

Bài I: (2 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{x - 4}$ với $x \neq 4, x > 0$

- 1) Rút gọn biểu thức P
- 2) Chứng minh rằng $P < 0$ với mọi $x \neq 4, x > 0$
- 3) Tìm những giá trị của x để $P = -\frac{1}{15}$

Bài II: (2,0 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một người đi ô tô từ A đến B cách nhau 90km. Khi đi từ B trở về A người đó tăng tốc độ 5km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút. Tính tốc độ của ô tô lúc đi từ A đến B.

Bài III: (2,0 điểm)

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{108}{x} - \frac{63}{y} = 7 \\ \frac{81}{x} - \frac{84}{y} = 7 \end{cases}$$

- 2) Cho đường thẳng (d): $y = \frac{-1}{2}x + 2$ và Parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$ trên hệ trục tọa độ Oxy.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) đã cho.

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tìm điểm N trên trục hoành sao cho tam giác NAB cân tại N.

Bài IV: (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O; R) và dây BC cố định, $BC = R\sqrt{3}$. A là điểm di động trên cung lớn BC (A khác B, C) sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Kẻ đường kính AF của đường tròn (O), AF cắt BC tại điểm N.

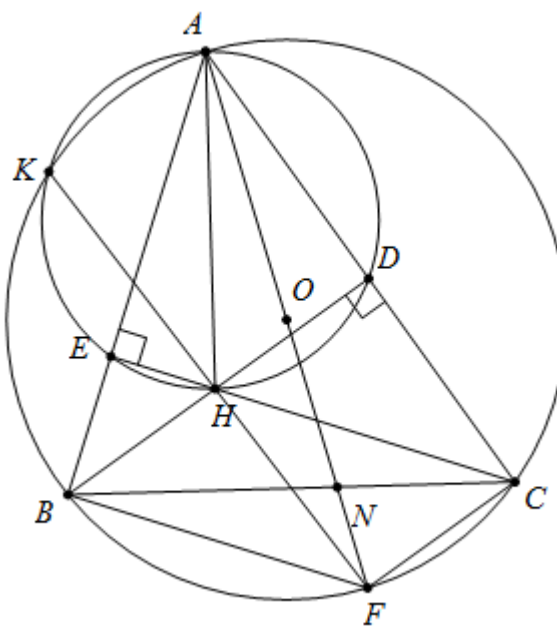
- a) Chứng minh tứ giác BEDC là tứ giác nội tiếp
- b) Chứng minh $AE \cdot AB = AD \cdot AC$
- c) Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành
- d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K (K khác O). Chứng minh ba điểm K, H, F thẳng hàng.

Bài V: (0,5 điểm)

Cho hai số thực m và n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng trong hai phương trình $x^2 + mx + n = 0$ và $x^2 + nx + m = 0$ có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Bài	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
I		Cho biểu thức $P = \frac{1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{x - 4}$ với $x \neq 4, x > 0$	
	a) (0,75 điểm)	Rút gọn biểu thức P	
		$P = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} - \frac{2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$	0,25
		$P = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$	0,25
		Thu gọn ta được $P = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}$	0,25
	b) (0,75 điểm)	Chứng minh rằng $P < 0$ với mọi $x \neq 4, x > 0$	
		Với mọi $x \neq 4, x > 0$ ta có $\left. \begin{matrix} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} + 2 > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) > 0$	0,25
		Mà $-1 < 0$ nên $P = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} < 0$ với mọi $x \neq 4, x > 0$	0,5
	c) (0,5 điểm)	Tìm những giá trị của x để $P = \frac{-1}{15}$	
		Thay $P = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}$ vào $P = \frac{-1}{15} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} = \frac{-1}{15}$	0,25
		Tính được $x = 9$ (kết hợp điều kiện thỏa mãn) Vậy $x = 9$ để $P = \frac{-1}{15}$	0,25
II	2 điểm		
		Gọi vận tốc của ô tô lúc đi từ A đến B là x (km/h), $x > 0$	0,25
		Vận tốc của ô tô đi từ B trở về A là $x + 5$ (km/h)	0,25
		Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{90}{x}$ (h)	0,25
		Thời gian ô tô đi từ B trở về A là $\frac{90}{x + 5}$ (h)	0,25
		Đổi 15 phút = $\frac{1}{4}$ h. Thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút nên ta được phương trình $\frac{90}{x} - \frac{90}{x + 5} = \frac{1}{4}$	0,25

		Giải phương trình được $x = 40$ (thỏa mãn điều kiện)	0,5
		Vậy vận tốc của ô tô lúc đi từ A đến B là 40km/h	0,25
III	2 điểm		
	1 (1 điểm)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{108}{x} - \frac{63}{y} = 7 \\ \frac{81}{x} - \frac{84}{y} = 7 \end{cases}$	
		ĐKXD: $x, y \neq 0$	0,25
		Đặt $\begin{cases} \frac{1}{x} = u \\ \frac{1}{y} = v \end{cases}$ ta thu được hệ phương trình $\begin{cases} 108u - 63v = 7 \\ 81u - 84v = 4 \end{cases}$	0,25
		Giải hệ ta được $u = \frac{1}{27}; v = \frac{-1}{21}$	0,25
		Từ đó suy ra được $x = 27; y = -21$	0,25
	2	Cho đường thẳng (d): $y = -\frac{1}{2}x + 2$ và Parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$ trên hệ trục tọa độ Oxy	
	a) (0,5 điểm)	Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) đã cho	0,5
		Học sinh tự vẽ	0,5
	b) (0,5 điểm)	Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tìm điểm N trên trục hoành sao cho tam giác NAB cân tại N.	
		Lập phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2$ Giải phương trình ta được $\begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$ Thu được A(2;-1); B(-4;4)	0,25
		Điểm N nằm trên trục hoành tọa độ N(a;0) Tam giác NAB cân tại N nên ta có $\begin{cases} NA = NB \\ N \notin AB \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-2)^2 + 1} = \sqrt{(a+4)^2 + 4^2} \\ -\frac{1}{2}a + 2 \neq 0 \end{cases}$ Giải được $a = -\frac{9}{4}$	0,25

		Vậy tọa độ điểm $N\left(-\frac{9}{4};0\right)$	
IV	3,5 điểm		
	a	Chứng minh tứ giác BEDC là tứ giác nội tiếp	1,0
			0,25
		Tứ giác BEDC có $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$	0,75
		Suy ra tứ giác BEDC nội tiếp (hai góc kề bằng nhau cùng chắn cung BC)	
	b	Chứng minh $AE \cdot AB = AD \cdot AC$	1,0
		Hai tam giác $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (g - g) vì có A chung và $\angle AED = \angle ACB$ (cùng bù với $\angle BED$)	0,5
		Vì $\triangle AED \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$	0,25
		$\Rightarrow AE \cdot AB = AD \cdot AC$	0,25
	c	Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành	1,0
		Ta có $\angle BDC = \angle ACF = 90^\circ \Rightarrow CF \parallel BD$ hay $CF \parallel BH$ (1)	0,25
		Ta có $\angle ABF = \angle AEC = 90^\circ \Rightarrow BF \parallel CE$ hay $BF \parallel CH$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác BHCF là hình bình hành	0,5
	d	Chứng minh ba điểm K, H, F thẳng hàng	0,5
		Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn đường kính AH $\Rightarrow \angle AKH = 90^\circ$ (1)	0,5
		Mà tam giác AKF nội tiếp đường tròn đường kính AF $\Rightarrow \angle AKF = 90^\circ$ (2)	
		Từ (1) và (2) suy ra ba điểm K, H, F thẳng hàng	
V	0,5 điểm	Cho hai số thực m và n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng trong hai phương trình $x^2 + mx + n = 0$ và $x^2 + nx + m = 0$ có ít nhất một phương trình có nghiệm.	
		Với m, n $\neq 0$	0,25

		$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow mn = 2(m + n)$ Phương trình $x^2 + mx + n = 0$ (1) có $\Delta_1 = m^2 - 4n$ Phương trình $x^2 + nx + m = 0$ (2) có $\Delta_2 = n^2 - 4m$	
		$\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + n^2 - 4(m + n) \geq 2mn - 4(m + n) \text{ (theo BĐT Cô - si)}$ $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 4(m + n) - 4(m + n) = 0$ Vậy hai phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có nghiệm	0,25