

I. TRẮC NGHIỆM (1,0 điểm). Chọn chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Cặp số $(-1; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} x+5y=9 \\ 6x+2y=-2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} -2x+y=7 \\ x-\frac{3}{4}y=3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x+y=1 \\ -2x+y=4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x-2y=0 \\ x+y=3 \end{cases}$

Câu 2. Điều kiện của m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 0, x_2 > 0$ là:

A. $m = -2$ B. $m = 2$ C. $m = \pm 2$ D. $m = 16$

Câu 3. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB , dây $AC = R$. Khi đó số đo độ của cung nhỏ BC là:

A. 60° B. 120° C. 90° D. 150°

Câu 4. Độ dài của một đường tròn là 10π (cm). Diện tích của hình tròn đó là:

A. $10\pi (cm^2)$ B. $100\pi (cm^2)$ C. $50\pi (cm^2)$ D. $25\pi (cm^2)$

II. TỰ LUẬN (9,0 điểm)

Bài I (2,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{1}{y+1} = 3 \\ \frac{3}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 8 \end{cases}$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2mx - 2m + 1$

- Với $m = -1$. Hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).
- Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt : $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ sao cho tổng các tung độ của hai giao điểm bằng 2.

Bài II (2,5 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 120 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 5 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hết số hàng đó trong bao nhiêu ngày?

Bài III. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) có dây cung CD cố định. Gọi M là điểm nằm chính giữa cung nhỏ CD .

Đường kính MN của đường tròn (O) cắt dây CD tại I . Lấy điểm E bất kỳ trên cung lớn CD .

(E khác C, D, N); ME cắt CD tại K . Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P .

- a) Chứng minh rằng :Tứ giác $IKEN$ nội tiếp
- b) Chứng minh: $EI.MN=NK.ME$
- c) NK cắt MP tại Q . Chứng minh: IK là phân giác của EQ
- d) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H . Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, D, N) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

Bài IV (0,5 điểm): Cho $a; b; c > 0$, chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Hướng dẫn giải

I. TRẮC NGHIỆM (1,0 điểm). Chọn chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Cặp số $(-1; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

B. $\begin{cases} x+5y=9 \\ 6x+2y=-2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} -2x+y=7 \\ x-\frac{3}{4}y=3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+y=1 \\ -2x+y=4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x-2y=0 \\ x+y=3 \end{cases}$

Câu 2. Điều kiện của m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 0, x_2 > 0$ là:

B. $m = -2$

B. $m = 2$

C. $m = \pm 2$

D. $m = 16$

Câu 3. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB , dây $AC = R$. Khi đó số đo độ của cung nhỏ BC là:

A. 60°

B. 120°

C. 90°

D. 150°

Câu 4. Độ dài của một đường tròn là 10π (cm). Diện tích của hình tròn đó là:

A. $10\pi (cm^2)$

B. $100\pi (cm^2)$

C. $50\pi (cm^2)$

D. $25\pi (cm^2)$

Hướng dẫn giải

Câu 1. Thay $x = -1, y = 2$ vào các hệ. Ta được đáp án A và C.

Câu 2. Thay $x_1 = 0$ vào phương trình ta được $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Thử lại: Thay $m = 2$ vào phương trình ta được

$$x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện đề bài})$$

Thay $m = -2$ vào phương trình ta được

$$x^2 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{không thỏa mãn điều kiện đề bài}) \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy đáp án B.

Câu 3. $AC = R \Rightarrow \triangle AOC$ là tam giác đều. Suy ra góc $CAB = 60^\circ$

$$\text{Mà } CAB = \frac{1}{2} \text{sd} BC \Rightarrow \text{sd} BC = 120^\circ$$

Chọn đáp án B.

Câu 4. Gọi bán kính hình tròn là R

$$\text{Chu vi hình tròn bằng } 2\pi R = 10\pi \Rightarrow R = 5$$

$$\text{Diện tích hình tròn là } \pi R^2 = 25\pi (cm^2)$$

Vậy chọn đáp án D.

II. TỰ LUẬN (9,0 điểm)

Bài I (2,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{1}{y+1} = 3 \\ \frac{3}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 8 \end{cases}$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2mx - 2m + 1$

c. Với $m = -1$. Hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

d. Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt : $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ sao cho tổng các tung độ của hai giao điểm bằng 2 .

Hướng dẫn giải

1.
$$\begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{1}{y+1} = 3 \\ \frac{3}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 8 \end{cases} \quad (\text{Điều kiện xác định : } x \neq 2; y \neq -1)$$

+) Đặt $\frac{1}{x-2} = a; \frac{1}{y+1} = b$

$$+) \text{ Hệ phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a - 2b = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 6 \\ 3a - 2b = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7a = 14 \\ 3a - 2b = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} (TM)$$

$$+) \text{ Thay } a = 2 \Rightarrow \frac{1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$+) \text{ Thay } b = -1 \Rightarrow \frac{1}{y+1} = -1 \Rightarrow -y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = -2$$

$$+) \text{ Vậy hệ phương trình có nghiệm } (x; y) = \left(\frac{5}{2}; -2\right)$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) :
 $y = 2mx - 2m + 1$

a.

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$\Rightarrow x^2 = 2mx - 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$$

+) Thay $m = -1$ vào phương trình ta được :

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 9 \end{cases}$$

+) Vậy khi $m = -1$ thì giao điểm của (P) và (d) là : $(1; 1); (-3; 9)$

b. +) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$\Rightarrow x^2 = 2mx - 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$$

$$\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 > 0 \forall m \neq 1 \quad (1)$$

+) Suy ra (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt : $A(x_1; y_2); B(x_2; y_2)$

$$x_1 \in (P) \Rightarrow y_1 = x_1^2$$

$$x_2 \in (P) \Rightarrow y_2 = x_2^2$$

$$+) \text{ Áp dụng định lí Viet ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases}$$

+) Vì tổng các tung độ của hai giao điểm bằng 2 nên ta có phương trình :

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2(2m - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0(TM) \\ m = 1(Loai) \end{cases}$$

+) Vậy $m = 0$ thì (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt : $A(x_1; y_2); B(x_2; y_2)$ sao cho tổng các tung độ của hai giao điểm bằng 2 .

Bài II (2,5 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 120 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 5 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hết số hàng đó trong bao nhiêu ngày?

Hướng dẫn giải

Gọi thời gian chở hàng theo kế hoạch là x (ngày, $x > 1$)

Năng suất của đội xe theo kế hoạch là $\frac{120}{x}$ (tấn/ngày)

Thời gian chở hàng thực tế là $x - 1$ (ngày)

Năng suất thực tế là $\frac{125}{x - 1}$ (tấn/ngày)

Vì đội xe chở hàng vượt mức 5 tấn/ ngày nên ta có phương trình

$$\begin{aligned}\frac{125}{x-1} - \frac{120}{x} &= 5 \\ \Rightarrow 5x^2 - 10x - 120 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -4 \end{cases}\end{aligned}$$

Vì $x > 1$ nên $x = 6$

Vậy thời gian chờ hàng theo kế hoạch là 6 ngày

Bài III. (3,5 điểm)

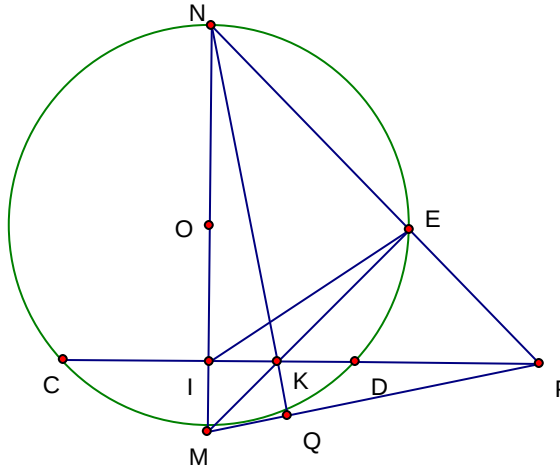
Cho đường tròn (O) có dây cung CD cố định. Gọi M là điểm nằm chính giữa cung nhỏ CD .

Đường kính MN của đường tròn (O) cắt dây CD tại I . Lấy điểm E bất kỳ trên cung lớn CD .

(E khác C, D, N); ME cắt CD tại K . Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P .

- e) Chứng minh rằng :Tứ giác $IKEN$ nội tiếp
- f) Chứng minh: $EI.MN=NK.ME$
- g) NK cắt MP tại Q . Chứng minh: IK là phân giác của EQ
- h) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H . Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, D, N) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

Hướng dẫn giải



a) Xét đường tròn (O) có đường kính MN , M là điểm chính giữa cung nhỏ CD (gt)

nên MN vuông góc với CD tại trung điểm I của CD . Do đó: $\angle MID = 90^\circ$

Ta có $E \in \left(O; \frac{1}{2}MN\right) \Rightarrow \angle MEN = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $IKEN$ có: $\angle MID + \angle MEN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $IKEN$ nội tiếp. (theo dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

b) Tứ giác $IKEN$ nội tiếp (cmt) nên $\angle MEI = \angle MNK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IK)

Xét $\triangle MEI$ và $\triangle MNK$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \angle MEI = \angle MNK \text{ (cmt)} \\ \angle EMI = \angle MNK \text{ (chung)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MEI \sim \triangle MNK \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{EI}{NK} = \frac{ME}{MN} \Rightarrow EI \cdot MN = NK \cdot ME$$

c) Xét $\triangle MNP$ có 2 đường cao ME và PI cắt nhau tại K nên K là trực tâm $\triangle MNP$

Do đó NK vuông góc với MP tại Q . Từ đó suy ra $\angle NQP = 90^\circ$

Xét tứ giác $NIQP$ có: $\angle NIP = \angle NQP = 90^\circ$ mà 2 góc này cùng nhìn NP do đó tứ giác $NIQP$ nội tiếp. Suy ra $\angle QNP = \angle QIP$ (vì cùng chắn cung PQ) (1)

Tứ giác $IKEN$ nội tiếp (cm a) nên $\angle QNP = \angle EIK$ (cùng chắn cung EK) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle QIP = \angle EIK$. Do đó IK là phân giác của $\angle EIQ$.

d) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H . Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, D, N) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} ME \perp NP \\ CH \perp NP \end{array} \right\} \Rightarrow ME \parallel CH \Rightarrow \begin{cases} DEM = DHC \text{ (dv)} \\ MEC = ECH \text{ (slt)} \end{cases}$$

Mà $DEM = MEC$ (2 góc nt chắn 2 cung = nhau)

$$\Rightarrow EHC = ECH$$

$$\Rightarrow \triangle EHC \text{ cân tại E}$$

$$\Rightarrow EN \text{ là trung trực của CH}$$

Xét $\triangle DCH$ có: IN là trung trực của CD (dễ dàng cm) $\Rightarrow NC = ND$

$$EN \text{ là trung trực của CH (cmt)} \Rightarrow NC = NH$$

$$\Rightarrow N \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp } \triangle DCH$$

$$\Rightarrow H \in (N; NC)$$

Mà N, C cố định $\Rightarrow H$ thuộc đường tròn cố định khi E chạy trên CD

Bài IV (0,5 điểm): Cho $a; b; c > 0$, chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } A = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = 1 - \frac{b}{a+b} + 1 - \frac{c}{b+c} + 1 - \frac{a}{c+a} = 3 - \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right)$$

Mà do $a; b; c > 0$ nên:

$$\frac{b}{a+b} > \frac{b}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{b+c} > \frac{c}{a+b+c}$$

$$\frac{a}{c+a} > \frac{a}{a+b+c}$$

Cộng các vế ta được:

$$\begin{aligned}\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} &> \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) &< -1 \\ \Leftrightarrow 3 - \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) &< 3-1 \\ \Leftrightarrow A < 2 \quad (*)\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } B = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} + \frac{b}{\sqrt{b(c+a)}} + \frac{c}{\sqrt{c(a+b)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương $\sqrt{a}; \sqrt{b+c}$ ta được:

$$\sqrt{a(b+c)} \leq \frac{a+b+c}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{\sqrt{b(c+a)}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\text{Từ đó, ta có: } \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} + \frac{b}{\sqrt{b(c+a)}} + \frac{c}{\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$$

$$\Leftrightarrow B \geq 2 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*), (**) \text{ ta có: } A < B \text{ hay } \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

$\Rightarrow$ đpcm