

Chủ đề 1.4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đường tiệm cận ngang

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

- Nhận xét:** Như vậy để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

2. Đường tiệm cận đứng

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

2. **Chú ý:** Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 1. Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)$.

Giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = -\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

Giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2 > 0$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$.

Giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0, x - 1 > 0$ với mọi $x > 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 3) = -1 < 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1}$.

Giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0, x - 1 < 0$ với mọi $x < 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 3) = -1 < 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1} = +\infty$.

C. KỸ NĂNG SỬ DỤNG MÁY TÍNH

⚠️ Ý tưởng giả sử cần tính $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của $f(x)$ tại các giá trị của x rất gần A.

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

☞ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a + 10^{-9}$.

☞ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a - 10^{-9}$.

☞ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a + 10^{-9}$ hoặc $x = a - 10^{-9}$.

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

☞ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = 10^{10}$.

☞ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = -10^{10}$.

Ví dụ 1. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 1+10^p9= máy hiện 4.

Nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$.

Nhập biểu thức $\frac{2x - 3}{x - 1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 1+10^p9= máy hiện -999999998.

Nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1}$.

Nhập biểu thức $\frac{2x - 3}{x - 1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 1p10^p9= máy hiện 999999998.

Nên $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 3}{x - 1} = +\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 10¹⁰= máy hiện 2.

Nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = 2$.

Ví dụ 5. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x}{x + 1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 3x}{x + 1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 10¹⁰ = máy hiện 3.

Nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x - 3}{x - 1} = 2$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x + 1}{x + 1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x + 1}{x + 1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn p10¹⁰= máy hiện 1.

Nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x + 1}{x + 1} = 1$.

Ví dụ 7. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\frac{2x-1}{x+2}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn p10^10= máy hiện 2.

Ấn r máy hỏi X? ấn 10^10= máy hiện 2.

Nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$.

Do đó đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Ví dụ 7. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\frac{x+1}{x-2}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 2+10^p9= máy hiện 3000000001.

Ấn r máy hỏi X? ấn 2p10^p9= máy hiện -2999999999.

Nên $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$.

Do đó đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1$ và $y=-3$.

B. $x=2$ và $y=1$.

C. $x=1$ và $y=2$.

D. $x=-1$ và $y=2$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=-2$ và $y=-3$.

B. $x=-2$ và $y=1$.

C. $x=-2$ và $y=3$.

D. $x=2$ và $y=1$.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1, x=2$ và $y=0$.

B. $x=1, x=2$ và $y=2$.

C. $x=1$ và $y=0$.

D. $x=1, x=2$ và $y=-3$.

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=3$ và $y=-3$.

B. $x=3$ và $y=0$.

C. $x=3$ và $y=1$.

D. $y=3$ và $x=-3$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2+x+2}{x^3-8}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $y=2$ và $x=0$.

B. $x=2$ và $y=0$.

C. $x=2$ và $y=3$.

D. $y=2$ và $x=3$.

Câu 6. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{3+2x}$ là:

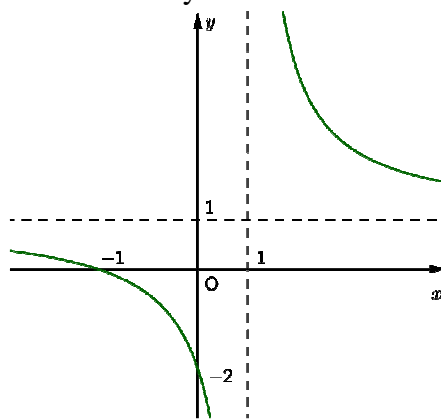
A. 4.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

- Câu 7.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3x+2}$ là:
A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.
- Câu 8.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-4}$ là:
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 9.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2-3x-4} + x$ là:
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.
- Câu 10.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ khẳng định nào sau đây là **sai**:
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$. **D.** Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(3;1)$.
- Câu 11.** Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận ?
A. $y = \frac{1-2x}{1+x}$. **B.** $y = \frac{1}{4-x^2}$. **C.** $y = \frac{x+3}{5x-1}$. **D.** $y = \frac{x}{x^2-x+9}$.
- Câu 12.** Cho hàm số $y = \frac{x-9x^4}{(3x^2-3)^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y = -3$.
C. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y = -1$.
D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, có tiệm cận ngang.
- Câu 13.** Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng:
A. $y = \frac{3x-1}{x^2+1}$. **B.** $y = \frac{-1}{x}$. **C.** $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x+2}$. **D.** $y = \frac{1}{x^2-2x+1}$.
- Câu 14.** Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang:
A. $y = \frac{2x-3}{x+1}$. **B.** $y = \frac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$. **C.** $y = \frac{3}{x^2-1}$. **D.** $y = \frac{3}{x-2} + 1$.
- Câu 15.** Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào sau đây :



- A.** $y = \frac{x-1}{x+1}$. **B.** $y = \frac{3-x}{x-1}$. **C.** $y = \frac{x+2}{x-1}$. **D.** $y = \frac{x-2}{x-1}$.

- Câu 16.** Đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{3x+2}$ có đường tiệm cận ngang là
 A. $x = 3$. B. $x = 1$. C. $y = 3$. D. $y = 1$.
- Câu 17.** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 18.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$ là
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 19.** Cho hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$ có đồ thị (C). Kết luận nào sau đây đúng ?
 A. Khi $m = 3$ thì (C) không có đường tiệm cận đứng.
 B. Khi $m = -3$ thì (C) không có đường tiệm cận đứng.
 C. Khi $m \neq \pm 3$ thì (C) có tiệm cận đứng $x = -m$, tiệm cận ngang $y = m$.
 D. Khi $m = 0$ thì (C) không có tiệm cận ngang.
- Câu 20.** Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$
 A. $y = \pm 1$. B. $x = 1$. C. $y = 1$. D. $y = -1$.
- Câu 21.** Với giá trị nào của m thì đồ thị (C): $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1; \sqrt{2})$?
 A. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 2$.
- Câu 22.** Cho hàm số $y = \frac{mx+n}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết tiệm cận ngang của (C) đi qua điểm $A(-1; 2)$ đồng thời điểm $I(2; 1)$ thuộc (C). Khi đó giá trị của $m+n$ là
 A. $m+n = -1$. B. $m+n = 1$. C. $m+n = -3$. D. $m+n = 3$.
- Câu 23.** Số tiệm cận của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}$ là
 A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 24.** Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-m}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng là
 A. $m = 0; m = \pm 1$. B. $m = -1$. C. $m = \pm 1$. D. $m = 1$.
- Câu 25.** Số tiệm cận của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{x-1}$ là
 A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.
- Câu 26.** Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}$ có hai đường tiệm cận ngang với
 A. $\forall m \in \mathbb{R}$. B. $m = 1$. C. $m = 0; m = 1$. D. $m = 0$.

- Câu 27.** Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + mx}{x - 1}$ có đường tiệm cận đứng khi
- A. $m \neq 0$. B. $\forall m \in \mathbb{R}$. C. $m \neq -1$. D. $m \neq 1$.
- Câu 28.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 3x - 4}$ là:
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.
- Câu 29.** Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} & \text{nếu } x \geq 1 \\ \frac{2x}{x - 1} & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 30.** Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - (2m + 3)x + 2(m - 1)}{x - 2}$ không có tiệm cận đứng.
- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.
- Câu 31.** Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{3}{4x^2 + 2(2m + 3)x + m^2 - 1}$ có đúng hai tiệm cận đứng.
- A. $m < -\frac{13}{12}$. B. $-1 < m < 1$. C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m > -\frac{13}{12}$.
- Câu 32.** Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 2}$ có đúng hai tiệm cận đứng.
- A. $m < \frac{3}{2}; m \neq 1; m \neq -3$. B. $m > -\frac{3}{2}; m \neq 1$.
C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m < \frac{3}{2}$.
- Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.
- A. $0 < m < 1$. B. $m = -1$. C. $m > 1$. D. $m = 1$.
- Câu 34.** Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{2x + 1}}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?
- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng 1 tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.
- Câu 35.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$ có hai tiệm cận ngang.
- A. $m < 0$. B. $m > 0$.
C. $m = 0$. D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- Câu 36.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x-m}$ có tiệm cận đứng.
- A. $m > 1$. B. $m = 1$.
C. $m \leq 1$. D. Không có m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
- Câu 37.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng.
- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} m > 0 \\ m < -4 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m > 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$.
- Câu 38.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2-mx-2m^2}{x-2}$ có tiệm cận đứng.
- A. Không có m thỏa mãn yêu cầu đề bài.. B. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.
C. $m \in \mathbb{R}$. D. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.
- Câu 39.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng.
- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $-1 < m < 1$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.
- Câu 40.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi M là một điểm bất kì trên (C) . Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B . Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận của (C) . Tính diện tích của tam giác IAB .
- A. 2. B. 12. C. 4. D. 6.
- Câu 41.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 42.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ là:
- A. 0. B. 1. C. 3. D. 3.
- Câu 43.** Đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 2}$ có tiệm cận ngang là:
- A. $y = 2$. B. $y = -2$. C. $y = \sqrt{2}$. D. $x = -2$.
- Câu 44.** Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến trục hoành
- A. $M(0; -1), M(3; 2)$. B. $M(2; 1), M(4; 3)$. C. $M(0; -1), M(4; 3)$. D. $M(2; 1), M(3; 2)$.

- Câu 45.** Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ là
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 46.** Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{(x + 2)^2}$ là
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 47.** Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x - 1}$ là
A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 48.** Cho hàm số $y = \frac{x + 2}{x - 3}$ (C). Có tất cả bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng.
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 49.** Đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2}{3x + 9}$ có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Giá trị của số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $m \geq a + b$ là
A. 0. **B.** -3. **C.** -1. **D.** -2.
- Câu 50.** Cho hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$ (C). Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của d là
A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2.
- Câu 51.** Cho hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$ (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của 2 tiệm cận của (C) đến một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C). Giá trị lớn nhất của d là
A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.
- Câu 52.** Cho hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$ (C). Gọi d là tiếp tuyến bất kỳ của (C), d cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại A, B. Khi đó khoảng cách giữa A và B ngắn nhất bằng
A. 4. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

E. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	A	B	A	A	A	C	A	C	A	D	A	D	B	B	C	C	D	B	C

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52								
A	A	A	C	A	C	D	C	D	D	A	A								

II – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn C.

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{x-1} = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $\frac{2x-3}{x-1}$.

Ấn CALC $x = 1 + 10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -999999998 nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1} = -\infty$.

Ấn CALC $x = 1 - 10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 999999998 nên $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1} = +\infty$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$

Ấn CALC $x = 10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng 2 nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{x-1} = 2$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$

Câu 2. Chọn A.

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-3x}{x+2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1-3x}{x+2} = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-3x}{x+2} = -3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -3$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $\frac{1-3x}{x+2}$.

Ấn CALC $x = -2 + 10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 6999999997 nên $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-3x}{x+2} = +\infty$.

Ấn CALC $x = -2 - 10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -7000000003 nên $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1-3x}{x+2} = -\infty$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$

Ấn CALC $x = 10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng -2,999999999 nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-3x}{x+2} = -3$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -3$

Câu 3. Chọn A.

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là

$x = 1$. Tính tương tự với $x = 2$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$

Phương pháp tự luận

Nhập biểu thức $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$.

Xét tại $x = 1$: Ấn CALC $x = 1 + 10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 999999998 nên

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = +\infty$.

Ấn CALC $x = 1 + 10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -1,000000002 nên $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = -\infty$.

Tương tự xét với $x = 2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = 2$

Ấn CALC $x = 10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng $2 \cdot 10^{-10}$ nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = 0$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$

Câu 4. Chọn A.

Phương pháp tự luận

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-3x^2}{x^2-6x+9} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-3x^2}{x^2-6x+9} = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-3x^2}{x^2-6x+9} = -3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -3$

Phương pháp trắc nghiệm

Tương tự câu 3,4 nên tự tính kiểm tra

Câu 5. Chọn B.

Tương tự câu 3.

Câu 6. Chọn D.

Tìm tương tự các câu trên ta được tiệm cận đứng là $x = -\frac{3}{2}$ và tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2.

Câu 7. Chọn D.

Tìm tương tự các câu trên ta được tiệm cận đứng là $x = -\frac{2}{3}$ và tiệm cận ngang là $y = 0$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2

Câu 8. Chọn D.

Tìm được tiệm cận đứng là $x = \pm 2$ và tiệm cận ngang là $y = 0 \Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 3

Câu 9. Chọn C.

Quy đồng biến đổi hàm số đã cho trở thành $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x}{x^2 - 3x - 4}$

Tìm được tiệm cận đứng là $x = -1, x = 4$ và không có tiệm cận ngang (Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$)

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2

Câu 10. Chọn B.

Tìm được tiệm cận đứng là $x = 3$ và tiệm cận ngang là $y = 1$

Giao điểm của hai đường tiệm cận $I(3;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị

$\Rightarrow$ A, C, D đúng

Câu 11. Chọn B.

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4-x^2}$ có 3 đường tiệm cận. (TCD là $x = \pm 2$ và TCN $y = 0$)

Câu 12. Chọn C.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-9x^4}{(3x^2-3)^2}$ có hai đường tiệm cận đứng $x = \pm 1$ và một tiệm cận ngang

$y = -1$

Câu 13. Chọn A.

Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm nên không tìm được số x_0 để $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{3x-1}{x^2+1} = \pm\infty$

hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{3x-1}{x^2+1} = \pm\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

Các đồ thị hàm số ở B,C,D lần lượt có các TCD là $x = 0, x = -2, x = 1$

Câu 14. Chọn B.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1} = \pm\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Các đồ thị hàm số ở B,C,D lần lượt có các TCN là $y = 2, y = 0, y = 1$

Câu 15. Chọn C.

Từ đồ thị ta thấy có tiệm cận đứng là $x=1$ và $y=1 \Rightarrow$ loại A,B

Xét tiếp thấy giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;-2) \Rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 16. Chọn D.

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{3x+2} = 1.$

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\frac{3X-1}{3X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 1.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 1.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$

Câu 17. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2.$

Lại có $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-1}{x+2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x-1}{x+2} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-2.$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\frac{2X-1}{X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 2.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 2.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2.$

Tiếp tục ấn CALC $-2+10^{-12}$ ta được kết quả là -5.10^{12} , ấn CALC $-2-10^{-12}$ ta được kết quả là 5.10^{12} nên có $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-1}{x+2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x-1}{x+2} = +\infty.$

Do đó ta được $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 18. Chọn D.

Phương pháp tự luận

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = 0.$

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0.$

Lại có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = -\infty;$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=1; x=2.$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\frac{2X-1}{X^2+3X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 0.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 0.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Tiếp tục ấn CALC $1+10^{-12}$ ta được kết quả là -1.10^{12} , ấn CALC $1-10^{-12}$ ta được kết quả là 1.10^{12} nên có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = -\infty$ do đó ta được $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tiếp tục ấn CALC $2+10^{-12}$ ta được kết quả là 3.10^{12} , ấn CALC $1-10^{-12}$ ta được kết quả là -3.10^{12} nên có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = +\infty$ do đó ta được $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 19. Chọn C.

Phương pháp tự luận

Xét phương trình: $mx + 9 = 0$.

Với $x = -m$ ta có: $-m^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$

Kiểm tra thấy với $m = \pm 3$ thì hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Khi $m \neq \pm 3$ hàm số luôn có tiệm cận đứng $x = m$ hoặc $x = -m$ và tiệm cận ngang $y = m$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\frac{XY+9}{X+Y}$ ấn CALC $X = -3+10^{-10}; Y = -3$

ta được kết quả -3 .

Tiếp tục ấn CALC $X = -3-10^{-10}; Y = -3$ ta được kết quả -3 .

Vậy khi $m = -3$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Tương tự với $m = 3$ ta cũng có kết quả tương tự.

Vậy các đáp án A và B không thỏa mãn.

Tiếp tục ấn CALC $X = -10^{10}; Y = 0$ ta được kết quả 9×10^{-10} , ấn CALC $X = 10^{10}; Y = 0$ ta được kết quả 9×10^{-10} .

Do đó hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đáp án D sai.

Câu 20. Chọn A.

Phương pháp tự luận

Vì TXĐ của hàm số là $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\text{Lại có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ ấn CALC 10^{10} ta được kết quả là 1.

Tiếp tục ấn CALC -10^{10} ta được kết quả là -1 .

Vậy có hai tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

Câu 21. Chọn D.

Để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng thì $m^2 + 2 \neq 0$ luôn đúng với mọi m .

Khi đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{m}{2}$.

Vậy để tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1; \sqrt{2})$ thì $-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$

Câu 22. Chọn A.

Để hàm số có đường tiệm cận ngang thì $m + n \neq 0$

Khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = m$ do đó ta có $m = 2$

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $I(2; 1)$ nên có $2m + n = 1 \Rightarrow n = -3$

Vậy $m + n = -1$

Câu 23. Chọn B.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 9} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty) \setminus \{\pm 5\}$

Khi đó có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 - 9} - 4} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 - 9} - 4} = 2$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Mặt khác có $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 - 9} - 4} = \mp\infty$; $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 - 9} - 4} = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

Câu 24. Chọn A.

Xét $m = 0$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Xét $m \neq 0$ khi đó đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng nếu $ad - bc = 0 \Leftrightarrow -1 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là $m = 0; m = \pm 1$

Câu 25. Chọn A.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1}}{x - 1} = \infty$. Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 26. Chọn A.

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - mx}{x + 2} = -1 - m$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - mx}{x + 2} = 1 - m$

Để hàm số có hai tiệm cận ngang thì $-1 - m \neq 1 - m$ (thỏa với mọi m).

Vậy $\forall m \in \mathbb{R}$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Câu 27. Chọn C.

Xét phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} + mx = 0$.

Nếu phương trình không có nghiệm $x = 1$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

Nếu phương trình có nghiệm $x = 1$ hay $m = -1$.

Khi đó xét giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = -\frac{1}{2}$ nên trong trường hợp này đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.
 Vậy $m \neq -1$.

Câu 28. Chọn A.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 3x - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 3x - 4} = +\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow (-1)^+$ và $x \rightarrow (-1)^-$.
 Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 29. Chọn C.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{x}} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

khi $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

Câu 30. Chọn A.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - (2m + 3)x + 2(m - 1)}{x - 2}$ không có tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } f(x) = x^2 - (2m + 3)x + 2(m - 1) = 0 \text{ có nghiệm } x = 2$$

$$\Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2(2m + 3) + 2(m - 1) = 0 \Leftrightarrow -2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 31. Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = \frac{3}{4x^2 + 2(2m + 3)x + m^2 - 1}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } 4x^2 + 2(2m + 3)x + m^2 - 1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (2m + 3)^2 - 4(m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 12m > -13 \Leftrightarrow m > -\frac{13}{12}.$$

Câu 32. Chọn A.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 2}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } f(x) = x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 2 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2 - 2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 3 > 0 \\ m^2 + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}.$$

Câu 33. Chọn D.

- Nếu $m = 0$ thì $y = x + 1$. Suy ra, đồ thị của nó không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m < 0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow mx^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{-m}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $0 < m < 1$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{m + \frac{1}{x^2}} \right) = -\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $m = 1$ thì $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

- Với $m > 1$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{m + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 34. Chọn B.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - x + 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 - x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Với điều kiện trên ta có, } y &= \frac{(x^2 - x + 3) - (2x + 1)}{(x^2 - 3x + 2)(x + 1)(\sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{2x + 1})} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 3x + 2)(x + 1)(\sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{2x + 1})} = \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{2x + 1})}. \end{aligned}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm

cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ không tồn tại.

Câu 35. Chọn B.

Điều kiện: $mx^2 + 1 > 0$.

- Nếu $m = 0$ thì hàm số trở thành $y = x + 1$ không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m < 0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{-m}} < x < \frac{-1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m > 0$ thì hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Suy ra đường thẳng $y = \frac{1}{\sqrt{m}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Suy ra đường thẳng $y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

Vậy $m > 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 36. Chọn C.

Điều kiện: $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq m \end{cases}$.

Nếu $m > 1$ thì $\lim_{x \rightarrow m^+} y$; $\lim_{x \rightarrow m^-} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m = 1$ thì hàm số trở thành $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow 1^-$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y$ không tồn tại.

Do đó, $m = 1$ thỏa mãn.

- Nếu $m < 1$ thì $\lim_{x \rightarrow m^+} y = \lim_{x \rightarrow m^+} \frac{\sqrt{1-x}}{x-m} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow m^-} y = \lim_{x \rightarrow m^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-m} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow m^+$ và $x \rightarrow m^-$.

Vậy $m \leq 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 37. Chọn C.

TH1 : Phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có một nghiệm đơn $x = -1$ và một nghiệm kép.

Phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có nghiệm $x = -1$ nên $(-1)^3 - 3(-1)^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

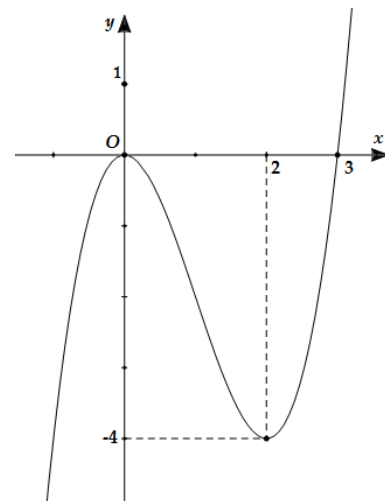
Với $m = -4$ phương trình trở thành $x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn vì $x = 2$ là nghiệm kép).

TH2: Phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có đúng một nghiệm

khác $-1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m$ có một nghiệm khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \\ (-1)^3 - 3(-1)^2 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \\ m \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \end{cases}.$$

Vậy với $\begin{cases} m > 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.



Câu 38. Chọn D.

Đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - mx - 2m^2}{x - 2}$ có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow 2$ không là nghiệm của $f(x) = x^2 - mx - 2m^2$

$$\Leftrightarrow f(2) = 4 - 2m - 2m^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}.$$

Câu 39. Chọn B.

Đồ thị của hàm số $y = \frac{5x - 3}{x^2 - 2mx + 1}$ không có tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Câu 40. Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

(C) có tiệm cận đứng $x = 1$ (d_1) và tiệm cận ngang $y = 2$ (d_2) nên $I(1; 2)$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0 + 1}{x_0 - 1}\right) \in (C), x_0 \neq 1$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}$$

Δ cắt d_1 tại $A\left(1; \frac{2x_0+2}{x_0-1}\right)$ và cắt d_2 tại $B(2x_0-1; 2)$.

$$\text{Ta có } IA = \left| \frac{2x_0+2}{x_0-1} - 2 \right| = \frac{4}{|x_0-1|}; IB = |(2x_0-1)-1| = 2|x_0-1|.$$

$$\text{Do đó, } S = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{|x_0-1|} \cdot 2|x_0-1| = 4.$$

Câu 41. Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Câu 42. Chọn A.

Tập xác định $D = [-1; 1]$

$$\text{Nên không tồn tại giới hạn } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}; \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}.$$

Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Câu 43. Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-2}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = -\infty$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = 2 > 0$$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 44. Chọn C.

Do M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ nên $M\left(x_0; \frac{2x_0+1}{x_0-1}\right)$ với $x_0 \neq 1$

Phương trình tiệm cận đứng là $x-1=0$ (d).

$$\text{Giải phương trình } d(M, d) = d(M, Ox) \Leftrightarrow |x_0-1| = \left| \frac{2x_0+1}{x_0-1} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{cases}.$$

Câu 45. Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Trên TXĐ của hàm số, biến đổi được $y = x - 1$.

Do đó đồ thị không có tiệm cận

Câu 46. Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Trên TXĐ của hàm số, biến đổi được $y = \frac{x-1}{x+2}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{x+2} = +\infty$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận

Câu 47. Chọn D.

Tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = -1$

Do tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 48. Chọn C.

Tọa độ điểm M có dạng $M \left(x_0; \frac{x_0+2}{x_0-3} \right)$

Phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là $x-3=0$ (d_1), $y-1=0$ (d_2).

Giải phương trình $5d(M, d_1) = d(M, d_2)$ tìm x_0

Câu 49. Chọn D.

Ta có đường tiệm cận đứng là $x = -3$ và đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{3}$

Nên $a = -3, b = \frac{1}{3}$

Do đó $m \geq a + b \Leftrightarrow m \geq -\frac{8}{3} \Rightarrow m = -2$

Câu 50. Chọn D.

Tọa độ điểm M có dạng $M \left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2} \right)$ với $x_0 \neq 2$

Phương trình tiệm cận đứng, ngang lần lượt là $x-2=0$ (d_1), $y-2=0$ (d_2).

Ta có $d = d(M, d_1) + d(M, d_2) = |x_0 - 2| + \frac{1}{|x_0 - 2|} \geq 2$

Câu 51. Chọn A.

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0 \neq 2$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -\frac{x-x_0}{(x_0-2)^2} + \frac{2x_0-3}{x_0-2} (\Delta)$.

Tính $d(M, \Delta) \leq 2$.

Câu 52. Chọn A.

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0 \neq 2$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -\frac{x-x_0}{(x_0-2)^2} + \frac{2x_0-3}{x_0-2} (d)$.

Tìm tọa độ giao của tiệm cận và tiếp tuyến $A\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B(2x_0-2; 2)$

Từ đó đánh giá $AB \geq 4$