

Bài I: (2,0 điểm)

Cho các biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6}$ và $Q = 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ với

$$x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$$

a) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

b) Rút gọn biểu thức $T = P : Q$

c) Tìm x để $\frac{1}{T}$ có giá trị nguyên

Câu II: (2,0 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Bạn An dự định thực hiện công việc quét sơn cho $40m^2$ tường trong một thời gian nhất định. Tuy nhiên, khi thực hiện mỗi giờ bạn An quét được ít hơn dự định là $2m^2$, do đó bạn đã hoàn thành công việc chậm hơn so với kế hoạch là một giờ. Hỏi nếu đúng kế hoạch thì bạn An hoàn thành công việc trong bao lâu?

Câu III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{2x - y} + x + 3y = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{2x - y} - 5(x + 3y) = -3 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = mx - 2m + 3$ và parabol

$$(P): y = x^2$$

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 5$

b) Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của m để (d) và (P) không có điểm chung.

Câu IV: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

1) Chứng minh tứ giác BFEC là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh $AF \cdot AB = AE \cdot AC$

3) BE và CF lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là M và N. Chứng minh $EF \parallel MN$

4) Giả sử B và C cố định; A thay đổi. Tìm vị trí của A sao cho tam giác AEH có diện tích lớn nhất.

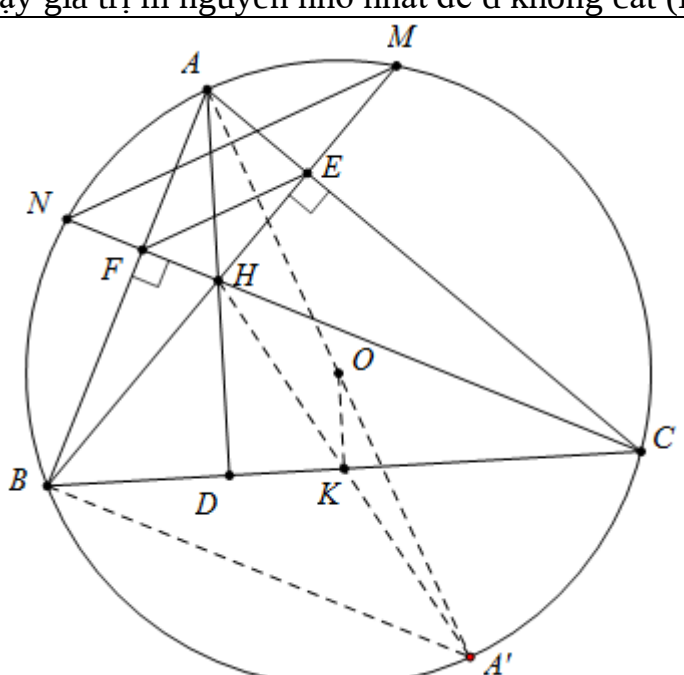
Câu V: (0,5 điểm) Với các số dương x, y, z, t thỏa mãn $x + y + z + t = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } A = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1} + \frac{1}{t^2 + 1}.$$

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II - MÔN TOÁN 9

Bài	Nội dung	Điểm
I 2,0đ	1) (0,5 điểm) Biến đổi được $x = 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$	0,25
	Thay $x = (1 + \sqrt{3})^2$ (tmdk) vào biểu thức Q ta có: $Q = \dots = 2 - \sqrt{3}$	0,25
	2) (1 điểm) $P = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$	0,25
	$P = \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} + \frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$	
	$P = \frac{x - 9 - x + 4 + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$	0,25
	$Q = 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ $T = P : Q = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$	0,25
	3) (0,5 điểm) $\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$ Chặn được giá trị của $\frac{1}{T} : -2 \leq \frac{1}{T} < 1$	0,25
	Vì $\frac{1}{T}$ nguyên suy ra $\frac{1}{T} = -2$ hoặc $\frac{1}{T} = -1$ hoặc $\frac{1}{T} = 0$	
	Tìm x được $x = 0$ (TMĐK); $x = \frac{1}{4}$ (TMĐK); $x = 4$ (KTMDK) Kết luận	0,25
II 2,0đ	+ Gọi số mét vuông tường bạn An định quét sơn trong 1 giờ là x (m ²) (x > 2) Khi đó thời gian dự định hoàn thành công việc là $\frac{40}{x}$ (h) Thực tế mỗi giờ quét sơn được x - 2 (m ²) Thời gian thực tế hoàn thành công việc là $\frac{40}{x - 2}$ (h)	0,25 0,25 0,25 0,25

	Theo đề bài ta có PT: $\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1$ + Giải đúng pt được: $x = -8$ (không thỏa mãn), $x = 10$ (thỏa mãn) + Kết luận thời gian dự định hoàn thành công việc là 4 giờ	0,5 0,25
III	1) (0,75đ) ĐKXD: $2x \neq y$ Đặt $\frac{1}{2x-y} = a; x+3y = b$ Ta có hệ: $\begin{cases} a+b = \frac{3}{2} \\ 4a-5b = -3 \end{cases}$ Giải hệ tìm được $a = \frac{1}{2}; b = 1$ Giải hệ $\begin{cases} 2x-y = 2 \\ x+3y = 1 \end{cases}$ tìm được $x = 1; y = 0$ (TM)	0,25 0,25 0,25
	2) (1,25 điểm) a) (0,75 điểm) + Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) $x^2 = mx - 2m + 3$ (1) $\Leftrightarrow x^2 - mx + 2m - 3 = 0$ $\Delta = m^2 - 8m + 12 = (m-4)^2 - 4$ (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt khi (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-4)^2 > 4$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 2 \\ m-4 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2 \end{cases}$ + Với $m > 6$ hoặc $m < 2$, (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 là nghiệm của pt (1) Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \end{cases}$ $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 5 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 5 \Leftrightarrow m(2m-3) = 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 5 = 0$ Tìm được $m = -1$ (TM) và $m = \frac{5}{2}$ (KTM) Vậy	0,25 0,25
	b) (0,5 điểm) (P) và (d) không có điểm chung khi pt (1) vô nghiệm $\Delta < 0 \Leftrightarrow (m-4)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (m-4)^2 < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 6$ Mà m là số nguyên nên $m \in \{3; 4; 5\}$	0,25

	Vậy giá trị m nguyên nhỏ nhất để d không cắt (P) là $m = 3$	0,25
		0,25
IV	a) Chứng minh được tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn đường kính BC	0,75
	b) Chứng minh được $\triangle AHF$ đồng dạng với $\triangle ABD$ $\Rightarrow AF \cdot AB = AH \cdot AD$ (1)	0,25
	Chứng minh $\triangle AEH$ đồng dạng với $\triangle ADC$ Suy ra $AE \cdot AC = AH \cdot AD$ (2)	0,25
	(1) và (2) suy ra $AF \cdot AB = AE \cdot AC$ (Hoặc chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng với $\triangle ABC$)	0,25
	c)	
	+ Chứng minh được $\angle MAC = \angle CAD$ hay $\angle MAE = \angle EAH$ suy ra AE là trung trực của HM, suy ra E là trung điểm của HM + Tương tự chứng minh được F là trung điểm của HN Suy ra $FE \parallel MN$ (đường trung bình) (Hoặc có thể chứng minh $\angle FCB = \angle FEB = \angle NMB$)	0,25 0,25 0,25 0,25
	d) $4S_{\triangle AEH} = 2AE \cdot EH \leq AE^2 + EH^2 = AH^2$ Chứng minh $AH = 2OK$, OK không đổi. Lập luận, kết luận được $S_{\triangle AEH}$ lớn nhất khi $AE = EH$ hay $\angle HAE = 45^\circ \Rightarrow \angle ACB = 45^\circ$, suy ra vị trí A	0,25 0,25
V	Với các số dương x, y, z, t Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cô si chứng minh được: $\frac{1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{x^2}{x^2 + 1} \geq 1 - \frac{x}{2}$; Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$ Chứng minh tương tự: $\frac{1}{y^2 + 1} = 1 - \frac{y^2}{y^2 + 1} \geq 1 - \frac{y}{2}$; Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$	

	$\frac{1}{z^2+1} = 1 - \frac{z^2}{z^2+1} \geq 1 - \frac{z}{2}; \text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow z = 1$ $\frac{1}{t^2+1} = 1 - \frac{t^2}{t^2+1} \geq 1 - \frac{t}{2}; \text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow t = 1$ Mà $x + y + z + t = 4$ Do đó $A = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \geq 2$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 $\Leftrightarrow x = y = z = t = 1$	
--	---	--