

Chương VI. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- **Radian:** Trên một đường tròn, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 radian hay cung 1 radian. Góc ở tâm chắn cung 1 radian được gọi là góc 1 radian.
1 radian được viết tắt là 1 *rad*. Góc (cung) có số đo α *rad* thường được viết tắt là góc (cung) α .

- **Radian và độ:** $1\text{rad} = \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$; $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)\text{rad}$.

Bảng chuyển đổi thông dụng

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

- **Góc lượng giác:** Cho tia Om quay quanh gốc O .
+ Nếu tia Om quay theo chiều kim đồng hồ, ta nói tia Om quay theo chiều âm.
+ Nếu tia Om quay ngược chiều kim đồng hồ, ta nói tia Om quay theo chiều dương.
+ Nếu tia Om xuất phát từ vị trí tia Ou , dừng lại ở vị trí tia Ov , ta nói Om đã quay một góc lượng giác có tia đầu Ou và tia cuối Ov , kí hiệu là (Ou, Ov) . Có vô số góc lượng giác có tia đầu Ou và tia cuối Ov .
+ Nếu có một góc (Ou, Ov) có số đo α thì các góc (Ou, Ov) khác có số đo $\alpha + k2\pi$, hoặc có một góc (Ou, Ov) có số đo a° thì các góc (Ou, Ov) khác có số đo $a^\circ + k360^\circ$, với k là số nguyên nào đó. Nếu tia Om quay theo chiều âm thì tạo ra góc lượng giác có số đo âm và ngược lại.
- **Cung lượng giác:** Cho một đường tròn định hướng tâm O . Khi các tia Ou, Ov của góc lượng giác (Ou, Ov) cắt đường tròn định hướng tại các điểm tương ứng U, V thì ta có cung lượng giác $\widehat{UV}$. Điểm U được gọi là điểm đầu, điểm V được gọi là điểm cuối.
- **Hệ thức Sa-lơ:** $\text{sd}(Ou, Ov) + \text{sd}(Ov, Ow) = \text{sd}(Ou, Ow) + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

B MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ ① Góc lượng giác có số đo 2700° thì có số đo theo radian là

- A. 27; B. 15π ; C. -27π ; D. -15π .

Hướng dẫn giải. Theo công thức $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{rad}$ thì

$$2700^\circ = \left(2700 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \text{rad} = 15\pi \text{rad}. \text{ Đáp án là B.}$$

Ví dụ ② Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo theo radian là $\frac{\pi}{3}$.

Các góc lượng giác sau đây cùng có tia đầu Ou , hỏi góc nào có tia cuối Ov ?

- A. $\frac{2\pi}{3}$; B. $-\frac{2\pi}{3}$; C. $\frac{5\pi}{3}$; D. $-\frac{5\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải. Hai góc có cùng tia đầu và tia cuối khi số đo của chúng chênh lệch nhau một số nguyên lần 2π . Kiểm nghiệm thấy $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 2\pi$,

tức là hai góc $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{5\pi}{3}$ có cùng tia đầu và tia cuối. Đáp án là D.

C BÀI TẬP

- Góc lượng giác có số đo -3060° thì có số đo theo radian là
A. 17; B. $8,5\pi$; C. -17π ; D. $-8,5\pi$.
- Góc lượng giác có số đo a° thì có số đo theo radian là
A. $180\pi a$; B. $\frac{180}{a}\pi$; C. $\frac{a}{180}\pi$; D. $\frac{\pi}{180a}$.
- Góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{12}$ thì có số đo theo độ là
A. 12° ; B. 15° ; C. -12° ; D. -15° .
- Góc lượng giác có số đo 180 rad thì có số đo theo độ là
A. $\left(\frac{180^2}{\pi}\right)^\circ$; B. $-\left(\frac{180^2}{\pi}\right)^\circ$; C. π° ; D. $-\pi^\circ$.
- Góc lượng giác có số đo α rad thì có số đo theo độ là
A. $\left(\frac{\alpha \cdot \pi}{180}\right)^\circ$; B. $\left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^\circ$; C. $\left(\frac{\pi}{180 \cdot \alpha}\right)^\circ$; D. $\left(\frac{180}{\alpha \cdot \pi}\right)^\circ$.

6. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo theo radian là $-\frac{\pi}{4}$.
 Các góc lượng giác sau đây cùng có tia đầu Ou , hỏi góc nào có tia cuối Ov ?
 A. $\frac{15\pi}{4}$; B. $-\frac{7\pi}{4}$; C. $\frac{5\pi}{4}$; D. $-\frac{15\pi}{4}$.
7. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo 1756° .
 Các góc lượng giác sau đây cùng có tia đầu Ou , hỏi góc nào có tia cuối Ov ?
 A. 3452° ; B. 4636° ; C. 5726° ; D. 1344° .
8. Trên một đường tròn định hướng, cặp cung lượng giác nào sau đây có cùng điểm đầu và điểm cuối?
 A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$; B. $\frac{\pi}{7}$ và $-\frac{230\pi}{7}$;
 C. $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$; D. $-\frac{\pi}{6}$ và $\frac{77\pi}{6}$.
9. Một cung lượng giác trên đường tròn định hướng có độ dài bằng hai lần bán kính. Số đo theo radian của cung đó là
 A. 1 hoặc -1; B. 2 hoặc -2; C. 4 hoặc -4; D. $\frac{1}{2}$ hoặc $-\frac{1}{2}$.
10. Trên đường tròn định hướng có bán kính bằng 4 lấy một cung có số đo là $\frac{\pi}{3}$ rad. Độ dài của cung đó là
 A. $\frac{4\pi}{3}$; B. $\frac{3\pi}{4}$; C. 12π ; D. $\frac{2\pi}{3}$.

§2. GIÁ TRỊ CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Đường tròn lượng giác gắn với hệ trục tọa độ: là đường tròn định hướng có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1. Điểm $A(1; 0)$ là điểm gốc.
 Với mỗi điểm M mà $(OA, OM) = \alpha$ (α rad), ta nói M định ra một góc (cung) α . Ngược lại, ứng với mỗi số thực α luôn tồn tại điểm M trên đường tròn lượng giác mà $(OA, OM) = \alpha$.
- Giá trị lượng giác của cung (góc) α
 Trên đường tròn lượng giác gắn với hệ trục tọa độ cho cung lượng giác $\widehat{AM}$ có số đo α . Tọa độ điểm M là $(x; y)$.

Khi đó $\sin \alpha = y$; $\cos \alpha = x$; $\tan \alpha = \frac{y}{x}$, nếu $x \neq 0$, $\cot \alpha = \frac{x}{y}$, nếu $y \neq 0$.

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, k \in \mathbb{Z}; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z};$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1;$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

$\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

$\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Dấu của các giá trị lượng giác của cung α : phụ thuộc vào điểm cuối M của cung lượng giác $\widehat{AM}$ có số đo α trên đường tròn lượng giác.

M thuộc góc phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác của α				
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

4. Giá trị lượng giác của các cung (góc) lượng giác đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

5. Các hệ thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

B MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1 Giá trị nào sau đây mang dấu dương?

- A. $\sin 290^\circ$; B. $\cos 290^\circ$; C. $\tan 290^\circ$; D. $\cot 290^\circ$.

Hướng dẫn giải. Xét cung lượng góc $\widehat{AM}$ có số đo 290° với điểm đầu $A(1; 0)$ thì điểm cuối M thuộc cung phần tư IV nên chỉ có $\cos 290^\circ$ mang dấu dương. Đáp án là B.

Ví dụ 2 $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$; B. $\frac{1}{2}$; C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải. $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ nên $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Đáp án là B.

Ví dụ 3 Cho $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$; B. $-2\sqrt{2}$; C. $3\sqrt{2}$; D. $-3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\tan \alpha > 0$. Từ hệ thức $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ tính được $\tan \alpha$ với giá trị dương là $2\sqrt{2}$. Đáp án là A.

C BÀI TẬP

1. Giá trị nào sau đây mang dấu dương?

- A. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; B. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; C. $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; D. $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. Giá trị nào sau đây mang dấu âm?

- A. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; B. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$; C. $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; D. $\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

3. Góc (cung) lượng giác nào mà hai giá trị sin và cosin của nó trái dấu?

- A. 100° ; B. 80° ; C. -95° ; D. -300° .

4. Góc (cung) lượng giác nào mà hai giá trị sin và cosin của nó cùng dấu?

- A. $\frac{5\pi}{8}$; B. -190° ; C. $-\frac{3\pi}{5}$; D. 275° .

5. $\cos 420^\circ$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; C. $\frac{1}{2}$; D. $-\frac{1}{2}$.

6. $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ bằng

- A. -1 ; B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D. 1 .

7. côtang của góc (cung) lượng giác nào bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$?

- A. -300° ; B. $\frac{\pi}{6}$; C. 45° ; D. $-\frac{\pi}{6}$.

8. sin của góc (cung) lượng giác nào bằng $\frac{1}{2}$?

- A. $-\frac{\pi}{6}$; B. $\frac{25\pi}{6}$; C. 60° ; D. -150° .

9. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos \alpha$ bằng

- A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$; D. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

10. Cho $\tan \alpha = 12$ với $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Khi đó $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{145}}$; B. $-\frac{1}{\sqrt{145}}$; C. $\frac{12}{\sqrt{145}}$; D. $-\frac{12}{\sqrt{145}}$.

11. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cot \alpha$ bằng

- A. $-\sqrt{13}$; B. $\sqrt{13}$; C. $-\sqrt{15}$; D. $\sqrt{15}$.

12. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ với $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Khi đó $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng

- A. $\frac{1-2m^2}{2}$; B. $\frac{m^2-1}{2}$; C. $\frac{2m^2-1}{2}$; D. $\frac{1-m^2}{2}$.

13. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$, với $m > 2$. Khi đó $|\tan \alpha - \cot \alpha|$ bằng

- A. $\sqrt{4-m^2}$; B. $\sqrt{m-4}$; C. $\sqrt{4-m}$; D. $\sqrt{m^2-4}$.

14. Cho $\tan \alpha = m$. Khi đó $\frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{c \sin \alpha + d \cos \alpha}$ bằng

- A. $\frac{a+b}{c+d}m$; B. $\frac{a+bm}{c+dm}$; C. $\frac{am+b}{cm+d}$; D. $\frac{a+b}{(c+d)m}$.

§3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hai góc đối nhau α và $-\alpha$:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$$

2. Hai góc hơn kém nhau π :

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha;$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha;$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha;$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha.$$

3. Hai góc bù nhau:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha;$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$$

4. Hai góc phụ nhau:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$$

B MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ ① $\cos 18^\circ - \cos 342^\circ$ bằng

- A. 1; B. 0; C. $2\cos 18^\circ$; D. $-2\cos 18^\circ$.

Hướng dẫn giải. $342^\circ = -18^\circ + 360^\circ$ nên $\cos 342^\circ = \cos(-18^\circ) = \cos 18^\circ$.

Đáp án là B.

Ví dụ ② $2\sin 27^\circ - \sin 153^\circ + \sin(-270^\circ) + \sin 333^\circ$ bằng

- A. 1; B. $2\sin 27^\circ + 1$; C. 0; D. $\sin 27^\circ$.

Hướng dẫn giải. $153^\circ = 180^\circ - 27^\circ$ nên $\sin 153^\circ = \sin 27^\circ$; $-270^\circ = 90^\circ - 360^\circ$ nên $\sin(-270^\circ) = \sin 90^\circ = 1$; $333^\circ = -27^\circ + 360^\circ$ nên

$\sin 333^\circ = \sin(-27^\circ) = -\sin 27^\circ$. Từ đó thấy đáp án là A.

Ví dụ ③ Biểu thức

$$\tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) - \cot\left(\frac{19\pi}{2} + \alpha\right) \text{ bằng}$$

A. $\tan\alpha + \cot\alpha$;

B. $2(\tan\alpha + \cot\alpha)$;

C. $2(\tan\alpha - \cot\alpha)$;

D. $\tan\alpha - \cot\alpha$.

Hướng dẫn giải. $\frac{7\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + 3\pi$ nên $\tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$;

$$\frac{11\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + 5\pi \text{ nên } \cot\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha;$$

$$\text{Tương tự, } \tan\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) = \cot(-\alpha) = -\cot\alpha; \cot\left(\frac{19\pi}{2} + \alpha\right) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$

Từ đó thấy đáp án là B.

BÀI TẬP

1. Chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau.

A. $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

B. $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

C. $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$;

D. $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}$.

2. Chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau.

A. $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$;

B. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$;

C. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

D. $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$.

3. Chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau.

A. $\sin 210^\circ = \sin 30^\circ$;

B. $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ$;

C. $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$;

D. $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau.

A. $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3}$;

B. $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}$;

C. $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

D. $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

5. Chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau.

A. $\cos\frac{11\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$;

B. $\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

C. $\sin\frac{11\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6}$;

D. $\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

6. Chỉ ra đẳng thức sai trong các đẳng thức sau.

A. $\cos 315^\circ = \cos 45^\circ$;

B. $\sin 315^\circ = \sin 45^\circ$;

C. $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

D. $\sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. $\tan \alpha - \tan(-\alpha)$ bằng

A. 0;

B. $2\tan \alpha$;

C. $-2\tan \alpha$;

D. $\tan 2\alpha$.

8. $\tan^2(\pi - \alpha) - \tan^2 \alpha + 1$ bằng

A. 0;

B. -1;

C. 1;

D. một số khác.

9. $\sin \frac{\pi}{15} - \cos \frac{13\pi}{30}$ bằng

A. -1;

B. 0;

C. 1;

D. một số khác.

10. $\sin \alpha + \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - \cos \alpha + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ bằng

A. 4;

B. 2;

C. 0;

D. -2.

11. $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{5\pi}{5} - \cos \frac{6\pi}{5} - \cos \frac{7\pi}{5} - \cos \frac{8\pi}{5} - \cos \frac{9\pi}{5}$ bằng

A. -1;

B. 0;

C. $\frac{1}{2}$;

D. 1.

12. $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{5\pi}{5}$ bằng

A. -1;

B. 0;

C. $\frac{1}{2}$;

D. 1.

13. $\tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{3\pi}{9} + \dots + \tan \frac{8\pi}{9}$ bằng

A. -1;

B. 0;

C. 1;

D. 2.

14. $\sin^2 \frac{2\pi}{18} + \sin^2 \frac{3\pi}{18} + \sin^2 \frac{4\pi}{18} + \sin^2 \frac{5\pi}{18} + \sin^2 \frac{6\pi}{18} + \sin^2 \frac{7\pi}{18}$ bằng

A. 1;

B. 2;

C. 3;

D. 4.

§4. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức cộng:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}.$$

2. Công thức nhân đôi:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

3. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

B MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ ① $\sin \frac{\pi}{12}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2};$

B. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2};$

C. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$

D. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

Hướng dẫn giải. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, sử dụng công thức cộng

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$ tính được kết quả như phương án C.

Vậy đáp án là C.

Cũng có thể dùng công thức hạ bậc $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}$ nhưng không ra trực tiếp kết quả như đề bài.

Ví dụ ② Cho $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $\sin\alpha > 0$. Khi đó $\sqrt{\sin 2\alpha}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{5}$; B. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; C. $\frac{3\sqrt{6}}{5}$; D. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Hướng dẫn giải. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Tính $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Từ đó

kiểm nghiệm được phương án B đúng. Vậy đáp án là B.

Ví dụ ③ $\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan\alpha$ bằng

- A. $\tan\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan 3\alpha$; B. $\tan\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \cot 3\alpha$;
C. $\tan\alpha \cdot \cot 2\alpha \cdot \tan 3\alpha$; D. $\cot\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan 3\alpha$.

Hướng dẫn giải. Nhắm theo công thức cộng ta có

$\tan 3\alpha - \tan\alpha = \tan 2\alpha \cdot (1 + \tan\alpha \cdot \tan 3\alpha)$, từ đó thấy ngay trừ tiếp cho $\tan 2\alpha$ sẽ được $\tan 2\alpha[(1 + \tan\alpha \cdot \tan 3\alpha) - 1]$, tức là phương án A đúng. Vậy đáp án là A.

G BÀI TẬP

1. $\cos\frac{7\pi}{12}$ bằng

- A. $\sqrt{2} + \sqrt{6}$; B. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; C. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; D. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

2. $\sin 75^\circ$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; C. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$; D. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}$.

3. $\tan 105^\circ$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; B. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; C. $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$; D. $\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}}$.

4. $\tan \frac{145\pi}{12}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$; B. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$; C. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; D. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

5. Cho $\tan \alpha = t$. Khi đó $\cos 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{1-t}{1+t}$; B. $\frac{1-t^2}{1+t^2}$; C. $\frac{1+t^2}{1-t^2}$; D. $\frac{1+t}{1-t}$.

6. Cho $\tan \alpha = t$. Khi đó $\sin 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{2t}{1+t}$; B. $\frac{2t}{1+t^2}$; C. $\frac{2t}{1-t^2}$; D. $\frac{2t}{1-t}$.

7. Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Khi đó $\sqrt{\cos 2\alpha}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$; B. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; C. $\frac{7}{25}$; D. $\frac{\sqrt{7}}{5}$.

8. Cho $\cos \alpha = 0,2$ với $0 < \alpha < \pi$.

A. $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$;

B. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$;

C. $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

D. Cả ba khẳng định trên đều sai.

9. Biểu thức $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ bằng

- A. $4\sin^2 \alpha - 3$; B. $4 + 3\sin^2 \alpha$; C. $3 - 4\sin^2 \alpha$; D. $\sin^2 \alpha$.

10. Biểu thức $\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$ bằng

- A. $-\tan^2 \alpha$; B. $\tan^2 \alpha$; C. $\cot^2 \alpha$; D. $-\cot^2 \alpha$.

11. Biểu thức $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$ bằng

- A. $-\cot \alpha$; B. $\cot \alpha$; C. $-\tan \alpha$; D. $\tan \alpha$.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

1. Biểu thức $2\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ bằng
 A. 1; B. $\frac{1}{8}$; C. 0; D. $-\frac{1}{8}$.
2. Biểu thức $\sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$ bằng
 A. -1; B. 0; C. 1; D. 2.
3. Cho $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$. Khi đó $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 7\alpha$ bằng
 A. -1; B. 0; C. 1; D. 2.
4. Biểu thức $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{3\pi}{4}$ bằng
 A. -1; B. 0; C. $\frac{1}{2}$; D. 1.
5. Biểu thức $\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$ bằng
 A. $\sqrt{2}$; B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; C. $\frac{1}{8}$; D. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
6. Cho $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Khi đó
 A. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$; B. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \gamma$;
 C. $\tan(\alpha + \beta) = \tan \gamma$; D. $\cot(\alpha + \beta) = \cot \gamma$.
7. Cho $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Khi đó
 A. $\tan(2\alpha + 2\beta) = \tan 2\gamma$; B. $\cot(2\alpha + 2\beta) = \cot 2\gamma$;
 C. $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\gamma$; D. $\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\gamma$.
8. Cho $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Khi đó
 A. $\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\gamma}{2}$; B. $\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin \frac{\gamma}{2}$;
 C. $\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = -\cos \frac{\gamma}{2}$; D. $\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = -\sin \frac{\gamma}{2}$.
9. Chỉ ra khẳng định sai trong các khẳng định sau. Cho $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Khi đó
 A. $\tan(3\alpha + 3\beta) = -\tan 3\gamma$; B. $\cot(3\alpha + 3\beta) = -\cot 3\gamma$;
 C. $\sin(3\alpha + 3\beta) = -\sin 3\gamma$; D. $\cos(3\alpha + 3\beta) = -\cos 3\gamma$.

10. Cho tam giác MNP . Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

$\sin M + \sin N + \sin P$ bằng

A. $4\sin\frac{M}{2}\sin\frac{N}{2}\sin\frac{P}{2}$;

B. $4\cos\frac{M}{2}\cos\frac{N}{2}\cos\frac{P}{2}$;

C. $2\sin\frac{M}{2}\sin\frac{N}{2}\sin\frac{P}{2}$;

D. $2\cos\frac{M}{2}\cos\frac{N}{2}\cos\frac{P}{2}$.

11. Cho tam giác MNP . Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

$\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P$ bằng

A. $\sin M \sin N \sin P$;

B. $4 \sin M \sin N \sin P$;

C. $\cos M \cos N \cos P$;

D. $4 \cos M \cos N \cos P$.

ĐỀ TỰ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG VI

(Thời gian làm bài: 45 phút)

1. $\sin\frac{23\pi}{6}$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

B. $-\frac{1}{2}$;

C. $\frac{1}{2}$;

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos\frac{23\pi}{6}$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

B. $-\frac{1}{2}$;

C. $\frac{1}{2}$;

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\sin\frac{17\pi}{6}$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

B. $-\frac{1}{2}$;

C. $\frac{1}{2}$;

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\cos\frac{17\pi}{6}$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

B. $-\frac{1}{2}$;

C. $\frac{1}{2}$;

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $\tan\frac{157\pi}{3}$ bằng

A. $-\sqrt{3}$;

B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

D. $\sqrt{3}$.

6. $\cot\left(-\frac{105\pi}{6}\right)$ bằng

- A. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; B. 0; C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; D. $\sqrt{3}$.

7. Cho $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, với $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$. Chỉ ra khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A. $\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$; B. $\sin 2\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$; C. $\tan 2\alpha = -3\sqrt{7}$; D. $\cot 2\pi = -\frac{\sqrt{7}}{21}$.

8. Biết $\tan\alpha = \frac{3}{4}$; với $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$. Chỉ ra khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A. $\tan 2\alpha = \frac{24}{7}$; B. $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$; C. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; D. $\cos 4\alpha = -\frac{527}{625}$.

9. Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = 4$. Khi đó $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$ bằng

- A. 52; B. 60; C. 61; D. 76.

10. Biểu thức $\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$ bằng

- A. -1; B. 0; C. 1; D. một số khác.

11. Biểu thức $\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{3\pi}{10}$ bằng

- A. -1; B. 0; C. 1; D. một số khác.

12. Cho $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $\sin\alpha < 0$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$ và $\cos\beta > 0$. Khi đó $\sin(\alpha + \beta)$ bằng

- A. $\frac{3\sqrt{7}}{16} - \frac{12}{25}$; B. $\frac{4\sqrt{7}-9}{20}$; C. $-\frac{3\sqrt{7}+12}{20}$; D. $\frac{12-3\sqrt{7}}{20}$.

13. Cho $\cos\alpha = 1$. Khi đó biểu thức $\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ bằng

- A. -1; B. 0; C. $\frac{1}{2}$; D. 2.

14. Cho tam giác MNP . Khi đó $\cos^2 2M + \cos^2 2N + \cos^2 2P$ bằng

- A. $1 + 2\cos 2M \cos 2N \cos 2P$; B. $-1 + 2\cos 2M \cos 2N \cos 2P$;
C. $-1 - 2\cos 2M \cos 2N \cos 2P$; D. $1 - 2\cos 2M \cos 2N \cos 2P$.

CHƯƠNG VI

§1

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	C	B	A	B	A	B	A	B	A

3. Sử dụng công thức $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

5. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên $\alpha \text{ rad} = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^\circ$.

9. Một cung lượng giác trên đường tròn định hướng có độ dài bằng bán kính thì có số đo 1 rad hoặc -1 rad, suy ra B đúng.

10. Trên đường tròn định hướng có bán kính bằng 4, cung có số đo 1 rad có độ dài bằng 4, suy ra cung có số đo $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ thì có độ dài $\frac{\pi}{3} \cdot 4$.

§2

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	A	A	A	C	C	D	A
Câu	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	B	A	D	C	B	D	C

6. Vì $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$ nên $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$.

7. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ là giá trị cotang của $\frac{\pi}{3}$ hay 60° .

Có $-300^\circ = 60^\circ - 360^\circ$ nên $\cot(-300^\circ) = \cot 60^\circ$.

8. $\frac{1}{2}$ là giá trị sin của $\frac{\pi}{6}$ hay 30° , mà $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi$ nên $\sin \frac{25\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}$.

9. Vì $\frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$ và do $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ta có $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$.

10. Sử dụng hệ thức $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ và hệ thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ kết hợp với xét dấu của $\sin \alpha$ khi $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

11. Sử dụng hệ thức $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ kết hợp với xét dấu của $\sin \alpha$ khi $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

12. Bình phương hai vế của $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, sẽ suy ra $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$.

13. Luôn có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$. Bình phương $|\tan \alpha - \cot \alpha|$ được

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 4 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = m^2 - 4.$$

14. Chia cả tử và mẫu của $\frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{c \sin \alpha + d \cos \alpha}$ cho $\cos \alpha$ sẽ thấy C đúng.

§3

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	D	C	A	B	A	B	B
Câu	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	C	B	C	D	A	B	C

1. $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, từ đó thấy D sai.

2. $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, từ đó thấy A, B, D đúng và C sai.

3. $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$, từ đó thấy A sai và B, C, D đúng.

4. $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, từ đó thấy A, C, D đúng và B sai.

5. $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$ nên $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6}$ và $\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6}$.

6. $315^\circ = -45^\circ + 360^\circ$ nên $\cos 315^\circ = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ$ và $\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ$.

9. $\frac{13\pi}{30} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}$ nên $\cos \frac{13\pi}{30} = \sin \frac{\pi}{15}$, từ đó thấy B đúng.

10. $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$; $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

11. $\frac{9\pi}{5} = -\frac{\pi}{5} + 2\pi$ nên $\cos \frac{9\pi}{5} = \cos \left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{5}$. Tương tự, $\cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5}$; $\cos \frac{7\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{5}$; $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5}$. Có $\cos \frac{5\pi}{5} = \cos(\pi + 0) = -\cos 0 = -1$.

12. $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ nên $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$. Tương tự, $\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$.

13. $\frac{8\pi}{9} = \pi - \frac{\pi}{9}$ nên $\tan \frac{8\pi}{9} = -\tan \frac{\pi}{9}$ hay $\tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{8\pi}{9} = 0$.

Tương tự, $\tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{7\pi}{9} = 0$; $\tan \frac{3\pi}{9} + \tan \frac{6\pi}{9} = 0$; $\tan \frac{4\pi}{9} + \tan \frac{5\pi}{9} = 0$.

14. $\frac{7\pi}{18} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{18}$ nên $\sin \frac{7\pi}{18} = \cos \frac{2\pi}{18}$ và do đó $\sin^2 \frac{2\pi}{18} + \sin^2 \frac{7\pi}{18} = 1$.

Tương tự, $\sin^2 \frac{3\pi}{18} + \sin^2 \frac{6\pi}{18} = 1$; $\sin^2 \frac{4\pi}{18} + \sin^2 \frac{5\pi}{18} = 1$.

§4

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Đáp án	D	A	C	D	B	B	C	A	C	B	D

1. $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, tính nhẩm theo công thức $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

2. $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$, tính nhẩm theo công thức $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

3. $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$, tính nhẩm theo công thức $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

4. $\tan \frac{145\pi}{12} = \tan \frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Tính nhẩm theo công thức $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$.

5. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$. Muốn xuất hiện t ($\tan \alpha$) thì chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha$. Từ đó thấy B đúng.

6. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$. Muốn xuất hiện t ($\tan \alpha$) thì chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha$. Từ đó thấy B đúng.

7. $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, chỉ việc thay giá trị $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ sẽ thấy ngay D đúng.

8. Kiểm nghiệm kết quả trong mỗi khẳng định lần lượt theo các công thức hạ bậc. Chú ý $0 < \alpha < \pi$, tức là $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ để xét dấu của $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$.
9. $\frac{\pi}{3} - \alpha$ và $\frac{\pi}{6} + \alpha$ phụ nhau nên $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$. Theo công thức biến tích thành tổng $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ biểu thức đã cho bằng $2\left(\cos 2\alpha + \cos \frac{\pi}{3}\right)$. Muốn có $\sin^2 \alpha$ dùng công thức $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$.
10. $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$ nên nhẩm được biểu thức đã cho bằng $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, nhẩm tiếp theo hai công thức hạ bậc $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.
11. Tử của biểu thức đã cho bằng $\sin \alpha(1 + 2\cos \alpha)$, vì vậy dưới mẫu phải biến đổi $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$. Khi đó giản ước cả tử và mẫu còn $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Đáp án	C	B	B	A	D	A	D	B	C	B	B

1. Biến đổi tổng $\cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ thành tích $2\cos \frac{5\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}$. Do $\frac{5\pi}{7}$ và $\frac{2\pi}{7}$ bù nhau nên $\cos \frac{5\pi}{7} = -\cos \frac{2\pi}{7}$. Từ đó thấy kết quả bằng 0.
2. Biến đổi tổng $\sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$ thành tích $2\sin \frac{7\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}$, mà $\sin \frac{7\pi}{7} = 0$.
3. Bài này không nên biến đổi biểu thức đã cho, vì đã biết giá trị $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ nên biết $\alpha = \pi + k2\pi$, từ đó biết $\cos \alpha = \cos 7\alpha = -1$ và $\cos 2\alpha = \cos 4\alpha = 1$.
4. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1$.
5. $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{2\pi}{3}\right)$, thay $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ và $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Từ đó thấy D đúng.

6. $(\alpha + \beta)$ và γ là hai góc (cung) bù nhau nên A đúng.
7. $(2\alpha + 2\beta) = -2\gamma + 2\pi$ nên $\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos(-2\gamma) = \cos 2\gamma$ nhưng $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(-2\gamma) = -\sin 2\gamma$. Từ đó D đúng và A, B, C sai.
8. $\frac{\alpha + \beta}{2}$ và $\frac{\gamma}{2}$ là hai góc (cung) phụ nhau nên B đúng và A, C, D sai.
9. $(3\alpha + 3\beta) = -3\gamma + 3\pi = -3\gamma + \pi + 2\pi$ nên
 $\cos(3\alpha + 3\beta) = \cos(-3\gamma + \pi) = -\cos(-3\gamma) = -\cos 3\gamma$ và
 $\sin(3\alpha + 3\beta) = \sin(-3\gamma + \pi) = -\sin(-3\gamma) = \sin 3\gamma$.
10. Dùng công thức biến tổng thành tích : $\sin M + \sin N = 2\sin \frac{M+N}{2} \cos \frac{M-N}{2}$;
 $\sin P = 2\sin \frac{P}{2} \cos \frac{P}{2}$. Từ đó thấy biểu thức đã cho có một nhân tử là $2\cos \frac{P}{2}$,
nhân tử kia là $(\cos \frac{M-N}{2} + \sin \frac{P}{2}) = (\cos \frac{M-N}{2} + \cos \frac{M+N}{2})$. Tiếp tục
biến tổng thành tích sẽ thấy B đúng.
11. Biến đổi tương tự như câu 10 nhưng $(M+N)$ và P bù nhau chứ không phải
phụ nhau như $\frac{M+N}{2}$ và $\frac{P}{2}$ nên nhân tử sẽ là $\sin M, \sin N, \sin P$.

ĐỀ TỰ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG VI

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	B	D	C	A	D	B	B
Câu	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	C	A	B	B	D	C	A

1. $\frac{23\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 4\pi$ nên $\sin \frac{23\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6}$.
2. $\cos \frac{23\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$.
3. $\frac{17\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \pi + 2\pi$ nên $\sin \frac{17\pi}{6} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6}$.
4. $\cos \frac{17\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$.

5. $\frac{157\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 52\pi$ nên $\tan \frac{157\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3}$.
6. $-\frac{105\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} - 17\pi$ nên $\cot\left(-\frac{105\pi}{6}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
7. Trước hết phải chú ý dấu của các giá trị lượng giác: $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ nên $\sin\alpha < 0$, vì vậy $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha < 0$.
8. Tương tự câu 7: Trước hết phải chú ý dấu của các giá trị lượng giác. Có thể thấy ngay dấu của $\cos\alpha$.
9. Khai triển hằng đẳng thức $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$, biến đổi theo tổng và tích của $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$.
10. $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$.
11. $\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$.
12. Tính theo công thức $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, với $\sin\alpha$ âm, được tính từ $\cos\alpha$ và $\cos\beta$ dương, được tính từ $\sin\beta$.
13. Vì $\cos\alpha = 1$ nên $\alpha = k2\pi$, từ đó

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}; \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$
14. Dùng công thức hạ bậc $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, rồi công thức biến tổng thành tích để biến đổi biểu thức. Chú ý rằng $2M + 2N + 2P = 2\pi$ nên $\cos(2M + 2N) = \cos 2P$.