

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{x+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Bài 2. (2,5 điểm)

- 1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25 % công việc. Hỏi nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên?

- 2) Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao 1,75 m và diện tích đáy là 0,32 m². Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Bài 3. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.
- 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol $(P): y = x^2$.
 - a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
 - b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H .

- 1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .
- 3) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I , đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P . Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP .

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$, với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (2,0 điểm)

$$1) A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x} \text{ với } x \geq 0, x \neq 25$$

Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{4(\sqrt{9}+1)}{25-9} = \frac{4 \cdot 4}{16} = 1.$$

Vậy với $x=9$ thì $A=1$.

$$2) B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{x+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \text{ với } x \geq 0, x \neq 25$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{15-\sqrt{x}+2(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$3) P = A \cdot B \text{ với } x \geq 0, x \neq 25$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{4}{25-x}$$

$$\text{Để } P \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{4}{25-x} \text{ nguyên} \Leftrightarrow 25-x \in U(4) \Leftrightarrow 25-x \in \{\pm 4; \pm 2; \pm 1\}.$$

Ta có bảng sau:

$25-x$	-4	4	-2	2	-1	1
x	29	21	27	23	26	24
P	-1	1	-2	2	-4	4

Vậy P nguyên lớn nhất bằng 4 khi $x=24$

(2,5 điểm)

1) Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x (ngày) ($x > 15; x \in \mathbb{N}$)

Gọi thời gian đội thứ hai làm một mình xong công việc là y (ngày) ($y > 15; y \in \mathbb{N}$)

Hai đội làm chung công việc thì trong 15 ngày là xong nên ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \quad (1)$$

Vì đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25 % công việc nên ta có phương trình

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{25}{100} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{40} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 40 \end{cases} \text{ (tmđk)}$$

Vậy đội thứ nhất làm một mình trong 24 ngày thì xong công việc, đội thứ hai làm một mình trong 40 ngày thì xong công việc.

2)

Số mét khối nước bồn nước đựng được là: $1,75 \cdot 0,32 = 0,56 \text{ (m}^3\text{)}.$

Bài 2. (2,0 điểm)

$$1) x^4 - 7x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 9x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) - 9(x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -2 \text{ (loại)} \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Vậy $x = \pm 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

$$2) \text{ Xét phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 = 2mx - m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0 \quad (\forall m).$$

$\Rightarrow (d)$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Theo Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } x_1 x_2 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -2 + x_1 x_2$$

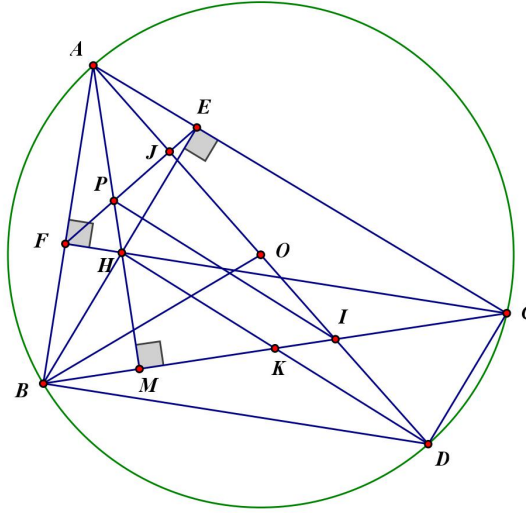
$$\Rightarrow 2m = -2 + m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-3) + (m-3) = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \text{ (tm)} \\ m = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $m = 3.$

Bài 3. (3,0 điểm)



1) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$.

Do đó tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (theo dấu hiệu: tứ giác có hai đỉnh kề nhau nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp).

2) Kẻ đường kính AOD , gọi $J = AO \cap FE$.

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ $\widehat{AB}$ của (O)).

Suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{AFJ} = \widehat{ADB}$.

Do đó $\widehat{FAJ} + \widehat{AFJ} = \widehat{BAD} + \widehat{ADB} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AJF} = 90^\circ$ hay $OA \perp FE$.

3)

+) Ta có $\widehat{APE} = \widehat{AIB}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{PAJ}$).

Lại có tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AEP} = \widehat{ABI}$.

Do đó tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB (g - g).

+)

* Dễ dàng chứng minh được tứ giác $BDCH$ là hình bình hành, suy ra H, K, D thẳng hàng.

* Vì $\widehat{BAI} = \widehat{PAE} \Rightarrow \widehat{PAF} = \widehat{EAJ}$.

Do đó tam giác ACD đồng dạng với tam giác AFH (g - g), suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{AF}{AC}$ (1).

Tam giác AFP đồng dạng với tam giác ACI (g - g) nên $\frac{AP}{AI} = \frac{AF}{AC}$ (2)

* Từ (1), (2) suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{AP}{AI} \Rightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow IP // HD$ hay $IP // HK$.

Bài 4. (0,5 điểm)

* Tìm Min:

Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + ab \geq 3ab \Rightarrow 3 \geq 3ab \Rightarrow ab \leq 1$$

$$a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2$

$$\Rightarrow A \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} - ab = \frac{(3 - ab)^2}{2} - ab = \frac{a^2b^2 - 6ab + 9 - 2ab}{2} = \frac{(ab - 4)^2 - 7}{2}$$

$$ab \leq 1 \Rightarrow ab - 4 \leq -3 \Rightarrow (ab - 4)^2 \geq 9$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{9 - 7}{2} = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ a = b = -1 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất là 1 khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = 1 \\ a = b = -1 \end{cases}$

* Tìm Max

$$\text{Đặt } \begin{cases} a + b = x \\ ab = y \end{cases} (x^2 \geq 4y)$$

$$(1) \Leftrightarrow (a + b)^2 - ab = 3 \Rightarrow x^2 - y = 3 \Rightarrow x^2 = y + 3$$

$$A = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - ab = (3 - ab)^2 - 2a^2b^2 - ab$$

$$= a^2b^2 - 6ab + 9 - 2a^2b^2 - ab = -a^2b^2 - 7ab + 9$$

$$= -y^2 - 7y + 9 = -\left(y^2 + 7y + \frac{49}{4}\right) + \frac{49}{4} + 9 = -\left(y + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4}$$

$$\begin{cases} x^2 = y + 3 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y \geq -3 \Rightarrow y + \frac{7}{2} \geq -3 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow -\left(y + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \leq -\frac{1}{4} + \frac{85}{4} = 21$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ ab = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ ab = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3}; b = -\sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3}; b = \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 21 khi $\begin{cases} a = \sqrt{3}; b = -\sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3}; b = \sqrt{3} \end{cases}$