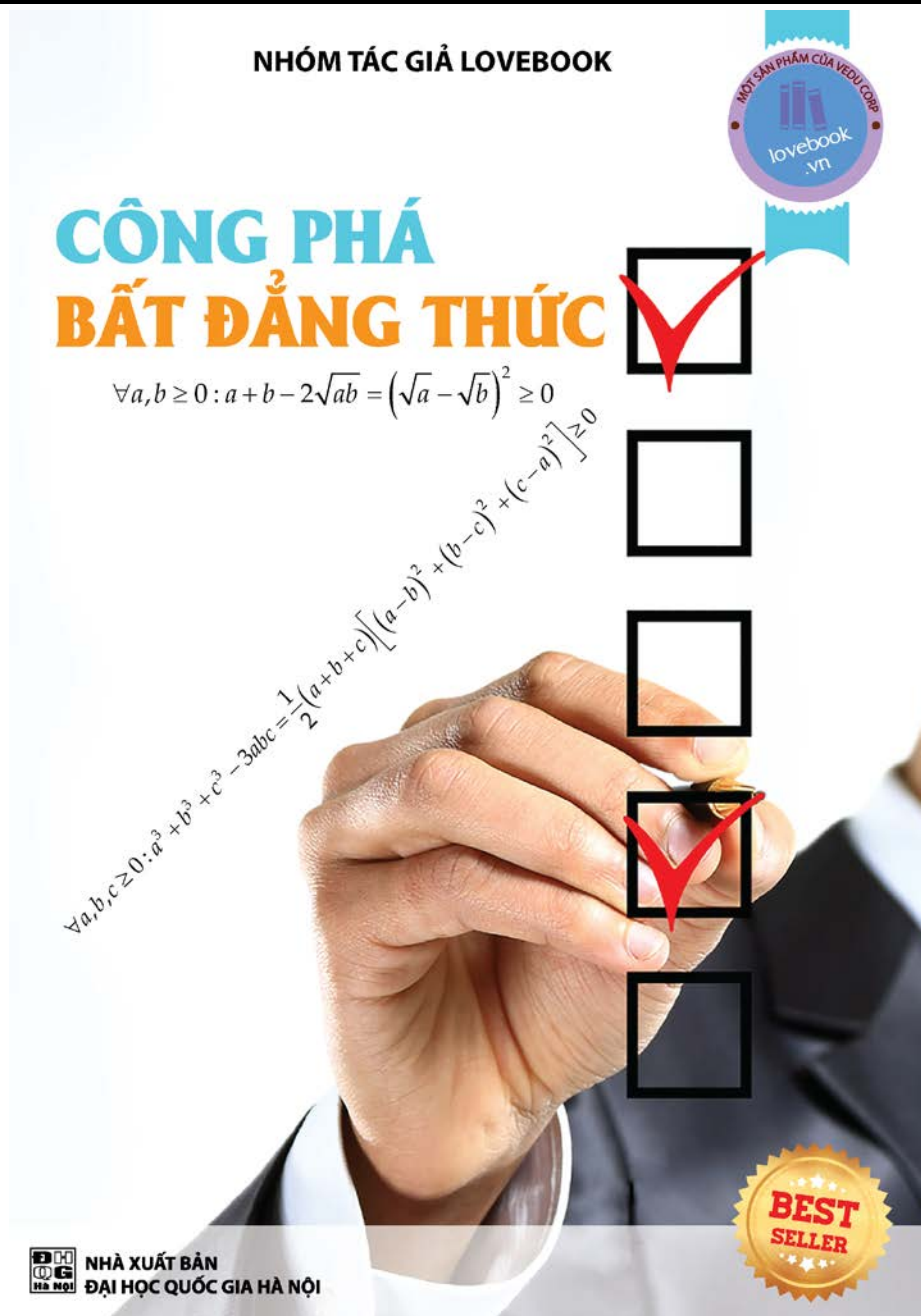




Tác giả : **NGUYỄN VĂN HƯỜNG – TĂNG HẢI TUÂN**

Giá bìa: 179.000đ

Đặt sách Lovebook phiên bản 2.0: <https://goo.gl/XeHwk5>

Giải đáp các thắc mắc trong sách Lovebook: <http://vedu.vn/forums/>

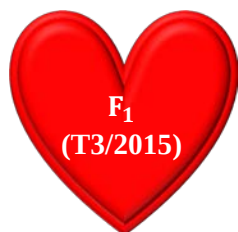
Tài liệu Lovebook chọn lọc: <http://tailieulovebook.com>

Kênh bài giảng Lovebook: <https://goo.gl/OAo45w>

Đăng ký nhận tài liệu thường xuyên Lovebook: goo.gl/ol9EmG

LỊCH SỬ HÌNH THÀNH CUỐN SÁCH

I- SƠ ĐỒ PHÁT TRIỂN CUỐN SÁCH



NGUYỄN VĂN HƯỜNG – TĂNG HẢI TUÂN



TĂNG HẢI TUÂN – NGUYỄN VĂN HƯỜNG

II- GIỚI THIỆU CHI TIẾT THÀNH VIÊN

1. NGUYỄN VĂN HƯỜNG

- **Sinh ngày:** 21/02/1995
- **Quê quán:** Tứ Kỳ - Hải Dương
- **Facebook:** <https://www.facebook.com/mathkudo>
- **Học vấn:**
 - Cựu học sinh Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương
 - Giải nhì HSG quốc gia môn Toán 2013
 - K58 KSTN Điều khiển tự động – Đại học Bách khoa Hà Nội
 - Giải nhất Olympic Sinh viên môn Toán 2014
- **Sở thích:** Ăn mì, đá bóng.
- **Câu nói yêu thích:** Tò mò là tố chất của thành công nhưng mày mò mới là nhân tố của thành công.



Nguyễn Văn Hường

2. TĂNG HẢI TUÂN

- **Sinh ngày:** 20/09/1993
- **Quê quán:** Thành phố Thái Bình.
- **Hiện nay:** Đang sinh sống và làm việc tại Hà Nội.
- **Điện thoại, Zalo:** 0963 495 209.
- **Học vấn:**
 - Tốt nghiệp loại Giỏi, hệ cử nhân chất lượng cao, chuyên ngành Sư phạm Vật lý – khóa 61, trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
 - Đạt điểm 10 bảo vệ khóa luận tốt nghiệp Sư phạm Vật lý.
 - Giải nhất sinh viên nghiên cứu khoa học Khoa Vật lý 2015.
 - Tổ trưởng tổ Vật lý công ty Vedu.
- **Facebook:** [https:// facebook.com/tanghaituan.vlpt](https://facebook.com/tanghaituan.vlpt)
- Sáng lập *Diễn đàn Vật lý phổ thông* vatliphothong.vn
 - Sáng lập trang *Học trực tuyến* của học sinh Việt Nam: hoctructuyen.tv
 - **Tác giả**
 - Công phá đề thi THPT Quốc gia môn Vật lý
 - Công phá Bất đẳng thức
 - Đánh giá, nhận xét đề thi THPT Quốc gia môn Toán, môn Vật lý cho báo Zing.vn
 - <http://news.zing.vn/Goi-y-loi-giai-mon-Toan-THPT-Quoc-gia-post554511.html>
 - <http://news.zing.vn/De-thi-va-loi-giai-goi-y-mon-Vat-ly-post555119.html>



Tăng Hải Tuân

LỜI MỞ ĐẦU

“To be successful, you’ve got to be willing to fail”

Đây là một câu nói nổi tiếng, chúng tôi viết ra đây là có mục đích của mình!

Khi học về bất đẳng thức, bất cứ ai trong chúng ta cũng luôn cần chuẩn bị tâm lý có những bài toán không thể tự bản thân mình giải được. Cuốn sách này viết ra, tổng hợp tất cả những kinh nghiệm của chúng tôi khi học và nghiên cứu về bất đẳng thức. Đối tượng có thể đọc cuốn sách này đó là: những bạn đam mê môn Toán, các bạn học sinh đang chuẩn bị cho các kì thi học sinh giỏi, thi chuyên, cuốn sách này còn có thể dùng làm tư liệu cho các thầy cô giảng dạy, và đặc biệt là dành cho **các sĩ tử đang khao khát điểm 10 môn Toán đại học cũng như những học sinh đang ấp ủ những tấm huy chương quốc gia, quốc tế.**

Trước khi vào tìm hiểu sâu cuốn sách này, chúng tôi mong muốn các bạn hiểu được **“mạch đập của cuốn sách”** mà chúng tôi viết ra:

Phần I: Hai bất đẳng thức cổ điển. Đây là bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Chúng ta được học chúng từ ngay lớp 10. Điều đó chứng tỏ rằng vai trò của hai bất đẳng thức này là rất lớn. Chính vì thế mà chúng tôi đã đặt nó ở ngay phần đầu tiên của cuốn sách.

Tiếp theo là ba phần quan trọng nhất dành cho những bạn ôn thi đại học. Ban đầu, chúng tôi không định viết theo phong cách chia “phương pháp giải”, nhưng vì với mục đích dành cho các bạn sĩ tử ôn thi, nên chúng tôi đã viết thành ba phần:

Phần II: Bất đẳng thức một biến.

Phần III: Bất đẳng thức hai biến.

Phần IV: Bất đẳng thức ba biến.

Ngoài ra, chúng tôi thêm **phần V: “Bất đẳng thức lượng giác”** là bất đẳng thức đã xuất hiện cách đây khá lâu rồi. Tại sao chúng tôi lại đưa nó vào trong cuốn sách thì: khi bạn đọc đến đó, bạn sẽ hiểu.

Phần VI: Phương pháp tam thức bậc hai. Phần này, chúng tôi muốn giới thiệu cho các bạn một phương pháp hiệu quả và dễ sử dụng. Lời giải sử dụng phương pháp này rất “trong sáng” vì nó chỉ sử dụng kiến thức cấp THCS mà có thể giải một số bài toán khó một cách dễ dàng.

Phần VII: Vùng biển chưa được khai thác. Phần này, chúng tôi chỉ mong các bạn đọc qua, tham khảo thêm một số tư tưởng mà chưa xuất hiện trong đề thi đại học. Tuy hơi mang tư tưởng “chuyên sâu” nhưng nó rất có thể được đưa vào đề thi đại học sau này.

Đối với học sinh thi đại học, cuốn sách này có điểm gì mới lạ so với các cuốn sách bất đẳng thức khác? Bạn đọc yên tâm rằng, mỗi bài tập trong cuốn sách không chỉ là những lời giải đơn thuần mà còn có những phân tích, suy luận, nhận xét một cách sâu sắc. Điểm hay nhất của cuốn sách với học sinh

thi đại học chính là nằm ở 132 bài toán tuyển chọn và phân tích giải ở phần VIII. Chúng tôi tin rằng sau khi đọc xong cuốn sách này, trình độ bất đẳng thức của bạn sẽ cải thiện rõ rệt.

Đối với học sinh chuyên, ngoài đọc những phần trên, sau khi đọc, bạn có thể thi học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp quận. Muốn tìm hiểu sâu hơn, để phục vụ cho các cuộc thi cấp quốc gia, khu vực và cao nhất là quốc tế, chúng tôi đã cố gắng tìm hiểu sâu, rộng nhất mảng bất đẳng thức:

Phần IX: Đào sâu và mở rộng các bất đẳng thức hay dùng.

Phần X: Một số bổ đề bất đẳng thức hoán vị.

Phần XI: Những phương pháp mới trong toán hiện đại.

Phần XII: Tổng hợp đề thi chọn HSG quốc gia, chọn HSG tỉnh của các tỉnh trong cả nước.

Phần XIII: Tuyển tập và tổng hợp các bài toán khó.

Ngoài ra, chúng tôi trình bày một số phụ lục dưới đây

PHỤ LỤC I : Sử dụng bất đẳng thức trong một số bài toán Vật lí. Ở phần này, các bạn sẽ thấy được ứng dụng của bất đẳng thức trong một số bài toán Vật lí tiêu biểu.

PHỤ LỤC II : Một số từ ngữ Tiếng Anh hay dùng liên quan đến bất đẳng thức. Ở phần này, chúng tôi cung cấp cho bạn đọc một số từ ngữ Tiếng Anh để bạn đọc có thể đọc hiểu tài liệu Bất đẳng thức bằng Tiếng Anh một cách đơn giản hơn.

PHỤ LỤC III : Tiểu sử một số nhà Toán học được đặt tên cho các bất đẳng thức kinh điển.

Mặc dù chúng tôi đã dành rất nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Để hoàn thiện cuốn sách, chúng tôi rất cần đến sự góp ý của bạn đọc, dĩ nhiên, chúng tôi sẽ rất cảm ơn bạn đọc vì những góp ý và chỉ dẫn tận tình để tái bản lần sau được tốt hơn.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về hòm thư của tác giả:

Nguyễn Văn Hương mathkudo@gmail.com

Tăng Hải Tuấn tanghaituan@vatliphothong.vn

Ngoài ra, chúng tôi rất mong được sự trao đổi, bàn luận của các bạn về cuốn sách nói riêng cũng như Bất đẳng thức nói chung thông qua diễn đàn trao đổi, sử dụng sách vedu.vn/forums/

Đội ngũ tác giả xin trân trọng cảm ơn!

Thay mặt các tác giả

Nguyễn Văn Hương

LỜI CẢM ƠN

Cuốn sách này được hoàn thiện trong gần 6 tháng. Đó là khoảng thời gian khá dài mà ít người trong số chúng ta có thể kiên trì làm việc được. Để có thể vững vàng suy ngẫm và đưa ra những ý tưởng, sự lựa chọn đúng đắn nhất, chúng tôi cần rất nhiều sự giúp đỡ từ mọi người.

Động lực lớn nhất được tạo ra, có thể nói đó chính là người sinh thành ra mỗi chúng tôi. Cha mẹ là người không chỉ nuôi nấng chúng tôi nên người, mà còn là người giúp chúng tôi nhìn ra những chân trời mới. Mặc dù có những lúc hoàn cảnh khó khăn, nhưng cha mẹ luôn tạo điều kiện tốt nhất cho chúng tôi học tập và phát triển. Thông qua cuốn sách này, mỗi chúng tôi muốn gửi lời trực tiếp đến cha mẹ của mình:

“Bố mẹ, con yêu bố mẹ nhiều lắm!”

Những người ảnh hưởng nhất tới cuốn sách bất đẳng thức này, đó chính là những người thầy cô dìu dắt mỗi chúng tôi trong khi học THCS và THPT.

Thầy Nguyễn Dũng và cô Ngô Thị Hải (hai giáo viên trường Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương) đã dìu dắt, tạo cho tôi – Nguyễn Văn Hường – một nền tảng vững chắc trong suốt ba năm cấp ba.

Thầy Bùi Đình Thân, (giáo viên môn Toán trường THCS Lương Thế Vinh – Thành phố Thái Bình) đã luôn động viên, chia sẻ, góp ý quý báu về kiến thức cũng như cách sống, làm thế nào để trở thành một người thầy tốt với tôi – Tăng Hải Tuân – một sinh viên Sư phạm mới ra trường và đang phấn đấu trở thành một người thầy tốt. Em cảm ơn Thầy rất nhiều!!!

“Hi vọng thầy cô sẽ luôn thành công trong sự nghiệp và sẽ tạo ra nhiều lớp trẻ tài năng phục vụ cho đất nước”.

Lời cảm ơn tiếp theo chúng tôi xin gửi tới:

Thầy Dương Đức Lâm (Đại học Sư phạm Hà Nội - một trong các thầy kèm học sinh dự thi IMO 2014 về bất đẳng thức) đã cung cấp cho chúng tôi một tài liệu quý.

Anh Võ Quốc Bá Cẩn, anh Trần Quốc Anh – những người anh đã truyền cảm hứng Bất đẳng thức cho chúng tôi cũng như các thế hệ khác khi học Bất đẳng thức, và cho chúng tôi những góp ý, đóng góp quý báu để cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Anh Lê Khánh Sỹ (phường Tân An, tỉnh Long An) đã luôn nhiệt tình góp ý, giúp đỡ, chỉ bảo chúng tôi trong quá trình tìm tòi và khám phá Bất đẳng thức.

Anh Lương Văn Thiện, các bạn Nguyễn Duy Hưng, Nguyễn Đức Long (những học sinh đạt giải cao trong các kì thi quốc gia, quốc tế) đã bổ sung và góp ý cho cuốn sách được phong phú hơn.

Ngoài ra, chúng tôi xin được gửi lời cảm ơn tới bạn Nguyễn Minh Hiền – học sinh lớp 11 – THPT Gia Viễn A, Ninh Bình đã giúp chúng tôi chỉnh sửa, hoàn thiện hình thức bản thảo.

Và đặc biệt, chúng tôi không thể quên được đó là anh Lương Văn Thùy giám đốc công ty VEDU đã luôn động viên và hỗ trợ chúng tôi trong quá trình thực hiện cuốn sách. Nếu không có sự hỗ trợ đặc biệt từ anh Lương Văn Thùy và nhà xuất bản thì cuốn sách này sẽ không thể đến tới tay bạn đọc. Anh cũng chính là người đã gọi mở - không chỉ cuốn sách của chúng tôi mà còn nhiều cuốn sách khác - chỉ dẫn tận tình để cuốn sách vươn lên một tầm cao mới, truyền cảm hứng cho người đọc.

Lời cảm ơn cuối cùng chúng tôi muốn gửi tới, đó là những bạn đọc được cuốn sách này. Hi vọng cuốn sách này sẽ giúp bạn đọc tìm được nhiều sự mới mẻ và độc đáo, từ đó càng yêu bất đẳng thức cũng như toán học hơn. Hi vọng hơn, chúng ta sẽ có dịp cùng nhau bình luận, chia sẻ về nhiều điều lí thú trong toán học.

Một lần nữa, đội ngũ tác giả xin chân thành cảm ơn!!!

MỤC LỤC

PHẦN I: HAI BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN	13
CHƯƠNG I: BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM	13
\$1: LÀM QUEN VỚI BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM	13
I. Bất đẳng thức AM-GM	13
II. Các bất đẳng thức phụ hay dùng	13
III. Một số bài toán sử dụng AM-GM thông thường	15
A. Ứng dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM	15
B. Sử dụng hằng đẳng thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$.	18
C. Sử dụng các bất đẳng thức phụ	21
D. Vài bất đẳng thức mạnh hơn bất đẳng thức AM-GM	24
\$2: CÁC KỸ NĂNG CẦN CÓ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM	32
I. Kỹ năng dự đoán điểm rơi	32
II. Kỹ năng biến hóa, sắp thứ tự các biến	42
\$3: BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM DƯỚI MẪU	55
I. Kỹ thuật AM-GM ngược dấu	55
II. Đánh giá AM-GM dưới mẫu	60
CHƯƠNG II: BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ	68
\$1: LÀM QUEN VỚI BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ	68
I. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz	68
II. Một số dạng hay dùng trong đề thi đại học	68
III. Một vài ứng dụng	69
\$2: CÁC KỸ NĂNG CẦN CÓ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ	74
I. Làm quen với dạng biểu diễn khác của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz	74
II. Kỹ thuật chọn điểm rơi	76
III. Kỹ thuật thêm bớt	81
IV. Kỹ năng đưa về đại lượng giống nhau	84
V. Kỹ năng đổi biến số	87
VI. Kỹ năng nhân, chia đại lượng vào tử và mẫu	89
VII. Kết hợp nhiều kỹ năng	91
PHẦN II: BẤT ĐẲNG THỨC MỘT BIẾN	102
\$1: TƯ TƯỞNG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC MỘT BIẾN	102
\$2: KỸ NĂNG ĐỔI BIẾN TRONG BẤT ĐẲNG THỨC MỘT BIẾN	118
\$3: MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT	125
PHẦN III: BẤT ĐẲNG THỨC HAI BIẾN SỐ	129
\$1: PHƯƠNG PHÁP THẾ VỀ MỘT BIẾN	129
\$2: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ DO TÍNH ĐỐI XỨNG	135
\$3: BẤT ĐẲNG THỨC CÙNG BẬC VỚI HAI BIẾN	139
\$4: MỘT VÀI BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT	142
PHẦN IV: BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN	144
\$1: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ TOÀN PHẦN	144
\$2: KỸ NĂNG ĐƯA VỀ MỘT BIẾN	157
I. Kỹ thuật dồn biến	157
II. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức cổ điển, bất đẳng thức phụ và những ý tưởng nhỏ	165
PHẦN V: BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC	178
I. Dạng sử dụng các loại bất đẳng thức	181
II. Phương pháp dồn biến trong bất đẳng thức lượng giác	185
PHẦN VI: PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI	192
1. Một số tính chất của tam thức bậc hai trong chứng minh bất đẳng thức	192
2. Sử dụng tam thức bậc 2 để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức	193

3. Sử dụng phương pháp tam thức bậc hai chứng minh các bất đẳng thức	202
4. Sử dụng phương pháp tam thức bậc hai để chứng minh bất đẳng thức trong tam giác	222
PHẦN VII: “VÙNG BIỂN” CHƯA ĐƯỢC KHAI THÁC	226
\$1: CÁC BẤT ĐẲNG THỨC NÊN BIẾT	226
I. BÀI TOÁN I: TƯ TƯỞNG TỪ BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN	226
II. BÀI TOÁN II: TƯ TƯỞNG TỪ BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV	232
III. BÀI TOÁN III: TƯ TƯỞNG TỪ BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR	237
IV. BÀI TOÁN IV: TƯ TƯỞNG TỪ BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER	243
V. TƯ TƯỞNG BẤT ĐẲNG THỨC DÙNG KHAI TRIỂN ABEL	247
VI. KỸ THUẬT PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG SOS	250
\$2: MỘT PHƯƠNG PHÁP “LẠ”	253
PHẦN VIII: BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC	263
\$1: CHIA SẺ KINH NGHIỆM TỪ MỘT BÀI TOÁN “CŨ”	263
\$2: 132 BÀI TOÁN TUYỂN CHỌN VÀ PHÂN TÍCH GIẢI	270
\$3: TUYỂN TẬP CÁC CÂU BẤT ĐẲNG TRONG ĐỀ ĐẠI HỌC 2005-2015	367
\$4: BÀI TẬP RÈN KỸ NĂNG	385
PHẦN IX: ĐÀO SÂU VÀ MỞ RỘNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC HAY DÙNG	390
\$1: PHƯƠNG PHÁP SOS SUY RỘNG	390
1. Phương pháp S.S	398
2. Phương pháp S.O.S hoán vị	403
\$ 2: BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN VÀ NHỮNG MỞ RỘNG	406
I. Bất đẳng thức Jensen tổng quát	406
II. Bất đẳng thức Karamata	408
III. Bất đẳng thức Muirhead	411
\$3: BẤT ĐẲNG THỨC VORNICU-SCHUR	413
PHẦN X: MỘT SỐ BỔ ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ	418
PHẦN XI: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP MỚI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI	440
\$1: PHƯƠNG PHÁP PHÂN LY ĐẲNG THỨC	440
\$2: ỨNG DỤNG GIẢI TÍCH TRONG BẤT ĐẲNG THỨC	448
I. Một dạng toán xuất phát từ bất đẳng thức tích phân	448
A. Cơ sở lý thuyết	448
B. Bài tập minh họa	449
II. Sử dụng dãy số để chứng minh một số bất đẳng thức ba biến đối xứng	453
\$3: BẤT ĐẲNG THỨC NHIỀU BIẾN	457
I. Một số kỹ thuật đặc trưng với bất đẳng thức bốn biến	457
II. Bất đẳng thức n biến	465
PHẦN XII: BẤT ĐẲNG THỨC TRONG CÁC ĐỀ THI CHỌN HSG TRÊN CẢ NƯỚC	478
PHẦN A. ĐỀ BÀI	478
PHẦN B. LỜI GIẢI	482
PHẦN XIII: TUYỂN TẬP VÀ TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN KHÓ	510
\$1: BẤT ĐẲNG THỨC TRONG BÀI THI TST (2000-2014)	510
\$2: BÀI TẬP TỔNG HỢP	542
\$3: MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN	610
PHỤ LỤC I	
SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬT LÝ	613
PHỤ LỤC II	
MỘT SỐ TỪ NGỮ TIẾNG ANH HAY DÙNG LIÊN QUAN ĐẾN BẤT ĐẲNG THỨC	619
PHỤ LỤC III	
TIỂU SỬ MỘT SỐ NHÀ TOÁN HỌC ĐƯỢC ĐẶT TÊN CHO	
CÁC BẤT ĐẲNG THỨC KINH ĐIỂN	622
TÀI LIỆU THAM KHẢO	632
LỜI KẾT	634

PHẦN I: HAI BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

CHƯƠNG I: BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

§1: LÀM QUEN VỚI BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

I. Bất đẳng thức AM-GM

AM-GM là viết tắt của “arithmetic and geometric means”, nghĩa là trung bình cộng và trung bình nhân. Cách chứng minh hay nhất của nó là sử dụng phương pháp quy nạp kiểu Cô-si (Cauchy) nên nhiều người lầm tưởng rằng Cô-si phát hiện ra bất đẳng thức này, và hay gọi bất đẳng thức này là bất đẳng thức Cauchy (Cô-si).

Bất đẳng thức AM-GM có dạng tổng quát là:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

Có nhiều phương pháp chứng minh bất đẳng thức này. Chúng tôi xin không nhắc lại. Trong đề thi đại học, bạn được phép sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho **hai** hoặc **ba** số.

Với $n = 2$, ta được bất đẳng thức AM-GM cho 2 số không âm a, b có dạng

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Với $n = 3$, ta được bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm a, b, c có dạng

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Các cách viết khác cũng thường gặp là:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab, \quad \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc$$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Cách chứng minh đơn giản là dùng hai hằng đẳng thức sau:

$$(a^2 + b^2) - 2ab = (a - b)^2,$$

$$(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right).$$

II. Các bất đẳng thức phụ hay dùng

Dưới đây chúng tôi liệt kê một số bất đẳng thức cơ bản hay được sử dụng trong chứng minh bất đẳng thức. Bạn đọc hãy đặt bút và cố gắng làm được hết trước khi xem lời giải nhé!

Chứng minh rằng với các số thực dương a, b, c, x, y, z ta có

$$1. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{a + b}$$

$$2. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$$

$$3. x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$4. (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$5. \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a + b)}$$

$$6. 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$$

$$7. (a+b+c)(ab+bc+ca) \leq \frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$8. x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$$

Chứng minh:

1. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}, \\ a+b \geq 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

Từ đó ta thu được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} = \frac{4}{2\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. ■

2. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương có:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \\ a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{9}{3\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

3. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} \geq xy + yz + zx.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. ■

4. Áp dụng bất đẳng thức (3) trên ta có:

$$(x+y+z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. ■

5. Biến đổi tương đương ta thu được bất đẳng thức đúng: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. ■

6. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $3(a+b)(a-b)^2 \geq 0$, luôn đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. ■

7. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$

$$\text{Do đó } (a+b+c)(ab+bc+ca) = abc + (a+b)(b+c)(c+a) \leq \left(\frac{1}{8} + 1\right)(a+b)(b+c)(c+a)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. ■

8. Bất đẳng thức đúng vì khi ta đặt $a=xy, b=yz, c=zx$ thì bất đẳng thức trở thành bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \text{ Luôn đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc $y=z=0$ hoặc $x=y=0$ hoặc $z=x=0$. ■

III. Một số bài toán sử dụng AM-GM thông thường

A. Ứng dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức sau đúng:

- $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$
- $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq 2\sqrt{abc}(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})$
- $\frac{ab+1}{b} + \frac{bc+1}{c} + \frac{ca+1}{a} \geq \max \left\{ 3 \left(\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \right); 2 \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right) \right\}$
- $a\sqrt{b^4+1} + b\sqrt{c^4+1} + c\sqrt{a^4+1} \geq \sqrt{6abc(a+b+c)}$
- $\frac{a^2}{b+2\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{a+2\sqrt{ba}} \geq \frac{4ab}{3(a+b)}$

Lời giải vấn đề

Những lời giải dưới đây chúng tôi chưa phân tích bình luận gì cả. Chúng tôi trình bày lời giải một cách vắn tắt, bạn đọc hãy làm và xem lời giải để làm quen dần với bất đẳng thức AM-GM. Và sau mỗi lời giải, hãy nghĩ: *vì sao chúng tôi lại làm như thế?*

1. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số:

$$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3a^3b^3} = 3a^2b$$

Tương tự cho hai bất đẳng thức nữa xong rồi cộng lại vế theo vế ta thu được điều cần chứng minh.

2. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số:

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq a^2 \cdot 2\sqrt{bc} + b^2 \cdot 2\sqrt{ca} + c^2 \cdot 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{abc}(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})$$

3. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số:

$$\frac{ab+1}{b} + \frac{bc+1}{c} + \frac{ca+1}{a} = (a+b+c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3 \left(\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số:

$$\frac{ab+1}{b} + \frac{bc+1}{c} + \frac{ca+1}{a} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{b} + \frac{2\sqrt{bc}}{c} + \frac{2\sqrt{ca}}{a} = 2 \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right)$$

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra điều phải chứng minh.

4. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số ta được:

$$a\sqrt{b^4+1} + b\sqrt{c^4+1} + c\sqrt{a^4+1} \geq a \cdot b\sqrt{2} + b \cdot c\sqrt{2} + c \cdot a\sqrt{2} = \sqrt{2}(ab+bc+ca)$$

Đặt $ab = x, bc = y, ca = z$. Nếu ta chứng minh được $x + y + z \geq \sqrt{3(xy+yz+zx)}$ thì bài toán được chứng minh. Tuy nhiên, bất đẳng thức này chính là bất đẳng thức phụ số (4) nên bài toán được chứng minh xong.

5. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+2\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{a+2\sqrt{ba}} &\geq \frac{a^2}{b+(a+b)} + \frac{b^2}{a+(b+a)} = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2a} \\ \left(\frac{a^2}{a+2b} + \frac{a+2b}{9} \right) + \left(\frac{b^2}{b+2a} + \frac{b+2a}{9} \right) &\geq \frac{2a}{3} + \frac{2b}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2a} \geq \frac{1}{3}(a+b) \end{aligned}$$

Suy ra: $\frac{a^2}{b+2\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{a+2\sqrt{ba}} \geq \frac{1}{3}(a+b)$. Nếu ta chứng minh được $\frac{1}{3}(a+b) \geq \frac{4ab}{3(a+b)}$ thì xong. Tuy nhiên bất đẳng thức này tương đương với: $(a+b)^2 \geq 4ab$ hay $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ là bất đẳng thức AM-GM cho hai số. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 2. Chứng minh với mọi số thực dương x, y, z thì

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Lời giải

Nếu để nguyên vế trái và sử dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM thì chúng ta sẽ không thu được gì. Ta thử biến đổi vế trái xem sao?

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geq \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Có lẽ, sau khi biến đổi tương đương, mọi việc đã khá sáng tỏ. Hãy để ý tới $\sqrt[3]{abc}$ ở dưới mẫu vế phải. Nó làm ta gợi đến việc sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ 3 số:

Theo bất đẳng thức AM-GM, bộ 3 số, ta có

$$\frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{x}{x} \geq \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{y}{y} + \frac{y}{z} \geq \frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{z} \geq \frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên, ta có

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + 3 \geq \frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Như vậy, ta cần phải chứng minh $\frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}} - 3 \geq \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$, hay tương đương với

$$\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3.$$

Thế nhưng, đây chính là bất đẳng thức AM-GM bộ 3 số.

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. ■

Ví dụ 3. Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 64$ thì ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

Lời giải

Một trong những kinh nghiệm hữu ích nhất khi chứng minh bất đẳng thức, đó là ta tìm cách đưa bất đẳng thức về dạng **đồng bậc (thuần nhất)**, khi đó sẽ có nhiều ý tưởng chứng minh hơn (hoặc công việc chứng minh của ta dễ nhìn ra hơn). Rõ ràng vế trái là một biểu thức bậc 3, vế phải là một biểu thức bậc

2 nên ta sẽ đưa về đồng bậc 3. Để ý rằng $4 = \sqrt[3]{abc}$, nên ta đưa bất đẳng thức về chứng minh về dạng đồng bậc sau

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \sqrt[3]{abc} (a^2 + b^2 + c^2)$$

Một kinh nghiệm tiếp theo, đó là khi chứng minh bất đẳng thức, nếu có *căn* thì ta sẽ tìm cách phá căn để việc chứng minh được dễ dàng hơn. Ở đây có $\sqrt[3]{abc}$ nên ta nghĩ đến việc dùng bất đẳng thức AM-GM kiểu như sau để phá căn:

$$3\sqrt[3]{abc} \leq (a + b + c)$$

Từ đó, ta đưa bài toán về chứng minh

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2),$$

Tương đương

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

Đến đây nó có dạng giống như Ví dụ 1 ý 1 đã trình bày ở trên. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2b$$

$$a^3 + a^3 + c^3 \geq 3a^2c$$

$$a^3 + b^3 + b^3 \geq 3ab^2$$

$$a^3 + c^3 + c^3 \geq 3ac^2$$

$$b^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^2c$$

$$b^3 + c^3 + c^3 \geq 3bc^2$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 4$. ■

Ví dụ 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{\sqrt{a^2 + 1}\sqrt{b^2 + 1}}{\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{\sqrt{b^2 + 1}\sqrt{c^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{\sqrt{c^2 + 1}\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{b^2 + 1}}$$

Lời giải

Tiếp tục tư tưởng ví dụ 3, ở ví dụ 4 này, ta sẽ đưa biểu thức P về dạng đồng bậc để dễ nghĩ hướng hơn.

Thay $1 = ab + bc + ca$ vào các căn thức ở biểu thức P, ta có

$$a^2 + 1 = (a + b)(c + a), \quad b^2 + 1 = (a + b)(b + c), \quad c^2 + 1 = (b + c)(c + a)$$

Khi đó, biểu thức P được viết lại thành:

$$P = (a + b) + (b + c) + (c + a) = 2(a + b + c)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức quen thuộc thì: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 3$

Do đó $P \geq 2\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{3}$. ■

B. Sử dụng hằng đẳng thức: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$.

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc}$$

Lời giải

Dự đoán giá trị lớn nhất đạt được tại các biến bằng nhau, khi đó $a=b=c=\frac{1}{3}$. Thay vào biểu thức P , ta

được P bằng 1. Vậy ta sẽ tìm cách chứng minh $P = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1$.

Ta sẽ bất đẳng thức về dạng đồng bậc để thoả ý tưởng hơn

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq (a+b+c)^2.$$

Chú ý rằng $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ nên bất đẳng thức trên tương đương

$$ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \forall x,y,z > 0$ ta được:

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3(ab.bc+bc.ca+ca.ab) = 3abc(a+b+c).$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ nên giá trị lớn nhất của P là 1. ■

Nhận xét: Bài toán sau khi đưa về đồng bậc và sử dụng hằng đẳng thức

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

đã giúp chúng ta có cái nhìn thoả đáng hơn rất nhiều!

CÒN NỮA....

Bài toán. Cho x là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{\sqrt{3(2x^2 + 2x + 1)}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 - \sqrt{3})x + 3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3}}$$

(Đề thi minh họa - kì thi THPT Quốc gia năm 2015)

Lời giải

Bài toán này là câu 10 trong Đề thi minh họa kì thi THPT Quốc gia 2015 môn Toán. Lời giải của Bộ giáo dục là một lời giải đưa về hình học rất hay. Chúng tôi xin giải bài này bằng đại số như sau:

Trước tiên, ta sẽ dự đoán đẳng thức xảy ra khi nào. Để ý rằng, biểu thức P có số hạng thứ hai và thứ ba có dạng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức rất quen thuộc ở phổ thông $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Ta dự đoán là bài toán này sẽ dùng bất đẳng thức đó, và khi đó dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{2x^2 + (3 - \sqrt{3})x + 3} = \sqrt{2x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3}$, tương đương $x = 0$. Với dự đoán đó, ta có lời giải sau:

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 - \sqrt{3})x + 3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3}} \\ & \geq \frac{4}{\sqrt{2x^2 + (3 - \sqrt{3})x + 3} + \sqrt{2x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3}} \\ & \geq \frac{4}{\sqrt{2\left\{ \left[2x^2 + (3 - \sqrt{3})x + 3 \right] + \left[2x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3 \right] \right\}}} \\ & = \frac{2}{\sqrt{2x^2 + 3x + 3}} \\ & \geq \frac{2}{\sqrt{3x^2 + 3x + 3}}. \end{aligned}$$

(Bạn đọc hãy thử giải thích vì sao chúng tôi đánh giá $\frac{2}{\sqrt{2x^2 + 3x + 3}} \geq \frac{2}{\sqrt{3x^2 + 3x + 3}}$?)

Từ đó ta có

$$P \geq \frac{\sqrt{3(2x^2 + 2x + 1)}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3x^2 + 3x + 3}} = Q.$$

Ta sẽ chứng minh $Q \geq \sqrt{3}$, tức là chứng minh

$$\frac{\sqrt{3(2x^2 + 2x + 1)}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3x^2 + 3x + 3}} \geq \sqrt{3},$$

hay,

$$\sqrt{(2x^2 + 2x + 1)} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \geq 3$$

$$\text{Đặt } 3t = \frac{2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \text{ thì ta có } t > 0 \text{ và } 3t = \frac{2}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow t \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Mặt khác, } 3t = \frac{2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \Rightarrow x^2 + x = \frac{4}{9t^2} - 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 2\left(\frac{4}{9t^2} - 1\right) + 1 = \frac{8}{9t^2} - 1.$$

Khi đó ta cần chứng minh bất đẳng thức 1 biến t với $0 < t \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}$

$$\sqrt{\frac{8}{9t^2} - 1} \geq 3 - 3t.$$

Thật vậy, vì $3 - 3t \geq 3 - 3 \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{3} > 0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{8}{9t^2} - 1 \geq (3 - 3t)^2 \Leftrightarrow \frac{(3t - 2)^2 (6t + 2 - 9t^2)}{9t^2} \geq 0.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì

$$6t + 2 - 9t^2 \geq 6t - 9 \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}}t + 2 = (6 - 4\sqrt{3})t + 2 \geq (6 - 4\sqrt{3}) \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} + 2 = \frac{8\sqrt{3} - 10}{3} > 0.$$

Vậy $P \geq Q \geq \sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ nên giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{3}$. ■

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi $x \in [0; 1]$, ta luôn có:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Phân tích

Đây là bất đẳng thức kép. Mỗi bất đẳng thức là một hàm khác nhau. Và mỗi hàm đó lại có hình thức đơn giản nên không cần đặt ẩn phụ. Như vậy, sẽ là một kết thúc có hậu.

Lời giải

+) Xét $f(x) = e^{-x} + x - 1$ xác định, liên tục trên $[0; 1]$. Ta có

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 = \frac{e^x - 1}{e^x} > 0, \forall x \in (0; 1)$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[0; 1]$. Từ đó

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(0) = 0, \forall x \in [0; 1] \\ \Rightarrow e^{-x} &\geq 1 - x, \forall x \in [0; 1] \quad (1) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

+) Xét $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$ xác định và liên tục trên $[0; 1]$. Ta có

$$g'(x) = -1 + x + e^{-x} = f(x). \text{ Theo trên thì } g'(x) = f(x) > 0, \forall x \in (0; 1).$$

Suy ra: $g(x)$ đồng biến trên $[0; 1]$. Từ đó

$$\begin{aligned} g(x) &\geq g(0) = 0, \forall x \in [0; 1] \\ \Rightarrow e^{-x} &\leq 1 - x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in [0; 1] \quad (2) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Từ (1) và (2) suy ra bài toán được giải quyết trọn vẹn. ■

Bài 2: Chứng minh rằng khi $x > 0$, ta có:

$$\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \ln x + \frac{1}{x}$$

Phân tích

Bài không có gì đặc biệt. Ta chỉ việc xét hàm và khảo sát.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \ln x - \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$ ta có

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{x^2\sqrt{1+x^2}} > 0, \forall x > 0$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Do đó: $f(x) < 0, \forall x > 0$. Vậy

$$\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \ln x + \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

Vậy bài toán được giải quyết. ■

Bài 3: Chứng minh rằng khi $x > 1$, ta luôn có:

$$\frac{1}{x} > \frac{\ln(x^2)}{x^2 - 1} > \frac{2}{x^2 + 1}$$

Phân tích

Như bài 1 thì đây cũng là bất đẳng thức kép. Hàm số đã phức tạp hơn, tuy nhiên với phép biến đổi nhân chéo thì hàm sẽ đơn giản hơn và không cần đổi biến. Lại là một kết thúc có hậu.

Lời giải

+) Xét $f(x) = x^2 - 2x \ln x - 1$ trên $(1; +\infty)$ ta có:

$$f'(x) = 2x - 2 \ln x - 2,$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x}.$$

Với $x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Rightarrow f(x) > f(1) = 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{\ln(x^2)}{x^2 - 1}, \forall x > 1 \quad (1).$$

+) Xét $g(x) = (x^2 + 1) \ln x - x^2 + 1$ trên $(1; +\infty)$ ta có:

$$g'(x) = 2x \ln x + (x^2 + 1) \frac{1}{x} - 2x = 2x \ln x + \frac{1}{x} - x,$$

$$g''(x) = 2 \ln x + 2 - \frac{1}{x^2} - 1 = 2 \ln x + \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Với $x > 1 \Rightarrow g''(x) > 0 \Rightarrow g'(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Rightarrow g'(x) > g'(1) = 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Rightarrow g(x) > g(1) = 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\Rightarrow \frac{\ln(x^2)}{x^2 - 1} > \frac{2}{x^2 + 1}, \forall x > 1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra bài toán được giải quyết.

Nhận xét: Sau bài toán ta rút ra một nhận xét quan trọng sau: **Khi chưa xác định được dấu của $f'(x)$ thì ta phải xét $f''(x)$ để suy ra miền giá trị của $f'(x)$.** Bài 4 dưới đây là một ví dụ tiêu biểu.

CÒN NỮA...

Dạng II: Các bài toán liên quan tới tham số m

Bài 1 (A-2008): Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m$$

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 6$.

Xét $f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x}$ liên tục trên $[0;6]$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{6-x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{6-x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{6-x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{6-x}} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^2}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{6-x}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{6-x}} = 0 \Leftrightarrow 2x = 6-x \Leftrightarrow x = 2$$

Ta có: $\begin{cases} f(0) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \\ f(2) = 6 + 3\sqrt{2} \\ f(6) = \sqrt[4]{12} + \sqrt{12} \end{cases}$. Lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[0;6]$, suy ra để phương trình có hai

nghiệm phân biệt thì: $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m < 6 + 3\sqrt{2}$.

Kết luận: $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m < 6 + 3\sqrt{2}$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét: Hàm đã cho thấy rõ. Cái khó của bài toán là giải $f'(x) = 0$. Sau bài toán này, tôi muốn đưa ra một kĩ năng hay là phân xạ đầu tiên khi gặp những bài tập biện luận số nghiệm của phương trình có chứa tham số.

Kĩ năng cô lập tham số: Khi phương trình ở dạng $H(x;m) = 0$ thì ta có các bước sau:

- Đưa phương trình về dạng $f(x) = g(m)$. Thông thường là: $f(x) = m$.
- Khảo sát hàm $f(x)$ trên tập mà đề bài đã cho (giả sử $x \in [a;b]$).
- Từ $\min_{[a;b]} f(x) \leq g(m) \leq \max_{[a;b]} f(x)$ suy ra tập giá trị của m. Đôi khi để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì ta phải lập bảng biến thiên để thấy rõ, như bài 1 trên là một ví dụ tiêu biểu (có hai nghiệm).
- Kết luận.

Bài 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{2x+m}-3=x$.

Phân tích

Đây là một bài toán dễ. Tuy nhiên nếu cứ theo cách điều kiện $x \geq \frac{-m}{2}$ rồi bình phương giải thì về phần sau, bạn sẽ gặp rắc rối khi phải xét hàm số trên $\left[-\frac{m}{2}; +\infty\right)$. Bài này nhắc nhở lại bạn về cách giải phương trình vô tỉ.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+m}-3=x &\Leftrightarrow \sqrt{2x+m}=x+3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+m=(x+3)^2 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m=x^2+4x+9 \\ x \geq -3 \end{cases}\end{aligned}$$

Xét $f(x)=x^2+4x+9$ trên $[-3; +\infty)$. Ta có

$$f'(x)=2x+4 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

Lập bảng biến thiên cho $f(x)$ trên $[-3; +\infty)$ suy ra: $m \geq \min_{x \in [-3; +\infty)} f(x) = f(-2) = 5$

Kết luận: $m \geq 5$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét: Lưu ý của bài toán chính là cách giải phương trình dạng $\sqrt[k]{f(x)}=g(x)$

$$\text{Ta có: } \sqrt[k]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=(g(x))^k \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Không chỉ dừng lại ở biện luận phương trình, trong hệ phương trình, bất phương trình cũng có những bài tập chứa tham số. Lưu ý khi giải về bất phương trình, ta có:

$$f(x) \geq m \text{ có nghiệm trên } [a; b] \Leftrightarrow m \leq \min_{[a; b]} f(x)$$

$$f(x) \leq m \text{ Có nghiệm trên } [a; b] \Leftrightarrow m \geq \max_{[a; b]} f(x)$$

Bài 3: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm: $x^3-3x+5 \leq m(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3$

Lời giải

CÒN NỮA...

PHẦN III: BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HAI BIẾN SỐ

Bất đẳng thức hai hay nhiều biến số gần đây xuất hiện thường xuyên trong đề thi đại học. Và về bất đẳng thức hai biến sẽ là rất đơn giản khi bạn học tốt những phần khác của toán.

Kinh nghiệm khi gặp bất đẳng thức hai biến số là gì? Không phải chỉ với hai biến số thôi đâu, ba biến cũng vậy. Luôn có hai mục tiêu chính: Hoặc là làm giảm về một biến rồi dùng đạo hàm, hoặc sử dụng các loại bất đẳng thức để đánh giá đồng thời chúng. Nói thì đơn giản nhưng thực hiện thì không hề dễ. Một bài toán luôn có nhiều phương pháp giải, nhưng bạn đã tự đặt câu hỏi tại sao người ta hình thành ra những phương pháp đó chưa? Thì với bất đẳng thức hai biến, đại đa số là được hình thành từ cách giải hệ phương trình hai ẩn số? Vì sao vậy? Chúng ta cùng tìm hiểu chúng xem sao nhé!

§1: PHƯƠNG PHÁP THẾ VỀ MỘT BIẾN

Tư tưởng chung: Từ điều kiện bài toán rút một biến theo biến kia, tìm tập xác định của biến và rồi xét hàm số trên tập xác định đó.

Bài 1: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $y \leq 5$, $x^2 - 5x = y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của:

$$P = (x + y)(x + 4).$$

Phân tích

Trước khi giải bài này, ta chưa nghĩ gì vội. Ta thử đặt câu hỏi hệ $\begin{cases} x^2 - 5x = y + 1 \\ (x + y)(x + 4) = m \end{cases}$ sẽ giải như thế nào, thì thấy ngay phương trình trên có bậc của y là 1 nên có thể rút y theo x . Tức là phương pháp thế.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra: $x^2 - 5x - 6 = y - 5 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 6) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 6$.

Ngoài ra: $P = (x + x^2 - 5x - 1)(x + 4) = f(x)$

Với $f(x) = x^3 - 17x - 1$, $-1 \leq x \leq 6$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 17; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{17}{3}}.$$

Lập bảng biến thiên cho $f(x)$ trên $[-1; 6]$ ta thấy

$$\begin{cases} f(x) \geq f\left(-\sqrt{\frac{17}{3}}\right) = \frac{-9 - 34\sqrt{51}}{9} \\ f(x) \leq f(6) = 113 \end{cases}$$

Ta có

$P = 113$ khi $x = 6, y = 5$ nên giá trị lớn nhất của P là 113.

$P = \frac{-9 - 34\sqrt{51}}{9}$ khi $x = \frac{-\sqrt{51}}{3}, y = \frac{14 + 5\sqrt{51}}{3}$ nên giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{-9 - 34\sqrt{51}}{9}$. ■

Bài 2: Cho $x + 2y = 2$, $x, y \in [-1; 1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $P = x^2 + xy + y^2$

Lời giải

Ta có $x = 2 - 2y, x \in [-1; 1] \Rightarrow y \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Mà $y \in [-1; 1] \Rightarrow y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Ta có

$$P = (2 - 2y)^2 + (2 - 2y)y + y^2 = f(y).$$

Với $f(y) = 3y^2 - 6y + 4, \frac{1}{2} \leq y \leq 1$. Ta có

$$f'(y) = 6y - 6 \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

Lập bảng biến thiên cho $f(y)$ trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ta có $\begin{cases} f(y) \geq f(1) = 1 \\ f(y) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} \end{cases}$

Khi $x = 0, y = 1$ thì $P = 1$ nên giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Khi $x = 1, y = \frac{1}{2}$ thì $P = \frac{7}{4}$ nên giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{4}$. ■

Bài 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $xy - x = y, y \in \left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$P = (x + y)(3x - 35).$$

Lời giải

Chúng ta vẫn sử dụng tư tưởng rút một biến theo biến còn lại.

Từ giả thiết ta suy ra được

$$\begin{cases} y = \frac{x}{x-1} \\ 3 \leq x \leq 4 \\ P = f(x) = \frac{3x^3 - 35x^2}{x-1} \end{cases}$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{2x(x-5)(3x-7)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (3; 4).$$

Do đó, $f(x)$ nghịch biến trên $[3; 4]$ nên $\begin{cases} f(x) \geq f(4) = \frac{-368}{3} \\ f(x) \leq f(3) = -117 \end{cases}$.

Khi $x = 4, y = \frac{1}{3}$ thì $P = \frac{-368}{3}$ nên giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{-368}{3}$.

Khi $x = 3, y = \frac{3}{2}$ thì $P = -117$ nên giá trị lớn nhất của P là -117 . ■

Bài 4 : Cho x, y là các số thực thỏa mãn $3(xy + x - 1) = 2y, y \leq \frac{-21}{20}, x \leq \frac{1}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3\sqrt[3]{3x-2}-16}{y+1} + 2(6-5x)\sqrt{6-5x}$$

Phân tích

Đại lượng y trong biểu thức P xuất hiện ít hơn nên ta nên rút y theo x .

Lời giải

Điều kiện $y \neq -1, x \leq \frac{6}{5}$. Ta có $3(xy + x - 1) = 2y \Leftrightarrow 3x(y+1) = 2(y+1) \Leftrightarrow y+1 = \frac{1}{3x-2}$.

Mà $y \leq \frac{-21}{20} \Rightarrow -6 \leq x < \frac{2}{3}$, mặt khác $x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -6 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Thay vào biểu thức P ta có:

$$\begin{aligned} P &= 3(3x-2)\sqrt[3]{3x-2} - 16(3x-2) + 2(6-5x)\sqrt{6-5x} \\ P &= f(x) = 3(3x-2)\sqrt[3]{3x-2} + 2(6-5x)\sqrt{6-5x} - 48x + 32. \end{aligned}$$

Với mọi $x \in \left(-6; \frac{1}{3}\right)$ ta có

$$f'(x) = 12\sqrt[3]{3x-2} + 18\sqrt{6-5x} - 48$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{3x-2} + 2) + 3(\sqrt{6-5x} - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3(x+2)}{(\sqrt[3]{3x-2})^2 - 2\sqrt[3]{3x-2} + 4} + 3 \cdot \frac{-5(x+2)}{\sqrt{6-5x} + 4} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x+2) \left(\frac{2}{(\sqrt[3]{3x-2})^2 - 2\sqrt[3]{3x-2} + 4} - \frac{5}{\sqrt{6-5x} + 4} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } -6 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{(\sqrt[3]{3x-2})^2 - 2\sqrt[3]{3x-2} + 4} \leq \frac{2}{7} < \frac{5}{12} \leq \frac{5}{\sqrt{6-5x} + 4}.$$

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Lập bảng biến thiên cho $f(x)$ trên $\left[-6; \frac{1}{3}\right]$ ta có

$$\begin{cases} f(x) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = 19 + \frac{26\sqrt{39}}{9} \\ f(x) \leq f(-6) = 752 + 60\sqrt[3]{20} \end{cases}$$

Khi $x = \frac{1}{3}, y = -2$ thì $P = 19 + \frac{26\sqrt{39}}{9}$ nên giá trị nhỏ nhất của P là $19 + \frac{26\sqrt{39}}{9}$.

Khi $x = -6, y = -\frac{21}{20}$ thì $P = 752 + 60\sqrt[3]{20}$ nên giá trị lớn nhất của P là $752 + 60\sqrt[3]{20}$.

Nhận xét: Bài toán 4 này là một bài khá hay. **Hãy luôn cảnh giác tập giá trị của $x; y$ trước khi xét hàm số.** Nó nhắc nhở ta cách giải phương trình vô tỷ.

Ngoài cách giải trên, ta có thể đặt $\sqrt[3]{3x-2} = a$, $\sqrt{6-5x} = b$ rồi đưa về hệ phương trình và giải. Đồng thời nó cũng nhắc nhở về đạo hàm của các hàm phức hợp.

Tổng quát cho phương trình trên: $k\sqrt[n]{ax+b} \pm h\sqrt[m]{cx+d} = e$.

Phương pháp giải: Đặt $\begin{cases} \sqrt[n]{ax+b} = u \\ \sqrt[m]{cx+d} = v \end{cases}$. Ta có hệ $\begin{cases} ku \pm hv = e \\ \frac{u^n - b}{a} - \frac{v^m - d}{c} = 0 \end{cases}$

Giải hệ u, v . Tìm ra x rồi thử lại.

CÒN NỮA....

PHẦN IV: BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN
§1: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ TOÀN PHẦN

Phương pháp này là để giải cho một lớp bài toán có dạng như sau:

1. Giả thiết cho: $f(a) + f(b) + f(c) = 3m$
2. Yêu cầu chứng minh: $g(a) + g(b) + g(c) \geq 3\alpha$.

Tư tưởng chung của phương pháp này:

1. Dự đoán dấu “=” xảy ra khi: $a = b = c = t$.
2. Xét hàm số:

$$H(x) = g(x) - k(f(x) - m) + \alpha.$$

Số k là số nào? Mục đích của xét hàm số $H(x)$ là gì? Thì chúng ta bắt đầu tìm hiểu qua những bài toán sau:

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{b}{(1-b)^2} + \frac{c}{(1-c)^2}$$

Phân tích và lời giải

Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Như vậy với tư tưởng này ta cần tìm số k để:

$$\frac{a}{(1-a)^2} \geq k\left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = k\left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} \quad (*)$$

Để tìm k ta có một suy nghĩ đơn giản là biến đổi tương đương bất đẳng thức (*):

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{3}{4} \geq k\left(a - \frac{1}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{3\left(a - \frac{1}{3}\right)(a-3)}{4(1-a)^2} \geq k\left(a - \frac{1}{3}\right) \\ (*) &\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{3(3-a)}{4(1-a)^2} - k \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Khi phân tích tiếp ta có tư tưởng chọn k để biểu thức trong ngoặc đơn chứa k sẽ phân tích được một thừa số $\left(a - \frac{1}{3}\right)$ nữa. Khi đó, nó sẽ tựa như có dạng $m\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$.

$$\Rightarrow k = \frac{3\left(3 - \frac{1}{3}\right)}{4\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{2}.$$

Đến đây, ta chỉ việc thử lại (*) với $k = \frac{9}{2}$.

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow \frac{a}{(1-a)^2} \geq \frac{9}{2} \left(a - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{3(3-a)}{4(1-a)^2} - \frac{9}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{3} \right)^2 \cdot \frac{9(3-2a)}{4(1-a)^2} \geq 0$$

Lưu ý rằng

$$a, b, c > 0, a + b + c = 1 \Rightarrow a < 1 < \frac{3}{2}.$$

Do đó, bất đẳng thức (*) đúng. Như vậy ta sẽ có ba bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} \frac{a}{(1-a)^2} \geq \frac{9}{2} \left(a - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4} \\ \frac{b}{(1-b)^2} \geq \frac{9}{2} \left(b - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4} \\ \frac{c}{(1-c)^2} \geq \frac{9}{2} \left(c - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4} \end{cases}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta thu được

$$P \geq \frac{9}{2}(a+b+c-1) + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$. ■

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - a - b - c$$

Phân tích

Dự đoán dấu “=” tại: $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Do đó, vẫn theo tư tưởng trên ta phải tìm số k để:

$$\frac{1}{a} - a \geq k \left(a^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} (*)$$

Không khác gì tư tưởng trên lắm. Ta cố gắng chọn k để nó có dạng: $m \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2$

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \sqrt{3} \right) - \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \geq k \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(a + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{a} - 1 - k \left(a + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \geq 0 \\ &\Rightarrow k = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Lời giải

Ta bắt đầu quay lại:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{a} - a \geq -2\sqrt{3} \left(a^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{a} - 1 + 2\sqrt{3} \left(a + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(2\sqrt{3} + \frac{3}{a}\right) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên (*) đúng. Do đó, ta có ba bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - a \geq -2\sqrt{3} \left(a^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \\ \frac{1}{b} - b \geq -2\sqrt{3} \left(b^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \\ \frac{1}{c} - c \geq -2\sqrt{3} \left(c^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$P \geq -2\sqrt{3} \left(a^2 + b^2 + c^2 - 1\right) - \frac{3}{\sqrt{3}} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Bài 3: (Trung Quốc): Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng:

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$$

Lời giải

Theo lối phân tích cũ, ta tìm k để:

$$\begin{aligned} 10a^3 - 9a^5 &\geq k \left(a - \frac{1}{3}\right) + 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = k \left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} (*) \\ \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{3}\right) \left(10 \left(a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}\right) - 9 \left(a^4 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{27}a + \frac{1}{81}\right) - k\right) &\geq 0 \\ \Rightarrow k &= \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Bắt đầu quay lại:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 10a^3 - 9a^5 \geq \frac{25}{9} \left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 (-27a^3 - 18a^2 + 21a + 16) \geq 0 \end{aligned}$$

Bài này khá khó vì ta chưa thể xác định được dấu trong ngoặc đơn.

Xét $f(x) = -27x^3 - 18x^2 + 21x + 16, x \in [0; 1]$. Ta có

$$f'(x) = -81x^2 - 36x + 21.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{9}; x = \frac{1}{3}$$

Lưu ý ta chỉ xét trên đoạn $[0; 1]$ nên ta có:

- $f(x)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{1}{3}\right]$
- $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

Để thấy: $f(0) = 16$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 20$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = 14$ nên: $f(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Như vậy ta có các trường hợp sau:

- Nếu $a, b, c \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$ ta có:

$$\begin{cases} 10a^3 - 9a^5 \geq \frac{25}{9}\left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \\ 10b^3 - 9b^5 \geq \frac{25}{9}\left(b - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \\ 10c^3 - 9c^5 \geq \frac{25}{9}\left(c - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$P \geq \frac{25}{9}(a+b+c-1) + 1 = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

- Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c lớn hơn $\frac{2}{3}$. Giả sử: $c \geq \frac{2}{3}$.

Khi đó, ta xét hàm: $f(x) = 10x^3 - 9x^5$ trên $[0; 1]$.

$$f'(x) = 30x^2 - 45x^4 = 15x^2(2 - 3x^2)$$

Lập bảng biến thiên ta thu được:

- $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.
- $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right]$.

Ta có $f(0) = 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9}$, $f(1) = 1$ nên ta có

$$f(a) \geq 0, f(b) \geq 0, f(c) \geq 1 \Rightarrow P = f(a) + f(b) + f(c) \geq 1.$$

Như vậy cả hai trường hợp trên ta đều thu được kết luận bài toán.

Đẳng thức xảy ra khi $(a; b; c) \in \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); (0; 0; 1)\right\}$. ■

Nhận xét: Phương pháp này không hề mạnh nhưng lại có nhiều hữu ích. Do dễ thực hiện nên đây có thể nên là hướng nghĩ đầu tiên cho một bài toán thuộc lớp bài trên. Ta hãy chú ý tới số k . Cách tìm trong câu ba đã có vẻ phức tạp hơn và sẽ không thực hiện được với hàm không dạng đa thức (tức là ví dụ có chứa hàm sin, cos, log,...). Ví dụ ở bài toán sau:

Bài 4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c)$$

Phân tích và lời giải

Nhận xét rằng chỉ bằng một biến đổi nhỏ ta sẽ làm tách biến đơn giản như sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 9\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 10(a + b + c)$$

Câu hỏi tiếp theo là tách biến ở giả thiết như thế nào? Chắc chắn rồi, một điều bạn nên nhớ. Khi ở dạng tích thì ta lấy logarit sẽ đưa được về dạng tổng, tức là ta có:

$$abc = 1 \Rightarrow \ln a + \ln b + \ln c = 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi: $a = b = c = 1$ nên theo tư tưởng trên ta đi tìm số k để:

$$a^2 + \frac{9}{a} - 10a \geq k \cdot (\ln a) + 1^2 - \frac{9}{1} + 10 \cdot 1 = k \cdot \ln a (*).$$

Không còn theo như cũ, ta không thể phân tích thành nhân tử. Tuy nhiên với lưu ý rằng: (*) đúng và dấu “=” khi $a = 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại đó. Tạm thời hiểu như vậy thì hàm số:

$$f(x) = x^2 + \frac{9}{x} - 10x - k \cdot \ln x$$

phải có $f'(1) = 0$. Ta có

$$f'(x) = 2x - \frac{9}{x^2} - 10 - \frac{k}{x}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow k = -17$$

Quay lại bài toán, xét hàm số $f(x) = x^2 + \frac{9}{x} - 10x + 17 \ln x$ ta có

$$f'(x) = 2x - \frac{9}{x^2} - 10 + \frac{17}{x} = \frac{(x-1)(2x^2 - 8x + 9)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Lập bảng biến thiên ta thấy:

$$f(x) \geq f(1) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x} - 10x \geq -17 \cdot \ln x (*)$$

Từ (*) ta có ba bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} a^2 + \frac{9}{a} - 10a \geq -17 \cdot \ln a \\ b^2 + \frac{9}{b} - 10b \geq -17 \cdot \ln b \\ c^2 + \frac{9}{c} - 10c \geq -17 \cdot \ln c \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{9}{a} + \frac{9}{b} + \frac{9}{c}\right) - 10(a + b + c) \geq -17 \cdot \ln(abc) = 0$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi: $a = b = c = 1$. ■

CÒN NỮA...

PHẦN VIII: BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC

§1: CHIA SẺ KINH NGHIỆM TỪ MỘT BÀI TOÁN “CŨ”

Phần này tôi sẽ xoay quanh một bài toán từ đó tổng hợp một số kiến thức quan trọng cho các bạn !

Bài toán 1: Cho $x \geq z \geq y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{x^2z - xyz}{3xyz + x + z} + \frac{xyz + x}{x^2z + z + xyz} + \frac{2xyz + z}{x^2z + x}$$

“Chém gió”:

Khi gặp bài toán này, bạn đọc có hướng suy nghĩ gì? Đó chính là điều tôi muốn bạn biết. **Khi gặp một bài toán bất đẳng thức, đừng có hoảng sợ, cố gắng vạch ra những hướng mà mình có thể đi theo. Đừng có nháp hay suy nghĩ viễn vông khi mà bản thân chưa biết mình đang làm gì.**

Với **bài toán 1**, tôi thấy ngay một ý tưởng đầu tiên: dùng đạo hàm cho từng biến, bởi lẽ các biến x, y, z không ràng buộc vào nhau bởi một đẳng thức nào đó. Tuy nhiên, nó lại quá phức tạp cho việc xét dấu của đạo hàm.

Vậy ta có nên đi theo hướng đó, hay nói cách khác, ta phải làm gì bây giờ? Chưa biết phải làm gì, nhưng tôi xin đưa ra một “form” chung cho các bài toán bất đẳng thức như sau:

1. **Đọc kĩ đề, mắc nối giả thiết và kết luận với nhau.**
2. **Thử dự đoán dấu bằng xảy ra.**
3. **Lựa chọn phương pháp theo trình tự:**
 1. **Công cụ mạnh:**
 - Phương pháp dồn biến.
 - Phương pháp phân tích bình phương.
 - Bất đẳng thức Schur.
 2. **Bất đẳng thức cổ điển:**
 - Bất đẳng thức Cauchy
 - Bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*
 - Bất đẳng thức Holder
 - Bất đẳng thức Jensen
 - ...
 3. **Phối hợp các kĩ năng: Tách, ghép, đổi biến, bất đẳng thức phụ,**

Đây là “form” chung dành cho đa số các bài toán, nó chỉ nằm trong suy nghĩ của tôi. Điều mà tôi nhấn mạnh ở đây: **đa số chứ không phải là tất cả.**

Ví dụ như ở bước hai, dự đoán dấu bằng, rất nhiều người nói rằng: **dự đoán được dấu bằng có thể coi như giải quyết được 50% bài toán.** Điều đó không hẳn là sai nhưng vẫn chưa đủ: Trước khi dự đoán, ta cần đặt câu hỏi: Dự đoán dấu bằng để làm gì (mục đích); dự đoán liệu có đúng không (tính đúng sai), những bài toán nào nên dự đoán (đối tượng). Để trả lời những câu hỏi này, tôi sẽ đưa ra một số chỉ tiêu sau:

- Một là: Chỉ nên dự đoán những bài có hình thức đơn giản, để mục tiêu không bị tốn quá nhiều vào việc dự đoán. Ví như **bài toán 1** trên chắc chả ai lao đầu vào việc tìm dấu bằng xảy ra. Như vậy, cần nhấn mạnh mục tiêu một: **nên dự đoán dấu bằng hay không?**
- Hai là: Theo kinh nghiệm tôi thấy, **hầu hết** các bài toán có dấu bằng xảy ra khi:
 - Hoặc là **một biến tại biên. (nằm ở giả thiết).**
 - Hoặc là **hai biến bằng nhau.**

Khi thay như vậy, ta chỉ còn một biến, và dùng đạo hàm để tìm ra dấu bằng dễ dàng hơn! Nhưng ở đây cũng không phải là tất cả.

- Ba là: Dự đoán dấu bằng để làm gì? (mục tiêu). Thì khi bạn đánh giá, ở **từng** bất đẳng thức trong bài, sau khi viết, bạn phải kiểm tra nó có xảy ra dấu bằng hay không? Ví dụ như dấu bằng xảy ra khi một trong ba biến x, y, z bằng 0 mà bạn lại xuất hiện đánh giá $xyz > 0$ trong bất đẳng thức thì chắc chắn rằng bạn làm kiểu gì đi chăng nữa thì lời giải sẽ vẫn sai. Kinh nghiệm này bạn sẽ thấy rõ ở phương pháp **cân bằng hệ số**.

Ở bước ba, cái “form” của tôi là: **từ công cụ mạnh đến công cụ yếu**. Tại sao tôi lại nghĩ thế? Đơn giản là ta phải xác định mục tiêu của ta: **giải quyết bài toán** chứ không phải **tìm ra lời giải bài toán**. Hai điều này khác nhau như thế nào? Ý mà tôi muốn bạn hiểu là:

+ **Giải quyết bài toán**: là tìm ra kết quả bài toán, tìm ra cách chứng minh kết luận nhưng phải đi theo đúng bản chất. Tức là, **dù cách giải dài hay ngắn thì nó cũng phải đi đúng suy luận logic**.

+ **Tìm ra lời giải bài toán**: định nghĩa này bao trùm giải quyết bài toán, tức là ta phải **tìm ra lời giải hay, đẹp mắt, nhiều khi không theo một suy luận logic nào cả**.

Chắc chắn rằng, tìm ra lời giải sẽ phức tạp hơn giải quyết bài toán. Trong kì thi tuyển sinh đại học, thứ mà chúng ta cần là “giải quyết bài toán”. Nếu bạn **nắm rõ gốc gác vấn đề** thì chỉ cần **suy luận thông thường để tìm ra giải đáp**.

Tuy nhiên, ở bước ba này, đâu cứ phải theo “form”, ví dụ như họ cho bất đẳng thức hai biến đối xứng thì chả ai “ngu” gì mà nghĩ tới kĩ thuật dồn biến, ... Điều mà tôi muốn nhắc nhở: **đừng quá quy tắc, hãy càng linh hoạt càng tốt**.

Với một đồng công cụ, ta cần chọn công cụ nào cho hợp lý????

Quay lại **bài toán 1**, bạn có ý tưởng gì chưa? Đây là một bài toán “cũ”. Vì sao tôi nói vậy? Tôi đã từng nói không dưới một lần: **Toán học không đơn thuần là công thức, mà còn là sự tinh tế và liều lĩnh**.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2z - xyz}{3xyz + x + z} + \frac{xyz + x}{x^2z + z + xyz} + \frac{2xyz + z}{x^2z + x} \\ &= \frac{xz(x - y)}{3xyz + x + z} + \frac{xz\left(y + \frac{1}{z}\right)}{x^2z + z + xyz} + \frac{zx\left(2y + \frac{1}{x}\right)}{x^2z + x} \\ &= \frac{(x - y)}{3y + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}} + \frac{\left(y + \frac{1}{z}\right)}{x + \frac{1}{x} + y} + \frac{\left(2y + \frac{1}{x}\right)}{x + \frac{1}{z}} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x - y \\ b = y + \frac{1}{z} \\ c = 2y + \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow a, b, c > 0. (*)$$

Khi đó, **bài toán 1** trở thành:

Bài toán 2: Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Quá quen thuộc ! Nhưng làm sao có phép biến đổi (*)? Đó chính là nhờ vào giả thiết $x \geq z \geq y > 0$, sự xuất hiện nhiều lần của tích xyz cùng với sự can đảm, nhạy cảm.

Sau khi đặt và đưa bài toán này về dạng đối xứng giữa các biến a, b, c ta thấy rằng, người ra đề đã làm mất đi vẻ đẹp của bài toán bằng một phép thế rất *chuôi*! Điều này rất không nên làm!

Quay trở lại **bài toán 2**, khi nhìn qua ai cũng có lời giải như sau:

Lời giải 1: Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* dạng phân số:

$$P = \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Ta có

$$P \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } a=b=c \Leftrightarrow x-y = y+\frac{1}{z} = 2y+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x - \frac{1}{z} \\ y = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \\ x - \frac{1}{z} = \frac{2}{z} - \frac{1}{x} \end{cases}$$

Có thể lấy ví dụ thỏa mãn đề $x=2, y=\frac{1}{2}, z=1$.

Các bạn đã bị “nhiễm độc” bằng lời giải trên mà không suy nghĩ gì. Tại sao ta có lời giải này. Vì nó quá quen thuộc, xuất hiện quá nhiều lần? Thế nhưng, tôi khẳng định rằng: Chúng ta nếu đi theo lời giải trên thì chưa giải quyết được bài toán. (xem lại khái niệm giải quyết mà tôi đặt ra nhé). Bản chất lời giải bài toán chưa được hé mở. Hãy quay lại cái “form” và suy ngẫm.

Điều đầu tiên mà tôi thấy, chắc chắn rằng các biến a, b, c không phụ thuộc vào nhau, nên hướng nghĩ đạo hàm theo biến là không thể bỏ qua !

Lời giải 2: Giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Ta xét:

$$\begin{aligned} P &= f(a; b; c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ \Rightarrow f'_a(a; b; c) &= \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(c+a)^2} - \frac{c}{(a+b)^2} \\ \Rightarrow f'_a(a; b; c) &\geq \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(c+b)^2} - \frac{c}{(c+b)^2} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra: $f(a; b; c)$ đồng biến trên $[b; +\infty)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &\geq g(b; c) = \frac{b}{b+c} + \frac{b}{c+b} + \frac{c}{b+b} = \frac{2b}{c+b} + \frac{c}{2b} \\ \Rightarrow P &\geq f(x) = \frac{2x}{1+x} + \frac{1}{2x}, \quad x = \frac{b}{c} \geq 1 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x)$ trên $[1; +\infty)$ có:

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{1}{2x^2} \geq 0, \quad \forall x \geq 1$$

Do đó, ta thu được:

$$P \geq f(x) \geq f(1) = \frac{3}{2}$$

Bài toán có các biến độc lập với nhau ta có thể nghĩ tới phương pháp sử dụng đạo hàm để làm giảm biến số.

Tiếp tục theo hướng giảm biến số, ta có một phương pháp rất mạnh:

Lời giải 3: Đặt: $t = \frac{b+c}{2}$

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} M &= \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{2t}{a+t} = \left(\frac{b}{c+a} - \frac{t}{t+a} \right) - \left(\frac{t}{t+a} - \frac{c}{b+a} \right) \\ &= \frac{(b-c)t}{a+t} \left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+a} \right) = \frac{t(b-c)^2}{(a+t)(a+b)(a+c)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2t}{a+t}$. Do đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{2t}{a+t} = \frac{a}{2t} + \frac{2t}{a+t} \\ &\Rightarrow P \geq f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x+1}, \quad x = \frac{a}{t} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ có: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x+1)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Lập bảng biến thiên ta thu được:

$$P \geq f(x) \geq f(1) = \frac{3}{2}$$

Lời giải cả hai cách khá rõ ràng. Cách ba chính là sử dụng tư tưởng dồn biến:

Bước 1: $f(a; b; c) \geq f\left(a; \frac{b+c}{2}; \frac{b+c}{2}\right)$

Bước 2: Cùng bậc a, t nên đặt $x = \frac{a}{t}$

Bước 3: Khảo sát hàm $f(x)$.

Khá quen thuộc khi tôi nói rõ ra như vậy. Những bài toán nào nên nghĩ qua phương pháp này:

Bài toán ba biến, đối xứng, hình thức đơn giản, có thể nghĩ tới phương pháp dồn biến.

Ngoài hai hướng đi trên (mục tiêu đưa về một biến) thì hướng thứ hai đánh giá đồng thời có rất nhiều hướng đi. Khi đối xứng, ta có một lời giải:

Lời giải 4:

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} P - \frac{3}{2} &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2a-b-c}{b+c} + \frac{2b-c-a}{c+a} + \frac{2c-a-b}{a+b} \right) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2\left(P - \frac{3}{2}\right) &= (a-b)\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c}\right) + (b-c)\left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+a}\right) + (c-a)\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+b}\right) \\ &= \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{(c+b)(a+b)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$P \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải khá đơn giản và ngắn gọn, dựa trên tư tưởng phân tích bình phương SOS.

Bài toán đối xứng, đặc biệt dạng phân thức, có dấu bằng tại các biến bằng nhau có một hướng nghĩ là sử dụng phương pháp phân tích bình phương SOS.

Khi các biến ở dạng đối xứng, ta vẫn còn một hướng suy nghĩ cũ:

Lời giải 5:

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &= \frac{a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(c+a)(c+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{p^3 - 2pq + 3r}{pq - r} \end{aligned}$$

Ta có

$$P \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 9r \geq 7pq - 2p^3$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc ba ta có:

$$9r \geq 4pq - p^3$$

Lại có:

$$4pq - p^3 \geq 7pq - 2p^3 \Leftrightarrow p^2 \geq 3q \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} 9r &\geq 4pq - p^3 \geq 7pq - 2p^3 \\ \Rightarrow P &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài toán đối xứng ba biến, có hướng nghĩ đối biến để dùng bất đẳng thức Schur.

Khi học về phương pháp đánh giá toàn phần, tôi có đưa ra một ví dụ, ta thử áp dụng xem cho bài này được không?

Tìm số k để có:

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3 \cdot a^k}{2(a^k + b^k + c^k)}$$

Ta tìm được $k = \frac{3}{2}$.

Do đó, ta có lời giải 6 :

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3a^{\frac{3}{2}}}{2\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}\right)} (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow 2a^{\frac{5}{2}} + 2ab^{\frac{3}{2}} + 2ac^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{3}{2}}.b + 3a^{\frac{3}{2}}.c$$

Đến đây, đơn thuần là áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\begin{cases} a^{\frac{5}{2}} + ab^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{3}{2}}.b \\ a^{\frac{5}{2}} + ac^{\frac{3}{2}} + ac^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{3}{2}}.c \end{cases}$$

(*) đúng. Áp dụng thêm hai lần nữa rồi đem cộng ba bất đẳng thức lại ta thu được:

$$P \geq \frac{3}{2}$$

Quay sang một góc nhìn hoàn toàn khác với **sự độc lập, tính đối xứng** ta còn thấy bất đẳng thức trên là bất đẳng thức **cùng bậc**. Vì vậy ta có thể giả sử: $a+b+c=3$.

Bài toán có dạng: $f(a;b;c) \geq 0 \Leftrightarrow f(ka;kb;kc) \geq 0$ ta có thể giả sử một đại lượng thích hợp không đổi.

Khi đó, **bài toán 2 trở thành:**

Cho $a, b, c > 0, a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c}$$

Có bao nhiêu lời giải cho hướng bài tập này. Chắc chắn rồi, sẽ có ít nhất hai hướng đi:

Lời giải 7: Ta chứng minh:

$$\forall x \in (0;3) \Rightarrow \frac{x}{3-x} \geq \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} (*)$$

Thật vậy ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 4x \geq (3x-1)(3-x) \Leftrightarrow 4x \geq -3x^2 + 10x - 3 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 \geq 0$$

Áp dụng (*) ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{3-a} \geq \frac{3}{4}a - \frac{1}{4} \\ \frac{b}{3-b} \geq \frac{3}{4}b - \frac{1}{4} \\ \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{4}c - \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow P \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.3 - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Sự xuất hiện của số $\frac{3}{4}$ chắc bạn đã hiểu. Đây chính là phương pháp đánh giá toàn phần mà chúng tôi từng đề cập.

Bài toán có $g(a) + g(b) + g(c) = 0$, và cần chứng minh: $f(a) + f(b) + f(c) \geq 0$ ta có thể tìm k để:

$$f(a) \geq kg(a).$$

Lời giải 8:

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{3-x}$, $x \in (0;3)$ ta có

$$f'(x) = \frac{3}{(3-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(3-x)^3} \geq 0, \forall x \in (0;3).$$

Do đó, theo bất đẳng thức Jensen ta có:

$$P = f(a) + f(b) + f(c) \geq 3.f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3.f(1) = \frac{3}{2}$$

Bài toán có tổng hoặc tích a, b, c và có $f(a) + f(b) + f(c)$, ta có thể nghĩ tới bất đẳng thức Jensen.

Bài toán 1 quy về **bài toán 2**. **Bài toán 2** lại có những 7, 8 lời giải với những tư tưởng khác nhau hoàn toàn. Mỗi tư tưởng là sự đúc kết một công cụ, phương pháp. Chúng ta chỉ cần quan sát tinh tế, suy luận theo lối mòn, rồi sẽ dẫn tới đích. Mỗi đóng khung trên là một lưu ý mà bạn đọc cần để ý, cũng chính là ôn lại một số dạng toán mà ta đã được học trong các chương trước đó. Và đây, tiếp tới là 132 bài toán khiến bạn có cái nhìn khác về bất đẳng thức.

§2: 132 BÀI TOÁN TUYỂN CHỌN VÀ PHÂN TÍCH GIẢI

132 bài toán này là sự lựa chọn rất kĩ càng. Ở đây, có khá nhiều bài vượt xa với chương trình ôn thi đại học và cũng không ít bài sát với đề thi. Chúng tôi chưa cần các bạn làm được những bài tập ở đây. Mà mong muốn đơn giản của chúng tôi là bạn đọc, hiểu lối tư duy và từ đó có những áp dụng tinh tế theo tư duy logic của bản thân mình vào những bài tập khác.

Bài 1: (Iran-2008) Cho $x, y, z > 0, x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx)$$

Phân tích và hướng dẫn

Đẳng thức dự đoán là $x = y = z = 1$. Lưu ý hằng đẳng thức:

$$a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4), (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

Do bậc trên tử của vế trái bằng 3, gọi ý áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số:

$$\frac{a^3}{b^3+8} + u(a+2) + v(a^2-2a+4) \geq 3\sqrt[3]{uv.a}$$

Chọn $u; v$ để có đẳng thức tại $a = b = 1$ thì: $u = v = \frac{1}{27}$. Do đó ta có:

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y+2}{27} + \frac{y^2-2y+4}{27} \geq \frac{x}{3} \\ \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z+2}{27} + \frac{z^2-2z+4}{27} \geq \frac{y}{3} \\ \frac{z^3}{x^3+8} + \frac{x+2}{27} + \frac{x^2-2x+4}{27} \geq \frac{z}{3} \end{cases}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} &\geq \frac{(10(x+y+z) - (x^2+y^2+z^2) - 18)}{27} = \frac{12 - (x^2+y^2+z^2)}{27} \\ &= \frac{3 + (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{27} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

Vậy bài toán được giải quyết. ■

Bài 2: Cho $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = x^4(y+z) + y^4(x+z) + z^4(x+y)$$

Phân tích và hướng dẫn

Biểu thức của P là đối xứng giữa $x; y; z$ và là dạng đa thức nên ta hoàn toàn biểu thị chúng được về đại lượng:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + zx = a \\ xyz = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3} \\ 0 \leq 3b = 3(x+y+z)xyz \leq a^2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq 9b \leq a \leq 1.$$

Khi đó, P chỉ còn hai biến $a; b$ và có thể sẽ đơn giản hơn:

$$\begin{aligned}
P &= x^3(xy+xz) + y^3(yz+yx) + z^3(zx+zy) \\
&= (x^3+y^3+z^3)(xy+yz+zx) - xyz(x^2+y^2+z^2) \\
&= (1-3a+3b)a - b(1-2a)
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $P = f(a; b) = a - 3a^2 + 5ab - b$.

Biến b xuất hiện ít hơn nên xét: $f'_b(a; b) = 5a - 1$ có hai trường hợp cần xét:

- Nếu $a \leq \frac{1}{5} \Rightarrow P = f(a; b) \leq f(a; 0) = a - 3a^2 = a(1 - 3a)$

Đến đây ta có thể dùng khảo sát hàm hoặc cân bằng bất đẳng thức Cauchy:

$$P \leq a(1 - 3a) = \frac{1}{3} \cdot 3a(1 - 3a) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{3a + 1 - 3a}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3a = 1 - 3a \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + zx = \frac{1}{6} \\ xyz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}; \frac{3 - \sqrt{3}}{6}; 0 \right)$

- Nếu $a > \frac{1}{5} \Rightarrow P = f(a; b) \leq f\left(a; \frac{a}{9}\right) = a - 3a^2 + \frac{5}{9}a^2 - \frac{a}{9} = \frac{2}{9}a(4 - 11a) < \frac{1}{12} \forall \frac{1}{5} < a \leq \frac{1}{3}$.

Vậy $\max P = \frac{1}{12} \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}; \frac{3 - \sqrt{3}}{6}; 0 \right)$

Bài 3: (Trung Quốc-2008) Cho $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3}$$

Phân tích và hướng dẫn

Do trong bài toán có b, c bình đẳng nên ta dự đoán đẳng thức tại $b = c = t$. Khi đó:

$$\begin{cases} a + 2t = 1 \\ P = \sqrt{a} + 2\sqrt{t} \end{cases} \Rightarrow P = \sqrt{1 - 2t} + 2\sqrt{t}$$

Bằng khảo sát hàm ta thấy $P \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$. Như vậy, sau khi đoán được đẳng thức bước tiếp theo là

dùng *Cauchy-Schwarz*. Tại sao tôi lại nghĩ tới bất đẳng thức này, vì nó có dạng $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \dots$. Tuy nhiên ở đây dùng Bunhia phải thật khéo léo. Sẽ có hai hướng nghĩ tự nhiên mà ta xét đầu tiên:

$$* P \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(a + \frac{(b-c)^2}{4} \right) + (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}$$

$$* P \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(a + \frac{(b-c)^2}{4} \right) + (x\sqrt{b} + y\sqrt{c})^2 + ((1-x)\sqrt{b} + (1-y)\sqrt{c})^2}$$

Nhưng vì vế trái có sự xuất hiện của $\sqrt{3}$ nên ta loại trừ ngay cái (1). Vấn đề tiếp theo để vai trò của b, c bình đẳng ta phải chọn: $y = 1 - x$. Khi đó, ta phải tìm được x để:

$$\begin{aligned} & \left(a + \frac{(b-c)^2}{4} \right) + (x\sqrt{b} + (1-x)\sqrt{c})^2 + ((1-x)\sqrt{b} + x\sqrt{c})^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow & (b-c)^2 + 4(x^2 + (1-x)^2)(b+c) + 16x(1-x)\sqrt{bc} \leq 4(1-a) = 4(b+c) \\ \Leftrightarrow & (b-c)^2 + 4(b+c)(x^2 + (1-x)^2 - 1) + 16x(1-x)\sqrt{bc} \leq 0 (*) \end{aligned}$$

Một suy nghĩ tự nhiên là bất đẳng thức (*) cần có GTLN tại $b=c$ nên tại sao ta không nghĩ tới việc (*) phải phân tích được nhân tử. Ta chỉ cần chọn x để:

$$\frac{4(x^2 + (1-x)^2 - 1)}{16x(1-x)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ta có lời giải đẹp sau,

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* cho ba số:

$$P \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(a + \frac{(b-c)^2}{4} \right) + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{4} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{4}}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau để hoàn thành bài toán:

$$\begin{aligned} & \left(a + \frac{(b-c)^2}{4} \right) + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{4} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{4} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & (b-c)^2 - 2(b+c-2\sqrt{bc}) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \left((\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - 2 \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng do: $(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 2(b+c) \leq 2(a+b+c) = 2$.

Vậy bài toán được giải quyết, $\max P = \sqrt{3}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. ■

Bài 4: Cho $a; b; c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{(a+c)(a+4b+c)(a+b+c)^3}{abc(5(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca)}$$

Phân tích và hướng dẫn:

Có hai nhận xét cần chú ý:

- Đây là bất đẳng thức cùng bậc nên có thể giả sử: $a+b+c=3$. Tại sao tôi lại chọn đại lượng tổng mà không chọn đại lượng khác. Đơn giản vì trong biểu thức có nhiều biểu thức biểu diễn được về tổng.
- Vai trò của $a; c$ bình đẳng nên có thể đoán đẳng thức tại $a=c$.

Khi đó ta có:

$$P = \frac{18(3-b)(b+1)}{abc(a^2+b^2+c^2+1)}$$

Do đã có tổng nên một suy nghĩ tự nhiên là thử xem bất đẳng thức sau đúng hay sai:

$$abc(a^2+b^2+c^2+1) \leq b \cdot \frac{(a+c)^2}{4} \left(b^2 + 2 \cdot \frac{(a+c)^2}{4} + 1 \right) (*)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{b^2 + a^2 + c^2 + 1}{b^2 + 2 \cdot \frac{(a+c)^2}{4} + 1} \leq \frac{(a+c)^2}{4ac} \\
&\Leftrightarrow \frac{(a-c)^2}{2 \left(b^2 + 2 \cdot \frac{(a+c)^2}{4} + 1 \right)} \leq \frac{(a-c)^2}{4ac} \\
&\Leftrightarrow 4ac \leq 2b^2 + (a+c)^2 + 2 \\
&\Leftrightarrow 2b^2 + (a-c)^2 + 2 \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Do đó, từ (*) suy ra:

$$\begin{aligned}
P &\geq \frac{18(3-b)(b+1)}{b \cdot \frac{(a+c)^2}{4} \left(b^2 + 2 \cdot \frac{(a+c)^2}{4} + 1 \right)} = \frac{144(3-b)(b+1)}{b(3-b)^2 (2b^2 + (3-b)^2 + 2)} \\
&= \frac{144(b+1)}{b(3-b)(3b^2 - 6b + 11)} = 144 \cdot f(b)
\end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x+1}{x(3-x)(4x^2-6x+11)}$ trên $(0;3)$ hàm này khá phức tạp nếu đạo hàm ngay, tuy

nhiên có một phương pháp để tính đạo hàm hàm số này như sau:

$$\begin{aligned}
\ln f(x) &= \ln(x+1) - \ln(x) - \ln(3-x) - \ln(4x^2-6x+11) \\
\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} - \frac{6x-6}{4x^2-6x+11}
\end{aligned}$$

Sau khi giải ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó ta có: $f(x) \geq f(1) = \frac{1}{8}, \forall x \in (0;3)$.

Suy ra: $P \geq 144f(b) \geq \frac{144}{8} = 18$.

Vậy $\min P = 18$ khi $a = b = c$. ■

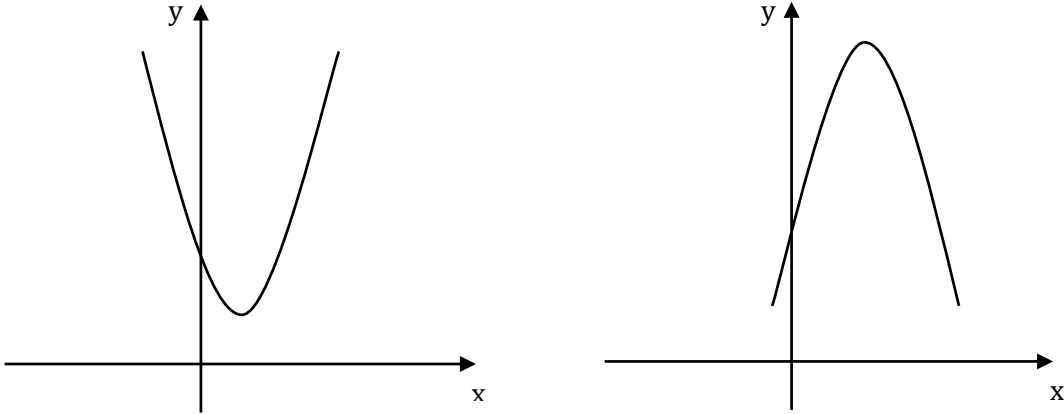
CÒN NỮA....

PHẦN VI: PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. $f(x)$ có thể viết lại dưới dạng tương đương là:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Từ đẳng thức đơn giản này và đồ thị hàm số của tam thức bậc hai ta có thể rút ra 1 số quan hệ về dấu của $f(x)$ với a và Δ , từ đó đi đến 1 số tính chất của tam thức bậc hai để áp dụng chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức.



Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ khi $a > 0$ Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ khi $a < 0$.

1. Một số tính chất của tam thức bậc hai trong chứng minh bất đẳng thức.**a. Định lý về dấu của tam thức bậc hai**

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Ta có

$$af(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \leq 0.$$

Chứng minh:

$$\text{Ta có } af(x) = a \left[a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4}, \text{ nên}$$

$$af(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \leq 0.$$

b. Định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai.

Nếu tồn tại 1 số α sao cho $af(\alpha) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < \alpha < x_2$.

Chứng minh:

Giả sử $\Delta \leq 0$, khi đó ta có $af(x) \geq 0, \forall x$ nên $af(\alpha) \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ trái với giả thiết.

Vậy $\Delta > 0$ tức là phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giả sử $\alpha \notin (x_1, x_2)$, suy ra $af(\alpha) \geq 0$, trái với giả thiết.

Vậy $\alpha \in (x_1, x_2)$. ■

Nếu tồn tại 1 số α sao cho $af(\alpha) \leq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm.

Hệ quả

Nếu tồn tại hai số thực α, β sao cho $f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm. Trong trường hợp tìm được α, β thỏa $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ thì suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $\Delta > 0$.

2. Sử dụng tam thức bậc 2 để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức.

Tôi không muốn nêu ra phương pháp cụ thể, vì như thế sẽ hơi áp đặt tư duy của các bạn. Chúng ta sẽ tìm hiểu phương pháp qua các ví dụ minh họa dưới đây.

Ví dụ 1. Tìm ba số thực x, y, z thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4 \end{cases}$ sao cho x đạt giá trị lớn nhất.

(Đề thi HSG TP. Hồ Chí Minh 2006-2007)

Lời giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $z = 1 - x - y$, thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 3(1 - x - y)^2 &= 4 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3(1 + x^2 + y^2 - 2x + 2xy - 2y) = 4 \\ &\Leftrightarrow 5y^2 + 6(x - 1)y + 4x^2 - 6x - 1 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Để tồn tại giá trị của y để x đạt giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) thì phương trình (*) phải có nghiệm, tức là ta phải có

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 20x^2 + 30x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -11x^2 + 12x + 14 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - \sqrt{190}}{11} \leq x \leq \frac{6 + \sqrt{190}}{11}$$

Theo trên, ta có $x \leq \frac{6 + \sqrt{190}}{11}$. Vì ta cần tìm giá trị lớn nhất của x , nên nếu ta chỉ ra được đẳng thức

$x = \frac{6 + \sqrt{190}}{11}$ xảy ra khi nào thì giá trị $\frac{6 + \sqrt{190}}{11}$ chính là giá trị lớn nhất của x .

Theo phương trình bậc 2 (*) thì

$$x = \frac{6 + \sqrt{190}}{11} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-6(x - 1)}{2 \cdot 5} = \frac{-3(x - 1)}{5} = \frac{15 - 3\sqrt{190}}{55}.$$

Thay y vào phương trình (1), ta rút được

$$z = 1 - x + \frac{3(x - 1)}{5} = \frac{-2(x - 1)}{5} = \frac{10 - 2\sqrt{190}}{55}.$$

Vậy khi $y = \frac{15 - 3\sqrt{190}}{55}$, $z = \frac{10 - 2\sqrt{190}}{55}$ thì $x = \frac{6 + \sqrt{190}}{11}$ nên giá trị lớn nhất của x là $\frac{6 + \sqrt{190}}{11}$. ■

Bình luận:

Rõ ràng trường hợp đẳng thức xảy ra là rất lẻ $\left(y = \frac{15 - 3\sqrt{190}}{55}, z = \frac{10 - 2\sqrt{190}}{55}\right)$, và để dự đoán được

nó là rất khó. Hoặc nếu dự đoán được thì ta cũng rất khó đánh giá. Phương pháp tam thức bậc hai đã giúp ta giải quyết một cách dễ dàng.

Câu hỏi đặt ra là: Nếu từ phương trình 1 của hệ, ta rút $y = 1 - x - z$ rồi đưa về phương trình bậc 2 theo z thì có được không? Câu trả lời là: hoàn toàn có! Bạn đọc hãy kiểm chứng.

Bạn đọc cũng có thể nhận ra là, ta sẽ đưa về phương trình bậc 2 theo y hoặc theo z chứ không phải đưa về phương trình bậc 2 theo x . Tức là ta đưa về phương trình bậc 2 *sao cho biểu thức ta cần tìm giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) là tham số của phương trình bậc 2 đó.*

Chúng ta cùng xét ví dụ 2 để hiểu rõ hơn.

Ví dụ 2. Cho các số thực x, y thỏa $x^2 + y^2 + xy - 6(x + y) + 11 = 0$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức:

$$P = 2x + y$$

Lời giải

Rõ ràng điều kiện giả thiết là một phương trình bậc hai theo biến x hoặc theo biến y , mặt khác biểu thức P là một đa thức bậc nhất hai ẩn x, y nên ta sẽ rút x (hoặc y) theo P và thay vào giả thiết, để được một phương trình bậc hai ẩn x (hoặc y) với P là tham số của phương trình bậc hai đó.

Rút $y = P - 2x$, thế vào giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}x^2 + (P - 2x)^2 + (P - 2x)x - 6(P - x) + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - (3P - 6)x + P^2 - 6P + 5 &= 0.\end{aligned}$$

Coi đây là phương trình bậc 2 ẩn x , để P có GTNN và GTLN thì phương trình này phải có nghiệm. Điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm là

$$\begin{aligned}\Delta = (3P - 6)^2 - 12(P^2 - 6P + 5) &\geq 0 \Leftrightarrow -3(P^2 - 12P + 8) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{7} \leq P &\leq 6 + 2\sqrt{7}.\end{aligned}$$

Ta có $P = 6 - 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3P - 6}{2 \cdot 3} = 2 - \sqrt{7}$ nên giá trị nhỏ nhất của P là $6 - 2\sqrt{7}$.

$P = 6 + 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3P - 6}{2 \cdot 3} = 2 + \sqrt{7}$ nên giá trị lớn nhất của P là $6 + 2\sqrt{7}$.

Bài toán được giải quyết xong. ■

Ví dụ 3. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = 9xy + 10yz + 11zx.$$

Lời giải

Để ý rằng, với giả thiết $x + y + z = 1$ thì ta có $z = 1 - x - y$, khi đó ta có

$$P = 9xy + 10yz + 11zx = 9xy + z(10y + 11x) = 9xy + (1 - x - y)(10y + 11x)$$

Khai triển và rút gọn, ta thu được

$$P = -11x^2 - 10y^2 + 11x + 10y - 12xy,$$

tương đương với

$$11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0 \quad (*).$$

Coi đây là tam thức bậc hai ẩn x , để P tồn tại giá trị lớn nhất thì phương trình (*) phải có nghiệm, tức

$$\Delta = (12y - 11)^2 - 44(10y^2 - 10y + P) \geq 0$$

Hay

$$-296y^2 + 176y + 121 - 44P \geq 0$$

Tương đương với

$$P \leq -\frac{74}{11} \left(y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} \right).$$

Dùng phép tách thành bình phương, dễ dàng nhận thấy

$$y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} = \left(y - \frac{11}{37} \right)^2 - \frac{5445}{10952} \geq -\frac{5445}{10952}.$$

Từ đó, suy ra

$$P \leq \left(-\frac{74}{11} \right) \cdot \left(-\frac{5445}{10952} \right) = \frac{495}{148}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} y = \frac{11}{37} \\ x = \frac{11-12y}{2 \cdot 11} = \frac{25}{74} \\ z = 1 - x - y = \frac{27}{74} \end{cases}$$
 nên ta kết luận giá trị lớn nhất của P là $\frac{495}{148}$. ■

Bình luận: Một lời giải nhẹ nhàng, ý tưởng rất tự nhiên, bắt nguồn từ việc đưa biểu thức từ 3 biến về 2 biến rồi 1 biến (sau khi xét Δ), qua đó cho ta thấy được sự hiệu quả của phương pháp.

Hoàn toàn tương tự, ta có thể dùng ý tưởng này để chứng minh những bài toán có dạng:

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = k$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = mxy + nyz + qzx.$$

Tất nhiên, các số m, n, q, k phải thỏa mãn những điều kiện nhất định thì P mới có giá trị lớn nhất. Mình xin dành cho bạn đọc.

CÒN NỮA...



Tác giả : **NGUYỄN VĂN HƯỜNG – TĂNG HẢI TUÂN**

Giá bìa 1 cuốn: 179.000đ

Đặt sách Lovebook phiên bản 2.0: <https://goo.gl/XeHwk5>

Giải đáp các thắc mắc trong sách Lovebook: <http://vedu.vn/forums/>

Tài liệu Lovebook chọn lọc: <http://tailieulovebook.com>

Kênh bài giảng Lovebook: <https://goo.gl/OAo45w>

Đăng ký nhận tài liệu thường xuyên Lovebook: goo.gl/ol9EmG