

I. Phần chung cho cả hai ban

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-x^2}{x-1}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$

3) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{7x-1}{x-3}$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{9-x^2}$

Bài 2.

1) Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3} & \text{khi } x > 3 \\ 2x+1 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$$

2) Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất hai nghiệm : $2x^3 - 5x^2 + x + 1 = 0$.

Bài 3.

1) Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{3}{(2x+5)^2}$

2) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = -2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với d: $y = \frac{x-2}{2}$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$.

1) Chứng minh rằng các mặt bên hình chóp là những tam giác vuông.

2) Chứng minh rằng: $(SAC) \perp (SBD)$.

3) Tính góc giữa SC và mp (SAB).

4) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD)

II. Phần tự chọn.

1. Theo chương trình chuẩn.

Bài 5a. Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}$.

Bài 6a. Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 8$. Giải bất phương trình $y' \leq 0$.

2. Theo chương trình nâng cao.

Bài 5b. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - 12x + 11}$.

Bài 6b. Cho $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}$. Giải bất phương trình $y' > 0$.

I. Phần chung cho cả hai ban.

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} + 3x}{2x+7}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 5x + 1)$

3) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x-11}{5-x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x}$.

Bài 2.

1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Xác định m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

2) Chứng minh rằng phương trình: $(1-m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Bài 3.

1) Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \frac{2-2x+x^2}{x^2-1}$

b) $y = \sqrt{1+2\tan x}$.

2) Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

a) Tại điểm có tung độ bằng 3.

b) Vuông góc với d: $x + 2y - 3 = 0$.

Bài 4. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC, đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$, I là trung điểm BC 1) Chứng minh rằng: (OAI) $\perp$ (ABC).

2) Chứng minh rằng: $BC \perp$ (AOI).

3) Tính góc giữa AB và mặt phẳng (AOI).

4) Tính góc giữa các đường thẳng AI và OB.

II. Phần tự chọn.

1. Theo chương trình chuẩn.

Bài 5a. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 1} + \dots + \frac{n-1}{n^2 + 1} \right)$.

Bài 6a. Cho $y = \sin 2x - 2 \cos x$. Giải phương trình $y' = 0$.

2. Theo chương trình nâng cao.

Bài 5b. Cho $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

Bài 6b. Cho $f(x) = \frac{64}{x^3} - \frac{60}{x} - 3x + 16$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Đề 3

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$

2) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 5^n}{2^n + 3 \cdot 5^n}$

Bài 2. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

Bài 3. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt trong khoảng $(-2; 5)$.

Bài 4. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

1) $y = \frac{5x-3}{x^2+x+1}$

2) $y = (x+1)\sqrt{x^2+x+1}$

3) $y = \sqrt{1+2 \tan x}$

4) $y = \sin(\sin x)$

Bài 5. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông tại A, góc $B = 60^\circ$, $AB = a$; hai mặt bên (SAB) và (SBC) vuông góc với đáy; $SB = a$. Hạ $BH \perp SA$ ($H \in SA$); $BK \perp SC$ ($K \in SC$).

1) Chứng minh: $SB \perp$ (ABC)

2) Chứng minh: $mp(BHK) \perp SC$.

3) Chứng minh: ΔBHK vuông.

4) Tính cosin của góc tạo bởi SA và (BHK).

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng d: $y = -5x - 2$.

Bài 7. Cho hàm số $y = \cos^2 2x$.

1) Tính y'' , y''' .

2) Tính giá trị của biểu thức: $A = y''' + 16y' + 16y - 8$.

Đề 4

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 2x^2 - 3)$

2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7} - 3}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n - 4^n + 1}{2 \cdot 4^n + 2^n} \right)$

Bài 2. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ 3ax & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

Bài 3. Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm âm: $x^3 + 1000x + 0,1 = 0$

Bài 4. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

$$1) y = \frac{2x^2 - 6x + 5}{2x + 4} \quad 2) y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x + 1} \quad 3) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \quad 4) y = \sin(\cos x)$$

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

- 1) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$; $(SCD) \perp (SAD)$
- 2) Tính góc giữa SD và (ABCD); SB và (SAD); SB và (SAC).
- 3) Tính $d(A, (SCD))$; $d(B, (SAC))$

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$:

- 1) Tại điểm M $(-1; -2)$
- 2) Vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{9}x + 2$.

Bài 7. Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$. Chứng minh rằng: $2y \cdot y'' - 1 = y'^2$.

Đề 5

A. PHẦN CHUNG:

Bài 1: Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$$

Bài 2: Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = 2 \sin x + \cos x - \tan x \quad b) y = \sin(3x + 1) \quad c) y = \cos(2x + 1) \quad d) y = \sqrt{1 + 2 \tan 4x}$$

Bài 4: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , $\angle BAD = 60^\circ$ và $SA = SB = SD = a$.

- a) Chứng minh (SAC) vuông góc với (ABCD).
- b) Chứng minh tam giác SAC vuông.
- c) Tính khoảng cách từ S đến (ABCD).

B. PHẦN TỰ CHỌN:

1. Theo chương trình chuẩn

Bài 5a: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ (1)

- a) Tính $f'(-5)$.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm $M_0(0; 1)$
- c) Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(-1; 1)$.

2. Theo chương trình Nâng cao

Bài 5b: Cho $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3} \left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3} \right)$.

Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Bài 6b: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 2x + 3$ (C).

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 22x + 2011$
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{4}x + 2011$

Đề 6

A. PHẦN CHUNG

Câu 1: Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 7} - 3} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 3x}{2x + 1}$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

- a) Xét tính liên tục của hàm số khi $m = 3$
b) Với giá trị nào của m thì $f(x)$ liên tục tại $x = 2$?

Câu 3: Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt trong khoảng $(-2; 5)$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\text{b) } y = (x^2 - 1)(x^3 + 2) \quad \text{c) } y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{d) } y = \sqrt{x^2 + 2x} \quad \text{e) } y = \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^4$$

B. PHẦN TỰ CHỌN:

1. Theo chương trình chuẩn

Câu 5a: Cho tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{2}$, I là trung điểm cạnh AC, AM là đường cao của ΔSAB . Trên đường thẳng lx vuông góc với mp(ABC) tại I, lấy điểm S sao cho $IS = a$.

- a) Chứng minh $AC \perp SB$, $SB \perp (AMC)$.
b) Xác định góc giữa đường thẳng SB và mp(ABC).
c) Xác định góc giữa đường thẳng SC và mp(AMC).

2. Theo chương trình nâng cao

Câu 5b: Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Gọi O là tâm của đáy ABCD.

- a) Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$.
b) Tính khoảng cách từ điểm S đến mp(ABCD) và từ điểm O đến mp(SBC).
c) Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và SC

Đề 7

I. PHẦN BẮT BUỘC:

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$$

Câu 2 (1 điểm): Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{2x^2 + 3x + 1} & \text{khi } x \neq -\frac{1}{2} \\ A & \text{khi } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -\frac{1}{2}$

Câu 3 (1 điểm): Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm trên $[0; 1]$: $x^3 + 5x - 3 = 0$.

Câu 4 (1,5 điểm): Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = (x + 1)(2x - 3) \quad \text{b) } y = \sqrt{1 + \cos^2 \frac{x}{2}}$$

Câu 5 (2,5 điểm): Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a , $BAD = 60^\circ$, đường cao $SO = a$.

- a) Gọi K là hình chiếu của O lên BC. Chứng minh rằng: $BC \perp (SOK)$
b) Tính góc giữa SK và mp(ABCD).
c) Tính khoảng cách giữa AD và SB.

II. PHẦN TỰ CHỌN

1. Theo chương trình chuẩn

Câu 6a (1,5 điểm): Cho hàm số: $y = 2x^3 - 7x + 1$ (C).

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc $k = -1$.

Câu 7a (1,5 điểm): Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. M là một điểm trên cạnh AB,

$ACM = \varphi$, hạ $SH \perp CM$.

- a) Tìm quỹ tích điểm H khi M di động trên đoạn AB.
b) Hạ $AK \perp SH$. Tính SK và AH theo a và φ .

2. Theo chương trình nâng cao

Câu 6b (1,5 điểm): Cho các đồ thị (P): $y = 1 - x + \frac{x^2}{2}$ và (C): $y = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

- Chứng minh rằng (P) tiếp xúc với (C).
- Viết phương trình tiếp tuyến chung của (P) và (C) tại tiếp điểm.

Câu 7b (1,5 điểm): Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a ; $SA = SB = SC = SD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Gọi I và J lần

lượt là trung điểm BC và AD.

- Chứng minh rằng: $SO \perp (ABCD)$.
- Chứng minh rằng: $(SIJ) \perp (ABCD)$. Xác định góc giữa (SIJ) và (SBC).
- Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

Đề 8

I. Phần chung

Bài 1:

- Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3}x^5 + 7x^3 - 11}{\frac{3}{4}x^5 - x^4 + 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2(x^2-5x+6)}$$

- Cho hàm số: $f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \sqrt{2x} + 1$. Tính $f'(1)$.

Bài 2:

- Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hãy tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

- Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Bài 3: Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC là tam giác đều cạnh a , AD vuông góc với BC, $AD = a$ và khoảng cách từ điểm D đến đường thẳng BC là a . Gọi H là trung điểm BC, I là trung điểm AH.

- Chứng minh rằng đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng (ADH) và $DH = a$.
- Chứng minh rằng đường thẳng DI vuông góc với mặt phẳng (ABC).
- Tính khoảng cách giữa AD và BC.

II. Phần tự chọn

A. Theo chương trình chuẩn

Bài 4a: Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} - 4x}{3 - 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$$

Bài 5a:

- Chứng minh phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt: $6x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$.
- Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy và cạnh bên bằng a . Tính chiều cao hình chóp.

B. Theo chương trình nâng cao

Bài 4b: Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

Bài 5b:

- Chứng minh phương trình sau luôn luôn có nghiệm:

$$(m^2 - 2m + 2)x^3 + 3x - 3 = 0$$

- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , SA vuông góc (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc (SCD). Thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp là hình gì? Tính diện tích thiết diện đó.

Đề 9

Bài 1:

- Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 2}{x + 1}$$

- Cho $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

3) Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 5a - 3x & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 2$.

Bài 2: Cho $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Giải bất phương trình: $y' \cdot y < 2x^2 - 1$.

Bài 3: Cho tứ diện OABC có $OA = OB = OC = a$, $AOB = AOC = 60^\circ$, $BOC = 90^\circ$.

- Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.
- Chứng minh OA vuông góc BC.
- Gọi I, J là trung điểm OA và BC. Chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung OA và BC.

Bài 4: Cho $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ biết tiếp tuyến song song với $d: y = 9x + 2011$.

Bài 5: Cho $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. Tính $f^{(n)}(x)$, với $n \geq 2$.

ĐỀ 10

A. PHẦN BẮT BUỘC:

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2}$

Câu 2:

a) Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất 2 nghiệm: $2x^3 - 10x - 7 = 0$

b) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & , x \neq -1 \\ 2 & , x = -1 \end{cases}$ trên tập xác định.

Câu 3:

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

b) Tính đạo hàm của các hàm số sau: $\bullet y = x\sqrt{1+x^2}$ $\bullet y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình thang vuông tại A, B. $AB = BC = a$, $ADC = 45^\circ$, $SA = a\sqrt{2}$.

- Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
- Tính góc giữa (SBC) và (ABCD).
- Tính khoảng cách giữa AD và SC.

B. PHẦN TỰ CHỌN:

1. Theo chương trình chuẩn

Câu 5a: a) Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{8}{x}$. Chứng minh: $f'(-2) = f'(2)$

Câu 6a: Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Giải bất phương trình: $y' < 3$.

Câu 7a: Cho hình hộp ABCD.EFGH có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của đoạn BG. Hãy biểu thị vector $\overrightarrow{AI}$ qua ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu 5b: a) Tính gần đúng giá trị của $\sqrt{4,04}$

b) Tính vi phân của hàm số $y = x \cdot \cot^2 x$

Câu 6b: Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{|x - 3|}$

Câu 7b 3: Cho tứ diện đều cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện.

ĐỀ 11

II. Phần bắt buộc

Câu 1:

1) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{x^2+2x-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+3}+x)$ 2)

Chứng minh phương trình $x^3-3x+1=0$ có 3 nghiệm phân biệt .

Câu 2:

1) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x}-1)$

b) $y = x + \sin x$

c) $y = \frac{x^2-2x}{x-1}$

2) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \tan x$

3) Tính vi phân của hàm số $y = \sin x \cdot \cos x$

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

1) Chứng minh : $BD \perp SC$, $(SBD) \perp (SAC)$.

2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

3) Tính góc giữa SC và (ABCD)

II. Phần tự chọn

1. Theo chương trình chuẩn

Câu 4a: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ tại giao điểm của nó với trục hoành .

Câu 5a: Cho hàm số $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Câu 6a: Cho hình lập phương ABCD.EFGH có cạnh bằng a . Tính $\overline{AB \cdot EG}$.

2. Theo chương trình nâng cao

Câu 4b: Tính vi phân và đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 2x \cdot \cos 2x$.

Câu 5b: Cho $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. Với giá trị nào của x thì $y'(x) = -2$.

Câu 6b: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a . Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau BD' và $B'C$.

Đề 12

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$

Bài 2: Chứng minh phương trình $x^3-3x+1=0$ có 3 nghiệm thuộc $(-2;2)$.

Bài 3: Chứng minh hàm số sau không có đạo hàm tại $x = -3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & \text{khi } x \neq -3 \\ 1 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$$

Bài 4: Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = (2x+1)\sqrt{2x-x^2}$

b) $y = x^2 \cdot \cos x$

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (H).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (H) tại A(2; 3).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{8}x + 5$.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , $SA = a$, SA vuông góc với (ABCD). Gọi I, K là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD.

a) Chứng minh các mặt bên hình chóp là các tam giác vuông.

b) Chứng minh: (SAC) vuông góc (AIK).

- c) Tính góc giữa SC và (SAB).
d) Tính khoảng cách từ A đến (SBD).

Đề 13

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x + 1}{x - 1}$

Bài 2: Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 2mx^2 - x + m = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Bài 3: Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \frac{2}{x} + \sqrt{3x+1} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ b) $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\sin x}$

Bài 5: Cho đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

- a) Tại điểm có hoành độ bằng 2.
b) Biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a , $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$.

- a) Chứng minh: $\triangle SAC$ vuông và SC vuông góc với BD.
b) Chứng minh: $(SAD) \perp (SAB)$, $(SCB) \perp (SCD)$.
c) Tính khoảng cách giữa SA và BD.

Đề 14

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - 2x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x)$

Bài 2: Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Bài 3: Tìm m để hàm số sau liên tục tại $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$$

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{3x - 2}{\sqrt{2x + 5}}$ b) $y = (x^2 - 3x + 1) \cdot \sin x$

Bài 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$:

- a) Tại điểm có tung độ bằng $\frac{1}{2}$.
b) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -4x + 3$.

Bài 6: Cho tứ diện S.ABC có $\triangle ABC$ đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, $SA = \frac{3}{2}a$. Gọi I là trung điểm BC.

- a) Chứng minh: (SBC) vuông góc (SAI).
b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).
c) Tính góc giữa (SBC) và (ABC).

Đề 15

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}-3}{2-3\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x}-3}{x-2}$

Bài 2: Chứng minh rằng phương trình $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

Bài 3: Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

b) $y = (2x-3) \cdot \cos(2x-3)$

Bài 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = \frac{2x^2+2x+1}{x+1}$

- Tại giao điểm của đồ thị và trục tung.
- Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x + 2011$.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a , $\angle BAD = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$,

$SB = SD = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. Gọi E là trung điểm BC, F là trung điểm BE.

- Chứng minh: (SOF) vuông góc (SBC).
- Tính khoảng cách từ O và A đến (SBC).
- Gọi (α) là mặt phẳng qua AD và vuông góc (SBC). Xác định thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (α) . Tính góc giữa (α) và (ABCD).

Đề 16

I. Phần chung

Bài 1:

1) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3}x^5 + 7x^3 - 11}{\frac{3}{4}x^5 - x^4 + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2(x^2-5x+6)}$

2) Cho hàm số: $f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \sqrt{2x} + 1$. Tính $f'(1)$.

Bài 2:

1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hãy tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

2) Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Bài 3: Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC là tam giác đều cạnh a , AD vuông góc với BC, AD = a và khoảng cách từ điểm D đến đường thẳng BC là a . Gọi H là trung điểm BC, I là trung điểm AH.

- Chứng minh rằng đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng (ADH) và $DH = a$.
- Chứng minh rằng đường thẳng DI vuông góc với mặt phẳng (ABC).
- Tính khoảng cách giữa AD và BC.

II. Phần tự chọn

A. Theo chương trình chuẩn

Bài 4a: Tính các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}-4x}{3-2x}$

2) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2+5x+6}$

Bài 5a:

1) Chứng minh phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt: $6x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$.

2) Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy và cạnh bên bằng a . Tính chiều cao hình chóp.

B. Theo chương trình nâng cao

Bài 4b: Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

Bài 5b:

1) Chứng minh phương trình sau luôn luôn có nghiệm:

$$(m^2 - 2m + 2)x^3 + 3x - 3 = 0$$

2) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , SA vuông góc (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc (SCD). Thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp là hình gì? Tính diện tích thiết diện đó.

Đề 17

I. Phần chung

Bài 1:

1) Tính các giới hạn sau: a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x + 2}$ b) $\lim \frac{3^{n+2} - 3.5^{n+1}}{4.5^n + 5.3^{n+1}}$

2) Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{\cos x + x}{\sin x - x}$

Bài 2:

1) Cho hàm số: $y = x^3 + x^2 + x - 5$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $6x - y + 2011 = 0$.

2) Tìm a để hàm số: $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 6x + 7 & \text{khi } x \geq 2 \\ ax^2 + 3a & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABC có các mặt bên (SAB), (SAC) cùng vuông góc với (ABC), tam giác ABC vuông cân tại C. $AC = a$, $SA = x$.

- Xác định và tính góc giữa SB và (ABC), SB và (SAC).
- Chứng minh $(SAC) \perp (SBC)$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).
- Tính khoảng cách từ O đến (SBC). (O là trung điểm của AB).
- Xác định đường vuông góc chung của SB và AC

II. Phần tự chọn

A. Theo chương trình Chuẩn

Bài 4a:

1) Cho $f(x) = x^2 \sin(x-2)$. Tìm $f'(2)$.

2) Viết thêm 3 số vào giữa hai số $\frac{1}{2}$ và 8 để được cấp số cộng có 5 số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số cộng đó.

Bài 5a:

1) CMR phương trình sau có ít nhất 2 nghiệm: $2x^3 - 10x = 7$.

2) Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 30° . Tính chiều cao hình chóp.

B. Theo chương trình Nâng cao

Bài 4b:

1) Cho $f(x) = \sin 2x - 2 \sin x - 5$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

2) Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân.

Chứng minh rằng: $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

Bài 5b:

1) Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có ít nhất 2 nghiệm: $(m^2 + 1)x^4 - x^3 = 1$.

2) Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C', có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a}{2}$. Tính góc giữa 2 mặt phẳng (A'BC) và (ABC) và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BC).

Đề 18

I. PHẦN CHUNG (7 điểm)

Câu 1: (1,5 điểm) Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x}$

Câu 2: (1 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{khi } x \neq 5 \\ A & \text{khi } x = 5 \end{cases}$. Tìm A để hàm số đã cho liên tục tại $x = 5$.

Câu 3: (1,5 điểm) Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

b) $y = \sqrt{x} \cdot \cos 3x$

Câu 4: (3 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$.

b) Giả sử $SA = a\sqrt{3}$ và $AB = a$, tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

c) Gọi AM là đường cao của $\triangle SAB$, N là điểm thuộc cạnh SC. Chứng minh: $(AMN) \perp (SBC)$.

II. PHẦN RIÊNG (3 điểm) Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần.

Phần A: (theo chương trình chuẩn)

Câu 5a: (1 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

Câu 6a: (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x$ có đồ thị (C).

a) Tìm x sao cho $y' > 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 0$.

Phần B: (theo chương trình nâng cao)

Câu 5b: (1 điểm) Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Câu 6b: (2 điểm) Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị (C).

a) Tìm x sao cho $y' \leq 24$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1; -9)$.

ĐỀ 19

A. Phần chung: (8 điểm)

Câu 1: (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4 - 3x - x^2}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 3})$

Câu II: (1 điểm) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x + 2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ 2x - 20 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ tại điểm $x = 2$.

Câu III: (2 điểm) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $f(x) = \frac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$

2) $f(x) = (\sin(\tan(x^4 + 1)))^2$

Câu IV: (3 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$,

$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

1) Chứng minh rằng: mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

2) Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng SC.

3) Tính góc giữa mặt phẳng (SBD) với mặt phẳng (ABCD).

B. Phần riêng: (2 điểm)

Câu Va: Dành cho học sinh học chương trình Chuẩn

Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

1) Giải bất phương trình $y' \geq 2$.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng d: $x + y + 50 = 0$.

Câu Vb: *Dành cho học sinh học chương trình Nâng cao*

1) Tìm 5 số hạng của một cấp số nhân gồm 5 số hạng, biết $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$.

2) Tìm a để phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng $f(x) = a \cdot \cos x + 2 \sin x - 3x + 1$.

Đề 20

A. Phần chung: (7 điểm)

Câu I: (2 điểm) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2 \cdot 4^n}{4^n + 3^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1} \right)$

Câu II: (2 điểm)

a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 18}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a + x & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 3$.

b) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3x^2 - 4x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-4; 0)$.

Câu III: (3 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a , $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và SO. Kẻ OP vuông góc với SA.

- CMR: $SO \perp (ABCD)$, $SA \perp (PBD)$.
- CMR: $MN \perp AD$.
- Tính góc giữa SA và mp (ABCD).
- CMR: 3 vec tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

B. Phần riêng. (3 điểm)

Câu IVa: *Dành cho học sinh học theo chương trình chuẩn.*

a) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M(1; 2).

b) Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 x$.

Câu IVb: *Dành cho học sinh học theo chương trình nâng cao.*

a) Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 4$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm M(1; 0).

b) Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin(\cos(5x^3 - 4x + 6)^{2011})$

ĐỀ 1

Bài 1.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x-2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x-2) = -3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{12}{x^4}} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{7x-1}{x-3}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} (7x-1) = 20 > 0$; $x-3 > 0$ khi $x \rightarrow 3^+$ nên $I = +\infty$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(3+x)(3-x)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = -\frac{1}{24}$$

Bài 2.

$$1) \text{ Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-3} & \text{khi } x > 3 \\ 2x+1 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$$

• Hàm số liên tục với mọi $x \neq 3$.

• Tại $x = 3$, ta có:

$$+ f(3) = 7$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x+1) = 7 \quad + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục tại $x = 3$.

Vậy hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$.

2) Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất hai nghiệm: $2x^3 - 5x^2 + x + 1 = 0$.

Xét hàm số: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1 \Rightarrow$ Hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$+ \left. \begin{matrix} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{PT } f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm } c_1 \in (0; 1).$$

$$+ \left. \begin{matrix} f(2) = -1 < 0 \\ f(3) = 13 > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{PT } f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm } c_2 \in (2; 3).$$

Mà $c_1 \neq c_2$ nên PT $f(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

Bài 3.

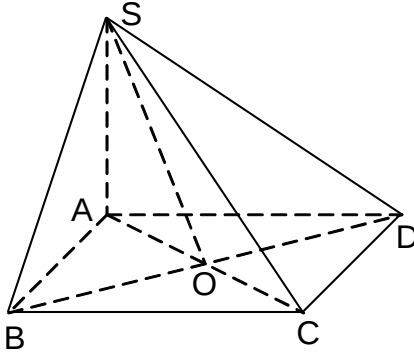
$$1) \text{ a) } y = x\sqrt{x^2+1} \Rightarrow y' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{b) } y = \frac{3}{(2x+5)^2} \Rightarrow y' = -\frac{12}{(2x+5)^3}$$

$$2) y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{2}{(x+1)^2} \quad (x \neq -1)$$

$$\text{a) Với } x = -2 \text{ ta có: } y = -3 \text{ và } y'(-2) = 2 \Rightarrow \text{PTTT: } y+3 = 2(x+2) \Leftrightarrow y = 2x+1.$$

$$\text{b) d: } y = \frac{x-2}{2} \text{ có hệ số góc } k = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{TT có hệ số góc } k = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Gọi } (x_0; y_0) \text{ là tọa độ của tiếp điểm. Ta có } y'(x_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$$



Bài 4.

- 1) • $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD$
 $\Rightarrow$ Các tam giác SAB, SAD vuông tại A.
 • $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.
 • $CD \perp SA, CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D.
 2) $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.
 3) • $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SC, (SAB)) = BSC$

• ΔSAB vuông tại A $\Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$

• ΔSBC vuông tại B $\Rightarrow \tan BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow BSC = 60^\circ$

4) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

• Ta có: $(SBD) \cap (ABCD) = BD, SO \perp BD, AO \perp BD \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = SOA$

• ΔSAO vuông tại A $\Rightarrow \tan SOA = \frac{SA}{AO} = 2$

Bài 5a. $I = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 8}{x^2 + 11x + 18}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 11x + 18) = 0, \begin{cases} x^2 + 11x + 18 = (x+2)(x+9) < 0, & \text{khi } x < -2 \\ x^2 + 11x + 18 = (x+2)(x+9) > 0, & \text{khi } x > -2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 8) = 12 > 0 \quad (*)$

Từ (1) và (*) $\Rightarrow I_1 = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 8}{x^2 + 11x + 18} = -\infty$.

Từ (2) và (*) $\Rightarrow I_2 = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 8}{x^2 + 11x + 18} = +\infty$

Bài 6a. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 18 \Rightarrow y' = x^2 - 4x - 6$

BPT $y' \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{10} \leq x \leq 2 + \sqrt{10}$

Bài 5b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - 12x + 11} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{2x-1})(x + \sqrt{2x+11})}{(x^2 - 12x + 11)(x + \sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-11)(x + \sqrt{2x-1})} = 0$

Bài 6b. $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

BPT $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$

ĐÁP ÁN ĐỀ 2

Bài 1:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} + 3x}{2x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 3x}{x \left(2 + \frac{7}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 3 \right)}{x \left(2 + \frac{7}{x} \right)} = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 5x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$

$$3) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x-11}{5-x}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^+} (5-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} (2x-11) = -1 < 0 \\ x > 5 \Leftrightarrow 5-x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x-11}{5-x} = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x(x+1)(\sqrt{x^3+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^3+1}+1)} = 0$$

Bài 2:

$$1) \bullet \text{ Khi } x \neq 1 \text{ ta có } f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1 \Rightarrow f(x) \text{ liên tục } \forall x \neq 1.$$

• Khi $x = 1$, ta có:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2m+1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1 \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow 2m+1=3 \Leftrightarrow m=1$$

Vậy: $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=1$.

$$2) \text{ Xét hàm số } f(x) = (1-m^2)x^5 - 3x - 1 \Rightarrow f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có: } f(-1) = m^2 + 1 > 0, \forall m; f(0) = -1 < 0, \forall m \Rightarrow f(0).f(1) < 0, \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình có ít nhất một nghiệm $c \in (0;1)$, $\forall m$

Bài 3:

$$1) \text{ a) } y = \frac{-2-2x+x^2}{x^2-1} \Rightarrow y' = \frac{2x^2+2x+2}{(x^2-1)^2} \quad \text{b) } y = \sqrt{1+2\tan x} \Rightarrow y' = \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$$

$$2) \text{ (C): } y = x^4 - x^2 + 3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 2x$$

$$\text{a) Với } y=3 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } x=0 \Rightarrow k = y'(0) = 0 \Rightarrow \text{PTTT: } y=3$$

$$\bullet \text{ Với } x=-1 \Rightarrow k = y'(-1) = -2 \Rightarrow \text{PTTT: } y = -2(x+1) + 3 \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

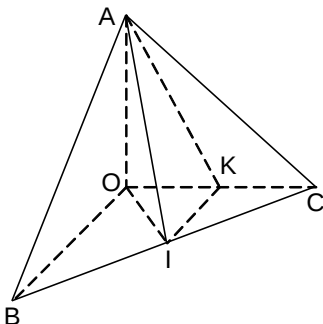
$$\bullet \text{ Với } x=1 \Rightarrow k = y'(1) = 2 \Rightarrow \text{PTTT: } y = 2(x-1) + 3 \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

$$\text{b) d: } x+2y-3=0 \text{ có hệ số góc } k_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Tiếp tuyến có hệ số góc } k=2.$$

$$\text{Gọi } (x_0; y_0) \text{ là tọa độ của tiếp điểm. Ta có: } y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ (} y_0 = 3 \text{)}$$

$$\Rightarrow \text{PTTT: } y = 2(x-1) + 3 \Leftrightarrow y = 2x + 1.$$

Bài 4:



$$\begin{aligned} 1) & \bullet OA \perp OB, OA \perp OC \Rightarrow OA \perp BC \quad (1) \\ & \bullet \Delta OBC \text{ cân tại } O, I \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow OI \perp BC \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow BC \perp (OAI) \Rightarrow (ABC) \perp (OAI)$$

$$2) \text{ Từ câu 1) } \Rightarrow BC \perp (OAI)$$

$$3) \bullet BC \perp (OAI) \Rightarrow (AB, (AOI)) = BAI$$

$$\bullet BI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \Delta ABC \text{ đều } \Rightarrow AI = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\bullet \Delta ABI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \cos BAI = \frac{AI}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BAI = 30^\circ \Rightarrow (AB, (AOI)) = 30^\circ$$

4) Gọi K là trung điểm của OC $\Rightarrow IK \parallel OB \Rightarrow (AI, OB) = (AI, IK) = AIK$

• ΔAOK vuông tại O $\Rightarrow AK^2 = OA^2 + OK^2 = \frac{5a^2}{4}$

• $AI^2 = \frac{6a^2}{4}$

• $IK^2 = \frac{a^2}{4}$

• ΔAIK vuông tại K $\Rightarrow \cos AIK = \frac{IK}{AI} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Bài 5a: $\lim \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \dots + \frac{n-1}{n^2+1} \right) = \lim \frac{1}{n^2+1} (1+2+3+\dots+(n-1))$

$$= \lim \frac{1}{n^2+1} \frac{(n-1)(1+(n-1))}{2} = \lim \frac{(n-1)n}{2(n^2+1)} = \lim \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Bài 6a: $y = \sin 2x - 2 \cos x \Rightarrow y' = 2 \cos 2x + 2 \sin x$

PT $y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

Bài 5b: $y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y^3 y'' + 1 = 0$

Bài 6b: $f(x) = \frac{64}{x^3} - \frac{60}{x} - 3x + 16 \Rightarrow f'(x) = -\frac{192}{x^4} + \frac{60}{x^2} - 3$

PT $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{192}{x^4} + \frac{60}{x^2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm 4 \end{cases}$

Đề 3

Bài 1:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1}$. Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+1) = -2 < 0 \\ x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{3}{2}$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4x^2 - x + 1} = \frac{11}{17}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 5^n}{2^n + 3 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3} = \frac{-1}{3}$

Bài 2: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$

Ta có: $\bullet f(2) = 2a + \frac{1}{4}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(ax + \frac{1}{4} \right) = 2a + \frac{1}{4}$

$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x-2)^2} + 2\sqrt[3]{(3x-2)} + 4)} = \frac{1}{4}$

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = 0$

Bài 3: Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2 \Rightarrow f$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(0) = -2, f(1) = 1, f(2) = -8, f(4) = 16$

$\Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c_1 \in (0; 1)$

$f(1).f(2) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c_2 \in (1; 2)$

$f(2).f(4) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c_3 \in (2; 4)$

$\Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm trong khoảng $(-2; 5)$.

Bài 4:

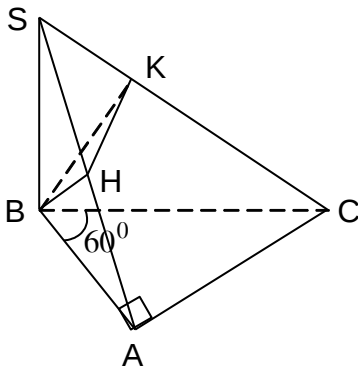
1) $y = \frac{5x-3}{x^2+x+1} \Rightarrow y' = \frac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$

2) $y = (x+1)\sqrt{x^2+x+1} \Rightarrow y' = \frac{4x^2+5x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

3) $y = \sqrt{1+2\tan x} \Rightarrow y' = \frac{1+2\tan^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$

4) $y = \sin(\sin x) \Rightarrow y' = \cos x \cdot \cos(\sin x)$

Bài 5:



1)

$$\left. \begin{aligned} (SAB) &\perp (ABC) \\ (SBC) &\perp (ABC) \\ (SAB) \cap (SBC) &= SB \end{aligned} \right\} \Rightarrow SB \perp (ABC)$$

2)

$CA \perp AB, CA \perp SB \Rightarrow CA \perp (SAB) \Rightarrow CA \perp BH$
 Mặt khác: $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$
 Mà $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$

3)

Từ câu 2), $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp HK \Rightarrow \Delta BHK$ vuông tại H.

4)

Vì $SC \perp (BHK)$ nên KH là hình chiếu của SA trên (BHK)

$\Rightarrow (SA, (BHK)) = (SA, KH) = SHK$

Trong ΔABC , có: $AC = AB \tan B = a\sqrt{3}; BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$

Trong ΔSBC , có: $SC^2 = SB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{5}; SK = \frac{SB^2}{SC} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Trong ΔSAB , có: $SH = \frac{SB^2}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Trong ΔBHK , có: $HK^2 = SH^2 - SK^2 = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

$\Rightarrow \cos(SA, (BHK)) = \cos BHK = \frac{HK}{SH} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Bài 6: $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$

Tiếp tuyến song song với d: $y = -5x - 2$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = -5$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm. Ta có: $f'(x_0) = -5 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 2x_0 - 5}{(x_0 + 1)^2} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ PTTT: $y = -5x + 2$
- Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -12 \Rightarrow$ PTTT: $y = -5x - 22$

Bài 7: $y = \cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}$

- 1) $y' = -2\sin 4x \Rightarrow y'' = -8\cos 4x \Rightarrow y''' = 32\sin 4x$
- 2) $A = y''' + 16y' + 16y - 8 = 8\cos 4x$

Đề 4

Bài 1:

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = +\infty$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1}$. Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+1) = -2 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty \\ x > -1 \Rightarrow x+1 > 0 \end{cases}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} -(\sqrt{x+7}+3) = -6$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 9x^2 + 27x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9x + 27) = 27$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4^n + 1}{2 \cdot 4^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2}$

Bài 2: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ 3ax & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$

Ta có: $\bullet f(1) = 3a$ $\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3ax = 3a$

$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 3a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$

Bài 3: Xét hàm số $f(x) = x^3 + 1000x + 0,1 \Rightarrow f$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$\left. \begin{matrix} f(0) = 0,1 > 0 \\ f(-1) = -1001 + 0,1 < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c \in (-1; 0)$

Bài 4:

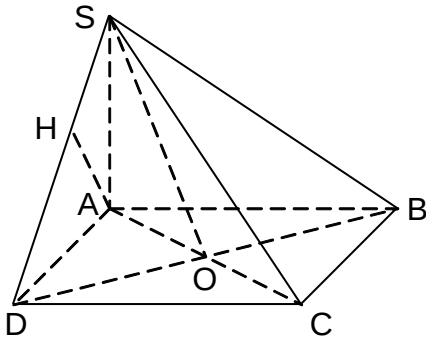
1) $y = \frac{2x^2 - 6x + 5}{2x + 4} \Rightarrow y' = \frac{4x^2 + 16x - 34}{(2x + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8x - 17}{2(x + 2)^2}$

$$2) y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x + 1} \Rightarrow y' = \frac{3x - 7}{(2x + 1)^2 \sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

$$3) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \Rightarrow y = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\left(1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$4) y = \sin(\cos x) \Rightarrow y' = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$$

Bài 5:



- 1) • $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$
• $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (DCS) \perp (SAD)$
- 2) • Tìm góc giữa SD và mặt phẳng (ABCD)

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SD, (ABCD)) = SDA$$

$$\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{2a}{a} = 2$$

- Tìm góc giữa SB và mặt phẳng (SAD)

$$AB \perp (ABCD) \Rightarrow (SB, (SAD)) = BSA$$

$$\tan BSA = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

- Tìm góc giữa SB và mặt phẳng (SAC).

$$BO \perp (SAC) \Rightarrow (SB, (SAC)) = BSO.$$

$$OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan BSO = \frac{OB}{OS} = \frac{1}{3}$$

- 3) • Tính khoảng cách từ A đến (SCD)

Trong ΔSAD , vẽ đường cao AH. Ta có: $AH \perp SD, AH \perp CD \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

- Tính khoảng cách từ B đến (SAC)

$$BO \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Bài 6: $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

1) Tại điểm $M(-1; -2)$ ta có: $y'(-1) = 9 \Rightarrow$ PTTT: $y = 9x + 7$

2) Tiếp tuyến vuông góc với d: $y = -\frac{1}{9}x + 2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 9$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ PTTT: $y = 9x + 7$

- Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ PTTT: $y = 9x - 25$

Bài 7: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2} \Rightarrow y' = x + 1 \Rightarrow y'' = 1$

$$\Rightarrow 2y \cdot y'' - 1 = 2\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) \cdot 1 - 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = (y')^2$$

Đề 5

Bài 1:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - 4} = -\frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{8}$$

Bài 2: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$

• Khi $x \neq -2$ ta có $f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{x+2} = x+1 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $\forall x \neq -2$

• Tại $x = -2$ ta có: $f(-2) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1 \Rightarrow f(-2) \neq \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x = -2$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$.

Bài 3:

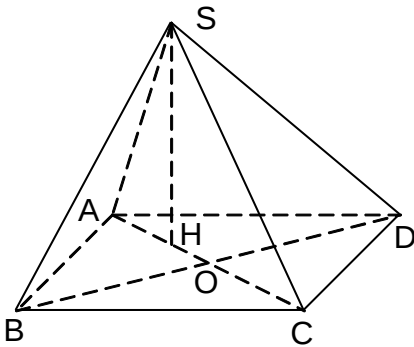
a) $y = 2 \sin x + \cos x - \tan x \Rightarrow y' = 2 \cos x - \sin x - 1 - \tan^2 x$

b) $y = \sin(3x+1) \Rightarrow y' = 3 \cos(3x+1)$

c) $y = \cos(2x+1) \Rightarrow y' = -2 \sin(2x+1)$

d) $y = \sqrt{1 + 2 \tan 4x} \Rightarrow y' = \frac{8}{\cos^2 4x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + 2 \tan 4x}} = \frac{4(1 + \tan^2 4x)}{\sqrt{1 + 2 \tan 4x}}$

Bài 4:



a) Vẽ $SH \perp (ABCD)$. Vì $SA = SB = SC = a$ nên $HA = HB = HD \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD

Mặt khác $\triangle ABD$ có $AB = AD$ và $\angle BAD = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều.

Do đó H là trọng tâm tam giác ABD nên $H \in AO \Rightarrow H \in AC$

Như vậy, $\begin{cases} SH \subset (SAC) \\ SH \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$

b) Ta có $\triangle ABD$ đều cạnh a nên có $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC có $SA = a$, $AC = a\sqrt{3}$

Trong $\triangle ABC$, ta có: $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH^2 = \frac{a^2}{3}$

Tam giác SHA vuông tại H có $SH^2 = SA^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$

$$HC = \frac{2}{3}AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HC^2 = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow SC^2 = HC^2 + SH^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = 2a^2$$

$$SA^2 + SC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = AC^2 \Rightarrow \text{tam giác SCA vuông tại S.}$$

c) $SH \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Bài 5a: $f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6$

a) $f'(-5) = 144$

b) Tại điểm $M_0(0; 1)$ ta có: $f'(0) = -6 \Rightarrow$ PTTT: $y = -6x + 1$

c) Hàm số $f(x)$ liên tục trên R. $f(-1) = 5$, $f(1) = -3 \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(-1; 1)$.

Bài 5b: $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3} \left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3} \right) \Rightarrow f'(x) = \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$

$$\text{PT } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = \sin x - \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{6} - 3x \right) = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Bài 6b: $f(x) = 2x^3 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 2$

a) Tiếp tuyến song song với d: $y = 22x + 2011 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 22$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = 22 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 2 = 22 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

• Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -9 \Rightarrow \text{PTTT} : y = 22x + 35$

• Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 15 \Rightarrow \text{PTTT} : y = 22x - 29$

b) Tiếp tuyến vuông góc với $\Delta: y = -\frac{1}{4}x + 2011 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 4$.

Gọi $(x_1; y_1)$ là toạ độ của tiếp điểm. Ta có $f'(x_1) = 4 \Leftrightarrow 6x_1^2 - 2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

• Với $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 3 \Rightarrow \text{PTTT} : y = 4x + 7$

• Với $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 3 \Rightarrow \text{PTTT} : y = 4x - 1$

Đề 6

Câu 1:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x-1) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+7}+3) = 6$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-3x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} \right) - 3x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + 3 \right)}{2x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{- \left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + 3 \right)}{2+\frac{1}{x}} = -2$

Câu 2: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$

• Ta có tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

a) Khi $m = 3$ ta có

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}, & \text{khi } x \neq 2 \\ 3, & \text{khi } x = 2 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & \text{khi } x \neq 2 \\ 3, & \text{khi } x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại mọi } x \neq 2.$$

Tại $x = 2$ ta có: $f(2) = 3; \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3 \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 2.$

Vậy với $m = 3$ hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases} = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Tại $x = 2$ ta có: $f(2) = m$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Leftrightarrow m = 3$

Câu 3: Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2 \Rightarrow f$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(0) = -2, f(1) = 1, f(2) = -8, f(4) = 16$

$\Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c_1 \in (0; 1)$

$f(1).f(2) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c_2 \in (1; 2)$

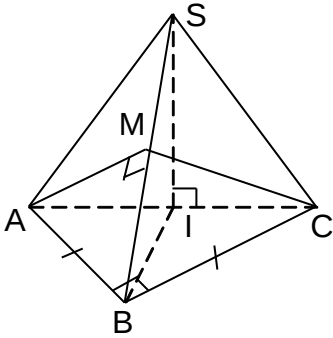
$f(2).f(4) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c_3 \in (2; 4)$

$\Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm trong khoảng $(-2; 5)$.

Câu 4:

$$a) y' = 5x^4 - 3x^2 + 4x \quad b) y' = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^3} \quad c) y' = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} \quad d) y' = -\frac{56x}{(x^2 - 3)^2} \left(\frac{2x^2 + 3}{x^2 - 3} \right)^3$$

Câu 5a:



- a)
 - $AC \perp BI, AC \perp SI \Rightarrow AC \perp SB$.
 - $SB \perp AM, SB \perp AC \Rightarrow SB \perp (AMC)$
- b) $SI \perp (ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = SBI$

$AC = 2a \Rightarrow BI = a = SI \Rightarrow \Delta SBI$ vuông cân $\Rightarrow SBI = 45^\circ$

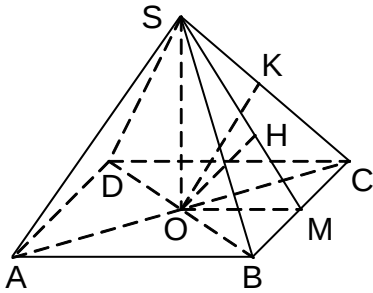
- c) $SB \perp (AMC) \Rightarrow (SC, (AMC)) = SCM$

Tính được $SB = SC = a\sqrt{2} = BC \Rightarrow \Delta SBC$ đều $\Rightarrow M$ là trung điểm của

$SB \Rightarrow$

$SCM = 30^\circ$

Câu 5b:



- a)
 - Vì $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều nên $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AC \perp BD \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} SO \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$$

- $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$

- b)
 - Tính $d(S, (ABCD))$

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SO$$

$$\text{Xét tam giác } SOB \text{ có } OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SB = 2a \Rightarrow SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{7a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

- Tính $d(O, (SBC))$

Lấy M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp BC, SM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOM) \Rightarrow (SBC) \perp (SOM)$.

Trong ΔSOM , vẽ $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$

Tính OH :

$$\Delta SOM \text{ có } \begin{cases} SO = \frac{a\sqrt{14}}{2} \\ OM = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{OM^2 \cdot OS^2}{OM^2 + OS^2} = \frac{7a^2}{30} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{210}}{30}$$

- c) Tính $d(BD, SC)$

Trong ΔSOC , vẽ $OK \perp SC$. Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OK \Rightarrow OK$ là đường vuông góc chung của BD và $SC \Rightarrow$

$$d(BD, SC) = OK.$$

Tính OK:

$$\Delta SOC \text{ có } \begin{cases} SO = \frac{a\sqrt{14}}{2} \\ OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OK^2 = \frac{OC^2 \cdot OS^2}{OC^2 + OS^2} = \frac{7a^2}{16} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{7}}{4}$$

Đề 7

Câu 1:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + 1 \right)} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Câu 2: } f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{2x^2+3x+1} & \text{khi } x \neq -\frac{1}{2} \\ A & \text{khi } x = -\frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{khi } x \neq -\frac{1}{2} \\ A & \text{khi } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Tại } x = -\frac{1}{2} \text{ ta có: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = A, \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{x+1} = 2$$

$$f(x) \text{ liên tục tại } x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow A = 2$$

Câu 3: Xét hàm số $f(x) = x^3 + 5x - 3 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

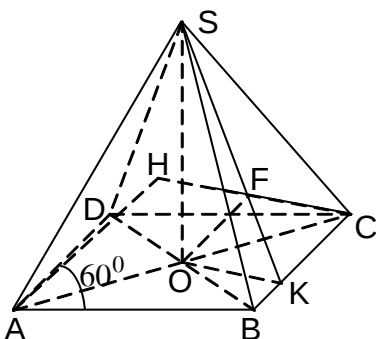
$$f(0) = -3, f(1) = 3 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \text{PT đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng } (0; 1).$$

Câu 4:

$$a) y = (x+1)(2x+3) = 2x^2 - x - 3 \Rightarrow y' = 4x - 1$$

$$b) y = \sqrt{1 + \cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow y' = \frac{-2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{4 \cdot \sqrt{1 + \cos^2 \frac{x}{2}}} = -\frac{\sin x}{4 \cdot \sqrt{1 + \cos^2 \frac{x}{2}}}$$

Câu 5:



$$a) \bullet AB = AD = a, \angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \Delta BAD \text{ đều} \Rightarrow BD = a$$

$$\bullet BC \perp OK, BC \perp SO \Rightarrow BC \perp (SOK).$$

$$b) \text{ Tính góc của SK và mp}(ABCD)$$

$$\bullet SO \perp (ABCD) \Rightarrow \left(SK, (ABCD) \right) = \angle SKO$$

$$\bullet \Delta BOC \text{ có } OB = \frac{a}{2}, OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \tan \angle SKO = \frac{SO}{OK} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$c) \text{ Tính khoảng cách giữa AD và SB}$$

$$\bullet AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SB) = d(A, (SBC))$$

$$\bullet \text{ Vẽ } OF \perp SK \Rightarrow OF \perp (SBC)$$

$$\bullet \text{ Vẽ } AH \parallel OF, H \in CF \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(AD, SB) = d(A, (SBC)) = AH.$$

$$\bullet \Delta CAH \text{ có OF là đường trung bình nên } AH = 2 \cdot OF$$

$$\bullet \Delta SOK \text{ có } OK = \frac{a\sqrt{3}}{4}, OS = a \Rightarrow \frac{1}{OF^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} \Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{57}}{19} \Rightarrow AH = 2OF = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$$

Câu 6a: $y = 2x^3 - 7x + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 7$

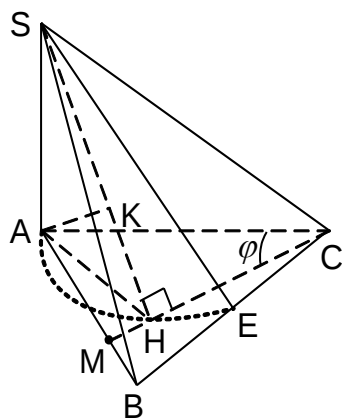
a) Vói $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$, $y'(2) = 17 \Rightarrow PTTT : y = 17x - 31$

b) Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm. Ta có: $y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 7 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$

- Vói $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow PTTT: y = -x + 7$

- Vói $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -4 \Rightarrow PTTT : y = -x - 5$

Câu 7a:



a) Tìm quỹ tích điểm H khi M di động trên AB

- $SA \perp (ABC) \Rightarrow AH$ là hình chiếu của S trên (ABC) .

Mà $CH \perp SH$ nên $CH \perp AH$.

• AC cố định, $\widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow H$ nằm trên đường tròn đường kính AC nằm trong mp(ABC).

Mặt khác: $+ \text{ Khi } M \rightarrow A \text{ thì } H \equiv A$

+ Khi $M \rightarrow B$ thì $H \equiv E$ (E là trung điểm của BC).

Vậy quỹ tích các điểm H là cung AHE của đường tròn đường kính AC nằm trong mp(ABC).

b) Tính SK và AH theo a và φ

- ΔAHC vuông tại H nên $AH = AC \cdot \sin ACM = a \sin \varphi$

- $SH^2 = SA^2 + AH^2 = a^2 + a^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow SH = a\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}$

- $\triangle SAH$ vuông tại A có $SA^2 = SK.SH \Leftrightarrow SK = \frac{SA^2}{SH} \Leftrightarrow SK = \frac{a}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}}$

Câu 6b: (P): $y = f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$ và (C): $y = g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

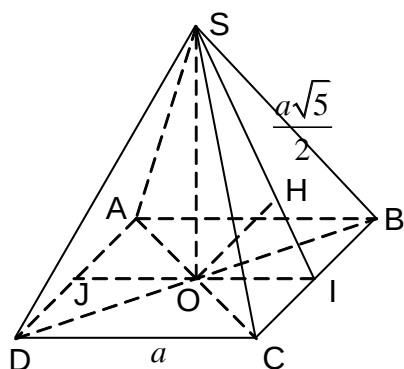
$$\text{a) } f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = -1 + x; \quad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \Rightarrow g'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2}$$

- $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow x = 0$

- $f(0) = g(0) = 1 \Rightarrow$ đồ thị hai hàm số có ít nhất một tiếp tuyến chung tại điểm $M(0;1)$ hay tiếp xúc nhau tại $M(0;1)$.

b) Phương trình tiếp tuyến chung của (P) và (C) tại tiếp điểm $M(0;1)$: $y = -x + 1$

Câu 7b:



a) Vì $SA = SC$ nên $SO \perp AC$, $SB = SD$ nên $SO \perp BD$
 $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) • I, J, O thẳng hàng $\Rightarrow SO \subset (ABCD)$.

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SIJ) \perp (ABCD)$$

- $BC \perp IJ, BC \perp SI \Rightarrow BC \perp (SIJ) \Rightarrow (SBC) \perp (SIJ)$

$$\Rightarrow \left((SBC), (SIJ) \right) = 90^0$$

c) $\forall \tilde{O}H \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$

$$\Delta_{SOB} \text{ có } SB = \frac{a\sqrt{5}}{2}, OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \Delta_{SOI} \text{ có}$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Đề 8

Bài 1:

$$1) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3}x^5 + 7x^3 - 11}{\frac{3}{4}x^5 - x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3} + \frac{7}{x^2} - \frac{11}{x^5}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^5}} = -\frac{4}{9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2(x^2-5x+6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{2(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+2)}{2(x-3)} = -\frac{2}{5}$$

$$2) f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \sqrt{2x} + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2\sqrt{2x}} \Rightarrow f'(1) = 5 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Bài 2:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

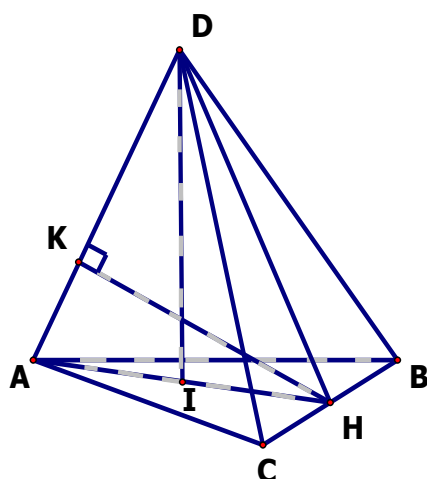
$$\bullet f(1) = a + 1 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + 1 = f(1)$$

$$\bullet f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x + 1)^2}$$

$$\text{Với } x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1, f'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{PTTT: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Bài 3:



1) CMR: $BC \perp (ADH)$ và $DH = a$.

ΔABC đều, H là trung điểm BC nên $AH \perp BC$, $AD \perp BC$
 $\Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH \Rightarrow DH = d(D, BC) = a$

2) CMR: $DI \perp (ABC)$.

$\bullet AD = a, DH = a \Rightarrow \Delta DAH$ cân tại D, mặt khác I là trung điểm

AH nên

$DI \perp AH$

$\bullet BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DI$
 $\Rightarrow DI \perp (ABC)$

3) Tính khoảng cách giữa AD và BC.

$\bullet$ Trong ΔADH vẽ đường cao HK tức là $HK \perp AD$ (1)

Mặt khác $BC \perp (ADH)$ nên $BC \perp HK$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $d(AD, BC) = HK$

$\bullet$ Xét ΔDIA vuông tại I ta có:

$$DI = \sqrt{AD^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

$$\bullet \text{ Xét } \Delta DAH \text{ ta có: } S = \frac{1}{2}AH \cdot DI = \frac{1}{2}AD \cdot HK \Rightarrow d(AD, BC) = HK = \frac{AH \cdot DI}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Bài 4a:

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} - 4x}{3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 4x}{3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 4}{\frac{3}{x} - 2} = \frac{7}{2}$$

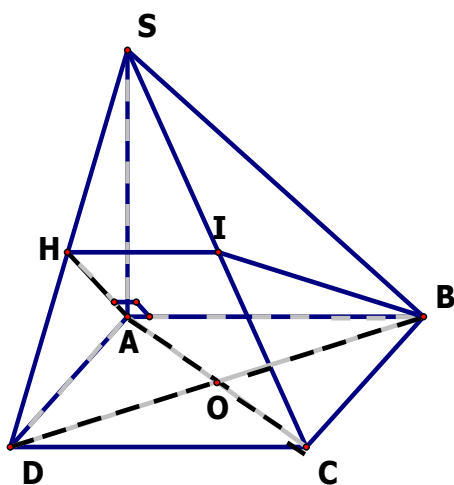
$$2) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 + 5x + 6}. \quad \text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} x = -2 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + 5x + 6) = 0 \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \forall x > -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 + 5x + 6} = -\infty$$

Bài 5a:

1) Xét hàm số $f(x) = 6x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Bài 4b:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

2)



- $$\Rightarrow \frac{HI}{CD} = \frac{SH}{SD} = \frac{\frac{3a}{2}}{2a} = \frac{3}{4} \Rightarrow HI = \frac{3}{4}CD = \frac{3a}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

• Từ (3) và (4) ta có:
$$S_{AHIB} = \frac{(AB + HI)AH}{2} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{3a}{4} \right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$1) \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^4}}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 4) = 4$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1}. \text{ Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0 \\ x > -1 \Rightarrow x+1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+2) = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$$

- $f(2) = -2, f(3) = 2 \Rightarrow f(2) \cdot f(3) < 0$ nên phương trình có một nghiệm $c_2 \in (2; 3)$

Mà cả ba nghiệm $c_1, c_2, 1$ phân biệt nên phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 5a - 3x & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{Tìm } a \text{ để hàm số liên tục tại } x=2.$$

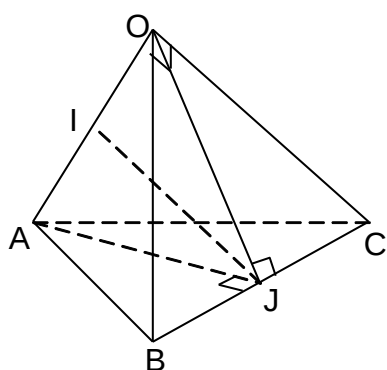
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3, \quad f(2) = 5a - 6$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 2 \text{ thì } 5a - 6 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{9}{5}$$

Bài 2: Xét $y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$$\text{BPT } y' \cdot y < 2x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$$

Bài 3:



a) CMR: $\triangle ABC$ vuông.

• $OA = OB = OC = a, \angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$ nên $\triangle AOB$ và $\triangle AOC$ đều cạnh a (1)

• Có $\angle BOC = 90^\circ \Rightarrow \triangle BOC$ vuông tại O và $BC = a\sqrt{2}$ (2)

• $\triangle ABC$ có $AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = (a\sqrt{2})^2 = BC^2$
 $\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A

b) CM: OA vuông góc BC.

• J là trung điểm BC, $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AJ \perp BC$.
 $\triangle OBC$ vuông cân tại O nên $OJ \perp BC \Rightarrow BC \perp OAJ \Rightarrow OA \perp BC$

c) Từ câu b) ta có $IJ \perp BC$

$\triangle ABC = \triangle OBC$ (c.c.c) $\Rightarrow AJ = OJ$ (3)

Từ (3) ta có tam giác JOA cân tại J, $IA = IO$ (gt) nên $IJ \perp OA$ (4)

Từ (3) và (4) ta có IJ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Bài 4: $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

Tiếp tuyến // với d: $y = 9x + 2011 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 9$

$$\text{Gọi } (x_0; y_0) \text{ là tọa độ của tiếp điểm} \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

• Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow \text{PTTT} : y = 9x + 7$

• Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \text{PTTT} : y = 9x - 25$

Bài 5: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

$$f''(x) = -\frac{1.2}{x^3}, \quad f'''(x) = (-1)^4 \frac{6}{x^4}. \quad \text{Dự đoán } f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{x^{n+1}} \quad (*)$$

• Thật vậy, (*) đúng với $n = 2$.

Giả sử (*) đúng với $n = k$ ($k \geq 2$), tức là có $f^{(k)}(x) = (-1)^{(k+1)} \frac{k!}{x^{k+1}}$

$$\text{Vì thế } f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = (-1)^{k+2} \frac{k!(k+1)x^k}{x^{(2k+2)}} = (-1)^{k+2} \frac{(k+1)!}{x^{k+2}} \Rightarrow (*) \text{ đúng với } n = k + 1$$

$$\text{Vậy } f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Đề 10

Câu 1:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{4}$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x + 3) = 3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Câu 2:

a) Xét hàm số: $f(x) = 2x^3 - 10x - 7 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

• $f(-1) = 1, f(0) = -7 \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $c_1 \in (-1; 0)$

• $f(0) = -7, f(3) = 17 \Rightarrow f(0) \cdot f(3) < 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $c_2 \in (0; 3)$

• $c_1 \neq c_2$ nên phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm thực.

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & , x \neq -1 \\ 2 & , x = -1 \end{cases}$$

• Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Với $x \notin \{-1; 1\}$ hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ xác định nên liên tục.

• Xét tại $x = 1 \notin D$ nên hàm số không liên tục tại $x = 1$

• Xét tại $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x-1} = -1 \neq f(-1) = 2 \text{ nên hàm số không liên tục tại } x = -1$$

Câu 3:

$$a) y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$$

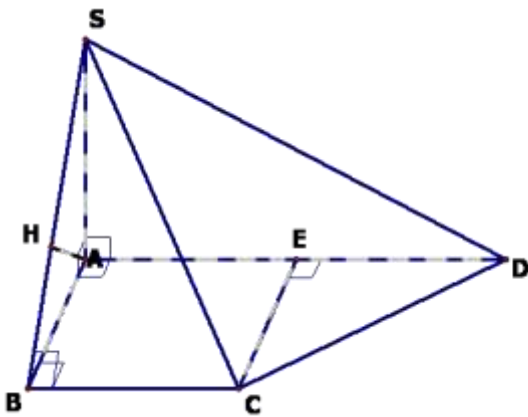
$$\text{Với } x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1, y'(-1) = 3 \Rightarrow \text{PTTT: } y = 3x + 2$$

b) Tính đạo hàm

$$\bullet y = x\sqrt{1+x^2} \Rightarrow y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow y' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\bullet y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x \Rightarrow y' = -2x\cos x + (x^2-2)\sin x + 2\sin x + 2x\cos x \Rightarrow y' = x^2\sin x$$

Câu 4:



a) CM các mặt bên là các tam giác vuông.

$$\bullet SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta SAB$ và ΔSAD vuông tại A.

• $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B

$$\bullet SB^2 = SA^2 + AB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

$$SC^2 = SB^2 + BC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$$

• hạ $CE \perp AD \Rightarrow \Delta CDE$ vuông cân tại E nên

$$EC = ED = AB = a \Rightarrow CD = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AD = AE + ED = BC + ED = 2a$$

$$\Rightarrow SD^2 = SA^2 + AD^2 = 6a^2$$

$$\bullet SC^2 + CD^2 = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2 = SD^2 \text{ nên tam giác } SDC \text{ vuông tại } C.$$

b) Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$

$$\bullet (SBC) \cap (ABCD) = BC, SB \perp BC, AB \perp BC \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = SBA \Rightarrow \tan SBA = \frac{SA}{AB} = \sqrt{2}.$$

c) Tính khoảng cách giữa AD và SC

• Ta có $SC \subset (SBC), BC \parallel AD \Rightarrow d(AD, SC) = d(A, (SBC))$

$$\bullet \text{Hạ } AH \perp SB \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{AB^2 \cdot SA^2}{AB^2 + SA^2} = \frac{2a^4}{3a^2} = \frac{2a^2}{3} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\bullet \text{Vậy } d(AD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 5a:

a) Tính $I = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x - 1}{x^2 - 4}$

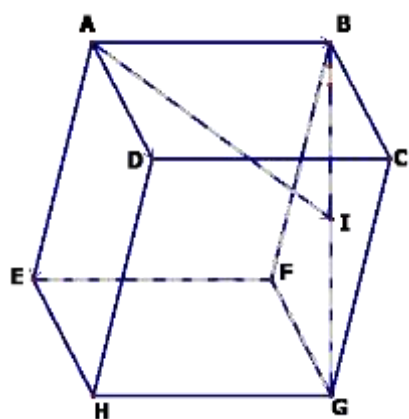
• Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x - 1) = -3 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0 \\ x > 2 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow I = -\infty$

b) $f(x) = \frac{8}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{x^2}, f'(-2) = -2, f'(2) = -2 \Rightarrow f'(-2) = f'(2)$

Câu 6a: $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

BPT: $y' < 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$

Câu 7a:



$$\begin{aligned} \vec{AI} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AG}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}) \\ &= \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

Câu 5b:

a) Tính gần đúng giá trị $\sqrt{4,04}$

• Đặt $f(x) = \sqrt{x}$, ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, theo công thức tính gần đúng ta có với:

$x_0 = 4, \Delta x = 0,04 \Rightarrow f(4,04) \approx f(4 + 0,04) + f'(4) \cdot 0,04$

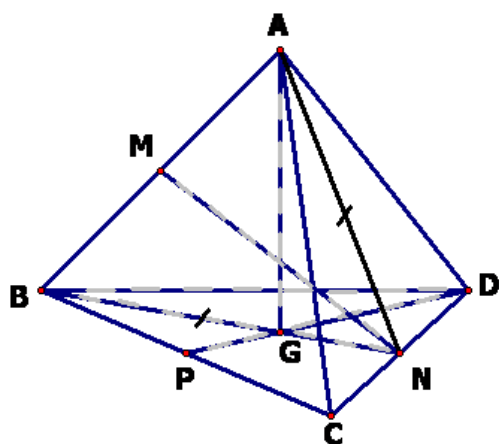
Tức là ta có $\sqrt{4,04} = \sqrt{4 + 0,04} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,04 = 2 + 0,01 = 2,01 \Rightarrow \sqrt{4,04} \approx 2,01$

b) Tính vi phân của $y = x \cdot \cot^2 x \Rightarrow y' = \cot^2 x - x \frac{2 \cot x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow y' = \cot^2 x - 2x \cot x (1 + \cot^2 x)$

$\Rightarrow dy = (\cot^2 x - 2x \cot x - 2x \cot^3 x) dx$

Câu 6b: Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{|x - 3|}$. Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3x + 1) = 1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} |x - 3| = 0 \\ x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{|x - 3|} = +\infty$

Câu 7b:



Tứ diện ABCD đều, nên ta chỉ tính khoảng cách giữa hai cạnh đối diện AB và CD.

$$\begin{aligned} NA &= NB = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AM = \frac{a}{2} \Rightarrow \angle AMN = 90^\circ \\ \Rightarrow MN^2 &= AN^2 - AM^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} \\ \Rightarrow d(AB, CD) &= \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Đề 11

Câu 1:

$$1) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+3}+x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{\sqrt{x^2-x+3}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{-x \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} \right) - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x}-1}{-\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1 \right)} = \frac{1}{2}$$

2) Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- $f(-2) = -1, f(0) = 1 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_1 \in (-2; 0)$
- $f(0) = 1, f(1) = -1 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_2 \in (0; 1)$
- $f(1) = -1, f(2) = 3 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_3 \in (1; 2)$
- Phương trình đã cho là phương trình bậc ba, mà c_1, c_2, c_3 phân biệt nên phương trình đã cho có đúng ba nghiệm thực.

Câu 2:

$$1) a) y = \left(\frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1) \Rightarrow y' = \left(-\frac{2}{x^2} + 3 \right) (\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= -\frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - 3$$

$$b) y = x + \sin x \Rightarrow y' = 1 + \cos x$$

$$c) y = \frac{x^2-2x}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$$

$$2) y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x \Rightarrow y'' = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$3) y = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow y = \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow dy = \cos 2x dx$$

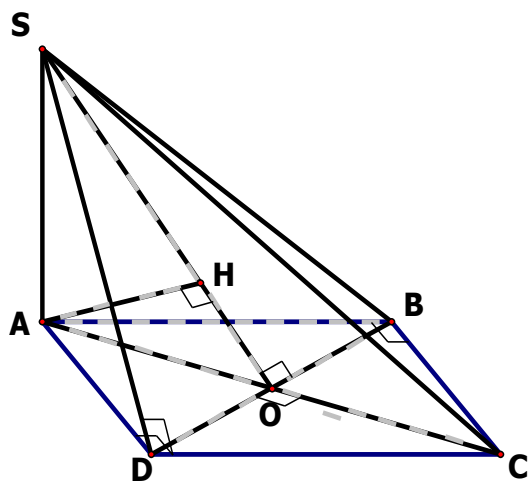
Câu 3:

a) Chứng minh : $BD \perp SC, (SBD) \perp (SAC)$.

- ABCD là hình vuông nên $BD \perp AC, BD \perp SA$ ($SA \perp (ABCD)$) $\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$
- (SBD) chứa $BD \perp (SAC)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$

b) Tính $d(A, (SBD))$

- Trong ΔSAO hạ $AH \perp SO, AH \perp BD$ ($BD \perp (SAC)$) nên $AH \perp (SBD)$



• $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SA = a\sqrt{6}$ (gt) và ΔSAO vuông tại A

nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{13}{6a^2}$

$\Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{13} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{78}}{13}$

c) Tính góc giữa SC và (ABCD)

• Để thấy do $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của SC trên (ABCD) là AC $\Rightarrow$ góc giữa SC và (ABCD) là $\angle SCA$. Vậy ta có:

$$\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SCA = 60^\circ$$

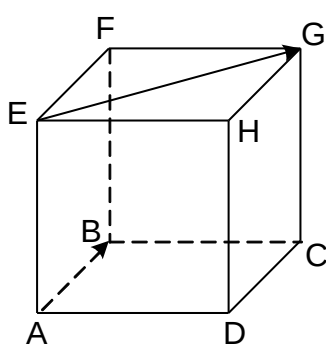
Câu 4a: $y = x - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{x^2}$

- Các giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $A(-1;0), B(1;0)$
- Tại $A(-1;0)$ tiếp tuyến có hệ số góc $k_1 = 2$ nên PTTT: $y = 2x + 2$
- Tại $B(1;0)$ tiếp tuyến cũng có hệ số góc $k_2 = 2$ nên PTTT: $y = 2x - 2$

Câu 5a: $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5 \Rightarrow f'(x) = 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{128}{x^4}$

PT $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{128}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 60x^2 + 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 8 \\ x^2 = \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \end{cases}$

Câu 6a:



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1, \overrightarrow{AD} = \vec{e}_2, \overrightarrow{AE} = \vec{e}_3$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \vec{e}_1 \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = a^2$

Cách khác:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{EG}| \cdot \cos(\angle FEG) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2$

Câu 4b: $y = \sin 2x \cdot \cos 2x$

• $y = \frac{1}{2} \sin 4x \Rightarrow y' = 2 \cos 4x \Rightarrow y'' = -8 \sin 4x$

Câu 5b: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \Rightarrow y' = x^2 + x - 2$

• $y' = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = -2 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Câu 6b:

Gọi M là trung điểm của $B'C$, G là trọng tâm của $\Delta AB'C$.

Vì $D'.AB'C$ là hình chóp đều, có các cạnh bên có độ dài

$$\Rightarrow BD' \perp (AB'C)$$

$$\Rightarrow BD' \perp GM.$$

Mặt khác $\triangle AB'C$ đều nên $GM \perp B'C$

$\Rightarrow GM$ là đoạn vuông góc chung của BD' và $B'C$.

$$\bullet \text{ Tính độ dài } GM = \frac{1}{3} AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$a\sqrt{2}$, nên BD' là đường cao của chóp này

Đề 12

Bài 1: Tính giới hạn:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 4^{n-1}}{4^{n-1} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 4}{1 + \frac{3}{4^{n-1}}} = -4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{24}$$

Bài 2: Chứng minh phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm thuộc $(-2; 2)$.

Xem đề 11.

Bài 3: Chứng minh hàm số sau không có đạo hàm tại $x = -3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{khi } x \neq -3 \\ 1 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$$

• Khi $x \neq -3 \Rightarrow f(x) = x - 3$

• $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 4}{x + 3}$ mà $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x - 4}{x + 3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x - 4}{x + 3} = +\infty$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = -3$.

Chú ý: Có thể chứng minh hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = -3 \Rightarrow f(x)$ không có đạo hàm tại $x = -3$.

Bài 4: Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$a) y = (2x + 1)\sqrt{2x - x^2} \Rightarrow y' = 2\sqrt{2x - x^2} + (2x + 1) \cdot \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} \Rightarrow y' = \frac{-4x^2 + 6x + 1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$b) y = x^2 \cdot \cos x \Rightarrow y' = 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x$$

$$\text{Bài 5: } y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$a) \text{ Tại } A(2; 3) \Rightarrow k = y'(2) = -2 \Rightarrow \text{PTTT: } y = -2x - 1$$

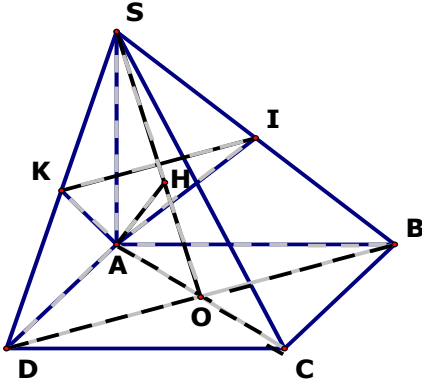
$$b) \text{ Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng } y = -\frac{1}{8}x + 5 \text{ nên hệ số góc của tiếp tuyến là } k = -\frac{1}{8}$$

$$\text{Gọi } (x_0; y_0) \text{ là tọa độ của tiếp điểm } \Rightarrow y'(x_0) = k \Leftrightarrow -\frac{2}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{PTTT: } y = -\frac{1}{8}(x + 3) + \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ Với } x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{PTTT: } y = -\frac{1}{8}(x - 5) + \frac{3}{2}$$

Bài 6:



a) Chứng minh các mặt bên hình chóp là các tam giác vuông.

- $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$, $AB \perp BC$ (gt)
 $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.
- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$, $CD \perp AD$ (gt)
 $\Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D
- $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AD$
 $\Rightarrow$ các tam giác SAB và SAD đều vuông tại A.

b) Chứng minh: (SAC) vuông góc (AIK) .

- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$, $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC)$
- ΔSAB và ΔSAD vuông cân tại A, $AK \perp SA$ và $AI \perp SB$
nên I và K là các trung điểm của AB và AD $\Rightarrow IK \parallel BD$
mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow IK \perp (SAC) \Rightarrow (AIK) \perp (SAC)$

c) Tính góc giữa SC và (SAB) .

- $CB \perp AB$ (từ gt), $CB \perp SA$ ($SA \perp (ABCD)$) nên $CB \perp (SAB) \Rightarrow$ hình chiếu của SC trên (SAB) là SB
 $\Rightarrow (SC, (SAB)) = (SC, SB) = \angle CSB$

- Tam giác SAB vuông cân có $AB = SA = a \Rightarrow SB = a\sqrt{2} \Rightarrow \tan \angle CSB = \frac{BC}{SB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) Tính khoảng cách từ A đến (SBD) .

Hạ $AH \perp SO$, $AH \perp BD$ do $BD \perp (SAC) \Rightarrow AH \perp (SBD)$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow d(A, (SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Đề 13

Bài 1:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 5}{x + 1} = \frac{7}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x + 1}{x - 1}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \\ x - 1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x + 1) = 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x + 1}{x - 1} = +\infty$$

Bài 2: Xét hàm số $f(x) = x^3 - 2mx^2 - x + m \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- $f(m) = -m^3$, $f(0) = m \Rightarrow f(0).f(m) = -m^4$
- Nếu $m = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 0$
- Nếu $m \neq 0$ thì $f(0).f(m) < 0, \forall m \neq 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; m)$ hoặc $(m; 0)$.

Vậy phương trình $x^3 - 2mx^2 - x + m = 0$ luôn có nghiệm.

$$\text{Bài 3: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Đề 14

Bài 1:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2 \right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{1}{4}$$

Bài 2: Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 10x - 7 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- $f(-1) = 1, f(0) = -7 \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_1 \in (-1; 0)$.
- $f(0) = -7, f(3) = 17 \Rightarrow f(0) \cdot f(3) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_2 \in (0; 3)$.
- $c_1 \neq c_2$ nên phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm thực.

Bài 3:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$$

Ta có: $\bullet f(-1) = -m + 2$ $\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1) = -2$
 $\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (mx + 2) = -m + 2$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow -m + 2 = -2 \Leftrightarrow m = 4$

Bài 4:

$$\text{a) } y = \frac{3x-2}{\sqrt{2x+5}} \Rightarrow y' = \frac{3\sqrt{2x+5} - \frac{2}{\sqrt{2x+5}}}{2x+5} = \frac{3(2x+5) - 2}{(2x+5)\sqrt{2x+5}} = \frac{6x+13}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$$

$$\text{b) } y = (x^2 - 3x + 1) \cdot \sin x \Rightarrow y' = (2x - 3) \sin x + (x^2 - 3x + 1) \cos x$$

Bài 5: $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} (x \neq 0)$

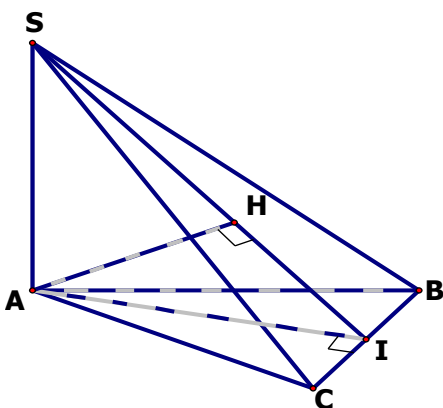
a) Với $y_0 = \frac{1}{2}$ ta có $\frac{1}{x_0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = 2; y'(2) = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ PTTT: $y = -\frac{1}{4}x + 1$

b) Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -4x + 3$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = -4$

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp $\Rightarrow y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

• Với $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ PTTT: $y = -4x + 4$

• Với $x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ PTTT: $y = -4x - 4$



Bài 6:

a) Chứng minh: (SBC) vuông góc (SAI).

• $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC, AI \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$

b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

• Về $AH \perp SI$ (1). $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$ nên $d(A, (SBC)) = AH$

$$\bullet \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4}$$

c) Tính góc giữa (SBC) và (ABC).

$$\bullet (SBC) \cap (ABC) = BC, AI \perp BC, SI \perp BC$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = SIA$$

$$\bullet \tan SIA = \frac{SA}{IA} = \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SIA = 60^\circ$$

Đề 15

Bài 1:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}-3}{2-3\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{3}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}-3} = \frac{-3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x}-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x}}-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1$$

Bài 2: Xét hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\bullet f(-1) = -3, f(1) = 1 \Rightarrow f(-1).f(1) < 0 \text{ nên PT } f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-1; 1).$$

Bài 3:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{Tập xác định: } D = \mathbb{R}.$$

$$\bullet \text{Tại } x \neq -2 \Rightarrow f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{x+2} = x+1 \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x \neq -2.$$

$$\bullet \text{Tại } x = -2 \text{ ta có } f(-2) = 3, \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1 \neq f(-2) \Rightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x = -2.$$

Bài 4:

$$a) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$b) y = (2x-3).\cos(2x-3) \Rightarrow y' = 2[\cos(2x-3) - (2x-3)\sin(2x-3)]$$

$$\text{Bài 5: } y = \frac{2x^2+2x+1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2}$$

$$a) \text{ Giao điểm của đồ thị với trục tung là } (0; 1); y'(0) = 1 \Rightarrow \text{PTTT: } y = x + 1.$$

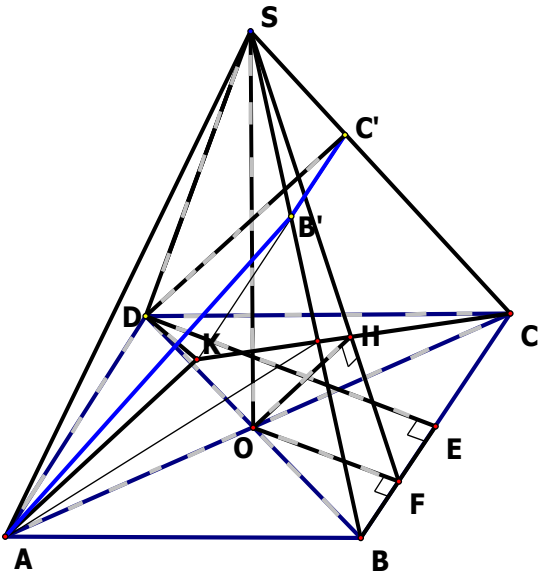
$$b) \text{ Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng } y = x + 2011 \text{ nên tiếp tuyến có hệ số góc là } k = 1.$$

$$\text{Gọi } (x_0; y_0) \text{ là tọa độ của tiếp điểm } \Rightarrow y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x_0^2+4x_0+1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2+2x_0=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow \text{PTTT: } y = x + 1.$$

- Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -5 \Rightarrow$ PTTT: $y = x - 3$

Bài 6:



a) Chứng minh: (SOF) vuông góc (SBC).

- ΔCBD đều, E là trung điểm BC nên $DE \perp BC$
- ΔBED có OF là đường trung bình nên $OF \parallel DE$,
 $DE \perp BC \Rightarrow OF \perp BC$ (1)
- $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SOF)$

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SOF) \perp (SBC)$.

b) Tính khoảng cách từ O và A đến (SBC).

- Vẽ $OH \perp SF$; $(SOF) \perp (SBC)$,
 $(SOF) \cap (SBC) = SF$, $OH \perp SF$

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$

$$\bullet OF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a\sqrt{3}}{4}, SO^2 = SB^2 - OB^2 \Rightarrow SO = \frac{3a}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OF^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$$

- Trong mặt phẳng (ACH), vẽ $AK \parallel OH$ với $K \in CH \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK$

$$AK = 2OH \Rightarrow AK = \frac{3a}{4} \Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{3a}{4}$$

c) $\bullet AD \subset (\alpha)$, $(\alpha) \perp (SBC) \Rightarrow (\alpha) \equiv (AKD)$

- Xác định thiết diện

Dễ thấy $K \in (\alpha)$, $K \in (SBC) \Rightarrow K \in (\alpha) \cap (SBC)$.

Mặt khác $AD \parallel BC$, $AD \subset (SBC)$ nên $(\alpha) \cap (SBC) = \Delta \Rightarrow K \in \Delta$, $\Delta \parallel BC$

Gọi $B' = \Delta \cap SB$, $C' = \Delta \cap SC \Rightarrow B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' \parallel AD$

Vậy thiết diện của hình chóp S.ABCD bị cắt bởi (α) là hình thang $AB'C'D$

- $SO \perp (ABCD)$, OF là hình chiếu của SF trên (ABCD) nên $SF \perp BC \Rightarrow SF \perp AD$ (*)

- $SF \perp OH$, $OH \parallel AK \Rightarrow SF \perp AK$ (**)

- Từ (*) và (**) ta có $SF \perp (\alpha)$

- $SF \perp (\alpha)$, $SO \perp (ABCD) \Rightarrow ((\alpha), (ABCD)) = (SF, SO) = OSF$

$$\bullet \tan OSF = \frac{OF}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ((\alpha), (ABCD)) = 30^\circ$$

Đề 16

Bài 1:

$$1) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3}x^5 + 7x^3 - 11}{\frac{3}{4}x^5 - x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3} + \frac{7}{x^2} - \frac{11}{x^5}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^5}} = -\frac{4}{9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2(x^2-5x+6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{2(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+2)}{2(x-3)} = -\frac{2}{5}$$

$$2) f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \sqrt{2x} + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2\sqrt{2x}} \Rightarrow f'(1) = 5 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Bài 2:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

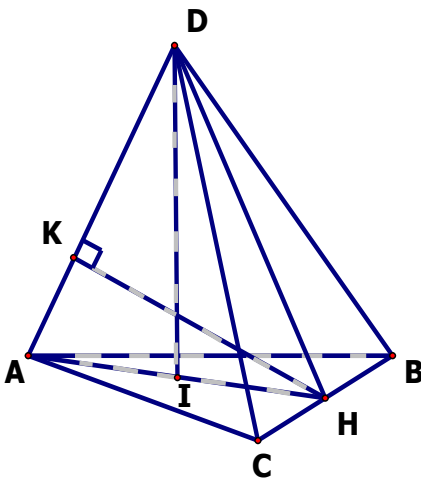
$$\bullet f(1) = a + 1 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + 1 = f(1)$$

$$\bullet f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x + 1)^2}$$

$$\text{Với } x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1, f'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{PTTT: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Bài 3:



1) CMR: $BC \perp (ADH)$ và $DH = a$.

ΔABC đều, H là trung điểm BC nên $AH \perp BC$, $AD \perp BC$
 $\Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH \Rightarrow DH = d(D, BC) = a$

2) CMR: $DI \perp (ABC)$.

$\bullet AD = a, DH = a \Rightarrow \Delta DAH$ cân tại D, mặt khác I là trung điểm AH nên $DI \perp AH$

$\bullet BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DI$
 $\Rightarrow DI \perp (ABC)$

3) Tính khoảng cách giữa AD và BC.

$\bullet$ Trong ΔADH vẽ đường cao HK tức là $HK \perp AD$ (1)
 Mặt khác $BC \perp (ADH)$ nên $BC \perp HK$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $d(AD, BC) = HK$

$\bullet$ Xét ΔDIA vuông tại I ta có:

$$DI = \sqrt{AD^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

$$\bullet \text{ Xét } \Delta DAH \text{ ta có: } S = \frac{1}{2}AH \cdot DI = \frac{1}{2}AD \cdot HK \Rightarrow d(AD, BC) = HK = \frac{AH \cdot DI}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Bài 4a:

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} - 4x}{3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 4x}{3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 4}{\frac{3}{x} - 2} = \frac{7}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 + 5x + 6}. \quad \text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} x = -2 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + 5x + 6) = 0 \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \forall x > -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 + 5x + 6} = -\infty$$

Bài 5a:

1) Xét hàm số $f(x) = 6x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Bài 4b:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

1) Xét hàm số $f(x) = (m^2 - 2m + 2)x^3 + 3x - 3 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- $$f(0) = -3, f(1) = m^2 - 2m + 2 > 0 \Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow \text{PT } f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm } c \in (0;1)$$

- $$\Rightarrow \frac{HI}{CD} = \frac{SH}{SD} = \frac{\frac{3a}{2}}{2a} = \frac{3}{4} \Rightarrow HI = \frac{3}{4}CD = \frac{3a}{4} \quad (3)$$

• Từ (3) và (4) ta có:
$$S_{AHIB} = \frac{(AB+HI)AH}{2} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{3a}{4} \right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$1) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} - 3 \cdot 5^{n+1}}{4 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot 3^n - 15 \cdot 5^n}{4 \cdot 5^n + 15 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n - 15}{4 + 15 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n} = -\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(1 - \sin x)(\sin x - x) - (\cos x - 1)(\cos x + x)}{(\sin x - x)^2} = \frac{(\sin x + \cos x) + x(\sin x - \cos x) - 1}{(\sin x - x)^2}$$

$$1) \ y = x^3 + x^2 + x - 5 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x + 1$$

- (d): $6x - y + 2011 = 0 \Leftrightarrow y = 6x + 2011$
 - Vì tiếp tuyến song song với (d) nên tiếp tuyến có hệ số góc là $k = 6$.
 - Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm $\Rightarrow 3x_0^2 + 2x_0 + 1 = 6 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 2x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -\frac{5}{3} \end{cases}$
 - Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow PTTT : y = 6x - 8$
 - Với $x_0 = -\frac{5}{3} \Rightarrow y_0 = -\frac{230}{27} \Rightarrow PTTT : y = 6\left(x + \frac{5}{3}\right) - \frac{230}{27} \Leftrightarrow y = 6x + \frac{10}{9}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 6x + 7 & \text{khi } x \geq 2 \\ ax^2 + 3a & \text{khi } x < 2 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 15 = f(2)$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3a) = 7a$
 - $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow 7a = 15 \Leftrightarrow a = \frac{15}{7}$

Bài 3:

a) Xác định và tính góc giữa SB và (ABC), SB và (SAC).

- $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC)
 $\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = SBA \Rightarrow \tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{x}{a\sqrt{2}}$
- $BC \perp AC, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAC) \Rightarrow SC$ là hình chiếu của SB trên (SAC)
 $\Rightarrow (SB, (SAC)) = (SB, SC) = BSC \Rightarrow \tan BSC = \frac{BC}{SC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

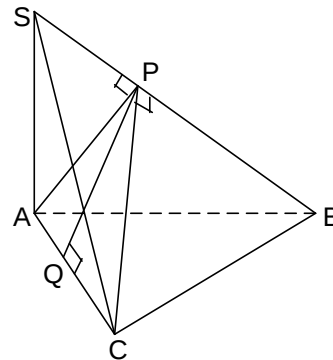
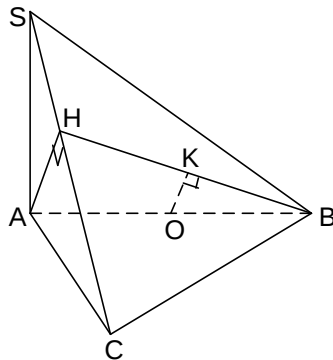
b) Chứng minh $(SAC) \perp (SBC)$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

- Theo chứng minh trên ta có $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$
- Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp BC$ (do $BC \perp (SAC)$). Vậy $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

c) Tính khoảng cách từ O đến (SBC). (O là trung điểm của AB).

Gọi K là trung điểm của BH $\Rightarrow OK \parallel AH \Rightarrow OK \perp (SBC)$ và $OK = \frac{AH}{2}$

$$\Rightarrow d(O, (SBC)) = OK = \frac{ax}{2\sqrt{x^2 + a^2}}.$$



d) Xác định đường vuông góc chung của SB và AC

- Dựng mặt phẳng (α) đi qua AC và vuông góc với SB tại P $\Rightarrow CP \perp SB$ và $AP \perp SB$.
 - Trong tam giác PAC hạ $PQ \perp AC \Rightarrow PQ \perp SB$ vì $SB \perp (PAC)$.
- Như vậy PQ là đường vuông góc chung của SB và AC.

Bài 4a:

$$1) f(x) = x^2 \sin(x-2) \Rightarrow f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2) \Rightarrow f'(2) = 4 \sin 0 + 4 \cos 0 = 4$$

2) Giả sử công sai của cấp số cộng cần tìm là d thì ta có cấp số cộng là:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + d, \frac{1}{2} + 2d, \frac{1}{2} + 3d, \frac{1}{2} + 4d = 8 \Rightarrow 4d = \frac{15}{2} \Rightarrow d = \frac{15}{8}$$

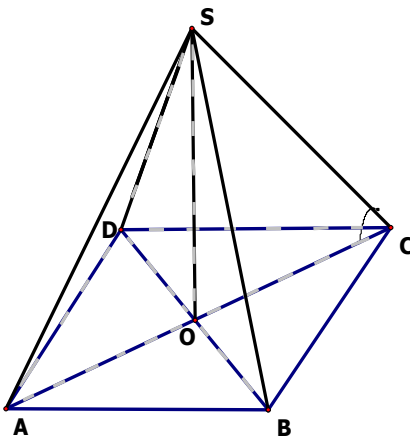
Vậy cấp số cộng đó là $\frac{1}{2}, \frac{19}{8}, \frac{34}{8}, \frac{49}{8}, 8$

Bài 5a:

1) Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 10x - 7 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- $f(-1) = 1, f(0) = -7 \Rightarrow f(-1).f(0) < 0$ nên PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_1 \in (-1; 0)$
- $f(3) = -10, f(4) = 17 \Rightarrow f(3).f(4) < 0$ nên PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_2 \in (3; 4)$
- mà $c_1 \neq c_2$ nên phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm thực

2)



- Hình chóp S.ABCD là chóp tứ giác đều nên chân đường cao SO của hình chóp là $O = AC \cap BD$
- Đáy là hình vuông cạnh bằng a nên $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- ΔSOC vuông tại O, có $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \angle SCO = 30^\circ$
 $\Rightarrow SO = OC \cdot \tan \angle SCO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Bài 4b:

1) $f(x) = \sin 2x - 2 \sin x - 5 \Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x - 2 \cos x$

$$\text{PT } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

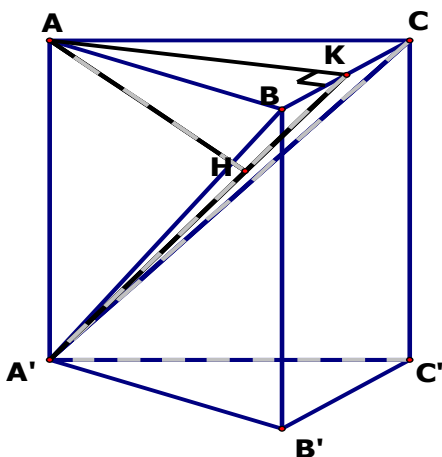
2) Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân.

- Gọi q là công bội của cấp số nhân ta có $b = aq, c = aq^2$
- $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (a^2 + a^2q^2)(a^2q^2 + a^2q^4) = a^4q^2(1 + q^2)^2$ (1)
- $(ab + bc)^2 = (a.aq + aq.aq^2)^2 = a^4q^2(1 + q^2)^2$ (2)
- Từ (1) và (2) ta suy ra $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$.

Bài 5b:

1) Xét hàm số $f(x) = (m^2 + 1)x^4 - x^3 - 1 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với mọi m .

- $f(-1) = m^2 + 1, f(0) = -1 \Rightarrow f(-1).f(0) < 0$ nên PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_1 \in (-1; 0)$



- $f(0) = -1, f(2) = 16m^2 + 7 \Rightarrow f(0).f(2) < 0$ nên PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_2 \in (0; 2)$

- mà $c_1 \neq c_2 \Rightarrow$ phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm thực.

2)

Tính góc giữa 2 mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) và khoảng cách từ A đến $(A'BC)$

- $\Delta AA'B = \Delta AA'C (c.g.c) \Rightarrow A'B = A'C$.

Gọi K là trung điểm BC $\Rightarrow AK \perp BC$ và $A'K \perp BC$

$$\Rightarrow BC \perp (AA'K) \Rightarrow (A'BC) \perp (AA'K),$$

$$(A'BC) \cap (AA'K) = A'K, AH \perp A'K \Rightarrow AH \perp (A'BC)$$

$$\Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH$$

$$\bullet \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\bullet AK \perp BC \text{ và } A'K \perp BC \Rightarrow ((A'BC), (ABC)) = A'KA$$

$$\bullet \text{ Trong } \Delta A'KA \text{ ta có } \tan A'KA = \frac{AA'}{AK} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A'KA = 30^\circ$$

Đề 18

Câu	Nội dung	Điểm
1.a (0.5đ)	$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$	0.25
	$\bullet = -1$	0.25
1.b (0.5đ)	$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}-2)}{x-3}$	0.25
	$\bullet = 4$	0.25
1.c (0.5đ)	$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right)}{x}$	0.25
	$\bullet = -1$	0.25
2 (1đ)	$\bullet f(5) = A$	0.25
	$\bullet \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$	0.25
	$\bullet \text{ Hàm số liên tục tại } x = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$	0.25
	$\bullet A = 10$	0.25
3.a (0.75đ)	$\bullet y' = \frac{(3x^2 + 2x - 1)'(x^2 - 1) - (3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$	0.25
	$\bullet y' = \frac{(6x + 2)(x^2 - 1) - (3x^2 + 2x - 1)2x}{(x^2 - 1)^2}$	0.25
	$\bullet y' = \frac{-2x^2 - 4x - 2}{(x^2 - 1)^2}$	0.25
3.b (0.75đ)	$\bullet y' = (\sqrt{x})' \cdot \cos 3x + \sqrt{x}(\cos 3x)'$	0.25
	$\bullet y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos 3x - \sqrt{x} \sin 3x (3x)'$	0.25
	$\bullet y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos 3x - 3\sqrt{x} \sin 3x$	0.25
4.a (1đ)	$\bullet BC \perp AB \quad (\Delta ABC \text{ vuông tại } B)$	0.25
	$\bullet BC \perp SA \quad (SA \perp (ABC))$	0.25
	$\bullet BC \perp (SAB)$	0.50
4.b	$\bullet AB \text{ là hình chiếu của } SB \text{ trên } (ABC)$	0.25

(1đ)	• $(SB, (ABC)) = (SB, AB) = SBA$	0.25
	• $\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60^0$	0.25
	• Kết luận: $(SB, (ABC)) = 60^0$	0.25
4.c (1đ)	• $AM \perp SB$ (AM là đường cao tam giác SAB)	0.25
	• $AM \perp BC$ ($BC \perp (SAB)$)	0.25
	• $AM \perp (SBC)$	0.25
	• $(AMN) \perp (SBC)$	0.25
5a (1đ)	• Đặt $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 5]$	0.25
	• $f(-2) = -92, f(1) = 1, f(2) = -8, f(5) = 1273$	0.25
	• $f(-2).f(1) = -92 < 0, f(1).f(2) = -8 < 0, f(2).f(5) = -10184 < 0$	0.25
	• Kết luận	0.25
6a.a (1đ)	• $y' = 4x^2 + x - 5$	0.25
	• $y' > 0 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 5 > 0$	0.25
	• Lập bảng xét dấu	0.25
	• $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup (1; +\infty)$	0.25
5b (1đ)	• Đặt $f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 1]$	0.25
	• $f(-2) = -3, f(-1) = 5, f(1) = -3$	0.25
	• $f(-2).f(-1) = -15 < 0, f(-1).f(1) = -15 < 0$	0.25
	• Kết luận	0.25
6b.b (1đ)	• PTTT d: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0) \Leftrightarrow y - (4x_0^3 - 6x_0^2 + 1) = (12x_0^2 - 12x_0)(x - x_0)$	0.25
	• $A(-1; -9) \in d \Rightarrow -9 - (4x_0^3 - 6x_0^2 + 1) = (12x_0^2 - 12x_0)(-1 - x_0)$	0.25
	• $8x_0^3 + 6x_0^2 - 12x_0 - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{5}{4} \\ x_0 = -1 \end{cases}$	0.25
	• Kết luận: $d_1: y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}, d_2: y = 24x + 15$	0.25

ĐỀ 19

Câu 1:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4 - 3x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(4-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{4-x} = \frac{1}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = -2$$

Câu II:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x > 2 \\ 2x-20 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

• $f(2) = -16$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -16, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(2+x)(\sqrt{x+2}+2)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-(x+2)(\sqrt{x+2}+2)] = -16$
- Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$

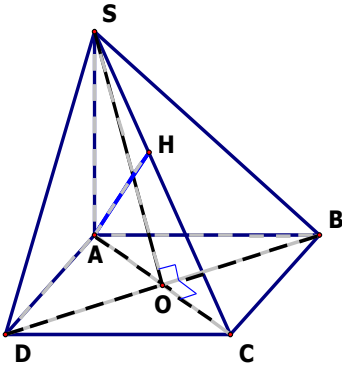
Câu III:

$$1) f(x) = \frac{3-5x}{x^2-x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{5x^2-6x-2}{(x^2-x+1)^2}$$

$$2) f(x) = (\sin(\tan(x^4+1)))^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 8x^3 \cdot \sin(\tan(x^4+1)) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^4+1)} \cos(\tan(x^4+1)) = \frac{4x^3 \sin 2(\tan(x^4+1))}{\cos^2(x^4+1)}$$

Câu IV:



1) CMR: $(SAB) \perp (SBC)$.

- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC, BC \perp AB$
 $\Rightarrow BC \perp (SAB), BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

2) Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng SC.

- Trong tam giác SAC có $AH \perp SC$
- $d(A, SC) = AH \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{8}{3a^2}$
 $\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

3) Tính góc giữa mặt phẳng (SBD) với mặt phẳng (ABCD).

- Vì ABCD là hình vuông nên $AO \perp BD, SO \perp BD$
- $(SBD) \cap (ABCD) = BD \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = SOA$

- Tam giác SOA vuông tại A $\Rightarrow \tan SOA = \frac{SA}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = 60^\circ$

Câu Va: $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 2$

1) BPT $y' \geq 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

2) Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $x + y + 50 = 0$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = -1$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm. Ta có: $3x_0^2 - 6x_0 + 2 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Khi đó $y_0 = 2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = -(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = -x + 3$.

Câu Vb:

1) $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$.

- Gọi công bội của cấp số nhân là $q \Rightarrow$ cấp số nhân đó gồm 5 số hạng là $u_1, u_1q, u_1q^2, u_1q^3, u_1q^4$

- Theo giả thiết ta có hệ $u_1 \begin{cases} u_1q^2 = 3 \\ u_1q^4 = 27 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} q = 3 \\ q = -3 \end{cases}$

- Với $q = 3$ ta suy ra $u_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ cấp số nhân là: $\frac{1}{3}; 1; 3; 9; 27$

- Với $q = -3$ ta suy ra $u_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ cấp số nhân đó là: $\frac{1}{3}; -1; 3; -9; 27$

2) $f(x) = a \cdot \cos x + 2 \sin x - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cos x - a \cdot \sin x - 3$.

PT $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - a \cdot \sin x = 3$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2 + (-a)^2 \geq 3^2 \Leftrightarrow a^2 \geq 5 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Câu I:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2 \cdot 4^n}{4^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 2$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3x-1)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{x-2} = 8$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1} + 2} = \frac{3}{4}$$

Câu II:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 18}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a+x & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

$$\bullet f(3) = a+3 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+6)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+6) = 9$$

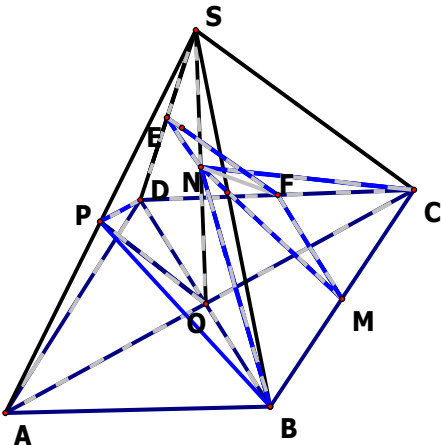
$$\bullet f(x) \text{ liên tục tại } x = 3 \Leftrightarrow a + 3 = 9 \Leftrightarrow a = 6$$

$$b) \text{ Xét hàm số } f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 7 \Rightarrow f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

$$\bullet f(-3) = 5, f(0) = -7 \Rightarrow f(-3) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow \text{PT } f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-3; 0).$$

$$\bullet (-3; 0) \subset (-4; 0) \Rightarrow \text{PT } f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-4; 0).$$

Câu III:



$$a) \text{ CMR: } SO \perp (ABCD), SA \perp (PBD).$$

$$\bullet SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD).$$

$$\bullet BD \perp AC, BD \perp SO \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA \quad (1)$$

$$\bullet OP \perp SA, OP \subset (PBD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $SA \perp (PBD)$.

$$b) \text{ CMR: } MN \perp AD.$$

$$\bullet \text{ Đáy } ABCD \text{ là hình vuông nên } OB = OC, \text{ mà } OB \text{ và } OC \text{ lần lượt là hình chiếu của } NB \text{ và } NC \text{ trên } (ABCD) \Rightarrow NB = NC$$

$$\Rightarrow \Delta NBC \text{ cân tại } N, \text{ lại có } M \text{ là trung điểm } BC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow MN \perp BC \Rightarrow MN \perp AD \text{ (vì } AD \parallel BC)$$

$$c) \text{ Tính góc giữa } SA \text{ và mp } (ABCD).$$

$$\bullet SO \perp (ABCD) \text{ nên } AO \text{ là hình chiếu của } SA \text{ trên } (ABCD)$$

Vậy góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\angle SAO$.

$$\cos \angle SAO = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$d) \text{ CMR: 3 vec tơ } \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{MN} \text{ đồng phẳng.}$$

$$\bullet \text{ Gọi } E, F \text{ lần lượt là trung điểm của } SD \text{ và } DC, \text{ dễ thấy } EN, FM, FE \text{ lần lượt là các đường trung bình của các tam giác } SDO, CBD, DSC \text{ nên đồng thời có } EN \parallel BD, FM \parallel BD, FE \parallel SC \text{ và cũng từ đó ta có } M, E, F \text{ đồng phẳng.}$$

$$\bullet MN \subset (MNEF), BD \parallel (MNEF), SC \parallel (MNEF) \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{MN} \text{ đồng phẳng.}$$

Câu IVa:

$$a) f(x) = x^3 - 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow \text{PTTT: } y = 2.$$

b) $y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

Câu IVb:

a) $f(x) = x^3 + 3x - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3$

• Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ của tiếp điểm $\Rightarrow y_0 = x_0^3 + 3x_0 - 4, f'(x_0) = 3x_0^2 + 3$

PTTT d là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^3 + 3x_0 - 4) = (3x_0^2 + 3)(x - x_0)$

d đi qua M(1; 0) nên $-(x_0^3 + 3x_0 - 4) = (3x_0^2 + 3)(1 - x_0) \Leftrightarrow 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

• Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0, f'(x_0) = 6 \Rightarrow \text{PTTT } y = 6(x - 1)$

• Với $x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{45}{8}, f'(x_0) = \frac{15}{4} \Rightarrow \text{PTTT: } y = \frac{15}{4}x - \frac{15}{4}$

b) $y = \sin(\cos(5x^3 - 4x + 6)^{2011})$

$\Rightarrow y' = -2011(5x^3 - 4x + 6)^{2010}(15x^2 - 4)\sin(5x^3 - 4x + 6)^{2011} \cdot \cos(\cos(5x^3 - 4x + 6)^{2011})$