rằng $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$.

162*(9). Tam giác ABC có I là giao điểm các tia phân giác của góc B và C, M là trung điểm của BC. Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$ và $BI = 2IM$.

a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Vẽ $IH \perp AC$. Chứng minh rằng $BA = 3IH$.

163*(9). Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, DE. Chứng minh rằng đường thẳng MN tạo với các đường thẳng AB, AC các góc bằng nhau.

164*(9). Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác ấy vẽ tam giác đều ACE. Trên nửa mặt phẳng chứa C có bờ AB, vẽ tam giác đều ABD. Gọi H, K, M theo thứ tự là trung điểm của AB, AE, CD. Chứng minh rằng HKM là tam giác đều.

165*(9). Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng $EF = \frac{1}{2} CD$.

166*(9). Trên các cạnh góc vuông AB, AC của tam giác vuông cân ABC, lấy các điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua D, vẽ đường thẳng vuông góc với BE, cắt BC ở K. Qua A, vẽ đường thẳng vuông góc với BE, cắt BC ở H. Chứng minh rằng $KH = HC$.

167*(9). Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = CE$. Gọi I là trung điểm của DE, K là giao điểm của AI và BC. Chứng minh rằng $AI = IK$.

168*(9). Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm M thuộc cạnh AC. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của BM, AC. Qua A vẽ đường vuông góc với IK, qua C vẽ đường vuông góc với AC, chúng cắt nhau ở H. Chứng minh rằng tam giác MCH là tam giác vuông cân.

169*(15). Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = 4$, $AC = 6$. Tính độ dài đường trung tuyến AM.

170*(15). Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

171*(18). Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AD. Kẻ DH vuông góc với AC. Gọi I là trung điểm của DH. Chứng minh rằng AI vuông góc với BH.

172(18). Tính các góc của một tam giác cân biết rằng đường phân giác ứng với cạnh đáy bằng nửa đường phân giác ứng với cạnh bên.

173(9). Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = \frac{MA}{2}$. Gọi E là trung điểm của AC.

Tính các góc của tam giác BDE.

174(18). Tìm liên hệ giữa khoảng cách từ giao điểm các đường trung trực của tam giác đến một cạnh và khoảng cách từ trọng tâm đến đỉnh đối diện với cạnh đó.

175*(18). Chứng minh rằng trọng tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác nằm trên cùng một đường thẳng (đường thẳng Ô-le).

Đường trung tuyến của tam giác vuông

176(15). Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Tính $\widehat{DHE}$.

- 177(15). Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC > AB$, đường trung tuyến AM. Kẻ AH vuông góc với BC. Chứng minh rằng $\widehat{MAH} = \widehat{B} - \widehat{C}$.
- 178(18). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Qua A kẻ đường thẳng d vuông góc với AM. Qua M kẻ các đường thẳng vuông góc với AB và với AC, chúng cắt d theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng :
- $BD \parallel CE$.
 - $DE = BD + CE$.
- 179(15). Gọi O là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$. Vẽ OH vuông góc với AB, vẽ OK vuông góc với AC. Gọi M là trung điểm của BC.
- Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của OB và OC. Chứng minh rằng $\widehat{OEH} = \widehat{OFK}$.
 - $MH = MK$.
- 180*(15). Tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Qua D vẽ đường vuông góc với BD, cắt BC ở E. Chứng minh rằng $BE = 2CD$.
- 181*(18). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE. Chứng minh rằng $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.
- 182*(18). Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Các đường trung trực của tam giác gặp nhau tại O. Các đường cao AD, BE, CF gặp nhau tại H. Gọi I, K, R theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC.
- Chứng minh rằng HO và IM cắt nhau tại Q là trung điểm của mỗi đoạn.
 - Chứng minh rằng $QI = QM = QD = \frac{OA}{2}$.
 - Hãy suy ra các kết quả tương tự như kết quả ở câu b.
 - Chứng minh rằng chín điểm I, D, M, K, E, N, R, F, P cùng thuộc một đường tròn.

Bài đọc thêm

Ơ-LE VÀ BÀI TOÁN BẢY CHIẾC CẦU

Đường thẳng đi qua trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác được gọi là đường thẳng Ơ-le. Tên của Ơ-le cũng được đặt cho đường tròn đi qua chín điểm : ba trung điểm của các cạnh, ba chân các đường cao, ba trung điểm của các đoạn thẳng nối trực tâm với các đỉnh của tam giác.

Lê-ô-na Ô-le (Léonard Euler) sinh tại Thụy Sĩ năm 1707. Năm 20 tuổi, ông được mời đến Pê-tec-bua (Nga) giảng dạy và 6 năm sau, ông trở thành Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Pê-tec-bua.

Ông làm việc không biết mệt mỏi với một năng suất phi thường. Năm 28 tuổi, Ô-le nhận làm trong ba ngày những tính toán thiên văn để lập bản đồ, một công việc mà các viện sĩ cho rằng phải làm trong vài tháng. Và ông đã làm xong trong có một ngày đêm ! Vào cuối đời mình, Ô-le thông báo cho Viện hàn lâm Pê-tec-bua rằng ông sẽ để lại số bài báo đủ đăng trên tạp chí khoa học của Viện trong 20 năm. Sau khi ông mất, các công trình chưa công bố của ông còn nhiều đến mức tạp chí của Viện đăng trong 47 năm mới hết (theo tạp chí Kvant số 11-1983).



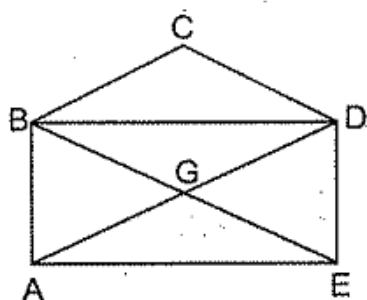
Ô-le

Bằng khả năng lao động kì diệu của mình, Ô-le đã để lại cho thế giới một di sản đồ sộ : trên 800 công trình của ông được in thành bốn vạn trang sách, đề cập đến nhiều lĩnh vực khác nhau như số học, đại số, giải tích, hình học, lượng giác, cơ học, thiên văn, hàng hải, triết học, ..., mỗi công trình đều là một tác phẩm khoa học xuất sắc. Một điều đáng chú ý là trong các bản thảo, Ô-le không chỉ viết các kết quả nghiên cứu mà còn trình bày cả quá trình suy nghĩ và những khó khăn ông đã vượt qua để đi đến kết quả. Chính vì thế mà Gau-xơ đã nói rằng : "Việc học tập những tác phẩm của Ô-le là cách tốt nhất để hiểu toán học".

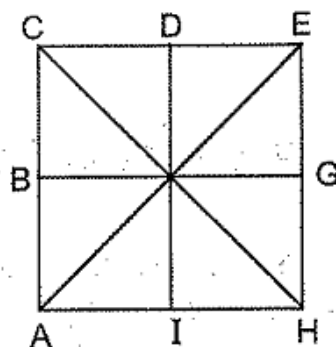
Ô-le mất ở Pê-tec-bua năm 1783. Ông coi nước Nga như Tổ quốc thứ hai của mình, nơi ông đã làm việc tổng cộng trong 31 năm. Các con của ông đều lấy quốc tịch Nga, có người là viện sĩ hàn lâm, có người là tướng.

Tên của Ô-le còn gắn với một bài toán thú vị : bài toán bảy chiếc cầu. Hãy bắt đầu bằng bài toán vẽ hình chiếc phong bì (h.37) bằng một nét, một bài toán mà mỗi người chúng ta lúc nhỏ từng làm ít nhất một lần. Không khó khăn gì để tìm được cách vẽ, nhưng cũng không phải cứ đặt bút từ bất kì điểm nào trên hình cũng vẽ được.

Còn hình 38 thì sao ? Phải vẽ bằng mấy nét, tức là bằng mấy đường liền nét mà không nhấc bút khỏi tờ giấy và không vẽ hai đoạn nào trùng nhau ?

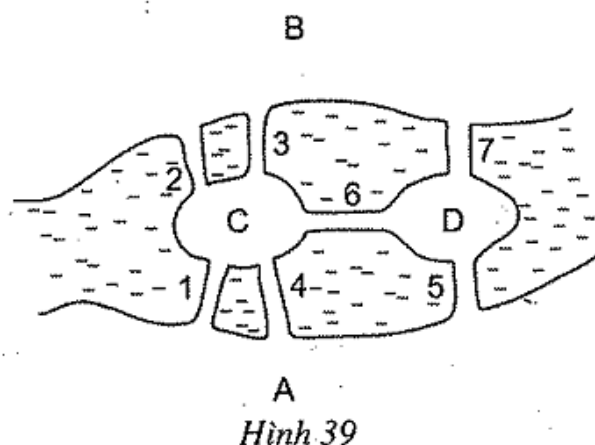


Hình 37



Hình 38

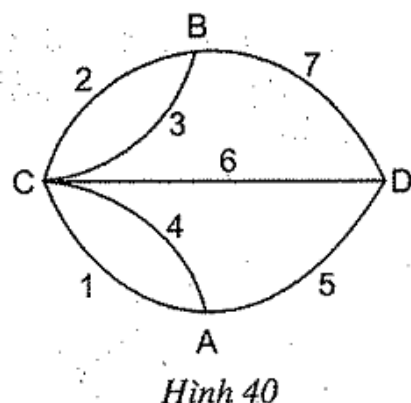
Dân chúng thành phố Kơ-nic-xbec (sau này đổi là Ka-li-nin-grat) hồi giữa thế kỉ XVIII cũng đã từng sôi nổi về một bài toán như thế. Hai hòn đảo của thành phố nối với nhau và nối với các phần của thành phố nằm hai bên bờ sông Prê-ghen bằng bảy chiếc cầu (h.39). Các khách du lịch đi thăm bảy chiếc cầu của thành phố đều nhận thấy rằng bao giờ họ cũng phải đi qua một chiếc cầu nào đó hơn một lần. Có cách nào đi qua cả bảy chiếc cầu mà chỉ đi qua mỗi chiếc cầu đúng một lần không?



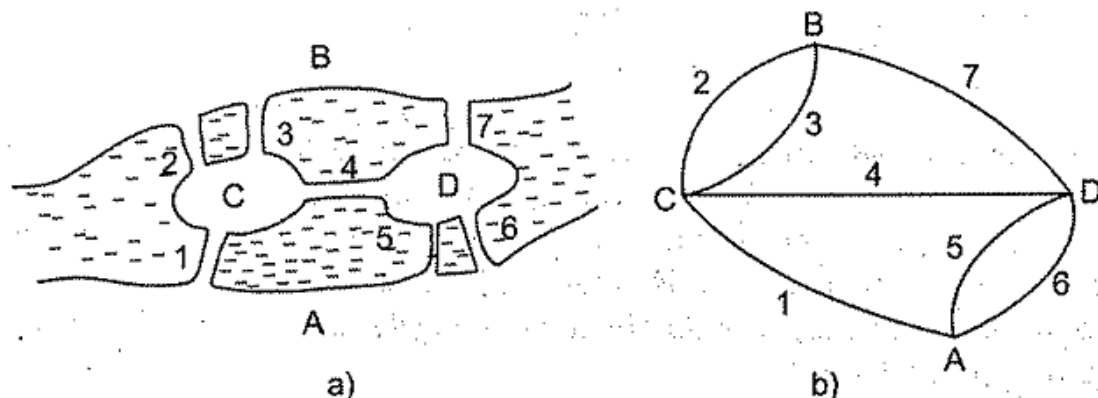
Chính Ô-le đã giải quyết trọn vẹn bài toán đó. Trước hết ta gọi một đỉnh là *đỉnh lẻ* nếu từ đó xuất phát một số lẻ đoạn (như các đỉnh A, E ở hình 37), là *đỉnh chẵn* nếu từ đỉnh đó xuất phát một số chẵn đoạn (như các đỉnh B, C, D, G ở hình 37). Ô-le đã chứng minh rằng một hình liên thông (hình mà từ một điểm bất kì của hình có thể đi tới tất cả các điểm khác của hình) có các tính chất sau:

1. Hình không có đỉnh lẻ thì bao giờ cũng vẽ được bằng một nét khép kín (điểm đầu và điểm cuối của nét vẽ trùng nhau).
2. Hình chỉ có hai đỉnh lẻ thì bao giờ cũng vẽ được bằng một nét (phải vẽ xuất phát từ một đỉnh lẻ và kết thúc ở đỉnh lẻ kia).
3. Hình có $2n$ đỉnh lẻ (hình nào cũng chỉ có một số chẵn các đỉnh lẻ) thì không thể vẽ được với ít hơn n nét.

Trở lại bài toán bảy chiếc cầu. Vì ta chỉ quan tâm đến việc qua cầu nên ta có thể kí hiệu các khu vực A, B, C, D của thành phố bởi các điểm A, B, C, D, còn bảy chiếc cầu được biểu thị bởi bảy đường nối hai trong các điểm ấy (h.40). Hình có bốn đỉnh lẻ, nên không thể vẽ được bằng một nét. Như vậy, không thể đi qua cả bảy chiếc cầu mà chỉ đi qua mỗi chiếc cầu đúng một lần (sau này người dân Ka-li-nin-grat đã xây thêm chiếc cầu thứ tám).



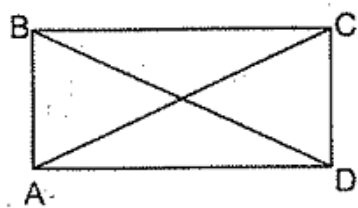
Nếu bảy chiếc cầu có vị trí như trên hình 41 thì có thể đi qua mỗi chiếc cầu đúng một lần vì hình vẽ chỉ có hai đỉnh lẻ A và B: hành trình có thể xuất phát từ A và kết thúc ở B, lần lượt qua các cầu ghi số từ 1 đến 7.



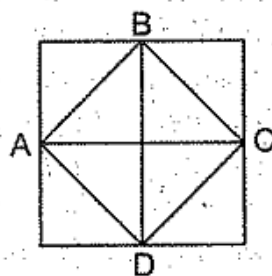
Hình 41

Với những nhận xét trên, ta thấy :

– Các hình 42, 43 không thể vẽ được bằng một nét vì có bốn đỉnh lẻ là A, B, C, D.

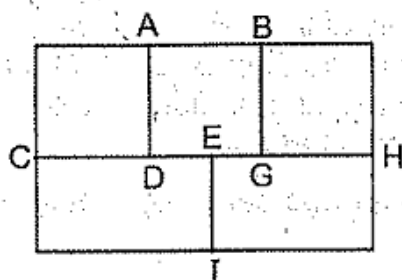


Hình 42

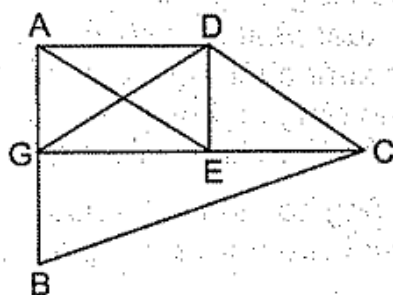


Hình 43

– Các hình 38, 44 không thể vẽ được bằng ba nét vì có tám đỉnh lẻ là A, B, C, D, E, G, H, I.



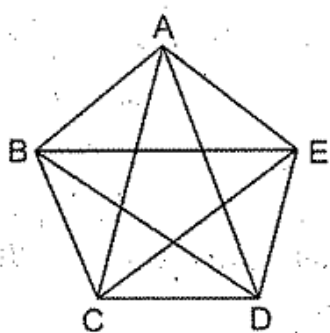
Hình 44



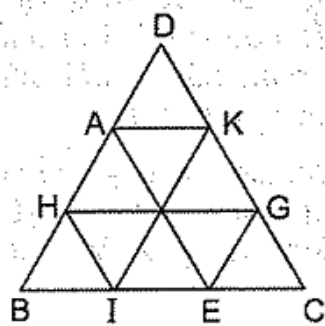
Hình 45

– Hình 45 chỉ có hai đỉnh lẻ là A và C, vẽ được bằng một nét (vẽ xuất phát từ A hoặc C, chẳng hạn AGBCDAEDGEC).

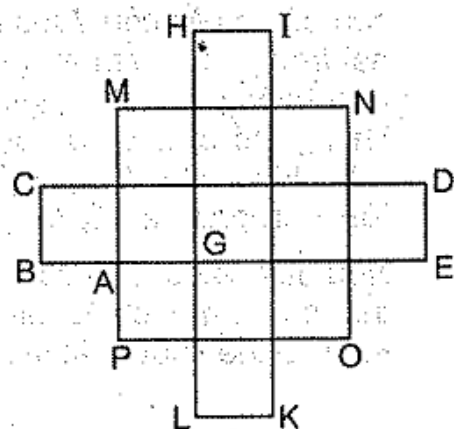
– Các hình 46, 47, 48 không có đỉnh lẻ, vẽ được bằng một nét khép kín, chẳng hạn theo hành trình ABCDEACEBDA (h.46). ABCDAEGHIKA (h.47). ABCDEGHIKLGAMNOPA (h.48)



Hình 46



Hình 47



Hình 48

Những bài toán trên không chỉ đơn thuần có tính chất giải trí. Các nhân viên đưa thư, đưa báo, các đội tuần tra, các xe tưới đường, xe chuyển hàng, xe đưa đón khách tham quan,... tất cả đều cần đi theo những con đường hợp lý để tiết kiệm nhất. Tìm được hành trình ngắn nhất, điều đó có ý nghĩa kinh tế không nhỏ. Giải bài toán bảy chiếc cầu, Ô-le đã đặt cơ sở lý thuyết cho một ngành của toán học ứng dụng là lý thuyết đồ thị.

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG III - THỐNG KÊ

§11. Bảng tần số và biểu đồ

167.

Chữ cái	N	G	A	H	O	V	I	E	C	T	D	L	Y
Tần số	4	2	4	2	3	1	1	2	2	3	1	1	1

Mỗi chữ cái A và N xuất hiện 4 lần, tần suất : $\frac{4}{27}$.

Mỗi chữ cái O và T xuất hiện 3 lần, tần suất : $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

168. Bạn đọc tự giải.

169. Bạn đọc tự giải.

170. Ở Hà Nội, tháng nóng nhất là tháng 7, tháng lạnh nhất là tháng 12, nhiệt độ chênh lệch $13,8^{\circ}$.

Ở Huế, tháng nóng nhất là tháng 7, tháng lạnh nhất là tháng 12, nhiệt độ chênh lệch : $11,4^{\circ}$.

Ở Đà Lạt, tháng nóng nhất là tháng 4, tháng lạnh nhất là tháng 12, nhiệt độ chênh lệch : 3° .

§12. Số trung bình cộng

171. a) Điểm trung bình của An : $78,3 : 10 \approx 7,8$.

Điểm trung bình của Bách : $71,7 : 10 \approx 7,2$.

b) Điểm trung bình của An : $93 : 12 \approx 7,8$.

Điểm trung bình của Bách : $85,3 : 12 \approx 7,1$.

172. Điểm trung bình của thí sinh A : 8,7.

Điểm trung bình của thí sinh B : 8,2.

173. Số giờ làm thêm trung bình của tổ 1 : 17,5

Số giờ làm thêm trung bình của tổ 2 : 12,5.

174. Điểm trung bình của xạ thủ A : 7,7.

Điểm trung bình của xạ thủ B : 6,4.

175. Ngành công nghiệp có số dự án được cấp giấy phép nhiều nhất (là 218 dự án).

176. a) Với n giá trị cũ $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì trung bình cộng là $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

Với n giá trị mới $a_1 + a, a_2 + a, \dots, a_n + a$ thì trung bình cộng là :

$$\frac{(a_1 + a) + (a_2 + a) + \dots + (a_n + a)}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + a.$$

Vậy trung bình cộng tăng a đơn vị.

b) Trung bình cộng tăng 10%.

177. Tuổi trung bình của những người được thống kê là :

$$\frac{11.34 + 10.32}{21} = \frac{374 + 320}{21} = \frac{694}{21} = 33\frac{1}{21}.$$

178. Đáp số : 11.

179. Gọi số trung bình cộng lúc đầu (trung bình cộng của 27 số) là a . Tổng của 27 số là $27a$.

Số trung bình cộng lúc sau là : $\frac{27a + a}{28} = a$.

Vậy số trung bình cộng lúc sau bằng số trung bình cộng lúc đầu.

180. Kết quả đúng là $A = \frac{a+b+c}{3}$.

Kết quả mà Tâm tính là $B = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$.

Ta thấy

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b+2c}{4} = \frac{4a+4b+4c-3a-3b-6c}{12} = \frac{a+b-2c}{12} \\ &= \frac{(a-c)+(b-c)}{12} > 0 \text{ vì } a > b > c. \end{aligned}$$

Vậy $B < A$.

CHƯƠNG IV - BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§13. Giá trị của biểu thức đại số

181. a) $\frac{1}{27}$.

b) $\frac{2a-5b}{a-3b} = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)-5}{\left(\frac{a}{b}\right)-3} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}-5}{\frac{3}{4}-3} = \frac{14}{9}$.

c) Cách 1. Thay a bởi b + 7 ta được :

$$\frac{3a-b}{2a+7} + \frac{3b-a}{2b-7} = \frac{3(b+7)-b}{2(b+7)+7} + \frac{3b-(b+7)}{2b-7} = \frac{2b+21}{2b+21} + \frac{2b-7}{2b-7} = 1 + 1 = 2$$

(chú ý rằng $2b+21 \neq 0$, $2b-7 \neq 0$).

Cách 2. Thay 7 bởi a - b.

182. -1 ; -2 ; 3 ; 38.

183. Ta có $f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$. Do $f(1) = 1$ nên $a + b = 1$ (1)

Ta có $f(2) = a \cdot 2 + b = 2a + b$. Do $f(2) = 4$ nên $2a + b = 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = 3$, $b = -2$.

184. Vì $f(x) = 0$ với mọi x nên ta cho x nhận ba giá trị tùy ý, chẳng hạn $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Ta có $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$; $f(-1) = a - b + c$ nên $c = 0$; $a + b + c = 0$; $a - b + c = 0$.

Do đó $a - b = 0$; $a + b = 0$, suy ra $a = 0$; $b = 0$.

Vậy $a = b = c = 0$.

185. Cho $x = 0$ thì $P(0) = c \vdots 3$, cho $x = 1$ thì $P(1) = a + b + c \vdots 3$, cho $x = -1$ thì $P(-1) = a - b + c \vdots 3$.

Từ đó $a + b \vdots 3$, $a - b \vdots 3$, suy ra $2a \vdots 3$ nên $a \vdots 3$, $b \vdots 3$. Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

186. Giải tương tự như bài 185.

187. $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ với mọi x (1)

Thay $x = 0$ vào (1) được $c = c'$. Do đó

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x \text{ với mọi } x \quad (2)$$

Thay $x = 1$ vào (2) được $a + b = a' + b'$, thay $x = -1$ vào (2) được $a - b = a' - b'$.

Suy ra $2a = 2a'$ nên $a = a'$. Từ đó $b = b'$.

188. $f(x) = ax^2 + bx + c$. Từ $f(1) = f(-1)$ suy ra $b = 0$. Do đó $f(x) = ax^2 + c$, thỏa mãn $f(x) = f(-x)$.

189. $f(x) + x.f(-x) = x + 1$ với mọi x (1)

Thay $x = 1$ vào (1) được $f(1) + f(-1) = 2$

Thay $x = -1$ vào (1) được $f(-1) - f(1) = 0$.

Suy ra $2f(1) = 2$ nên $f(1) = 1$.

§14. Tích các đơn thức

190. Tích của hai đơn thức bằng :

$$(-3x^4y) \cdot 5x^2y^3 = -15x^6y^4 \leq 0.$$

Hai đơn thức không thể cùng có giá trị dương.

191. Tích của ba đơn thức bằng $\frac{1}{10}x^8y^8 \geq 0$, ba đơn thức không thể cùng có giá trị âm.

192. Hai đơn thức cùng dấu nên tích của chúng là số dương.

Ta có : $-6a^7b^8 > 0 \Rightarrow a^7b^8 < 0 \Rightarrow a^7 < 0 \Rightarrow a < 0$.

193. Giả sử bốn đơn thức cùng âm thì tích của chúng là số dương, tức là $-(abcd)^2 > 0$, vô lí. Vậy bốn đơn thức đó không thể cùng có giá trị âm.

§15. Cộng và trừ đơn thức, đa thức

194. a) $10^{n+1} - 6 \cdot 10^n = 10 \cdot 10^n - 6 \cdot 10^n = 4 \cdot 10^n$.

b) $11 \cdot 2^n$.

c) 0.

d) 0.

195. $7 \cdot 32 = 7 \cdot 2^5 = 2^5 + 2 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^5 = 2^5 + 2^6 + 2^7$.

196. a) $6a^2 - 2a + 5$.

b) Rút gọn theo x và y được $x - y$. Sau đó rút gọn theo a và b được $4ab$.

c) Với $x \geq \frac{1}{2}$ thì biểu thức bằng $3x - 2$, với $x < \frac{1}{2}$ thì biểu thức bằng $7x - 4$.

197. a) $x = 2$; b) $x = 12$.

198. $M = x^2 - 4xy + y^2$.

199. Gọi số tự nhiên có hai chữ số là $\overline{ab} = 10a + b$.

a) $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b) \div 11$.

c) $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) \div 9$.

200. Có 8 số thoả mãn bài toán là :

$$29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.$$

201. $(100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = 666$

$$\Leftrightarrow 111(a + b + c) = 666$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 6.$$

Do $a > b > c > 0$ nên $a = 3, b = 2, c = 1$.

Đáp số : 321.

202. Ta có $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c) = 37 \cdot 3(a + b + c)$.

Giả sử n là số chính phương thì trong phân tích của n phải chứa thừa số nguyên tố 37 với số mũ chẵn nên $3(a + b + c) \div 37$, từ đó $a + b + c \div 37$. Điều này không xảy ra vì

$$1 \leq a + b + c \leq 27.$$

Vậy không tồn tại số tự nhiên $\overline{abc}$ thoả mãn bài toán.

203. $\overline{abc} \div 7$

$$\Leftrightarrow 100a + 10b + c \div 7$$

$$\Leftrightarrow 98a + 7b + 2a + 3b + c \div 7$$

$$\Leftrightarrow 2a + 3b + c \div 7 \quad (1)$$

Theo đề bài : $2a + 2b + 2c \div 7 \quad (2)$

Từ (1) và (2) : $(2a + 3b + c) - (2a + 2b + 2c) \div 7$

$$\Leftrightarrow b - c \div 7$$

$$\Leftrightarrow b - c \in \{-7; 0; 7\}$$

Trường hợp $b - c = 7$ có :

c	0	1	2
b	7	8	9
a	7	5	3

Trường hợp $b - c = -7$ có :

b	0	1	2
c	7	8	9
a	7	5	3

Trường hợp $b - c = 0$ có :

c	6	5	4	3
b	6	5	4	3
a	2	4	6	8

Tất cả có 10 số thoả mãn bài toán :

770, 581, 392, 707, 518, 329, 266, 455, 644, 833.

204. a) $3a + 5b = 8c$

$$\Leftrightarrow 3a - 3b = 8c - 8b$$

$$\Leftrightarrow 3(a - b) = 8(c - b)$$

Do đó $3(a - b) : 8$, từ đó $a - b : 8$.

Do $a \neq b$ nên $a - b \in \{8; -8\}$

Trường hợp $a - b = 8$ cho $c - b = 3$. Ta có :

a	8	9
b	0	1
c	3	4

Trường hợp $a - b = -8$ cho $b - c = 3$. Chú ý rằng $a \neq 0$, ta có :

b	9
a	1
c	6

Tất cả có ba số thoả mãn bài toán : 803, 914, 196.

b) Từ $\overline{abc} = \frac{\overline{bca} + \overline{cab}}{2}$, ta tìm được

$$7a = 3b + 4c.$$

Từ đó $7(a - c) = 3(b - c)$, suy ra $b - c : 7$.

Do $b \neq c$ nên $b - c \in \{7; -7\}$

Giải tương tự như câu a.

Đáp số: 481, 592, 629, 518.

205. a) Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$, ta có:

$$\overline{ab} = 6ab$$

$$\Leftrightarrow 10a + b = 6ab$$

$$\Leftrightarrow 10a = 6ab - b$$

$$\Leftrightarrow 10a = b(6a - 1).$$

Do đó $10a : 6a - 1$. Dễ thấy a và $6a - 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên $10 : 6a - 1$. Ta có:

$6a - 1$	1	2	5	10
$6a$	2	3	6	11
a	loại	loại	1	loại
b			2	

Số phải tìm là 12.

b) Giải tương tự câu a.

Đáp số: 36.

206. Ta có $\overline{abcd} : \overline{ab.cd} \quad (1)$

$$\Rightarrow 100.\overline{ab} + \overline{cd} : \overline{ab.cd} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \overline{cd} : \overline{ab}$$

$$\text{Đặt } \overline{cd} = k.\overline{ab} \text{ với } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 9 \quad (3)$$

Thay vào (2):

$$100.\overline{ab} + k.\overline{ab} : k.\overline{ab.ab}$$

$$\Rightarrow 100 + k : k.\overline{ab} \quad (4)$$

$$\Rightarrow 100 : k \quad (5)$$

Từ (3) và (5) suy ra $k \in \{1; 2; 4; 5\}$.

Với $k = 1$, thay vào (4) : $101 : \overline{ab}$, loại.

Với $k = 2$, thay vào (4) : $102 : 2.\overline{ab} \Rightarrow 51 : \overline{ab}$. Khi đó

$$\overline{ab} = 17 \text{ và } \overline{cd} = 34, \text{ hoặc } \overline{ab} = 51 \text{ và } \overline{cd} = 102 \text{ (loại).}$$

Với $k = 4$, thay vào (4) : $104 : 4.\overline{ab} \Rightarrow 26 : \overline{ab}$. Khi đó

$$\overline{ab} = 13 \text{ và } \overline{cd} = 52, \text{ hoặc } \overline{ab} = 26 \text{ và } \overline{cd} = 104 \text{ (loại).}$$

Với $k = 5$ thay vào (4) : $105 : 5.\overline{ab} \Rightarrow 21 : \overline{ab}$. Khi đó

$$\overline{ab} = 21 \text{ và } \overline{cd} = 105 \text{ (loại).}$$

Kết luận : Có hai đáp số : 1734 và 1352.

§16. Nghiệm của đa thức

207. a) $\frac{1}{3}$; b) ± 2 ; c) 0 và -5 ; d) Không có nghiệm.

208. a) Với $x = 1$ thì $f(1) = 5 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 5 - 7 + 4 - 2 = 0$. Vậy 1 là một trong các nghiệm của đa thức.

b) Với $x = 1$ thì $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d = 0$.

Vậy 1 là một trong các nghiệm của đa thức.

209. Chứng tỏ rằng $f(-1) = 0$.

$$\begin{aligned} 210. x^2 + 2x + 2 &= x^2 + x + x + 1 + 1 = x(x+1) + (x+1) + 1 \\ &= (x+1)(x+1) + 1 = (x+1)^2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Vậy đa thức $x^2 + 2x + 2$ không có nghiệm.

211. Cho $x = 0$ thì $0 \cdot f(-2) = -4 \cdot f(0)$ nên $f(0) = 0$.

Cho $x = 2$ thì $2 \cdot f(0) = -2 \cdot f(2)$ nên $f(2) = -f(0) = 0$.

Vậy $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và 2.

Chuyên đề

PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

212. Giả sử a^3 và b^2 không nguyên tố cùng nhau thì chúng chia hết cho số nguyên tố d . Chứng tỏ rằng điều này vô lí.

213. a) Nếu $n^2 = \overline{abab} = 101 \cdot \overline{ab}$ thì $\overline{ab} = 101 k^2$, vô lí.

b) Giải tương tự câu a.

214. Giải tương tự ví dụ 59.

215. Nếu cả 7 lồng đều có số thỏ chẵn thì tổng số thỏ là số chẵn.

216. Giả sử mỗi điểm nối được với đúng 3 điểm khác thì số đoạn thẳng là $\frac{3 \cdot 13}{2}$, không là số tự nhiên, vô lí.

217. Giả sử mỗi người đều có số người quen là số lẻ thì số cặp quen nhau không là số tự nhiên. Giải tương tự ví dụ 61b.

218. a) Xem hình 49. Dễ dàng tính được tổng các số ở mỗi hàng, hoặc mỗi cột, hoặc mỗi đường chéo đều bằng 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Hình 49

a	b	c
d	e	g
h	i	k

Hình 50

b) *Cách 1* (h.50). Giả sử số 1 ở vị trí a thì $b + c = d + h = e + k = 14$ nên $b + c + d + h + e + k = 42$, do đó $a + b + c + d + h + e + k = 43$.

Vậy $i + g = 2$, vô lí.

Giả sử số 1 ở vị trí e thì $a + k = c + h = b + i = d + g = 14$ nên

$$a + k + c + h + b + i + d + g = 56, \text{ vô lí.}$$

Vậy số 1 không thể ở góc bảng hoặc ở chính giữa bảng.

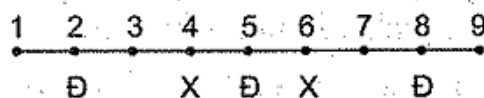
Cách 2. Xét ba số khác nhau có tổng bằng 15 trong đó một số bằng 1 thì tổng hai số kia bằng 14. Chúng chỉ có thể là $9 + 5$ hoặc $8 + 6$. Như vậy số 1 chỉ có mặt trong hai tổng khác nhau là $1 + 9 + 5$ hoặc $1 + 8 + 6$ (1).

Nếu số 1 ở chính giữa thì nó phải có mặt ở bốn tổng khác nhau, nếu số 1 ở góc thì nó phải có mặt ở ba tổng khác nhau, đều trái với (1).

219. Giả sử không tồn tại viên bi nào cách đều hai viên bi cùng màu với nó (1).

Đánh số chín viên bi theo thứ tự là $a_1, a_2, \dots, a_9$. Xét viên bi ở giữa (viên bi a_5), giả sử nó có màu đỏ (nếu nó có màu xanh, chứng minh tương tự). Có hai trường hợp:

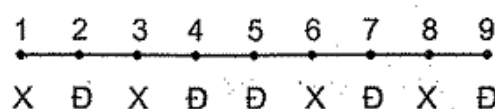
a) Cả hai viên bi bên cạnh a_5 đều màu xanh (h.51)



Hình 51

Do a_4 và a_6 màu xanh nên từ (1) suy ra a_2 màu đỏ, a_8 màu đỏ. Như vậy a_2, a_5, a_8 màu đỏ, mâu thuẫn với (1).

b) Tồn tại một viên bi bên cạnh a_5 có màu đỏ, chẳng hạn a_4 màu đỏ (h.52, nếu a_6 màu đỏ chứng minh tương tự).



Hình 52

Từ (1) lần lượt suy ra :

a_3 và a_6 màu xanh (do a_4 và a_5 màu đỏ),

a_9 màu đỏ (do a_3 và a_6 màu xanh),

a_1 màu xanh (do a_5 và a_9 màu đỏ)

a_2 màu đỏ (do a_1 và a_3 màu xanh).

a_8 màu xanh (do a_2 và a_5 màu đỏ).

a_7 màu đỏ (do a_6 và a_8 màu xanh).

Như vậy a_5, a_7, a_9 màu đỏ, mâu thuẫn (1).

220. Giả sử không tồn tại hai bi xanh cạnh nhau (1) thì cũng không có hai bi đỏ cạnh nhau, do đó các bi xanh đỏ phải xếp xen kẽ, vậy cũng có 10 bi xanh.

Xét hai bi xanh đối diện nhau trên vòng tròn : viên bi đỏ được đánh số 1, viên bi xanh đối diện đánh số 11. Do các bi xanh đỏ được xếp xen kẽ nên các bi xanh mang số 2, 4, 6, 8, 10. Lại xảy ra hai bi xanh số 10 và số 11 cạnh nhau, mâu thuẫn với (1).

Vậy phải tồn tại hai bi xanh cạnh nhau.

NGUYỄN LÍ ĐI-RICH-LÊ

221. 1000 thỏ là 1000 học sinh, 23 lồng là 23 lớp.

222. Ta phân chia 50 học sinh vào 12 tháng. Nếu mỗi tháng có không quá 4 học sinh được sinh thì số học sinh không quá : $4 \cdot 12 = 48 < 50$, vô lí.

Ở bài này, 50 thỏ là 50 học sinh, 12 lồng là 12 tháng, 50 chia 12 được 4 còn dư. Tồn tại $4 + 1 = 5$ học sinh có tháng sinh như nhau.

223. Có 49 học sinh thuộc ba loại : thiếu 0, 1, 2 bài tập. 49 chia 3 được 16 còn dư. Tồn tại $16 + 1 = 17$ học sinh thuộc cùng một loại.

224. Có. Giả sử 20 học sinh lớn tuổi nhất của lớp có tổng số tuổi không quá 260 thì tồn tại một học sinh trong số đó có tuổi không quá : $260 : 20 = 13$.

14 học sinh còn lại cũng không quá 13 tuổi nên tổng số tuổi của họ không quá : $13 \cdot 14 = 192$. Do đó tổng số tuổi của lớp không quá : $260 + 192 = 452 < 460$, trái với đề bài.

225. Tổng số học sinh giỏi ở ba lớp 6A, 6B, 6C lớn hơn hoặc bằng :

$$44 - 10 = 34 \quad (1)$$

Giả sử số học sinh giỏi của mỗi lớp 6A, 6B, 6C không quá 11 thì tổng số học sinh giỏi của ba lớp này không quá 33, mâu thuẫn với (1).

226. Có n học sinh, mỗi học sinh có thể nhận được từ 1 đến $n - 1$ ảnh, tồn tại hai học sinh nhận một số ảnh như nhau.

227. Giả sử không ai có số kẹo bằng nhau thì số kẹo của 10 em ít nhất là 1, 2, 3, ..., 10, tổng số kẹo lớn hơn hoặc bằng : $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55 > 50$, trái với đề bài.

228. Chia sân hình vuông ra 16 hình vuông nhỏ cạnh 1 mét. Có 16 hình vuông mà chứa 33 con chim nên tồn tại một hình vuông có 3 con chim đậu ở bên trong hoặc trên cạnh của nó. Vẽ đường tròn có tâm là tâm hình vuông này với bán kính 1 mét thì đường tròn chứa hoàn toàn hình vuông nhỏ.

229. a) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong 50 số đã cho tồn tại 5 giá trị khác nhau là a, b, c, d, m và giả sử

$$a < b < c < d < m \quad (1)$$

Vì a, b, c, d lập thành một tỉ lệ thức nên

$$ad = bc \quad (2)$$

(chú ý rằng không thể có $ab = cd$ hoặc $ac = bd$).

Vì a, b, c, m lập thành một tỉ lệ thức nên

$$am = bc \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $d = m$, trái với (1).

Vậy trong 50 số đã cho, có nhiều nhất là 4 số khác nhau.

b) Từ câu a suy ra 50 số đã cho nhận nhiều nhất là 4 giá trị. Phép chia 50 cho 4 được 12, còn dư. Vậy có ít nhất : $12 + 1 = 13$ số bằng nhau.

230. Nếu lấy năm số thì có thể xảy ra trường hợp số dư khi chia cho 5 của các số đó là 0, 1, 2, 3, 4, không có hai số nào có hiệu chia hết cho 5.

Nếu lấy sáu số thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 5, hiệu của chúng chia hết cho 5.

Vậy phải chọn ít nhất là sáu số.

231. a) Xét 24 số: 4, 44, 444, ..., $\underbrace{44 \dots 4}_{24}$

b) Xét 18 số: 219, 219 219, ..., $\underbrace{219 \dots 219}_{18 \text{ nhóm } 219}$

232. Có ba số tự nhiên, chỉ có hai số dư 0 và 1 trong phép chia cho 2 nên tồn tại hai số có cùng số dư. Hiệu của hai số này chia hết cho 2, tổng của chúng cũng chia hết cho 2.

233. a) Để chứng minh.

b) Khi chia một số cho 3, số dư có thể là 0, 1, 2.

Nếu có ba số có cùng số dư (tức là nếu tồn tại một lồng chứa 3 thỏ) thì tổng của chúng chia hết cho 3.

Nếu không có ba số nào có cùng số dư (tức là lồng nào cũng không có quá 2 thỏ) thì tồn tại ba số có số dư khác nhau (tức là lồng nào cũng phải có thỏ) tổng ba số này chia hết cho 3 (vì $0 + 1 + 2 = 3$).

234. Một số nguyên tố lớn hơn 3 chia cho 12 có số dư là 1, 5, 7 hoặc 11.

Xếp ba số nguyên tố đã cho vào hai nhóm: nhóm thứ nhất gồm các số có số dư 1 hoặc 11, nhóm thứ hai gồm các số có số dư 5 hoặc 7. Tồn tại hai số thuộc cùng một nhóm. Nếu hai số này có cùng số dư thì hiệu của chúng chia hết cho 12; nếu hai số này có số dư khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 12.

235. a) Tập hợp các số dư khi chia một số cho 50 là

$\{0; 1; 2; \dots; 49\}$, gồm 50 phần tử.

Trong 51 số đã cho, tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 50, chẳng hạn đó là a_m và a_n , và giả sử $a_m > a_n$, khi đó $a_m - a_n \vdots 50$.

Do $0 < a_m - a_n < 100$ nên $a_m - a_n = 50$.

b) Gọi 51 số đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{51}$, giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_{51}$.

Xét 102 số sau chia thành hai nhóm:

– Nhóm thứ nhất gồm 51 số đã cho, xếp tăng dần:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{51}.$$

– Nhóm thứ hai gồm 51 hiệu, xếp giảm dần:

$$101 - a_1 > 101 - a_2 > \dots > 101 - a_{51}.$$

Ta có 102 số nguyên dương lấy từ tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 100\}$. Vậy tồn tại hai số bằng nhau, hai số này thuộc hai nhóm khác nhau, chẳng hạn a_m thuộc nhóm 1 và $101 - a_n$ thuộc nhóm 2. Khi đó $a_m = 101 - a_n$ nên $a_m + a_n = 101$.

Hai số a_m và a_n không thể bằng nhau vì tổng của chúng là số lẻ. Đó là hai số trong 51 số đã cho có tổng bằng 101.

236. Giả sử a, b, c là ba số bất kì được chọn mà $a + b, b + c, c + a$ đều chia hết cho 26. Xét hai trường hợp :

a) Trong ba số a, b, c có ít nhất một số chia hết cho 26. Khi đó hai số kia cũng phải chia hết cho 26, do đó cả ba số chia hết cho 26.

Ta có : 2018 chia 26 được 77 dư 16. Như vậy nếu ta chọn trong dãy (1) các số : 26.1, 26.2, ..., 26.77 (có 77 số) thì các số đã chọn là nhiều nhất và thoả mãn bài toán.

b) Trong ba số a, b, c , không có số nào chia hết cho 26. Gọi số dư của ba số đó khi chia cho 26 là a', b', c' . Do $a + b, b + c, c + a$ chia hết cho 26 nên $a' + b' = b' + c' = c' + a' = 26$. Suy ra $a' = b' = c' = 13$. Do đó mỗi số a, b, c chia 26 dư 13.

Ta có : 2018 chia 13 được 155 dư 3. Như vậy nếu ta chọn trong dãy (1) các số : 13.1, 13.3, 13.5, ..., 13.155 (có 78 số) thì các số đã chọn là nhiều nhất và thoả mãn bài toán.

Kết luận : So sánh hai trường hợp trên, ta chọn được nhiều nhất là 78 số thoả mãn bài toán.

237. Nhận xét của A là đúng.

Nhận xét của B cũng đúng (xem ví dụ 70).

Nhận xét của C không đúng. Khi vòng đấu loại kết thúc có tất cả 10 trận đấu. Ngoài trận duy nhất có 7 lần bóng vào lưới, còn lại 9 trận có số lần bóng vào lưới ít hơn. Số lần bóng vào lưới của các trận đó có 7 khả năng : 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Nhốt 9 chú thỏ vào 7 lồng, ta chỉ khẳng định rằng tồn tại hai thỏ trong cùng một lồng, tức là chắc chắn có hai trận có số lần bóng vào lưới như nhau chứ chưa chắc có ba trận như C nói (chẳng hạn số lần bóng vào lưới trong 9 trận có thể là 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 1).

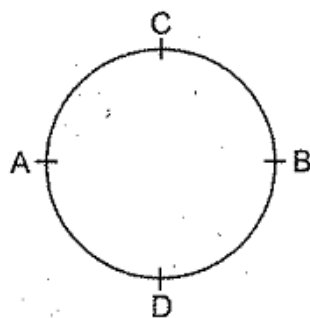
238. Giải tương tự ví dụ 71. Chú ý rằng từ một ô chuyển đến một ô bất kì chỉ cần không quá 5 bước chuyển, hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong hình là $18 - 1 = 17$.

Tồn tại một bước chuyển có hiệu bằng 4.

239. Giải tương tự ví dụ 72.

240. Nếu hai học sinh bất kì đều quen nhau thì chọn bốn người nào ngồi quanh bàn tròn cũng được.

Giả sử tồn tại hai học sinh không quen nhau (gọi hai học sinh đó là A và B), ta xếp hai học sinh ấy ngồi đối diện nhau (h.53). Trong số 98 học sinh còn lại, A quen ít nhất 50 người, B quen ít nhất 50 người, do đó có ít nhất 2 người ($50 + 50 - 98 = 2$) quen cả A và B. Gọi hai người này là C và D. Ta chỉ việc xếp hai người đó ngồi ở hai chỗ còn lại (h.53)



Hình 53

CÁC BÀI TOÁN SUY LUẬN

241. Lúc đầu có 1 tờ giấy, sau mỗi lần cắt số mảnh tăng thêm 3, do đó tổng số giấy có dạng $1 + 3n$ ($n \in \mathbb{N}$), không thể bằng 90.

242. a) Xét tính chẵn lẻ của dãy đã cho : 1, 2, 3, 6, 1, 0, ... ta thấy dãy đã cho có dạng :

lẻ, chẵn, lẻ, chẵn, lẻ, chẵn, rồi lặp lại như trên.

Bộ ba số 3, 5, 6 có dạng : lẻ, lẻ, chẵn, do đó không có mặt trong dãy đã cho.

b) Bộ ba số 6, 9, 3 không có mặt trong dãy đã cho.

243. Dãy đã cho có dạng :

chẵn, lẻ, lẻ, chẵn, lẻ, lẻ, rồi lặp lại như trên.

Bộ ba số 2, 4, 6 có dạng : chẵn, chẵn, chẵn, do đó không có mặt trong dãy đã cho.

244. a) Trường hợp xấu nhất lấy 13 bi gồm 5 bi vàng và trắng, 4 bi đỏ, 4 bi xanh, không đạt yêu cầu. Nếu lấy thêm 1 bi nữa thì viên bi này phải là bi đỏ hoặc bi xanh, chắc chắn có 5 bi cùng màu. Vậy số bi phải lấy ít nhất để chắc chắn có 5 bi cùng màu là 14 bi.

b) Đáp số : 15 bi ; c) Đáp số : 16 bi.

245. Trước hết tìm sự tương ứng giữa tên người và tên trường, sau đó tìm sự tương ứng giữa tên người và họ.

Đáp : Phạm Thu học trường Trưng Vương, Nguyễn Hằng học trường Quang Trung, Lê Oanh học trường Hoàn Kiếm.

246. A biết tiếng Việt và Anh, B biết tiếng Nga và Anh, C biết tiếng Nga và Pháp, D biết tiếng Anh và Pháp.

247. Xét trạm A liên lạc với 16 trạm khác bởi ba phương tiện, tồn tại 6 trạm liên lạc với A bởi cùng một phương tiện, chẳng hạn phương tiện a.

a) Nếu trong 6 trạm này có hai trạm liên lạc với nhau bởi phương tiện a thì A và hai trạm này là ba trạm phải tìm.

b) Nếu trong 6 trạm này không có hai trạm nào liên lạc với nhau bởi phương tiện a thì chúng chỉ liên lạc với nhau bởi hai phương tiện b và c. Khi đó trong 6 trạm này tồn tại ba trạm liên lạc với nhau bởi cùng một phương tiện (xem ví dụ 75).

248. Xét hai trường hợp :

a) Có một hàng chứa ba quân cờ trở lên : Chọn hàng đó. Còn ba quân cờ tiếp theo, chọn một hàng chứa quân cờ thứ tư, chọn hai cột chứa quân cờ thứ năm, thứ sáu.

b) Không có hàng nào chứa ba quân cờ : Tồn tại hai hàng, mỗi hàng chứa hai quân cờ (nếu chỉ tồn tại một hàng chứa hai quân cờ, còn ba hàng kia chứa một quân cờ thì số quân cờ chỉ bằng : $2 + 1 + 1 + 1 < 6$). Chọn hai hàng này. Còn hai quân cờ thứ năm, thứ sáu, chọn hai cột chứa hai quân cờ này.

249. Tô màu bàn cờ như ở ví dụ 76. Mỗi hình chữ I lấp một ô đen, một ô trắng nên 2 hình chữ I lấp 2 ô đen, 2 ô trắng. Còn lại 30 ô đen, 30 ô trắng.

Mỗi hình chữ T lấp một số lẻ ô đen, một số lẻ ô trắng nên 15 hình chữ T lấp một số lẻ ô đen, một số lẻ ô trắng, không thể lấp được 30 ô đen, 30 ô trắng.

Vậy không thể lấp kín bàn cờ bằng 2 hình chữ I và 15 hình chữ T.

250. Ở hai dòng đầu viết các số :

1	2	3	4
8	7	6	5

Tổng các số trong mỗi cột đều bằng 9.

Ở hai dòng cuối viết các số :

9	10	11	12
16	15	14	13

Tổng các số trong mỗi cột đều bằng 25.

Cách viết trên thoả mãn đề bài.

Chú ý : Ta còn có thể xếp 16 số trên vào 16 ô của bảng để tổng các số trong mỗi dòng, hoặc trong mỗi cột, hoặc trong mỗi đường chéo đều bằng nhau :

Đặt 16 số như hình 54 rồi chuyển các số thuộc hai đường chéo đến vị trí đối xứng với nó qua tâm hình vuông (h. 55).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Hình 54

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Hình 55

251. Đặt quả cân 1 kg lên một đĩa cân, san lượng bột 4 kg vào hai đĩa cân cho thăng bằng. Lượng bột ở hai đĩa cân có tổng bằng 4 kg, hiệu bằng 1 kg nên bằng 2,5 kg và 1,5 kg.

252. Chia chín chiếc nhẫn thành ba nhóm A, B, C, mỗi nhóm 3 chiếc.

Lần 1 (xác định chiếc nhẫn nhẹ thuộc nhóm nào) : Đặt nhóm A và nhóm B lên hai đĩa cân. Nếu cân thăng bằng thì chiếc nhẫn nhẹ thuộc nhóm C, nếu cân không thăng bằng thì chiếc nhẫn nhẹ thuộc đĩa cân nhẹ hơn.

Lần 2 (xác định chiếc nhẫn nhẹ là chiếc nào) : đặt hai chiếc nhẫn thuộc nhóm chứa chiếc nhẫn nhẹ lên hai đĩa cân và giải tương tự như trên sẽ tìm được chiếc nhẫn nhẹ.

253. Đánh số 10 hộp từ số 1 đến số 10. Lấy ra ở hộp thứ nhất 1 gói, ở hộp thứ hai 2 gói,..., ở hộp thứ chín 9 gói, hộp thứ mười không lấy gói nào. Tất cả có 45 gói, khối lượng đúng là 4500 g.

Mỗi gói sai quy cách hụt 10 g. Nếu tổng số hụt 10 d gam thì hộp thứ d là hộp chứa sản phẩm sai quy cách. Nếu cân được đúng 4500 g thì hộp thứ mười chứa sản phẩm sai quy cách.

254. a) $5 = 9 - 3 - 1$; $6 = 9 - 3$; $7 = 9 - 3 + 1$; $8 = 9 - 1$.

Chẳng hạn muốn cân vật có khối lượng 7 g, trên một đĩa ta đặt quả cân 3 g cùng với vật đó, trên đĩa kia đặt các quả cân 9 g và 1 g.

b) Với các quả cân 1 g và 3 g, cân được các vật có khối lượng nguyên từ 1 g đến 4 g (1 ; $3 - 1$; 3 ; $3 + 1$).

Thêm quả cân 9 g, cân được các vật có khối lượng nguyên từ : $9 - 4 = 5$ (g) đến : $9 + 4 = 13$ (g).

Thêm quả cân 27g, cân được các vật có khối lượng nguyên từ : $27 - 13 = 14$ (g) đến : $27 + 13 = 40$ (g).

255. Xét từng trường hợp xoá hai dấu :

- Nếu xoá hai dấu cộng thì ghi một dấu cộng : số dấu trừ không đổi.
- Nếu xoá hai dấu trừ thì ghi một dấu cộng : số dấu trừ giảm 2.
- Nếu xoá một dấu cộng, một dấu trừ thì ghi một dấu trừ : số dấu trừ không đổi.

Như vậy, số dấu trừ hoặc giữ nguyên, hoặc giảm đi bội của 2, tức là luôn bị giảm đi một số chẵn. Do đó khi trên bảng còn lại một dấu thì dấu đó là dấu cộng.

256. Số còn lại trên bảng chính là tổng của các số ban đầu :

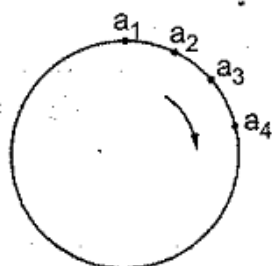
$$1 + 2 + 3 + \dots + 2001 = \frac{(1 + 2001) \cdot 2001}{2} = 1001 \cdot 2001, \text{ đó là số lẻ.}$$

257. a) Có thể trên bảng chỉ gồm toàn hình tròn nếu xoá 10 lần, mỗi lần xoá 2 hình vuông.

b) Mỗi lần xoá, số hình tròn hoặc giảm 2, hoặc tăng 2, hoặc không đổi, tức là thay đổi một số chẵn.

Lúc đầu có 15 hình tròn nên số hình tròn trên bảng luôn là một số lẻ, không thể bằng 0. Vậy không thể có trường hợp trên bảng chỉ gồm toàn hình vuông.

258. (h.56) Nếu số người là số chẵn thì ở vòng thứ hai, người số 1 được giữ lại. Nếu số người còn lại vẫn chẵn thì ở vòng thứ ba, người số 1 vẫn được giữ lại. Như vậy nếu số người có dạng 2^n thì người được giữ lại cuối cùng là người số 1. Do đó người được giữ lại cuối cùng là người đầu tiên được giữ lại khi số người còn lại có dạng 2^n .



Hình 56

Ta thấy : $130 - 2^7 = 2$. Do đó người được chọn là người mang số : $2 \cdot 2 + 1 = 5$ trong lần đánh số đầu tiên.

b) Người mang số 1935 được giữ lại.

259. Ba mặt của viên xúc xắc I ghi các số : 0, 1, 2. Ba mặt của viên xúc xắc II ghi các số 1, 2, 3. Ba mặt còn lại của hai viên xúc xắc ghi sáu số từ 4 đến 9, chẳng hạn ba mặt của viên I ghi 4, 5, 6, ba mặt của viên II ghi 7, 8, 9.

Như vậy, sáu mặt của viên I ghi : 0, 1, 2, 4, 5, 6, sáu mặt của viên II ghi : 1, 2, 3, 7, 8, 9. Bạn đọc tự kiểm tra để thấy rằng dùng một hoặc hai viên xúc xắc đó, ta xếp được mọi số tự nhiên từ 1 đến 31.

260. Ta thấy số đèn ở bóng đèn có bao nhiêu ước tự nhiên thì bóng đèn đó thay đổi trạng thái bật tắt bấy nhiêu lần. Ta cần tìm các bóng đèn ở trạng thái bật sau bước 10, tức là các bóng đèn đổi trạng thái bật tắt một số lẻ lần. Do đó cần tìm các số có một số lẻ ước tự nhiên.

Số có một số lẻ ước tự nhiên là số chính phương, đó là các số 1, 4, 9.

Vậy các bóng đèn số 1, 4, 9 sau bước cuối cùng ở trạng thái bật.

261. Gọi n là số đấu thủ mà B thắng. Nếu A cũng thắng n đấu thủ này thì số trận thắng của A nhiều hơn n (vì A còn thắng B nữa), trái đề bài. Vậy trong số các đấu thủ mà B thắng, tồn tại một đấu thủ C mà A thua.

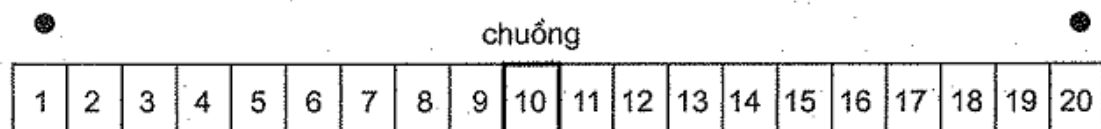
262. Bốn đội không đạt giải đấu với nhau 6 trận, tổng số điểm của bốn đội đó đạt được trong 6 trận này là : $2 \cdot 6 = 12$ (điểm).

Tổng số điểm của bốn đội không đạt giải nhận được là :

$$4 + 4 + 4 + 2 = 14 \text{ (điểm).}$$

Như vậy các đội đạt giải đã mất : $14 - 12 = 2$ điểm tức là đã thua một trận khi đấu với các đội không đạt giải.

263. (h.57). Muốn thắng cuộc phải tạo ra tình huống hai con bò cách chuồng như nhau. Như vậy người đi trước sẽ thắng nếu đi theo quy luật sau : đưa bò ở ô 20 đến ô 19, sau đó khi đối phương đưa một con bò đến ô số x thì mình đưa con bò kia đến ô số $20 - x$.



Hình 57

Ví dụ : Người đi sau đưa một con bò đến ô số 7, người đi trước đưa con bò kia đến ô số 13. Khi đó mỗi con bò đều cách chuồng 3 ô, nếu người đi sau đi 1, 2 hay 3 ô thì người đi trước cũng đi bấy nhiêu ô và sẽ là người thắng cuộc.

264. *Phân tích* : Trong bảy số đã cho, số có giá trị tuyệt đối lớn nhất là số âm (số -4), do đó người thắng cuộc là người tạo được số -30. Người thứ hai muốn tạo được số -30, cần tạo được số -25, và cứ như vậy cần tạo số -20, -15, -10, -5.

Giải : Nếu người thứ nhất chọn số âm thì người thứ hai chọn số âm để có tổng là -5 (chẳng hạn người thứ nhất chọn -2 thì người thứ hai chọn -3), cứ như vậy người thứ hai tạo được tổng là -10, -15, -20, -25, -30 và là người thắng cuộc.

Nếu người thứ nhất chọn số dương thì người thứ hai chọn số -4, khi đó tổng là số âm. Người thứ hai luôn luôn chọn số -4 để tổng là các số âm nhỏ dần. Cứ như vậy cho tới lúc đến lượt người thứ hai :

- Nếu tổng là -26 thì người thứ hai chọn số -4.
- Nếu tổng là -27 thì người thứ hai chọn số -3.
- Nếu tổng là -28 thì người thứ hai chọn số -2.
- Nếu tổng là -29 thì người thứ hai chọn số -1.

Như vậy người thứ hai luôn có cách chơi để thắng.

265. Hùng đã sai lầm khi lấy tiền thực chi (12 nghìn) cộng với tiền cho cậu bé (1 nghìn). Trong tiền thực chi đã bao gồm cả tiền cho cậu bé.

Số tiền góp (15 nghìn đồng) bao gồm :

- Tiền ăn : 11 nghìn đồng (tiền thực chi 12 nghìn đồng, trừ tiền cho cậu bé 1 nghìn đồng).
- Tiền cho cậu bé : 1 nghìn đồng.
- Tiền ba người lấy lại : 3 nghìn đồng.

$11 + 1 + 3 = 15$. Không có 2 nghìn đồng nào mất đi đâu cả !

266. Gọi số bưu ảnh của An là a , số bưu ảnh của Bách là b , số bưu ảnh hoa của An cũng như số bưu ảnh thú rừng của Bách là c . Ta có :

$$a + c = 7(b - c) \quad (1)$$

$$a - c = 4(b + c) \quad (2)$$

Từ (1) suy ra : $a = 7b - 7c - c = 7b - 8c$.

Từ (2) suy ra : $a = 4b + 4c + c = 4b + 5c$.

Do đó : $7b - 8c = 4b + 5c$ hay $3b = 13c$.

Suy ra $c : 3$. Đặt $c = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$), thì $b = 13k$.

Ta có $a = 4b + 5c = 52k + 15k = 67k$.

Do $a < 100$ nên $k = 1$. Do đó : $a = 67$, $b = 13$.

An có 67 bưu ảnh, Bách có 13 bưu ảnh.

267. Số đồng tiền mỗi loại mà ông già có ít nhất là BCNN $(5, 4, 6) = 60$.

Số tiền ít nhất mà ông già có :

$$(5 + 10 + 20) \cdot 60 = 2100 \text{ (đôla)}.$$

268. Lượng dấm đã bán gấp đôi lượng dầu đã bán, nên tổng số galông dấm và dầu đã bán là một số chia hết cho 3. Tổng số galông của dấm và dầu của sáu thùng là 103 (galông), là số chia 3 dư 1. Vậy số galông của thùng còn lại là số chia cho 3 dư 1, có thể là : 13, 19, 31.

Nếu thùng còn lại chứa 13 galông thì số dầu đã bán là :

$$(103 - 13) : 3 = 30 \text{ (galông).}$$

Trong năm số 15, 8, 17, 19, 31, không chọn được các số có tổng bằng 30.

Nếu thùng còn lại chứa 31 galông thì số dầu đã bán là :

$$(103 - 31) : 3 = 24 \text{ (galông).}$$

Trong năm số 15, 8, 17, 13, 19 không chọn được các số có tổng bằng 24.

Vậy thùng còn lại chứa 19 galông.

Số dầu đã bán là : $(103 - 19) : 3 = 28$ (galông)

Trong năm số 15, 8, 17, 13, 31, chọn được hai số có tổng bằng 28 (là $15 + 13 = 28$), ba số còn lại có tổng bằng 56 (là $8 + 17 + 31 = 56$).

Giá một galông dầu là $1400 : 28 = 50$ (xen).

Giá một galông dấm là $50 : 2 = 25$ (xen).

269. Gọi hai số viết ở bước 1 là a và b, tổng của chúng (viết ở bước 2) là c. Gọi tổng các chữ số của a, b, c theo thứ tự là a', b', c'.

Ở bước 1 ta có : $a' + b' = 0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, chia hết cho 9. Suy ra

$$a + b : 9 \Rightarrow c : 9 \Rightarrow c' : 9.$$

Ta có $348 * 73 : 9$. Dễ dàng tìm được $* = 2$.

270. Nhận xét : $\frac{8}{20} = 0,4$; $\frac{3,2}{8} = 0,4$; $\frac{1,28}{3,2} = 0,4$.

Giá mới bằng 0,4 giá cũ. Vậy chiếc mũ được bán với giá :

$$1,28 \cdot 0,4 = 0,512 \text{ (đôla)} = 51,2 \text{ (xen).}$$

271. Số tiền có sau khi cho người thứ hai :

$$(3 + 1) \cdot 2 = 8 \text{ (xen).}$$

Số tiền có sau khi cho người thứ nhất :

$$(8 + 2) \cdot 2 = 20 \text{ (xen)}$$

Số tiền cô gái có lúc đầu :

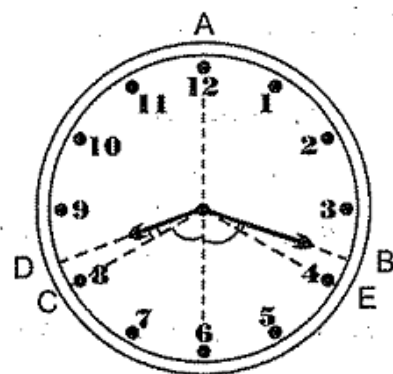
$$(20 + 1) \cdot 2 = 42 \text{ (xen).}$$

272. Gọi số hạt dẻ mà Me-ri, Ne-li và Xu-di được chia theo thứ tự là m, n, x.
Ta có :

$$\frac{m}{4} = \frac{n}{3}, \frac{m}{6} = \frac{x}{7}, m + n + x = 770.$$

Đáp số : Me-ri được 264 hạt dẻ, Ne-li được 198 hạt dẻ, Xu-di được 308 hạt dẻ.

273. Gọi vị trí của các số 12, 4, 8 trên mặt đồng hồ là A, E, C. Kim giờ chỉ vị trí D, kim phút chỉ vị trí B (h.58). Khi kim phút quay từ A đến B thì kim giờ quay từ C đến D.



Hình 58

Theo đề bài, cung CD bằng cung BE nên hai kim quay tổng cộng được 20 vạch chia phút (vì cung AE gồm 20 vạch chia phút).

Do kim phút quay nhanh gấp 12 lần kim giờ nên kim phút quay từ A đến B được :

$$20 \cdot \frac{12}{12+1} = 18 \frac{6}{13} \text{ (vạch chia phút).}$$

Thời điểm phải tìm là 8 giờ $18 \frac{6}{13}$ phút.

274. Ta không tính được diện tích của mỗi mảnh đất là bao nhiêu acơ, nhưng tính được tỉ số diện tích của mảnh đất của chàng Xây-cơ và mảnh đất của hai ông già

$$\frac{190 \cdot 110}{150 \cdot 140} = \frac{209}{210}.$$

Hai ông già bị mất đi $\frac{1}{210}$ diện tích, nên mỗi acơ bị mất đi :

$$840 \cdot \frac{1}{210} = 4 \text{ (quả bí).}$$

275. Gọi số loại kẹo sôcôla, kẹo caramen, kẹo bi đã mua theo thứ tự là a, b, c. Ta có :

$$\begin{cases} a + b + c = 20 \\ 4a + 0,25b + 0,5c = 20 \end{cases}$$

Do đó :

$$\begin{cases} a + b + c = 20 \\ 16a + b + 2c = 80 \end{cases}$$

Suy ra : $15a + c = 60$.

Do đó c chia hết cho 15. Ta có $0 < c < 20$ nên $c = 15$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} a + b = 5 \\ 16a + b = 50 \end{cases}$$

Từ đó : $a = 3, b = 2$.

276. Nếu ta hiểu di chúc của ông bố theo khía cạnh phần của vợ ông bằng nửa phần của con trai và gấp đôi phần của con gái thì ông chia cho con gái $\frac{1}{7}$ gia tài, cho vợ $\frac{2}{7}$ gia tài và cho con trai $\frac{4}{7}$ gia tài.

277. Nếu người được hỏi gật đầu thì du khách đang ở làng người Pháp (vì người Pháp trả lời "có", còn người Ý trả lời "không").

Nếu người được hỏi lắc đầu thì du khách đang ở làng người Ý (vì người Pháp trả lời "không", còn người Ý trả lời "có").

278. Từ lúc khởi hành đến lần gặp nhau thứ nhất, Khôi chạy được $\frac{5}{9}$ vòng hồ.

Từ lúc khởi hành đến lần gặp nhau thứ n , Khôi chạy được $\frac{5n}{9}$ vòng hồ.

Để chỗ gặp nhau lần thứ n chính là địa điểm xuất phát thì $5n : 9$, do đó $n : 9$.

Vậy đến lần gặp nhau thứ 9 thì hai người dừng chạy.

PHẦN HÌNH HỌC

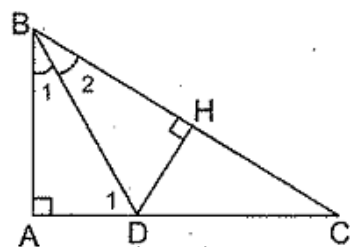
CHƯƠNG III - QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

§12. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

77. (h.59)

a) Góc ngoài $\widehat{D}_1$ lớn hơn $\widehat{B}_2$ nên $\widehat{D}_1 > \widehat{B}_1$,
do đó $AB > AD$.

b) Kẻ $DH \perp BC$. Ta có $AD = DH < DC$.



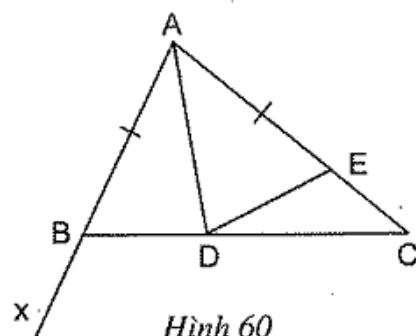
Hình 59

78. (h.60)

Ta có $\widehat{B} > \widehat{C}$ nên $AC > AB$.

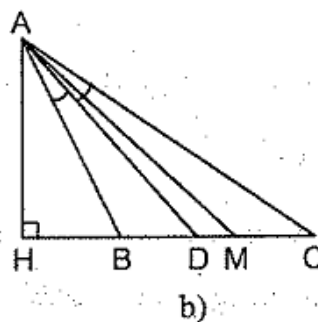
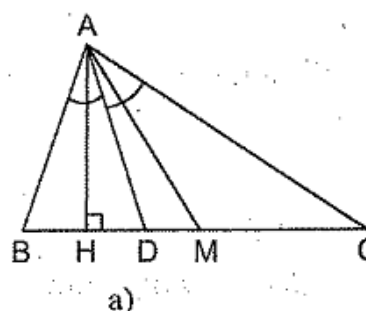
Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$ thì E nằm giữa A và C. Ta có $\triangle ADB = \triangle ADE$ (c.g.c) nên $DB = DE$ và $\widehat{DEC} = \widehat{CBx}$. Nhưng $\widehat{DBx} > \widehat{C}$ nên $\widehat{DEC} > \widehat{C}$, do đó $DC > DE$.

Vậy $BD < DC$.



Hình 60

79. (h.61)



Hình 61

Trước hết ta thấy $AC > AB$ nên $HC > HB$, do đó H và B thuộc cùng một tia gốc C. Do đó các tia AM, AD, AH thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AC. Để chứng tỏ tia AD nằm giữa hai tia AH, AM, ta sẽ chứng tỏ rằng $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} < \widehat{CAH}$.

Kí hiệu $\widehat{BAC}$ là $\widehat{A}$, ta có $\widehat{CAD} = \frac{\widehat{A}}{2}$ (1)

Dễ dàng chứng minh được $\widehat{CAM} < \widehat{BAM}$ (ví dụ 16), nên $\widehat{CAM} + \widehat{CAM} < \widehat{BAM} + \widehat{CAM}$, do đó

$$2\widehat{CAM} < \widehat{BAC}, \text{ hay } \widehat{CAM} < \frac{\widehat{A}}{2} \quad (2)$$

Xét $\triangle CAH$ vuông, ta có

$$\widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{C} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} - \widehat{C} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} > \frac{\widehat{A}}{2} \quad (3)$$

(vì $\widehat{B} > \widehat{C}$).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} < \widehat{CAH}$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC, ta có $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} < \widehat{CAH}$ nên tia AD nằm giữa hai tia AH, AM.

Chú ý : Trong trường hợp $\widehat{B} < 90^\circ$ (xem h.61a), còn có thể giải bài toán trên như sau :

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{B} > \widehat{C} &\Rightarrow \widehat{HAB} < \widehat{HAC} \\ \Rightarrow \widehat{HAB} + \widehat{HAB} &< \widehat{HAC} + \widehat{HAB} \\ \Rightarrow 2\widehat{HAB} &< \widehat{BAC} \\ \Rightarrow \widehat{HAB} &< \frac{\widehat{A}}{2}.\end{aligned}$$

Ta lại có $\widehat{BAM} > \frac{\widehat{A}}{2}$ (xem ví dụ 16). Do $\widehat{BAH} < \widehat{BAD} < \widehat{BAM}$ nên AD nằm giữa AH và AM.

Chú ý rằng cách giải trên không đúng trong trường hợp $\widehat{B} > 90^\circ$, vì khi đó không xảy ra đẳng thức $\widehat{HAC} + \widehat{HAB} = \widehat{BAC}$. Đẳng thức này chỉ xảy ra khi tia AH nằm giữa hai tia AB và AC. Khi $\widehat{B} > 90^\circ$ thì không có đẳng thức này (xem h. 61b).

80. (h.62) Ta "chuyển" góc AMB đến một vị trí thuận lợi : kẻ tia Ax ở ngoài $\triangle ABC$ sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAM}$. Trên tia Ax lấy $AK = AM$.

$$\triangle KAC = \triangle MAB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow KC = MB.$$

Do $MB < MC$ nên $KC < MC$.

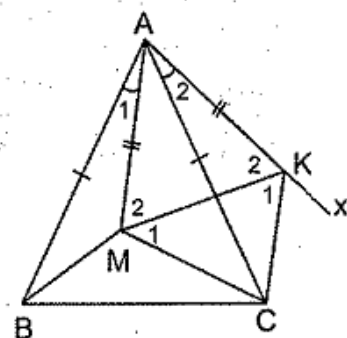
$$\triangle CKM \text{ có } KC < MC \text{ nên } \widehat{M}_1 < \widehat{K}_1 \quad (1)$$

$$\triangle AMK \text{ cân nên } \widehat{M}_2 = \widehat{K}_2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMC} < \widehat{AKC}$.

$\triangle KAC = \triangle MAB$ (chứng minh trên) còn suy ra $\widehat{AKC} = \widehat{AMB}$.

Do đó $\widehat{AMC} < \widehat{AMB}$.



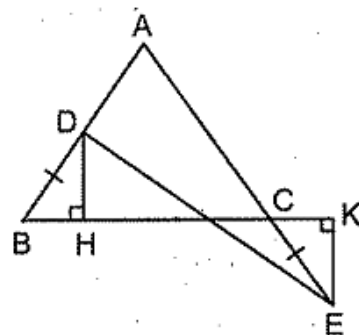
Hình 62

81. (h.63) Gọi $\triangle ABC$ là tam giác cân có $\widehat{A} = \alpha$,

$$AB = AC = \frac{s}{2}.$$

Lấy D bất kì trên BA, lấy E trên

tia đối của tia CA sao cho $CE = BD$. $\triangle ADE$ cũng có $\widehat{A} = \alpha$, $AD + AE = s$. Ta sẽ chứng minh rằng chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle ADE$ bằng cách chứng tỏ rằng $BC < DE$.



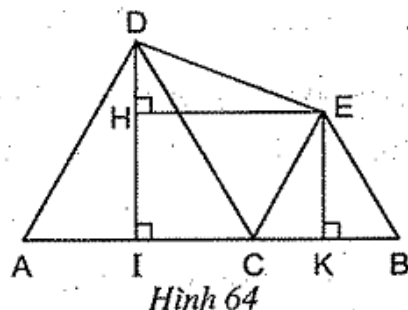
Hình 63

Vẽ $DH, EK \perp BC$. Do $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} < 90^\circ$ nên H nằm giữa B và C , C nằm giữa H và K . Ta có $\triangle BHD = \triangle CKE$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $BH = CK$, do đó $BC = HK$. Ta lại có $HK < DE$, do đó $BC < DE$.

Vậy trong các $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \alpha$, $AB + AC = s$, tam giác cân đáy BC có chu vi nhỏ nhất.

82. (h.64) *Cách 1.* $\triangle DCE$ có $\widehat{C} = 60^\circ$, $CD + CE = AB$ không đổi nên DE nhỏ nhất khi $CD = CE$ (bài 81). Khi đó C phải là trung điểm của AB .

Cách 2. Kẻ DI và EK vuông góc với AB , kẻ EH vuông góc với DI . Ta có $DE \geq HE = IK = \frac{AB}{2}$.

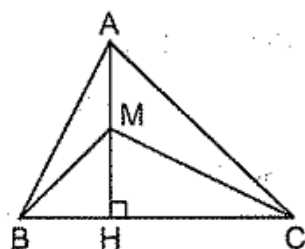


Do đó DE nhỏ nhất bằng $\frac{AB}{2} \Leftrightarrow DI = EK \Leftrightarrow C$ là trung điểm của AB .

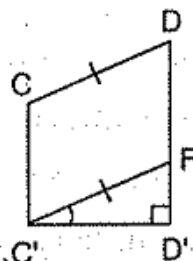
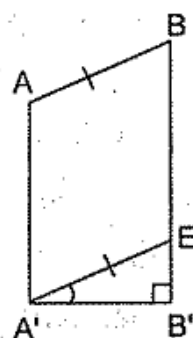
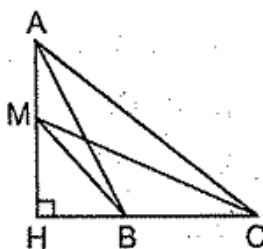
§13. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

83. (h.65) $\triangle ABC$ có $\widehat{B} > \widehat{C}$ nên $AC > AB$.

$AC > AB \Rightarrow HC > HB \Rightarrow MC > MB$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).



Hình 65



Hình 66

84. (h.66) Vẽ $A'E \parallel AB$, $C'F \parallel DC$. Ta có $A'E = C'F$, $A'E \parallel C'F$. Do đó

$\triangle A'EB' = \triangle C'FD'$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra $A'B' = C'D'$.

85. (h.67) Ta có nhận xét

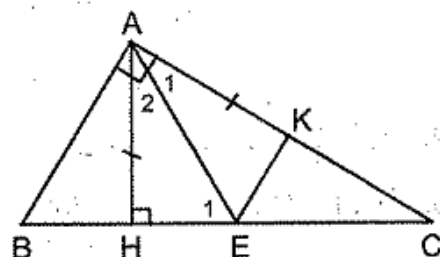
$BC + AH > AB + AC \Leftrightarrow BC - AB > AC - AH$.

Trên BC lấy điểm E sao cho $BE = AB$ thì

$CE = BC - BE = BC - AB$.

Trên AC lấy điểm K sao cho $AK = AH$ thì

$CK = CA - AK = AC - AH$.



Hình 67

Để giải bài toán, cần chứng minh $CE > CK$.

Ta có : $\widehat{BAE} + \widehat{A_1} = 90^\circ$, $\widehat{E_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAE} = \widehat{E_1}$ (vì $\triangle ABE$ cân tại B)
nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

$$\triangle KAE = \triangle HAE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{K} = \widehat{H} = 90^\circ.$$

$\triangle EKC$ vuông tại K nên $CE > CK$. Từ đó giải được bài toán.

§14. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác

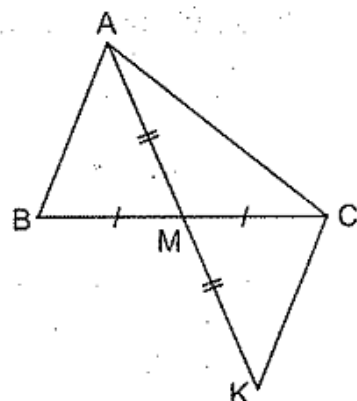
86. (h.68) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho

$$MK = MA.$$

Xét $\triangle AKC$ có $AK < KC + AC$ (1)

Do $AK = 2AM$ và $KC = AB$ nên từ (1) suy ra

$$2AM < AB + AC, \text{ do đó } AM < \frac{AB + AC}{2}.$$



Hình 68

87. a) Nếu AB là cạnh bên thì chu vi tam giác cân bằng $8 + 8 + 5 = 21$ (cm).

Nếu AB là cạnh đáy thì chu vi tam giác cân bằng $8 + 5 + 5 = 18$ (cm).

b) AB chỉ có thể là cạnh bên, chu vi tam giác cân bằng

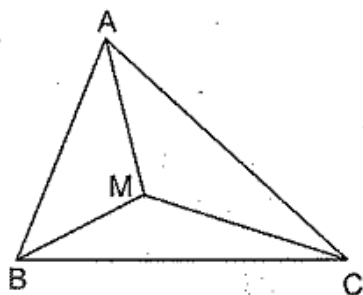
$$25 + 25 + 12 = 62 \text{ (cm)}.$$

88. (h.69) a) Xét quan hệ giữa các cạnh của ba tam giác MAB, MBC, MCA.

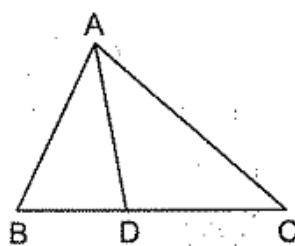
b) Trước hết chứng minh $MB + MC < AB + AC$.

Tương tự $MA + MB < AC + BC$, $MA + MC < AB + BC$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.



Hình 69



Hình 70

89. (h.70) Xét quan hệ giữa AD và các cạnh còn lại của $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$.

90. (h.71) Trên AC lấy $AK = AB$ thì K nằm giữa A và C, do đó

$$KC = AC - AB \quad (1)$$

Ta có $\triangle AEB = \triangle AEK$ (c.g.c). Suy ra $EB = EK$. Xét $\triangle EKC$ ta có

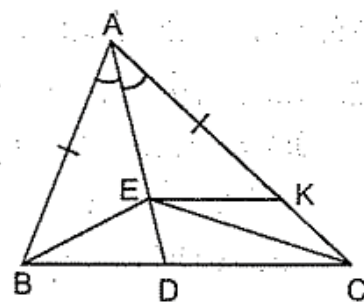
$$KC > EC - EK \text{ nên } KC > EC - EB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AC - AB > EC - EB.$$

Chú ý : Sẽ sai lầm nếu từ $EC < AC + AE$ và

$EB < AB + AE$ suy ra $EC - EB < AC - AB$, vì không được trừ từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều.



Hình 71

91. Ta sẽ chứng minh

$MA + MB \geq MC$ (chứng minh $MB + MC \geq MA$, $MA + MC \geq MB$ tương tự).

a) M thuộc nửa mặt phẳng không chứa C có bờ AB (h.72a).

Trên nửa mặt phẳng chứa A có bờ BC, vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = \widehat{ABM}$, trên tia đó lấy $BN = BM$. Ta có $\triangle CBN = \triangle ABM$ (c.g.c) nên

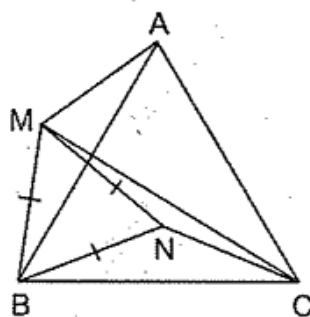
$$NC = MA \quad (1)$$

$\triangle MBN$ cân có $\widehat{MBN} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, do đó

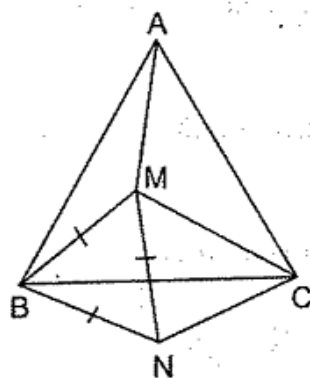
$$MB = MN \quad (2)$$

Xét $\triangle MNC$ (có thể suy biến) ta có $MN + NC \geq MC$, do đó từ (1) và (2) suy ra $MB + MA \geq MC$.

b) M thuộc nửa mặt phẳng chứa C có bờ AB (h.72b)



a)



b)

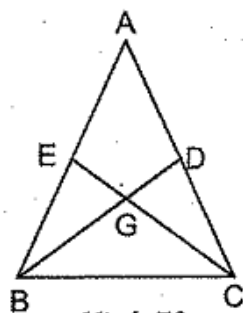
Hình 72

Trên nửa mặt phẳng không chứa A có bờ BC, vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = \widehat{ABM}$, trên tia đó lấy $BN = BM$. Sau đó cũng chứng minh tương tự như phần a.

c) M thuộc đường thẳng AB. Dễ dàng chứng minh được $MA + MB \geq MC$.

§15. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

92. Xét $\triangle ABC$ có các trung tuyến BD , CE cắt nhau ở G và $BD = CE$ (h.73). Ta có $\triangle BGE = \triangle CGD$ (c.g.c) nên $BE = CD$, do đó $AB = AC$.



Hình 73

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác cân.

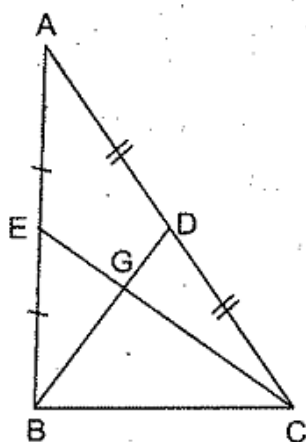
93. (h.74) Gọi G là giao điểm của BD và CE . Ta tính được :

$$BG = 6\text{cm}, GC = 8\text{cm}, \text{ do đó } BC = 10\text{cm}.$$

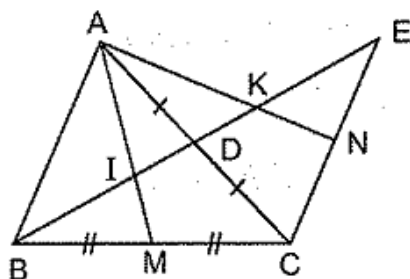
94. (h.74) Gọi G là giao điểm của BD và CE . Ta tính được :

$$GB^2 + GC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = BC^2$$

nên $GB \perp GC$.



Hình 74



Hình 75

95. (h.75)

I là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên

$$BI = \frac{2}{3}BD = \frac{1}{3}BE \quad (1)$$

K là trọng tâm của $\triangle ACE$ nên

$$EK = \frac{2}{3}ED = \frac{1}{3}BE \quad (2)$$

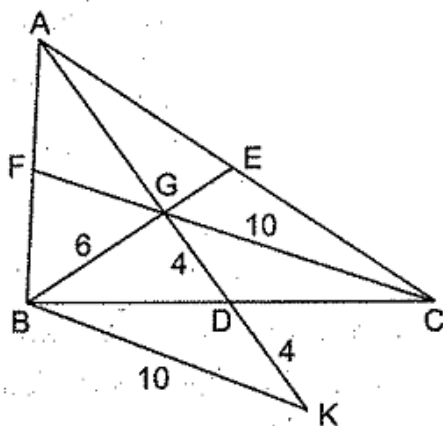
Từ (1) và (2) suy ra $IK = \frac{1}{3}BE$.

Do đó $BI = EK = IK$.

96. (h.76) Vẽ điểm K sao cho D là trung điểm của GK . Ta tính được $BK = CG = 10$, $BG = 6$, $GD = 4$, $GK = 8$.

$\triangle BGK$ có ba cạnh bằng 6, 8, 10 nên

$$\widehat{BGD} = 90^\circ \text{ (định lí Py-ta-go đảo).}$$

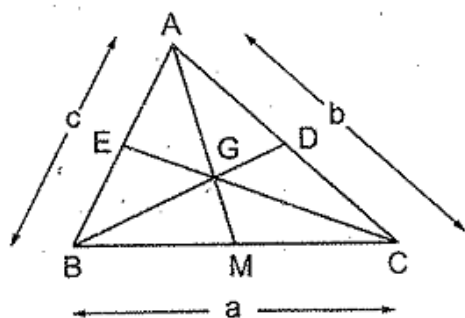


Hình 76

$$BD^2 = BG^2 + GD^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{52} \Rightarrow BC = 2\sqrt{52} \approx 14,4 \text{ cm.}$$

97. (h.77) Xét $\triangle ABC$ có các trung tuyến AM , BD , CE . Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Theo bài 86 ta có $AM < \frac{b+c}{2}$.



Hình 77

Tương tự $BD < \frac{a+c}{2}$, $CE < \frac{a+b}{2}$.

Suy ra $AM + BD + CE < a + b + c$.

Theo ví dụ 19 ta có $BD + CE > \frac{3}{2}a$.

Tương tự $AM + CE > \frac{3}{2}b$,

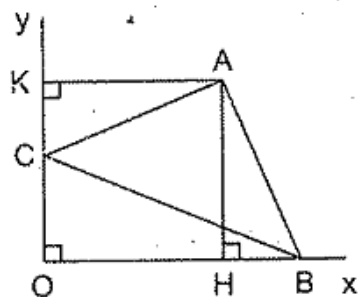
$AM + BD > \frac{3}{2}c$.

Suy ra $2(AM + BD + CE) > \frac{3}{2}(a + b + c)$.

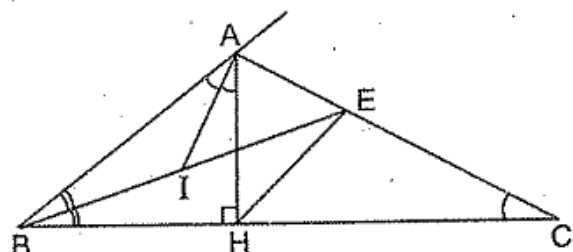
Do đó $AM + BD + CE > \frac{3}{4}(a + b + c)$.

§16. Tính chất ba đường phân giác của tam giác

98. (h.78) Vẽ $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$. Ta có $\widehat{HAK} = \widehat{BAC}$ nên $\widehat{KAC} = \widehat{HAB}$. Do đó $\triangle KAC = \triangle HAB$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra $AK = AH$. Vậy OA là tia phân giác của góc xOy .



Hình 78



Hình 79

99. (h.79)

a) Đặt $\widehat{C} = \alpha$, $\widehat{B} = 2\beta$, ta có $\widehat{BAH} = 2\alpha$. Xét $\triangle AHB$ vuông: $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ nên $\alpha + \beta = 45^\circ$. Để chứng minh $\widehat{AIE} = \alpha + \beta = 45^\circ$ và $\widehat{AEB} = \alpha + \beta = 45^\circ$. Do đó $\triangle AIE$ vuông cân tại A.

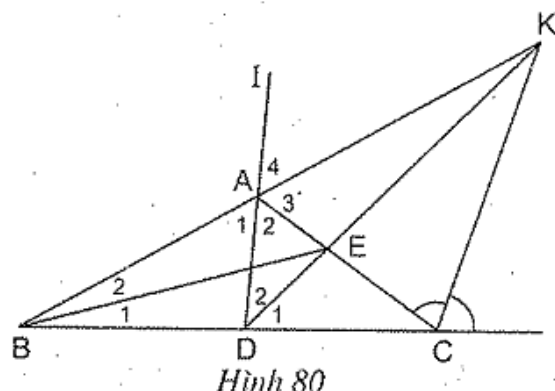
b) Xét $\triangle ABH$, AE là tia phân giác góc ngoài tại A, BE là tia phân giác góc trong nên HE là tia phân giác góc ngoài tại H. Vậy HE là tia phân giác của góc AHC.

Chú ý: Câu a là câu gợi ý để giải câu b.

100. (h.80)

$\triangle ADC$ có K là giao điểm của hai đường phân giác ngoài nên DK là phân giác trong: $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$.

$\triangle ADB$ có E là giao điểm của hai đường phân giác ngoài nên BE là phân giác trong: $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$.

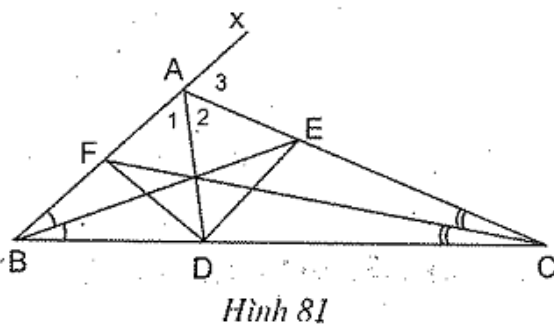


$$\text{Do đó} \quad \widehat{BED} = \widehat{D}_1 - \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{ADC} - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = 30^\circ.$$

101. (h.81) Chú ý đến điều kiện $\widehat{A} = 120^\circ$

nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{CAx} = 60^\circ$ (Ax là tia đối của tia AB).

Xét $\triangle ABD$ có AE là tia phân giác góc ngoài đỉnh A, BE là tia phân giác góc trong B nên DE là tia phân giác góc ngoài đỉnh D.



Chứng minh tương tự, DF là tia phân giác góc ngoài đỉnh D của $\triangle ACD$. Vậy $\widehat{EDF} = 90^\circ$.

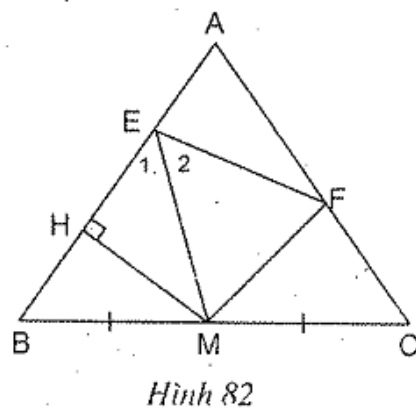
102. (h.82) Đặt $\widehat{EMH} = \alpha$ thì $\widehat{AEF} = 2\alpha$. Ta có

$$\widehat{E}_1 = 90^\circ - \alpha \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} \widehat{E}_2 &= 180^\circ - \widehat{E}_1 - \widehat{AEF} \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 2\alpha \\ &= 90^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2.$$

$\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.c.c) $\Rightarrow$ AM là tia phân giác của góc A.



$\triangle AEF$ có EM là tia phân giác của góc ngoài đỉnh E , AM là tia phân giác của góc trong A , chúng cắt nhau tại M nên FM là tia phân giác của góc EFC .

103. Cách 1. (h.83)

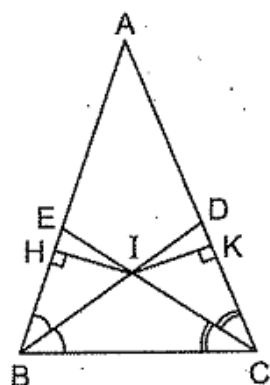
Kẻ $IH \perp AB$, $IK \perp AC$. Ta có $\triangle IHE = \triangle IKD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IDK} \quad (1)$$

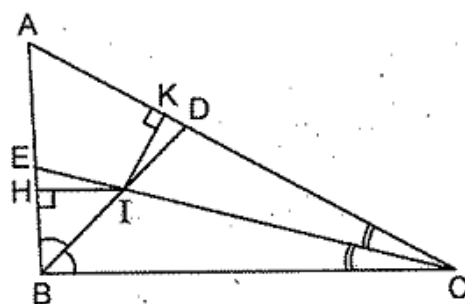
Xét bốn trường hợp :

a) H thuộc đoạn BE , K thuộc đoạn CD (h.83a).

Từ (1) suy ra $\widehat{A} + \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2}$, do đó $\widehat{C} = \widehat{B}$.



a)



b)

Hình 83

b) H thuộc đoạn AE , K thuộc đoạn AD . Chứng minh tương tự như phần a ta được $\widehat{C} = \widehat{B}$.

c) H thuộc đoạn BE , K thuộc đoạn AD (h.83b).

$$\text{Từ (1) ta có: } \widehat{A} + \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{C} + \frac{\widehat{B}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow 3\widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ.$$

d) H thuộc đoạn AE , K thuộc đoạn CD . Chứng minh tương tự như phần c, ta được: $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$.

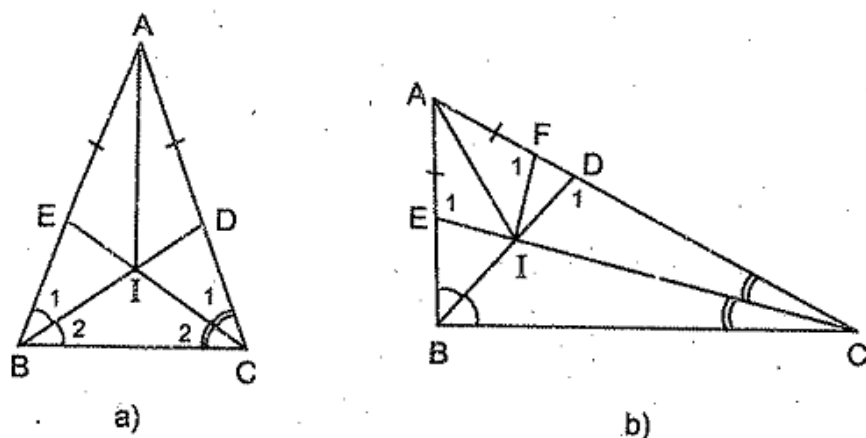
Cách 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $AD \geq AE$. Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp $AD = AE$ (h.84a)

$$\triangle ADI = \triangle AEI \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{AEI}$$

$\triangle ADB$ và $\triangle AEC$ có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ADI} = \widehat{AEI}$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$.

Do đó $\widehat{B} = \widehat{C}$.



Hình 84

b) Trường hợp $AD > AE$. Lấy F trên AD sao cho $AF = AE$ (h.84b).

$\triangle AFI = \triangle AEI$ (c.g.c) $\Rightarrow IF = IE, \widehat{F}_1 = \widehat{E}_1$.

Do $IE = ID$ nên $IF = ID$, do đó $\widehat{F}_1 = \widehat{D}_1$.

Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$, tức là $\widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{B} + \frac{\widehat{C}}{2}$.

Biến đổi như ở cách 1, ta được $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$.

§17. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

104. (h.85)

Ta có $EA = EB$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$,

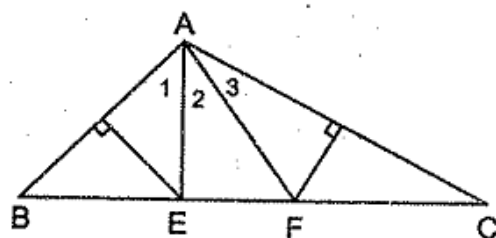
$FA = FC$ nên $\widehat{A}_3 = \widehat{C}$.

Do đó $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

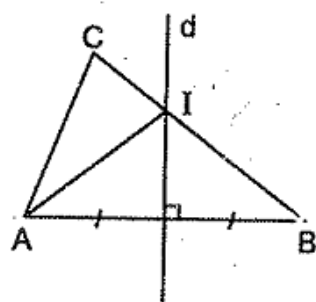
Suy ra $\widehat{A}_2 = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$.

105. (h.86) Gọi d là đường trung trực của AB . Do C và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ d nên d cắt đoạn thẳng BC , gọi giao điểm đó là I , ta có $IA = IB$. Xét $\triangle CIA$:

$CA < CI + IA = CI + IB = CB$.



Hình 85



Hình 86

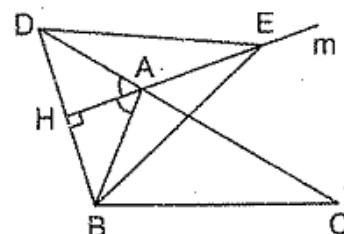
106. (h.87) Chu vi $\triangle EBC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng $EB + EC$ nhỏ nhất. Vẽ $BH \perp m$, cắt CA ở D . Vì m là đường trung trực của BD nên $EB = ED$. Do đó

$$EB + EC = ED + EC \geq DC.$$

Với mọi điểm E thuộc m , ta có

$EB + EC \geq DC$. Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi E nằm giữa D và C .

Như vậy nếu E trùng A thì chu vi $\triangle EBC$ nhỏ nhất.

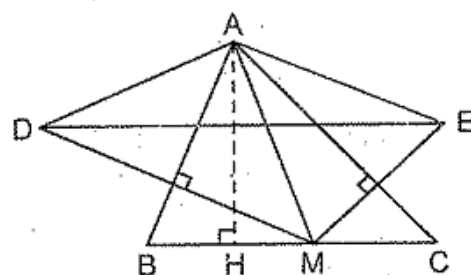


Hình 87

107. (h.88) Ta chứng minh được $AD = AM = AE$ và $\widehat{DAE} = 2\widehat{BAC}$.

Tam giác ADE cân có góc ở đỉnh $\widehat{DAE}$ có số đo không đổi nên cạnh đáy DE nhỏ nhất nếu cạnh bên AD nhỏ nhất.

Ta có $AD = AM \geq AH$ (AH là đường vuông góc kẻ từ A đến BC). Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi M trùng H . Khi đó DE có độ dài nhỏ nhất.



Hình 88

108. (h.89)

Vẽ điểm D sao cho Ox là đường trung trực của AD .

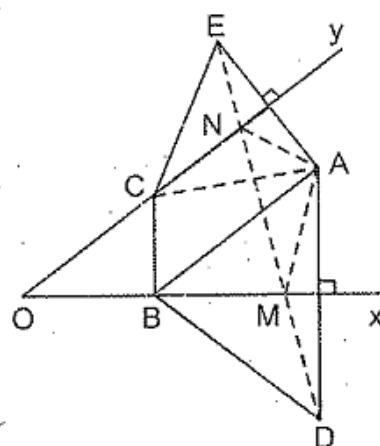
Vẽ điểm E sao cho Oy là đường trung trực của AE . Ta có $AB = BD$, $AC = CE$. Do đó

$$AB + BC + CA = DB + BC + CE \geq DE$$

(hằng số).

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi B trùng M , C trùng N (M, N thứ tự là giao điểm của DE với Ox, Oy).

Khi đó $\triangle ABC$ có chu vi nhỏ nhất ở vị trí $\triangle AMN$.



Hình 89

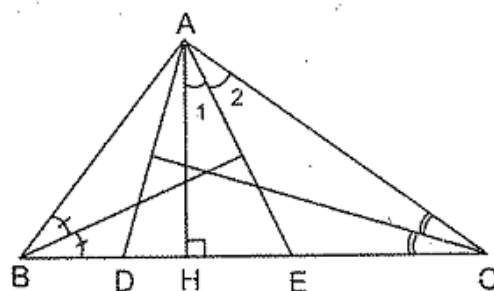
109. (h.90)

Ta có :

$$\widehat{AEB} = \widehat{A_1} + \widehat{C}$$

$$\widehat{EAB} = \widehat{A_2} + \widehat{HAB}$$

$$\widehat{C} = \widehat{HAB}$$



Hình 90

suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{EAB}$, do đó $\triangle ABE$ cân tại B. Như vậy phân giác của góc B là đường trung trực của AE.

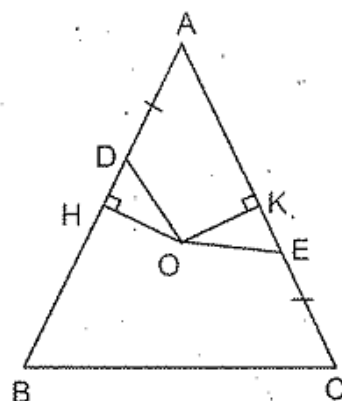
Tương tự, phân giác của góc C là đường trung trực của AD.

Vậy giao điểm các phân giác của $\triangle ABC$ là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ADE$.

110. (h.91)

Xét các vị trí đặc biệt của D : Khi D trùng B thì E trùng A, đường trung trực của DE là đường trung trực của AB. Khi D trùng A thì E trùng C, đường trung trực của DE là đường trung trực của AC.

Do đó ta vẽ đường trung trực của AB và của AC, chúng cắt nhau ở O. Hãy chứng tỏ rằng đường trung trực của DE đi qua O bằng cách chứng minh $OD = OE$ do ($\triangle OHD = \triangle OKE$ (c.g.c) với H và K là trung điểm của AB và AC).



Hình 91

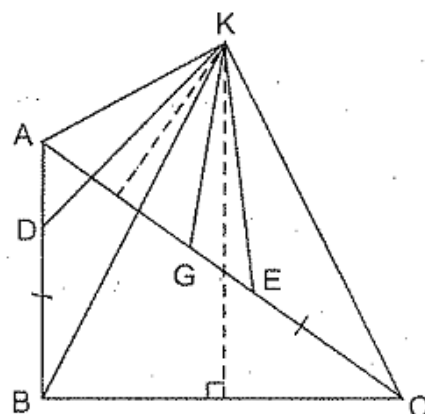
Chú ý :

– Cũng có thể chứng minh $\triangle AOD = \triangle COE$ (c.g.c) để suy ra $OD = OE$.

– Bỏ điều kiện "tam giác cân", bài toán vẫn đúng (xem phần chú ý của ví dụ 21).

111. a) (h.92)

Nhận xét : Để tìm ra điểm cố định, ta xét các vị trí đặc biệt của các điểm D và E. Khi D trùng B thì E trùng C, ta vẽ đường trung trực của BC. Khi D trùng A thì E trùng G (G thuộc cạnh CA sao cho $CG = AB$), ta vẽ đường trung trực của AG. Hai đường trung trực này cắt nhau ở K. Như vậy nếu các đường trung trực của DE luôn luôn đi qua một điểm cố định thì điểm cố định đó phải là điểm K nói trên. Ta sẽ chứng minh rằng đường trung trực của DE đi qua K.



Hình 92

Giải : Trên cạnh CA lấy điểm G sao cho $CG = AB$. Gọi K là giao điểm của các đường trung trực của AG và của BC.

Theo tính chất đường trung trực, ta có $KB = KC$, $KA = KG$. Ta có $\triangle KBA = \triangle KCG$ (c.c.c) nên $\widehat{KBA} = \widehat{KCG}$, do đó $\widehat{KBD} = \widehat{KCE}$. Ta có $\triangle KBD = \triangle KCE$ (c.g.c) nên $KD = KE$. Vậy đường trung trực của DE luôn luôn đi qua K (đpcm).

Chỗ khó khăn nhất của bài toán trên là phát hiện ra điểm cố định K. Điểm cố định này đã được tìm ra bằng phương pháp đặc biệt hoá.

Cách giải khác (không vẽ điểm G), dùng kiến thức về tứ giác nội tiếp học ở lớp 9 :

Vẽ đường trung trực của DE và đường trung trực của BC, chúng cắt nhau ở K.

Ta có $\triangle KBD = \triangle KCE$ (c.c.c) nên $\widehat{KBD} = \widehat{KCE}$, do đó ABCK là tứ giác nội tiếp.

Điểm K là giao điểm của đường trung trực của BC với một đường cố định nữa : đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ (phần đường tròn cùng phía với A đối với BC) hoặc tia phân giác của góc ngoài đỉnh A.

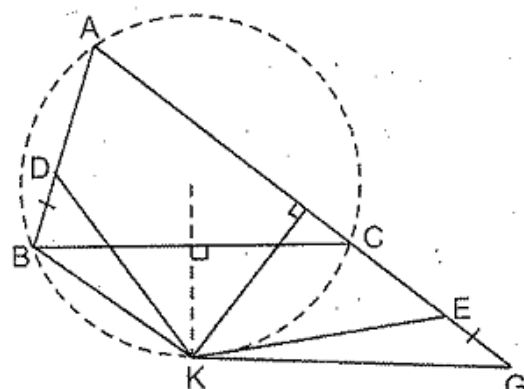
b) (h.93)

Trên tia CE lấy điểm G sao cho $CG = BA$. Các đường trung trực của BC và của AG cắt nhau tại K (cố định). Ta sẽ chứng minh rằng K thuộc đường trung trực của DE.

Giải tương tự như câu a.

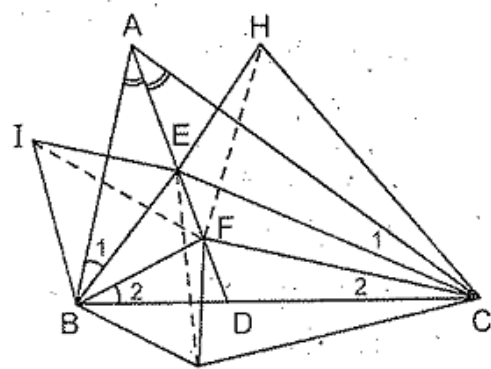
Chú ý :

Điểm cố định K trong các câu a và b có thể được xác định là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn đi qua A, B, C. Trường hợp D và E nằm cùng phía đối với BC thì K và A nằm cùng phía đối với BC. Trường hợp D và E nằm khác phía đối với BC thì K và A nằm khác phía đối với BC.



Hình 93

112. (h.94) Để chứng minh $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$, ta gấp đôi các góc trên bằng cách vẽ H sao cho AC là đường trung trực của EH, vẽ K sao cho BC là đường trung trực của FK, khi đó $\widehat{HCE} = 2\widehat{ACE}$, $\widehat{FCK} = 2\widehat{BCF}$. Cần phải chứng minh $\widehat{HCE} = \widehat{FCK}$. Muốn vậy ta sẽ chứng minh $\widehat{HCF} = \widehat{ECK}$ bằng cách xét các tam giác HCF và ECK.



Hình 94

Hai tam giác này đã có $HC = EC$, $CF = CK$. Cần chứng minh cặp cạnh FH, EK bằng nhau. Ta tạo ra một đoạn thẳng trung gian : Vẽ I sao cho AB là đường trung trực của EI.

Ta có $\triangle AIH$ cân, mà AD là phân giác của góc ở đỉnh nên AD là đường trung trực của IH, do đó

$$FI = FH \quad (1)$$

Ta lại có $\triangle FBI = \triangle KBE$ (c.g.c) nên

$$FI = KE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $FH = KE$.

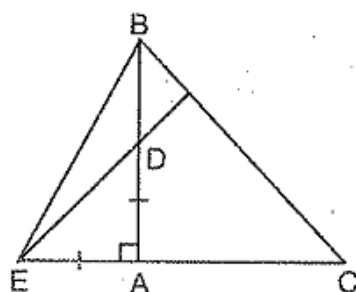
Bạn đọc tự chứng minh phần còn lại.

§18. Tính chất ba đường cao của tam giác

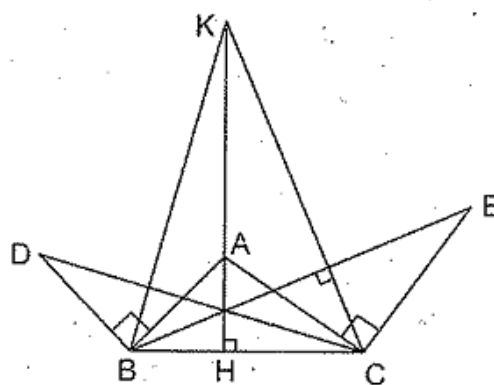
113. Áp dụng định lí Py-ta-go. Đáp số: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy câu trả lời C là đúng.

114. (h.95) $\triangle ADE$ vuông cân nên $\widehat{AED} = 45^\circ$, mà $\widehat{ACB} = 45^\circ$, do đó $ED \perp BC$.
Ta lại có $BA \perp EC$. Vậy D là trực tâm của $\triangle EBC$, suy ra $CD \perp EB$.



Hình 95



Hình 96

115. (h.96) a) $\widehat{KAC} = \widehat{BCE}$, $\widehat{KCA} = \widehat{BEC}$, $AC = CE$ nên $\triangle KAC = \triangle BCE$ (g.c.g) suy ra $AK = BC$.

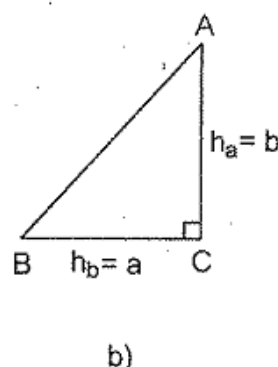
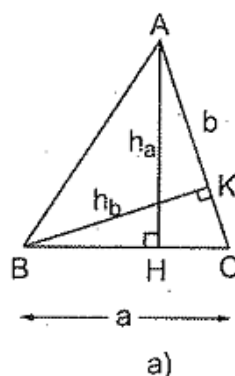
Do đó $\triangle KAB = \triangle CBD$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{BCD}$, nhưng $\widehat{AKB} + \widehat{KBH} = 90^\circ$ nên $\widehat{BCD} + \widehat{KBH} = 90^\circ$ tức là $CD \perp BK$.

b) AH, BE, CD là các đường cao của $\triangle KBC$ nên chúng đồng quy.

116. a) Tam giác cân đáy AB.

b) Tam giác vuông ở C.

c) Theo đề bài ta có $a = h_a$, $b = h_b$.
Mặt khác với mọi $\triangle ABC$ bất kì (h.97a) các đoạn thẳng trên còn có quan hệ $h_a \leq b$ (xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow \widehat{C} = 90^\circ$), $h_b \leq a$ (xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow \widehat{C} = 90^\circ$).



Hình 97

Do đó $a = h_a \leq b = h_b \leq a$, điều này chỉ xảy ra khi $a = h_a = b = h_b = a$. Khi đó $\triangle ABC$ vuông cân ở C (h.97b)

117. (h.98)

a) Kẻ $HD \parallel AB$, $HE \parallel AC$.

Ta có $HA < AD + DH = AD + AE$ (1)

Do $BH \perp AC$ mà $HE \parallel AC$ nên

$BH \perp HE$, suy ra $HB < EB$ (2)

Tương tự $HC < DC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$HA + HB + HC < AB + AC.$$

b) Ta đã có

$$HA + HB + HC < AB + AC.$$

Tương tự

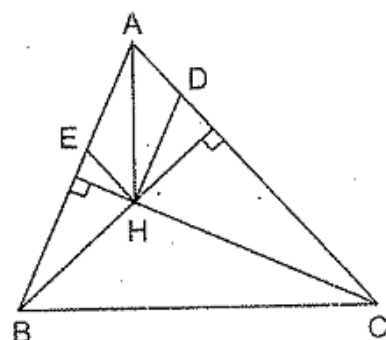
$$HA + HB + HC < AB + BC$$

$$HA + HB + HC < AC + BC.$$

Suy ra

$$3(HA + HB + HC) < 2(AB + BC + CA)$$

$$\Rightarrow HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA).$$



Hình 98

Chuyên đề

PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

118. Giải tương tự như bài 3c.

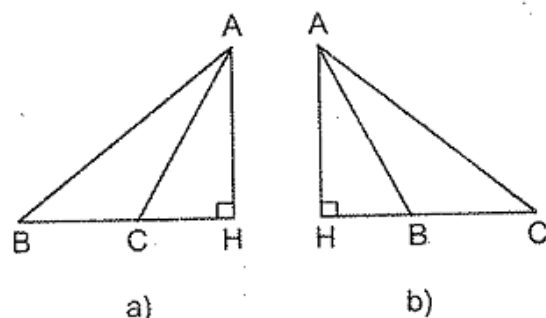
119. Trước hết ta thấy H, B, C là ba điểm phân biệt. Thật vậy nếu H trùng B (hoặc C) thì $\widehat{B}$ (hoặc $\widehat{C}$) bằng 90° , trái với giả thiết.

Trong ba điểm thẳng hàng phân biệt, có một và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm kia. Giả sử C nằm giữa B và H (h.99a) thì

$\widehat{ACH} < 90^\circ$ nên $\widehat{ACB} > 90^\circ$, trái với giả

thiết. Giả sử B nằm giữa C và H (h.99b) thì $\widehat{ABH} < 90^\circ$ nên $\widehat{ABC} > 90^\circ$, trái với giả thiết.

Vậy H nằm giữa B và C .

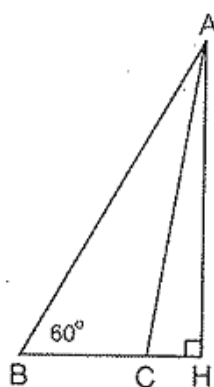


Hình 99

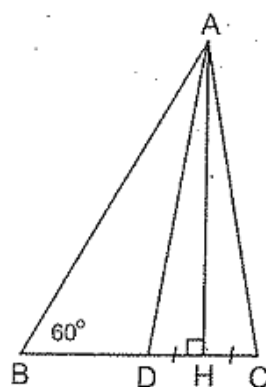
120. a) (h.100). Giả sử $\widehat{ACB} \neq 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ thì H không trùng C. Tam giác ABH vuông có $\widehat{BAH} = 30^\circ$ nên $BH = \frac{1}{2} BA$ (ví dụ 10).

Ta lại có $BC = \frac{1}{2} BA$ nên C trùng H. Mâu thuẫn.

Vậy $\widehat{ACB} = 90^\circ$.



Hình 100



Hình 101

b) (h.101) Gọi H là trung điểm của BC thì $BH = 1,5\text{dm}$. Do đó $BH = \frac{1}{2} BA$.

Theo câu a, ta có $\widehat{AHB} = 90^\circ$.

$$\triangle AHD = \triangle AHC \text{ (c.g.c)}$$

suy ra $AD = AC$.

121. (h.102) Giả sử $HD > HE$ thì

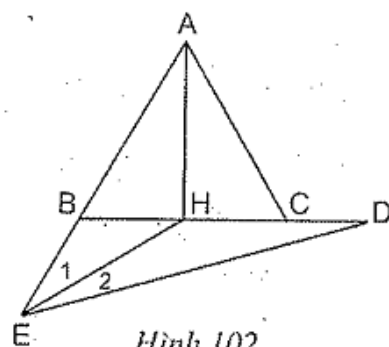
$$\widehat{E}_2 > 15^\circ \quad (1)$$

Mặt khác, $HD > HE$ nên $HA > HE$, do đó

$$\widehat{E}_1 > 30^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BED} > 45^\circ$. Do đó

$\widehat{ABD} > 60^\circ$, trái với giả thiết.



Hình 102

Giả sử $HD < HE$, chứng minh tương tự, $\widehat{ABD} < 60^\circ$, trái với giả thiết. Vậy $HD = HE$.

122. Giả sử $c \geq a$ thì $c + c \geq a + c > b$. Ta có $2c > b$ nên $4c^2 > b^2$ (1). Từ $c \geq a$ suy ra $c^2 \geq a^2$ (2). Từ (1) và (2) dẫn đến $5c^2 > a^2 + b^2$, trái với giả thiết.

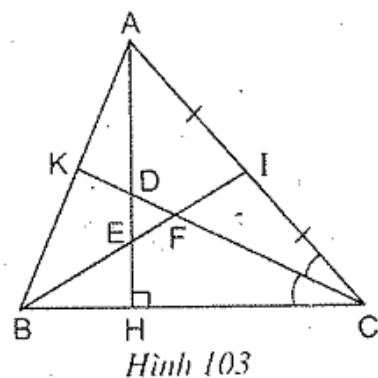
Giả sử $c \geq b$, cũng chứng minh tương tự dẫn đến điều vô lí.

Vậy c là độ dài của cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

123. Giả sử $\triangle DEF$ là tam giác đều (h.103).

Ta có $\widehat{CDH} = 60^\circ$ nên $\widehat{DCH} = 30^\circ$ do đó $\widehat{ACD} = 30^\circ$. Ta lại có $\widehat{CFI} = 60^\circ$ nên $\widehat{FIC} = 90^\circ$. $\triangle ABC$ có trung tuyến BI cũng là đường cao nên $\triangle ABC$ cân, lại có $\widehat{ACB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều. Do đó AH, BI, CK đồng quy, tức là ba điểm D, E, F trùng nhau, trái với giả thiết.

Vậy $\triangle DEF$ không thể là tam giác đều.



Hình 103

124. (h.104) Giả sử $\hat{A} \leq 45^\circ$.

Gọi Hx là tia đối của tia HA . Trên Hx lấy $HE = HA$ thì $\widehat{CEA} = \widehat{CAE} \leq 45^\circ$. Do đó $\widehat{ACE} \geq 90^\circ$. Ta sẽ chứng minh rằng khi đó $\widehat{ACB} > \widehat{ACE}$, và đó là điều vô lí (trái với giả thiết cho $\widehat{ACB} < 90^\circ$). Chứng minh điều này bằng cách chứng tỏ rằng B thuộc tia Ex .

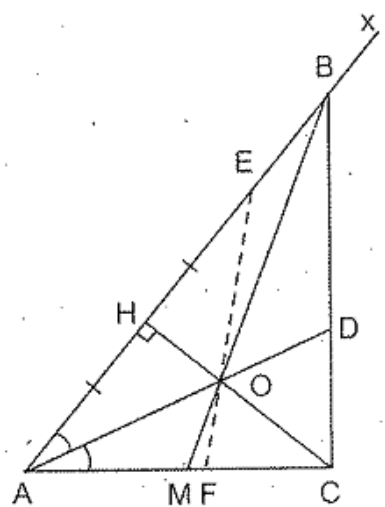
Thật vậy, gọi O là giao điểm của AD, BM, CH , gọi F là giao điểm của EO và AC .

$\triangle EAC$ có $EA > EC$ (vì EA đối diện với góc lớn hơn) mà EF là phân giác của góc AEC (để chứng

minh) nên $AF > FC$ (bài 78), suy ra $AF > \frac{AC}{2}$. Còn M là trung điểm của AC , nên M nằm giữa A và F . Vì thế B thuộc tia Ex .

Do đó $\widehat{ACB} > \widehat{ACE}$, mà $\widehat{ACE} \geq 90^\circ$ nên $\widehat{ACB} > 90^\circ$, trái với giả thiết.

Vậy $\hat{A} > 45^\circ$.



Hình 104

TƯƠNG TỰ

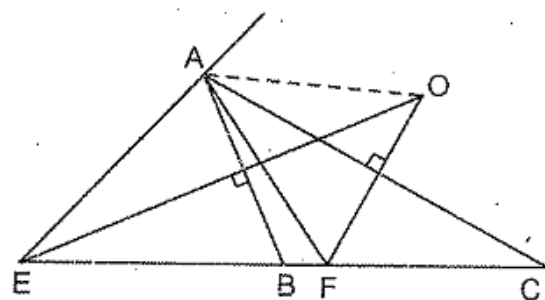
125. Xem bài 39.

126. Theo đề bài, các cạnh của tam giác có vai trò như nhau nên có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Khi đó $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$. Do đó $(a - b)(\hat{A} - \hat{B}) \geq 0$, $(b - c)(\hat{B} - \hat{C}) \geq 0$, $(a - c)(\hat{A} - \hat{C}) \geq 0$. Suy ra kết quả ở câu a.

Từ kết quả của câu a, khai triển rồi thu gọn, được kết quả ở câu b. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

127. (h.105)

Xét $\triangle AEF$, EO là tia phân giác của góc E , FO là tia phân giác góc ngoài đỉnh F , AO là tia phân giác của góc ngoài đỉnh A .

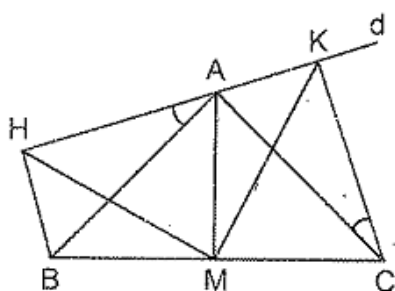


Hình 105

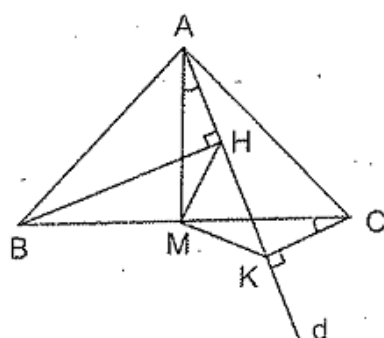
128. Chẳng hạn, thay "tam giác đều" bởi "tam giác vuông cân tại A".

129. Bài toán ban đầu : Xem hình 106.

Bài toán tương tự : Thay "B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ d" bởi "B và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ d".



Hình 106



Hình 107

Giải (h.107) :

$AB = CA$, $\widehat{BAH} = \widehat{ACK}$ (cùng phụ với $\widehat{CAK}$) nên

$\triangle ABH = \triangle CAK$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra

$$AH = CK \quad (1)$$

$\triangle ABC$ cân có trung tuyến AM là đường cao, từ đó

$$\triangle AMC \text{ vuông cân nên } AM = MC \quad (2)$$

$\widehat{MAH} = \widehat{MCK}$ vì cùng bằng $\widehat{BAH} - 45^\circ$ và $\widehat{ACK} - 45^\circ$ (hoặc $45^\circ - \widehat{BAH}$ và $45^\circ - \widehat{ACK}$).

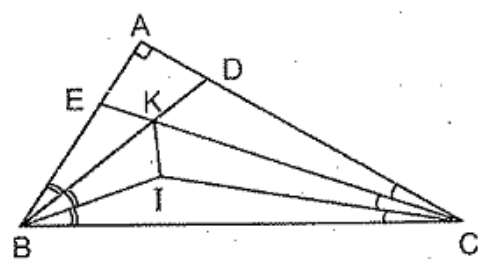
Do đó $\triangle MAH = \triangle MCK$ (c.g.c). Từ đó chứng minh $\triangle MHK$ vuông cân.

TÍNH SỐ ĐO GÓC

130. (h.108) Ta thấy $\widehat{KBC} = 2\widehat{KBE}$, $\widehat{KCB} = 2\widehat{KCD}$. Do đó vẽ I là giao điểm các tia phân giác của các góc KBC , KCB thì $\widehat{KBI} = 20^\circ$, $\widehat{KCI} = 10^\circ$.

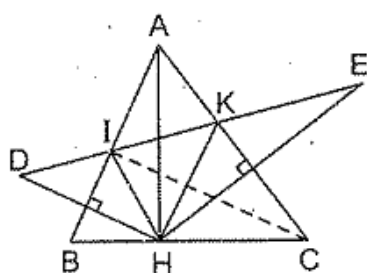
Ta có $\widehat{BKC} = 120^\circ$ và KI là phân giác của góc BKC nên $\widehat{BKI} = \widehat{CKI} = 60^\circ$. Sau đó chứng minh rằng $KE = KD$ vì cùng bằng KI.

Đáp số: $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$.

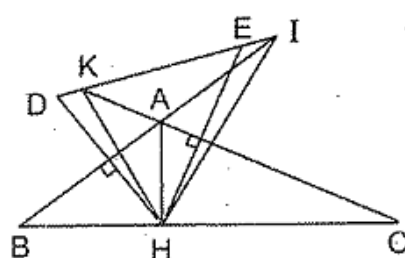


Hình 108

131. Trường hợp $\widehat{A} < 90^\circ$ (h.109). IB, KC là tia phân giác góc ngoài của $\triangle HIK$ nên HA là tia phân giác góc trong. Do $\widehat{AHC} = 90^\circ$ nên HC là tia phân giác góc ngoài đỉnh H. Các tia phân giác góc ngoài đỉnh H và K của $\triangle HIK$ cắt nhau ở C nên IC là tia phân giác của góc HIK, do đó $IB \perp IC$. Chứng minh tương tự, $BK \perp KC$.



Hình 109



Hình 110

Trường hợp $\widehat{A} > 90^\circ$ (h.110). $\triangle HIK$ có IB, KC là các tia phân giác góc trong, IC, KB là các tia phân giác góc ngoài. Ta cũng có $\widehat{AIC} = \widehat{AKB} = 90^\circ$.

Chú ý:

Trong trường hợp $\widehat{B} > 90^\circ$, $\triangle HIK$ có IB và KB là các tia phân giác góc trong, IC và KC là các tia phân giác góc ngoài.

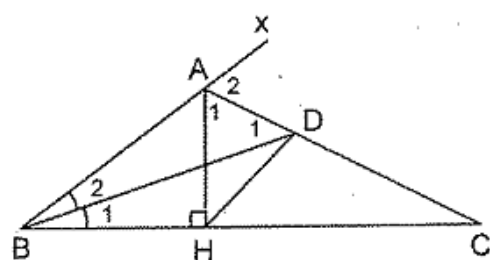
Trong trường hợp $\widehat{C} > 90^\circ$, $\triangle HIK$ có IB và KB là các tia phân giác góc ngoài, IC và KC là các tia phân giác góc trong.

Trong các trường hợp này, ta vẫn có $\widehat{AIC} = \widehat{AKB} = 90^\circ$.

132. (h.111) Để vẽ hình chính xác, ta vẽ $\triangle BHD$ có $\widehat{BHD} = 135^\circ$, rồi vẽ điểm A, sau đó vẽ điểm C.

Xét $\triangle ABH$ ta có:

$$\widehat{HAX} = \widehat{ABH} + 90^\circ = 2\widehat{B}_2 + 90^\circ.$$



Hình 111

Ta lại có $\widehat{HAX} = 2\widehat{A}_2$. Do đó

$$2\widehat{A}_2 = 2\widehat{B}_2 + 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 + 45^\circ \quad (1)$$

Mặt khác, xét $\triangle ABD$ ta có

$$\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 + \widehat{D}_1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D}_1 = 45^\circ$.

133. (h.112) O là giao điểm các đường trung trực của

$\triangle ABC$ nên $OB = OC$, do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$.

BC là đường trung trực của OK nên $BO = BK$,

$CO = CK$, do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.

K là giao điểm các đường phân giác nên

$\widehat{B}_2 = \widehat{B}_3$, $\widehat{C}_2 = \widehat{C}_3$.

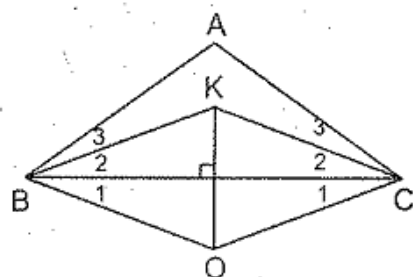
Đặt $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{B}_3 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \widehat{C}_3 = \alpha$.

Ta lại có $OA = OB$ nên $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$, $OA = OC$ nên $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$, do đó

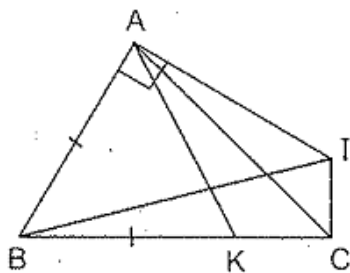
$$\widehat{BAC} = \widehat{OBA} + \widehat{OCA} = 3\alpha + 3\alpha = 6\alpha.$$

Xét $\triangle ABC$ ta có $\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ nên $6\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, suy ra $\alpha = 18^\circ$. Vậy $\widehat{B} = \widehat{C} = 36^\circ$, $\widehat{A} = 108^\circ$.

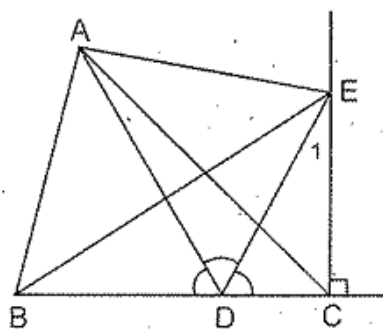
134. (h.113) Chú ý rằng $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên trên BC lấy $BK = BA$ thì $\triangle ABK$ đều, do đó $AK = AB$. Còn $\triangle ABI$ vuông cân nên $AI = AB$. Vậy $\triangle IAC = \triangle KAC$ (c.g.c) suy ra $\widehat{ICA} = \widehat{KCA} = 45^\circ$. Do đó $\widehat{ICB} = 90^\circ$.



Hình 112



Hình 113



Hình 114

135. (h.114) $\triangle CDE$ có CA là tia phân giác góc C, DA là tia phân giác góc ngoài tại D nên EA là tia phân giác góc ngoài tại E. Do $\widehat{E}_1 = 30^\circ$ nên

$$\widehat{DEA} = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ.$$

$\triangle ADB = \triangle ADE$ (g.c.g) $\Rightarrow DB = DE$. Tam giác BDE cân có góc ở đỉnh bằng 120° nên $\widehat{DBE} = 30^\circ$. Vậy $\widehat{CBE} = 30^\circ$.

136. (h.115) Từ hình vẽ, ta dự đoán $\triangle FHI$ là nửa tam giác đều, do đó trên tia đối của tia IH, ta lấy điểm K sao cho $IK = IH$.

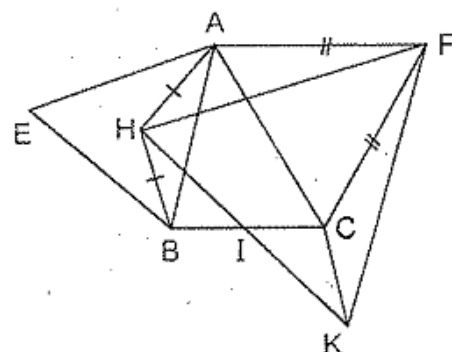
Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$ thì

$$\widehat{HAF} = 90^\circ + \alpha, \text{ (nếu } \alpha \leq 90^\circ \text{),}$$

$$\widehat{KCF} = 360^\circ - (\widehat{ICK} + \widehat{ACB} + \widehat{ACF}),$$

từ đó ta cũng được $\widehat{KCF} = 90^\circ + \alpha$. Do đó $\widehat{HAF} = \widehat{KCF}$. Trường hợp $\alpha > 90^\circ$ cũng chứng minh tương tự.

Như vậy $\triangle AHF = \triangle CKF$ (c.g.c) nên $FH = FK$, $\widehat{AFH} = \widehat{CFK}$, do đó $\widehat{HFK} = 60^\circ$ và HFK là tam giác đều. Các góc của $\triangle FHI$ là $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.



Hình 115

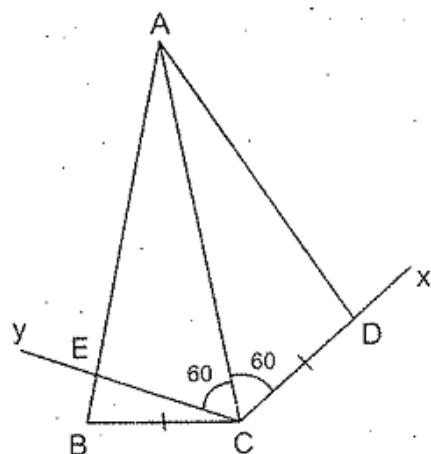
137. (h.116) Trên nửa mặt phẳng chứa B có bờ AC, vẽ tia Cy sao cho $\widehat{ACy} = 60^\circ$, tia này cắt AB ở E.

$\triangle CBE$ có $B = 80^\circ$,

$$\widehat{CEB} = \widehat{ACE} + \widehat{CAE} = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$$

nên là tam giác cân, suy ra $CB = CE$. Do đó $\triangle ACD = \triangle ACE$ (c.g.c).

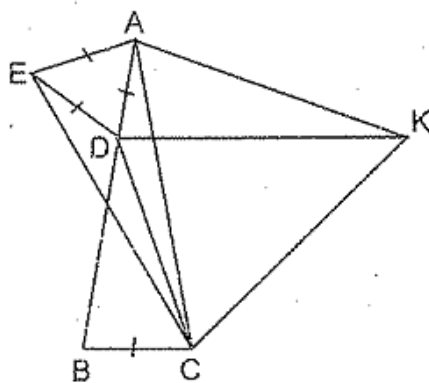
Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{AEC} = 100^\circ$.



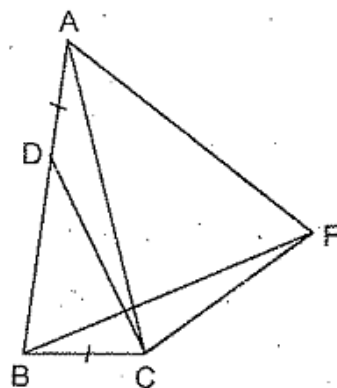
Hình 116

138. Cách 1. Vẽ tam giác đều ADE nằm ngoài $\triangle ABC$ (h.117) thì $\widehat{CAE} = 80^\circ$. Do đó $\triangle CAE = \triangle ABC$ (c.g.c) suy ra $CE = AC$, $\widehat{ACE} = \widehat{BAC} = 20^\circ$. Ta có $\triangle ACD = \triangle ECD$ (c.c.c) nên $\widehat{ACD} = \widehat{ECD} = 10^\circ$.

Cách 2. Vẽ tam giác đều ACK nằm ngoài $\triangle ABC$ (h.117). Chứng minh rằng $\triangle DKC$ cân có đáy DC, góc ở đỉnh 40° , do đó $\widehat{KCD} = 70^\circ$, $\widehat{ACD} = 10^\circ$.



Hình 117



Hình 118

Cách 3. Vẽ tam giác đều AFB (F và C cùng phía đối với AB, h.118).

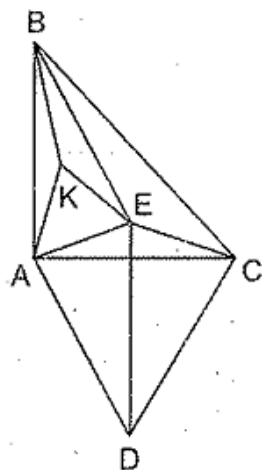
Tính $\widehat{AFC}$, rồi chứng minh $\widehat{ACD} = \widehat{BFC}$.

139. (h.119) $\widehat{BAE} = 75^\circ$, $\widehat{EAC} = \widehat{ECA} = 15^\circ$.

Ta thấy $75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$ là góc của tam giác đều. Do đó có thể giải bằng các cách sau :

Cách 1. Vẽ tam giác đều ACD ra phía ngoài $\triangle AEC$. $\triangle AEB = \triangle AED$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{AED}$. Ta tính $\widehat{AED}$. Do $DA = DC$, $EA = EC$ nên DE là đường trung trực của AC. Do đó

$$\widehat{AED} = \frac{\widehat{AEC}}{2} = 75^\circ.$$



Hình 119

Cách 2. Vẽ tam giác đều AEK ra phía ngoài $\triangle AEC$ rồi chứng minh

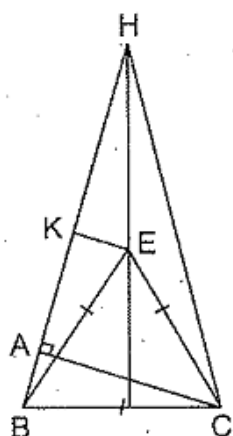
$$\triangle AKB = \triangle AEC \text{ (c.g.c), } \triangle BKE = \triangle BKA \text{ (c.g.c).}$$

Cách 3. Trong $\triangle ABC$ vẽ $\triangle AKB = \triangle AEC$ rồi chứng minh rằng $\triangle AEK$ đều.

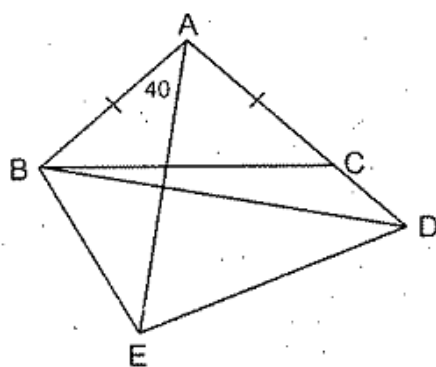
Cách 4. Vẽ tam giác đều CEH ra phía ngoài $\triangle AEC$ rồi chứng minh rằng $\triangle ABH$ đều.

140. (h.120) Chú ý rằng $75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$ là góc của tam giác đều. Ta vẽ tam giác đều BEC (E và H cùng phía đối với BC). Gọi K là trung điểm của BH thì $\widehat{EBK} = 15^\circ$. Do đó $\triangle EBK = \triangle BCA$ (c.g.c) suy ra $\widehat{K} = 90^\circ$.

Ta có $\triangle BEH$ cân, $\widehat{BEH} = 150^\circ$ nên $\widehat{CEH} = 150^\circ$, do đó $\triangle BEH = \triangle CEH$ (c.g.c).
Suy ra $\widehat{BHE} = \widehat{CHE}$. Vậy $\widehat{BHC} = 30^\circ$.



Hình 120



Hình 121

141. (h.121) Tam giác cân ABC có góc ở đỉnh lớn hơn góc ở đáy :

$$100^\circ - 40^\circ = 60^\circ.$$

Do đó vẽ $\triangle ADE$ đều (B và E cùng phía với AD) thì

$$\widehat{BAE} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ.$$

$$\triangle BAE = \triangle ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BE = AC = AB.$$

$\triangle ABE$ cân có góc ở đáy 40° nên $\widehat{ABE} = 100^\circ$.

$$\triangle ABD = \triangle EBD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{EBD} = 50^\circ.$$

142. (h.122) Chú ý rằng CM là tia phân giác của góc C nên trên tia CA lấy $CE = CB$ thì

$$\triangle CME = \triangle CMB \text{ (c.g.c)}$$

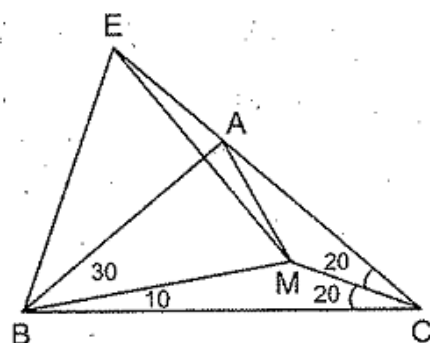
$$\Rightarrow ME = MB \text{ và } \widehat{BME} = 60^\circ.$$

Do đó $\triangle EBM$ đều, $BM = BE$.

Ta tính được

$$\widehat{ABE} = \widehat{ABM} = 30^\circ, \triangle ABM = \triangle ABE \text{ (c.g.c)},$$

do đó $\widehat{AMB} = \widehat{AEB} = 70^\circ$.



Hình 122

143. (h.123)

Trên tia CA lấy điểm E sao cho $CE = CB$. Ta có $\triangle CME = \triangle CMB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow ME = MB \text{ và } \widehat{BME} = 60^\circ.$$

Do đó $\triangle EBM$ đều, suy ra

$$BE = BM \quad (1)$$

$\triangle CBE$ cân tại C có $\widehat{C} = 36^\circ$ nên $\widehat{CEB} = 72^\circ$.

Ta tính được $\widehat{BAE} = 72^\circ$ nên $\triangle ABE$ cân, suy ra

$$AB = BE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BA = BM$. Từ đó $\widehat{AMB} = 78^\circ$.

144. (h.124) Vẽ điểm K sao cho BC là đường trung trực của MK . Ta tính được $\widehat{ABK} = 70^\circ$, $\widehat{ACK} = 60^\circ$. Đặt $AB = AC = a$. Ta tính được

$$\widehat{BKC} = 130^\circ \quad (1)$$

Nếu $AK > a$ thì :

– Xét $\triangle AKB$ có $\widehat{ABK} > \widehat{AKB}$ tức là

$$70^\circ > \widehat{AKB}.$$

– Xét $\triangle AKC$ có $\widehat{ACK} > \widehat{AKC}$ tức là $60^\circ > \widehat{AKC}$.

Suy ra $130^\circ > \widehat{BKC}$, trái với (1).

Tương tự, nếu $AK < a$ thì $130^\circ < \widehat{BKC}$, trái với (1).

Vậy $AK = a$. Do đó $\triangle ACK$ đều. Từ đó $MC = KC = AC$. Tam giác ACM cân tại C , $\widehat{ACM} = 20^\circ$ nên $\widehat{MAC} = 80^\circ$.

145. (h.125) $\triangle ABD$ cân tại D (vì $\widehat{DBA} = 50^\circ$, $\widehat{DAB} = 50^\circ$). Ta lại có $\widehat{ABI} = 30^\circ$.

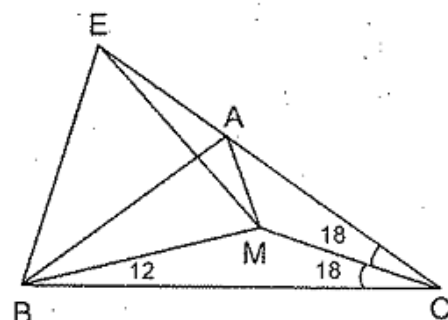
Áp dụng kết quả của bài 51, lấy K trên BI sao cho $\widehat{BAK} = 10^\circ$, ta chứng minh được

$$AK = AD \quad (1)$$

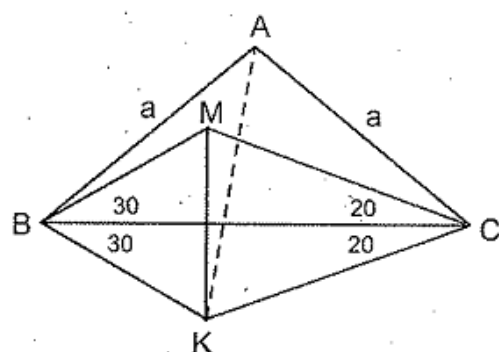
Ta tính được $\widehat{AEB} = 70^\circ$, $\widehat{EAK} = 70^\circ$ nên $\triangle AKE$ cân, do đó

$$AK = EK \quad (2)$$

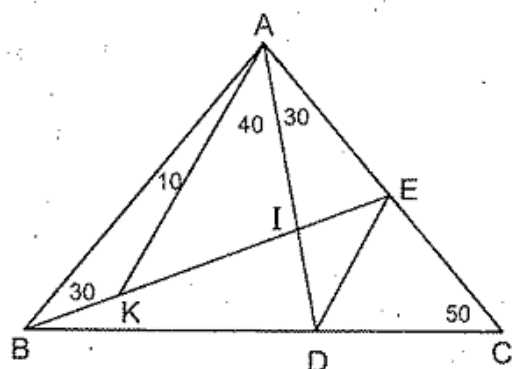
Từ (1) và (2) : $AD = EK$.



Hình 123



Hình 124



Hình 125

$\triangle IAK$ cân (vì $\widehat{IKA} = 40^\circ$, $\widehat{IAK} = 40^\circ$) nên $IA = IK$.

Từ đó $ID = IE$. Ta tính được: $\widehat{DIE} = 100^\circ$, $\widehat{IED} = \widehat{IDE} = 40^\circ$.

146. (h.126) Vẽ $\triangle MBK$ vuông cân tại B (K và A nằm cùng phía đối với BM). Đặt $MA = a$, $MB = 2a$, $MC = 3a$.

$\triangle ABK = \triangle CBM$ (c.g.c) suy ra $AK = CM = 3a$.

Xét $\triangle MBK$ vuông cân tại B:

$$MK^2 = MB^2 + BK^2 = (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2.$$

Xét $\triangle AMK$ ta có:

$$MA^2 + MK^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2 = AK^2$$

nên $\widehat{AMK} = 90^\circ$ (định lý Py-ta-go đảo).

Vậy $\widehat{AMB} = 135^\circ$.

147. (h.127) Vẽ tam giác đều MBK (K và A nằm cùng phía đối với BM). Đặt $MA = 3a$, $MB = 4a$, $MC = 5a$.

Hãy chứng minh $\triangle ABK = \triangle CBM$ để suy ra $KA = MC = 5a$. Từ đó tính được $\widehat{AMK} = 90^\circ$.

Đáp số: $\widehat{AMB} = 150^\circ$.

148. (h.128)

Lấy D trên cạnh AB sao cho $AD = AN$ thì $DN \parallel BC$, $\widehat{AND} = 80^\circ$. Ta cần tính $\widehat{DNM}$.

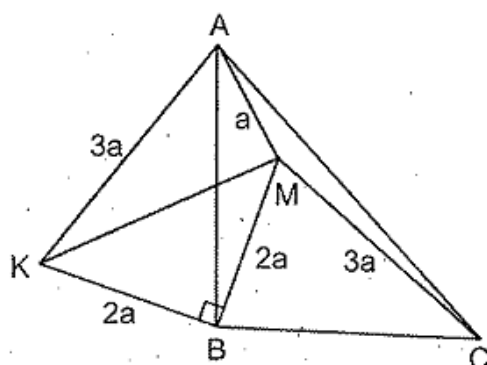
Gọi I là giao điểm của CD và BN thì các tam giác BIC, DIN là tam giác đều. Ta sẽ chứng minh rằng NM là tia phân giác của góc DNI bằng cách chứng minh $\triangle MDN = \triangle MIN$.

Ta đã có $\widehat{MDI} = 40^\circ$ (1)

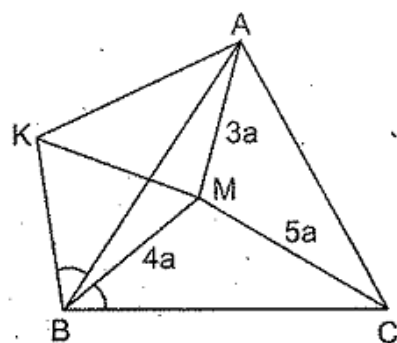
Cần tính $\widehat{MID}$. Chú ý rằng $\triangle BCM$ có hai góc bằng nhau nên $BC = BM$, do đó $BI = BM$. Ta có $\triangle BIM$ cân có góc đỉnh 20° nên $\widehat{BIM} = 80^\circ$, suy ra

$$\widehat{MID} = 40^\circ \quad (2)$$

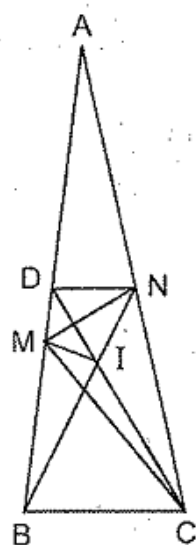
Dễ dàng chứng minh được $\widehat{MNA} = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$.



Hình 126



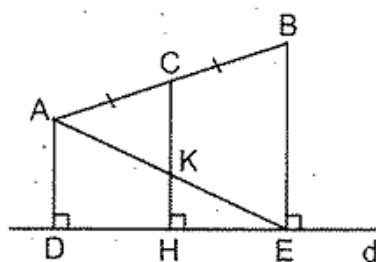
Hình 127



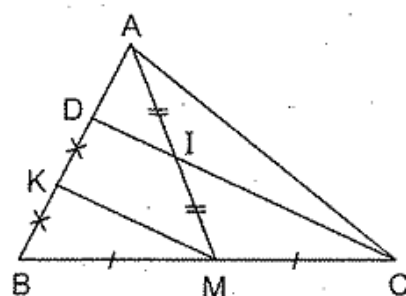
Hình 128

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ BỔ SUNG

149. (h.129) Gọi K là giao điểm của CH và AE. Ta tính được $CK = 3$, $KH = 2$ nên $CH = 5$.



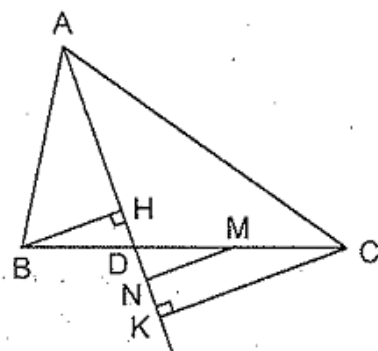
Hình 129



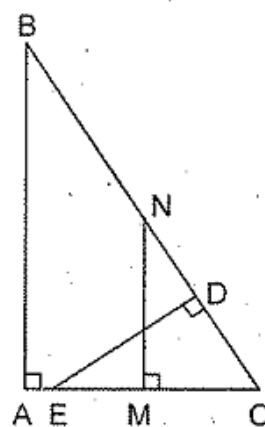
Hình 130

150. (h.130) Gọi K là trung điểm của DB. Chứng minh rằng $MK \parallel CD$ rồi chứng minh $AD = DK$.

151. (h.131) Gọi M là trung điểm của DC, N là trung điểm của DK. Chứng minh rằng $MN = \frac{1}{2} CK$, $MN = BH$.



Hình 131



Hình 132

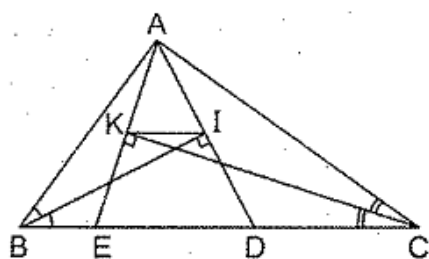
152. (h.132) Qua trung điểm M của AC, kẻ đường vuông góc với AC, cắt BC ở N.

Chứng minh rằng $DE = MN = \frac{1}{2} AB = 3$.

153. (h.133) a) Gọi D và E là giao điểm của AI và AK với BC. Chứng minh rằng $AI = ID$, $AK = KE$.

b) Chú ý rằng $DE = BD + CE - BC = AB + AC - BC$

từ đó $IK = \frac{AB + AC - BC}{2}$.



Hình 133

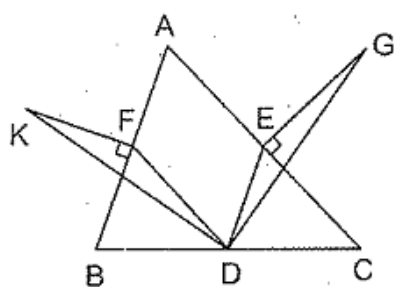
154. (h.134)

a) Trước hết chứng minh rằng $\widehat{KFD} = \widehat{DEG}$, do đó

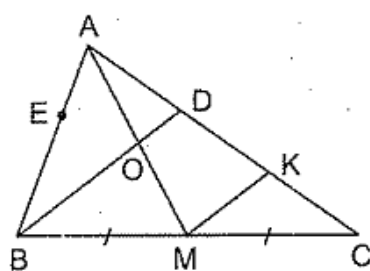
$$\Delta KFD = \Delta DEG \text{ (c.g.c)}$$

b) Suy ra $KD = DG$, $\widehat{KDF} = \widehat{DGE}$.

Sau đó chứng minh $\widehat{KDG} = 90^\circ$.



Hình 134

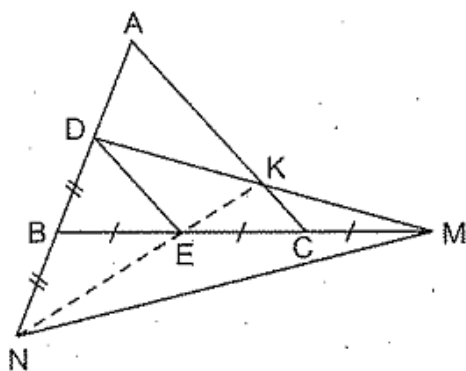


Hình 135

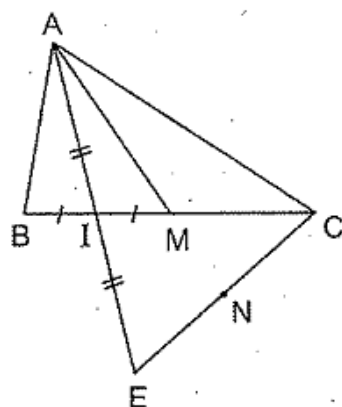
155. (h.135) Gọi K là trung điểm của DC, O là giao điểm của AM và BD. Ta có MK là đường trung bình của $\triangle BCD$ nên $MK \parallel BD$. $\triangle AMK$ có $AD = DK$, $DO \parallel MK$ nên O là trung điểm của AM. Như vậy BD đi qua trung điểm của AM.

Chứng minh tương tự, CE cũng đi qua trung điểm của AM. Vậy BD, CE, AM đồng quy.

156. (h.136) Chứng minh rằng K là trung điểm của DM, E là trọng tâm của $\triangle MND$.



Hình 136



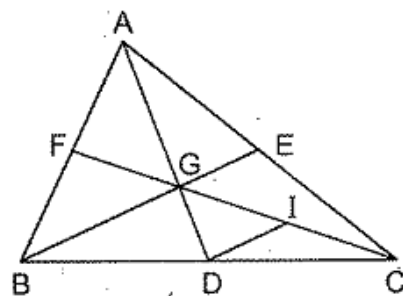
Hình 137

157. (h.137) $\triangle ACE$ có CI là đường trung tuyến, $CM = \frac{2}{3} CI$ nên M là trọng tâm của tam giác. Do đó đường thẳng AM đi qua trung điểm N của EC.

158. (h.138) Xét $\triangle ABC$ có các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau ở G. Gọi I là trung điểm của GC.

Ta có $GD = \frac{1}{3} AD$, $GI = \frac{1}{3} CF$, $DI = \frac{1}{2} BG = \frac{1}{3} BE$.

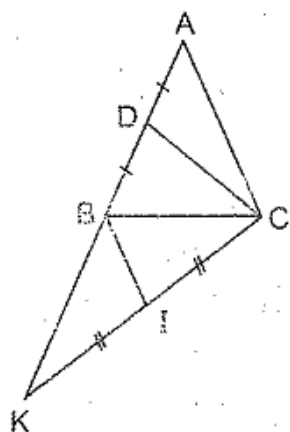
Trong ba đoạn thẳng GD, GI, DI, mỗi đoạn thẳng nhỏ hơn tổng của hai đoạn kia. Do đó trong ba đoạn thẳng AD, CF, BE, mỗi đoạn thẳng cũng nhỏ hơn tổng của hai đoạn kia.



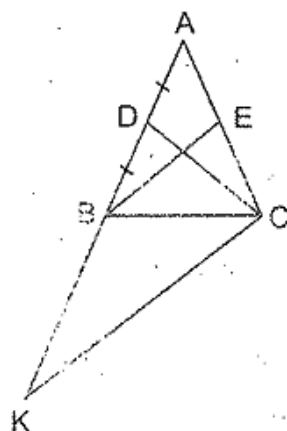
Hình 138

159. Hướng thứ nhất : Tạo ra đoạn thẳng bằng nửa CK.

Cách 1. (h.139) Gọi I là trung điểm của CK thì $CI = \frac{CK}{2}$. Sau đó chứng minh $CI = CD$ do $\triangle CBI = \triangle CBD$ (c.g.c).



Hình 139



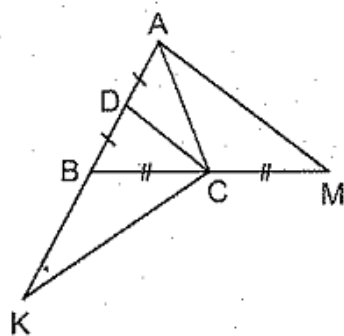
Hình 140

Cách 2. (h.140) Gọi E là trung điểm của AC thì $BE = \frac{CK}{2}$. Sau đó chứng minh $BE = CD$ do $\triangle BCE = \triangle CBD$ (c.g.c).

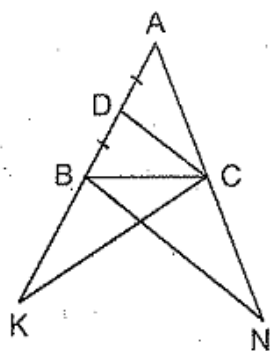
Hướng thứ hai : Tạo ra đoạn thẳng gấp đôi CD.

Cách 3. (h.141) Trên tia đối của tia CB lấy M sao cho $CM = CB$ thì $AM = 2CD$. Sau đó chứng minh $AM = CK$ do $\triangle MCA = \triangle CBK$ (c.g.c).

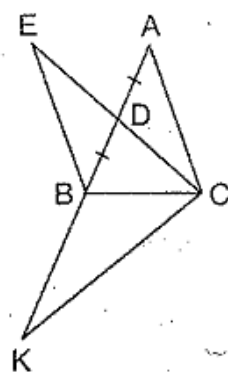
Cách 4. (h.142) Trên tia đối của tia CA lấy N sao cho $CN = CA$ thì $BN = 2CD$. Sau đó chứng minh $BN = CK$ do $\triangle BCN = \triangle CBK$ (c.g.c).



Hình 141



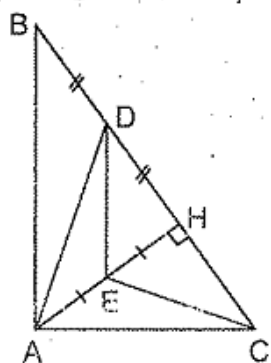
Hình 142



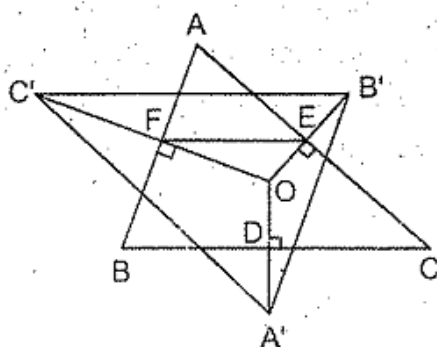
Hình 143

Cách 5. (h.143) Trên tia đối của tia DC lấy E sao cho $DE = DC$. Dễ dàng chứng minh được $BE = AC$, $BE \parallel AC$. Sau đó chứng minh $\triangle CBE = \triangle CBK$ (c.g.c).

160. (h.144) Chú ý rằng $DE \perp AC$ và E là trực tâm của $\triangle ADC$.



Hình 144



Hình 145

161. (h.145) Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Ta có FE là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $FE = \frac{BC}{2}$. FE cũng là đường trung bình của $\triangle OB'C'$ nên $FE = \frac{B'C'}{2}$ suy ra $BC = B'C'$.

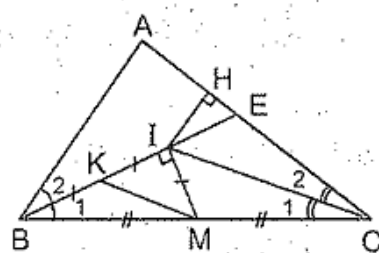
Chứng minh tương tự $AB = A'B'$, $AC = A'C'$

Vậy $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.c.c).

162. (h.146) a) Đề bài cho $BI = 2IM$, do đó ta lấy K là trung điểm của BI. Ta có $\triangle KIM$ vuông cân, $\widehat{IMK} = 45^\circ$, KM là đường trung bình của $\triangle BIC$, do đó $KM \parallel IC$, $\widehat{CIM} = \widehat{IMK} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{BIC} = 135^\circ$, $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 45^\circ$, $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$.

Vậy $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

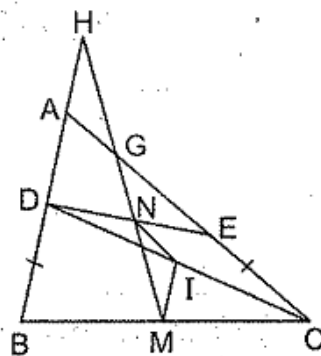


Hình 146

b) Gọi E là giao điểm của BI và AC. Ta có $\widehat{BIC} = 135^\circ$ nên $\widehat{CIE} = 45^\circ$. Do $\triangle CIE = \triangle CIM$ (g.c.g) nên $IE = IM$.

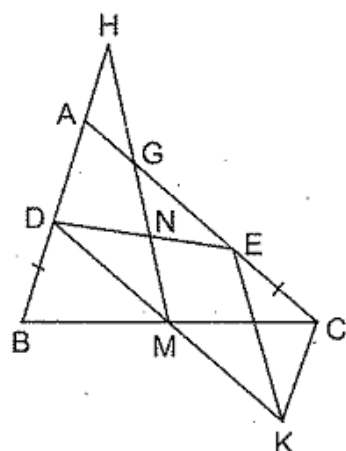
Do đó $BK = KI = IE$. Từ đó dễ dàng chứng minh được $BA = 3IH$.

163. Cách 1. Để chứng minh MN tạo với AB và AC các góc bằng nhau, ta sẽ chứng minh rằng MN tạo với hai đường thẳng song song với AB và AC các góc bằng nhau. Muốn vậy lấy I là trung điểm của DC (h.147) thì $IM \parallel AB$, $IN \parallel AC$. Do $BD = CE$ nên $IM = IN$. Ta có MN tạo với IM, IN các góc bằng nhau ($\triangle IMN$ cân) nên MN cũng tạo với AB, AC các góc bằng nhau ($\triangle AGH$ cân).

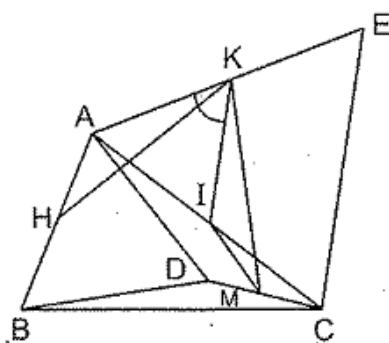


Hình 147

Cách 2. Ta tạo ra đường thẳng song song với MN bằng cách lấy trên tia đối của tia MD điểm K sao cho $MK = MD$ (h.148) thì $EK \parallel MN$. Đoạn thẳng BD được di chuyển đến vị trí CK thuận lợi hơn song song với nó, tạo nên $\triangle CEK$ cân. Ta có EK tạo với AC, CK các góc bằng nhau. Từ đó MN tạo với AC, AB các góc bằng nhau ($\triangle AGH$ cân).



Hình 148



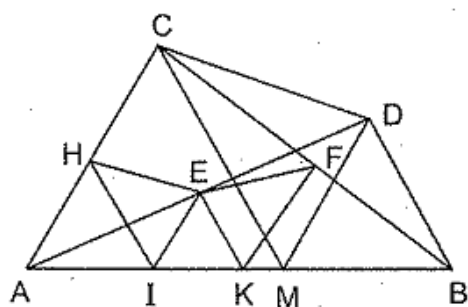
Hình 149

164. (h.149)

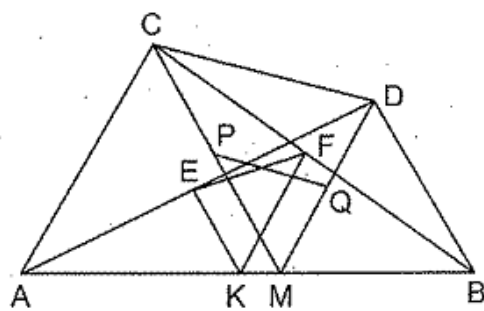
Để chứng tỏ $\triangle HKM$ đều, ta sẽ chứng minh rằng $HK = KM$ và $\widehat{HKM} = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm của AC. Trước hết ta thấy $\widehat{HAK} = \widehat{MIK}$ (chú ý rằng $\widehat{DAC} = \widehat{MIC}$). Do đó $\triangle HAK = \triangle MIK$ (c.g.c) nên $HK = KM$, $\widehat{AKH} = \widehat{IKM}$, từ đó $\widehat{HKM} = 60^\circ$.

165. *Cách 1.* (h.150)

Ta tạo ra đoạn thẳng bằng nửa CD, đó là EH (H là trung điểm của AC). Để chứng tỏ $EF = EH$, ta xét chúng là cặp cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau. Gọi I là trung điểm của AM, K là trung điểm của AB. Ta có $\triangle EIH = \triangle EKF$ (c.g.c) nên $EF = EH$.



Hình 150

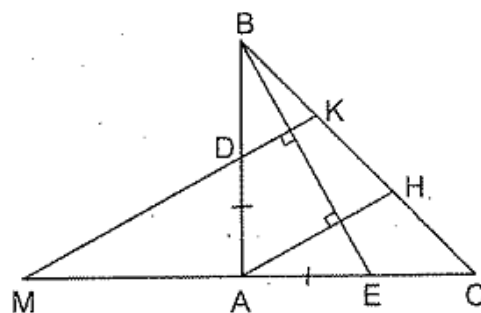


Hình 151

Cách 2. (h.151)

Ta cũng tạo ra đoạn thẳng bằng nửa CD, đó là PQ (P là trung điểm của MC, Q là trung điểm của MD). Để chứng minh $EF = PQ$, ta lấy K là trung điểm của AB rồi chứng minh $\triangle EKF = \triangle QMP$ (c.g.c).

166. Do $DK \parallel AH$ nên để chứng minh $KH = HC$, ta sẽ chứng tỏ rằng AH là đường trung bình của một tam giác có một cạnh là KC . Gọi M là giao điểm của KD và AC (h.152). $\triangle ABE = \triangle AMD$ (g.c.g) suy ra $AB = AM$, mà $AB = AC$, nên $AM = AC$. $\triangle CKM$ có $AM = AC$, $AH \parallel MK$ nên $KH = HC$.



Hình 152

167. (h.153) Kẻ DM, IN song song với BC .

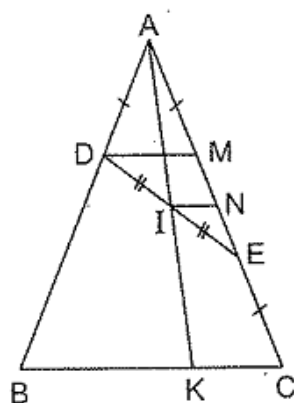
$$\triangle ADM \text{ cân} \Rightarrow AM = AD = CE \quad (1)$$

$\triangle DEM$ có $DI = IE$, $IN \parallel DM$ nên

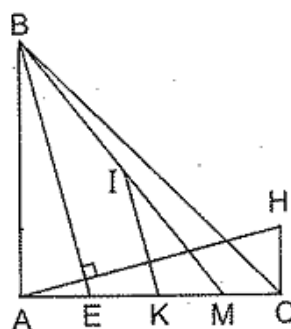
$$MN = NE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AN = NC$.

$\triangle AKC$ có $AN = NC$, $IN \parallel KC$ nên $AI = IK$.



Hình 153



Hình 154

168. (h.154)

Để chứng minh $MC = CH$, ta tạo ra một đoạn thẳng trung gian.

Qua B vẽ đường vuông góc với AH , cắt AC ở E thì $BE \parallel IK$ nên $EK = KM$, do đó

$$AE = MC \quad (1)$$

$$\triangle ABE = \triangle CAH \text{ (g.c.g) nên } AE = CH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MC = CH$. Do đó $\triangle MCH$ vuông cân.

169. (h.155) Kẻ $BH \perp AC$.

$\triangle ABH$ vuông có $\widehat{BAH} = 60^\circ$ nên $AH = \frac{AB}{2} = 2$. Bằng định lý Py-ta-go, ta

tính được $BH = 2\sqrt{3}$.

$$CH = HA + AC = 2 + 6 = 8.$$

Kẻ $MK \perp CH$ thì $HK = \frac{HC}{2} = 4$ nên $AK = 2$.

Ta lại có $MK = \frac{BH}{2} = \sqrt{3}$ nên

$$AM^2 = AK^2 + MK^2 = 4 + 3 = 7.$$

Do đó $AM = \sqrt{7}$.

170. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của BD, AC (h.156) thì B' thuộc DF và $DB' = 2B'F$. Gọi K là trung điểm của DB' thì EK là đường trung bình của $\triangle DBB'$ nên $EK \parallel BB'$.

$\triangle EKF$ có $KB' = B'F$ và $BB' \parallel EK$ nên BB' đi qua trung điểm của EF.

Chứng minh tương tự như trên, các đường thẳng AA' , CC' , DD' cũng đi qua trung điểm của EF. Do đó AA' , BB' , CC' , DD' đồng quy.

171. (h.157) Gọi M là trung điểm của CH thì $DM \parallel BH$. Ta sẽ chứng minh $AI \perp DM$.

MI là đường trung bình của $\triangle HDC \Rightarrow MI \parallel DC$.
Do đó $MI \perp AD$.

$\triangle ADM$ có I là trực tâm nên $AI \perp DM$. Do đó $AI \perp BH$.

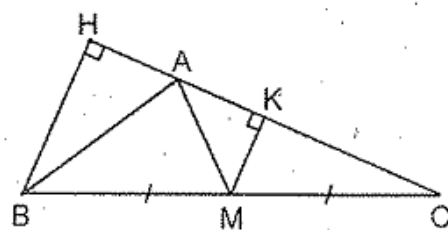
172. Gọi $\triangle ABC$ là tam giác cân ở A, các đường phân giác AD, BE thỏa mãn $AD = \frac{BE}{2}$ (h.158)

Gọi F là trung điểm của EC thì $DF \parallel BE$,
 $DF = \frac{BE}{2}$ nên $DF = AD$.

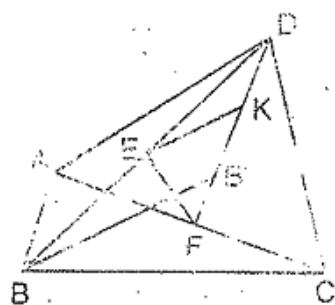
$$\text{Đặt } \widehat{C} = 2\alpha \text{ thì } \widehat{DAC} = 90^\circ - 2\alpha \quad (1)$$

$$\widehat{EBC} = \alpha, \widehat{AEB} = 2\alpha + \alpha = 3\alpha, \text{ suy ra } \widehat{AFD} = 3\alpha.$$

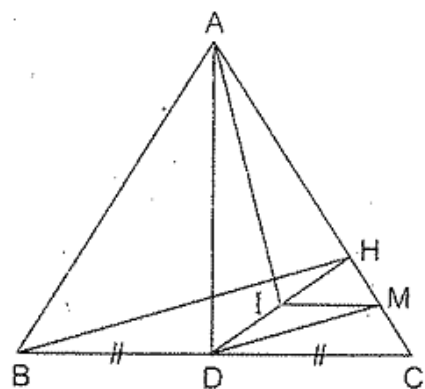
$$\text{Ta có } \triangle ADF \text{ cân nên } \widehat{DAC} = \widehat{AFD} = 3\alpha \quad (2)$$



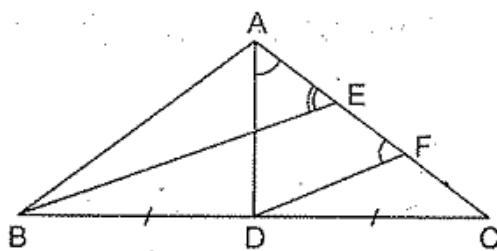
Hình 155



Hình 156



Hình 157

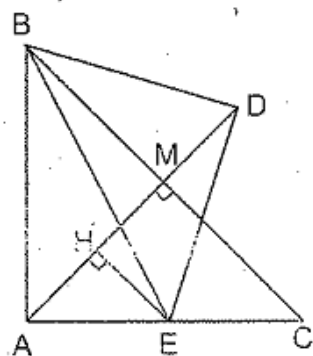


Hình 158

Từ (1) và (2) suy ra $3\alpha = 90^\circ - 2\alpha$, do đó $\alpha = 18^\circ$. Vậy $\hat{C} = \hat{B} = 36^\circ$, $\hat{A} = 108^\circ$.

173. (h.159)

Đo các góc của $\triangle BDE$ để dự đoán kết quả, ta được $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. Như vậy ta cần phải chứng minh $\triangle BDE$ vuông cân. Để chứng tỏ $DB = DE$ ta xét chúng là cặp cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau. DB là cạnh huyền của $\triangle BMD$ vuông. Do đó ta vẽ $EH \perp AD$ rồi chứng minh rằng $\triangle BMD = \triangle DHE$ (c.g.c).



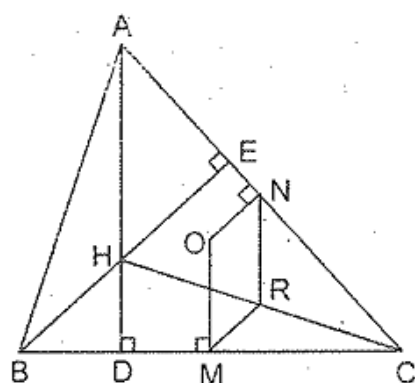
Hình 159

174. (h.160) Xét $\triangle ABC$, các đường cao AD và BE cắt nhau ở H , các đường trung trực OM và ON của BC và AC cắt nhau ở O . Ta sẽ chứng minh

$$OM = \frac{1}{2} AH.$$

Gọi R là trung điểm của CH . Ta có NR là đường trung bình của $\triangle AHC$ nên $NR \parallel AH$,

$$NR = \frac{AH}{2}. \text{ Cần chứng minh } OM = NR.$$



Hình 160

Ta có $OM \parallel NR$ (cùng song song với AD), $ON \parallel MR$ (cùng song song với BE) nên dễ dàng chứng minh được $OM = NR$.

$$\text{Do đó } OM = \frac{1}{2} AH.$$

175. (h.161) Cho $\triangle ABC$, đường trung tuyến AM . Gọi H là trực tâm, O là giao điểm các đường trung trực, G là giao điểm của AM và HO . Ta sẽ chứng minh rằng G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

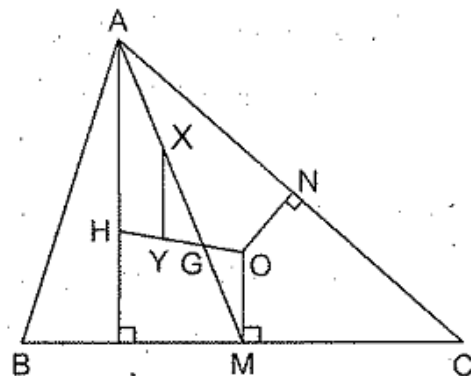
Ta dễ dàng chứng minh được $OM \parallel AH$,

$$OM = \frac{AH}{2} \text{ (xem bài 174).}$$

Gọi X và Y là trung điểm của GA , GH thì XY là đường trung bình của $\triangle GAH$ nên

$$XY \parallel AH, XY = \frac{AH}{2}. \text{ Do đó } OM \parallel XY \text{ và}$$

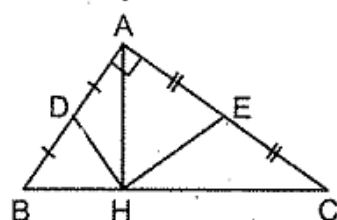
$$OM = XY.$$



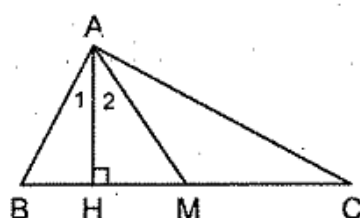
Hình 161

Từ đó $\Delta GMO = \Delta GXY$ (g.c.g) suy ra $GM = GX$. Điểm G thuộc đường trung tuyến AM và $GA = \frac{2}{3} AM$ nên G là trọng tâm của ΔABC .

176. (h.162) Chứng minh rằng $HD = AD$, $HE = AE$, $\Delta DHE = \Delta DAE$ (c.c.c) để suy ra $\widehat{DHE} = \widehat{DAE} = 90^\circ$.



Hình 162



Hình 163

177. (h.163) AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của ΔABC vuông $\Rightarrow MA = MB = MC$.

$$\Delta MAB \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{MAB} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{C} = \widehat{A_1} \text{ (cùng phụ với } \widehat{HAC}) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{MAB} - \widehat{A_1} = \widehat{A_2}.$$

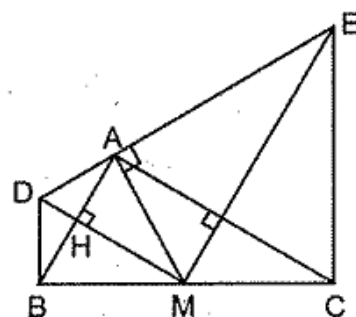
$$\text{Vậy } \widehat{MAH} = \widehat{B} - \widehat{C}.$$

178. (h.164) a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông: $MA = MB$. Gọi H là giao điểm của MD và AB. Tam giác cân AMB có MH là đường cao ứng với đáy nên là đường trung trực, suy ra $DA = DB$.

$$\Delta MBD = \Delta MAD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MAD} = 90^\circ \Rightarrow DB \perp BC.$$

Tương tự $EC \perp BC$. Vậy $BD \parallel CE$.

- b) Theo câu a, $DB = DA$. Tương tự $EC = EA$. Suy ra $DE = DA + AE = BD + CE$.



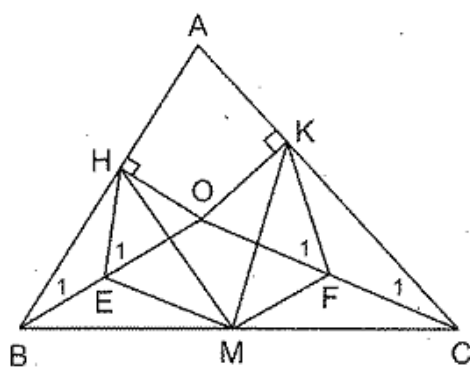
Hình 164

179. (h.165)

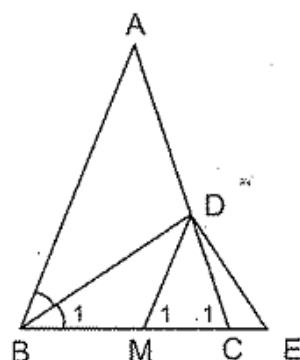
- a) Các tam giác vuông OHB và OKC có HE và KF là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $\widehat{E_1} = 2\widehat{B_1}$, $\widehat{F_1} = 2\widehat{C_1}$, do đó

$$\widehat{E_1} = \widehat{F_1}. \quad (1)$$

b) Từ (1) suy ra $\widehat{MEH} = \widehat{MFK}$. Từ đó $\triangle MEH = \triangle KFM$ (c.g.c) nên $MH = MK$.



Hình 165



Hình 166

180. (h.166)

Gọi M là trung điểm của BE thì

$$BE = 2MB = 2MD \quad (1)$$

Ta có $\widehat{M}_1 = 2\widehat{B}_1$, $\widehat{C}_1 = 2\widehat{B}_1$ nên $\widehat{M}_1 = \widehat{C}_1$, do đó

$$MD = CD \quad (2)$$

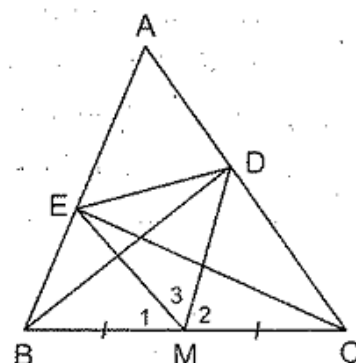
Từ (1) và (2) suy ra $BE = 2CD$.

181. (h.167)

Gọi M là trung điểm của BC thì các tam giác MBE, MDE, MDC cân.

Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{ADE} &= 180^\circ - \widehat{MDE} - \widehat{MDC} \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{M}_3}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{M}_2}{2} \\ &= \frac{\widehat{M}_3 + \widehat{M}_2}{2} = \frac{2\widehat{MBE}}{2} = \widehat{ABC}. \end{aligned}$$



Hình 167

Chú ý : Bài toán cũng đúng nếu bỏ điều kiện "có ba góc nhọn" ở đề bài.

182. (h.168)

a) Dễ dàng chứng minh được $IH = OM$, $IH \parallel OM$ do $\triangle OMN = \triangle HIK$ (g.c.g).

Do đó $\triangle IHQ = \triangle MOQ$ (g.c.g) suy ra $QH = QO$, $QI = QM$.

b) $\triangle DIM$ vuông có DQ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $QD = QI = QM$. Nhưng QI là đường trung bình của $\triangle OHA$ nên $QI = \frac{OA}{2}$ do đó

$$QI = QM = QD = \frac{OA}{2}.$$

c) Tương tự như câu b, ta có

$$QK = QN = QE = \frac{OB}{2},$$

$$QR = QP = QF = \frac{OC}{2}.$$

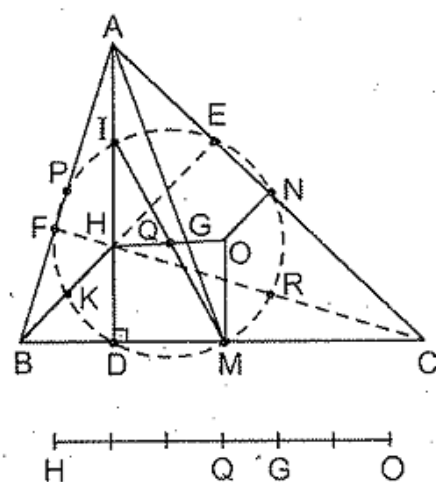
d) Do $OA = OB = OC$ nên chín đoạn thẳng $QI, QM, QD, QK, QN, QE, QR, QP, QF$ bằng nhau. Do đó chín điểm $I, M, D, K, N, E, R, P, F$ cách Q các đoạn bằng nhau và cùng thuộc đường tròn tâm Q .

Chú ý : Từ chứng minh trên, ta suy ra :

1. Chín điểm M, N, P (trung điểm của ba cạnh), D, E, F (chân ba đường cao), I, K, R (trung điểm của các đoạn nối trực tâm với đỉnh) cùng nằm trên một đường tròn. Đường tròn này gọi là *đường tròn chín điểm* hoặc *đường tròn Ô-le*. Các điểm I, K, R gọi là *điểm Ô-le*.

2. Tâm Q của đường tròn Ô-le thẳng hàng với trực tâm H , trọng tâm G và giao điểm O của ba đường trung trực tức là nằm trên đường thẳng Ô-le (xem bài 175). Vị trí của bốn điểm H, Q, G, O trên đường thẳng Ô-le được thể hiện trên hình 168, trong đó $HQ = QO, HG = 2GO$.

3. Bán kính của đường tròn Ô-le bằng $\frac{OA}{2}$ tức là bằng nửa bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



Hình 168