BÙI VĂN TUYÊN

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN 8

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÙI VĂN TUYÊN

BÀI TẬP NÂNG CAO và MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN 8

(Tái bản lần thứ tám)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Phần ĐẠI SỐ

Chương I

PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

§1. Nhân đa thức

Kiến thức cơ bản

1. Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.
2. Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

Bổ sung

1. Quy tắc nhân một đơn thức với một đa thức còn được vận dụng theo chiều ngược lại :

$$A.B + A.C = A.(B + C)$$

2. Nếu hai đa thức P(x) và Q(x) luôn có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến thì hai đa thức đó gọi là hai đa thức đồng nhất, kí hiệu $P(x) \equiv Q(x)$.

   Hai đa thức P(x) và Q(x) (viết dưới dạng thu gọn) là đồng nhất khi và chỉ khi hệ số của các luỹ thừa cùng bậc bằng nhau.

   Đặc biệt, nếu $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ luôn bằng 0 với mọi x thì $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$.

   Ví dụ 1

   Cho $P = (x + 5)(ax^2 + bx + 25)$ và $Q = x^3 + 125$.

   a) Viết P dưới dạng một đa thức thu gọn theo luỹ thừa giảm dần của x.

   b) Với giá trị nào của a và b thì P = Q với mọi x.

Giải

a) $P = (x + 5)(ax^2 + bx + 25)$

$= ax^3 + bx^2 + 25x + 5ax^2 + 5bx + 125$

$= ax^3 + (5a + b)x^2 + (5b + 25)x + 125.$

b) Với mọi x thì $P = Q \Leftrightarrow ax^3 + (5a + b)x^2 + (5b + 25)x + 125 = x^3 + 125$ với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 5a + b = 0 \\ 5b + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$

Nhận xét

> *Phương pháp giải câu b trong ví dụ trên là dựa vào tính chất : Hai đa thức P và Q (viết dưới dạng thu gọn) là đồng nhất khi và chỉ khi mọi hệ số của các đơn thức đồng dạng chứa trong hai đa thức đó phải bằng nhau.*

BÀI TẬP

1. Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lí :

a) $A = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x - 9$ tại $x = 99$.

b) $B = x^6 - 20x^5 - 20x^4 - 20x^3 - 20x^2 - 20x + 3$ tại $x = 21$.

c) $C = x^7 - 26x^6 + 27x^5 - 47x^4 - 77x^3 + 50x^2 + x - 24$ tại $x = 25$.

2. Cho $x, y \in \mathbf{Z}$, chứng minh rằng :

a) Nếu $A = 5x + y \vdots 19$ thì $B = 4x - 3y \vdots 19$.

b) Nếu $C = 4x + 3y \vdots 13$ thì $D = 7x + 2y \vdots 13$.

3. Cho bốn số lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng hiệu của tích hai số cuối với tích hai số đầu chia hết cho 16.

4. Cho bốn số nguyên liên tiếp.

a) Hỏi tích của số đầu với số cuối nhỏ hơn tích của hai số ở giữa bao nhiêu đơn vị ?

b) Giả sử tích của số đầu với số thứ ba nhỏ hơn tích của số thứ hai và số thứ tư là 99, hãy tìm bốn số nguyên đó.

5. Cho b + c = 10, chứng minh đẳng thức :

$$(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc.$$

Áp dụng để tính nhẩm : 62.68 ; 43.47.

6. Xác định các hệ số a, b, c biết rằng :

a) $(2x - 5)(3x + b) = ax^2 + x + c$.

b) $(ax + b)(x^2 - x - 1) = ax^3 + cx^2 - 1$.

7. Cho m là số nguyên dương nhỏ hơn 30. Có bao nhiêu giá trị của m để đa thức $x^2 + mx + 72$ là tích của hai đa thức bậc nhất với hệ số nguyên ?

§2. Những hằng đẳng thức đáng nhớ

Kiến thức cơ bản

1. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
2. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
3. $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6. $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$
7. $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

Nâng cao

1. Bình phương của đa thức

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$.

.....

2. Luỹ thừa bậc n của một nhị thức (nhị thức Niu tơn)

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = 1a + 1b$

$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$.

Ta thấy khi khai triển $(a + b)^n$ ta được một đa thức có n + 1 hạng tử, hạng tử đầu là a^n ; hạng tử cuối là b^n, các hạng tử còn lại đều chứa các nhân tử a và b.

Vì vậy $(a + b)^n = B(a) + b^n = B(b) + a^n$.

3. Nếu viết riêng các hệ số ở vế phải ta được bảng sau (gọi là tam giác Pa-xcan)

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

.....

Ta có nhận xét :

– Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 1.

– Mỗi số trên một dòng kể từ dòng thứ hai đều bằng số liền trên cộng với số bên trái của số liền trên.

Ví dụ 2

Cho $x + y = 9$; $xy = 14$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $x - y$; b) $x^2 + y^2$; c) $x^3 + y^3$.

Giải

a) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = (x + y)^2 - 4xy = 9^2 - 4.14$
$= 25 = 5^2$. Suy ra $x - y = \pm 5$.

b) $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

suy ra $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 9^2 - 2.14 = 53$.

c) $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

suy ra $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 9^3 - 3.14.9 = 351$.

Nhận xét

Qua cách giải của ví dụ này ta thấy :

1. Hai số có bình phương bằng nhau thì chúng đối nhau hoặc bằng nhau. Ngược lại, hai số đối nhau hoặc bằng nhau có bình phương bằng nhau.

$$(A - B)^2 = (B - A)^2.$$

2. Để tiện sử dụng đôi khi ta còn viết :

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B) ;$$

$$(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B).$$

Ví dụ 3

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = (x + 3y - 5)^2 - 6xy + 26.$$

Giải

$A = x^2 + 9y^2 + 25 + 6xy - 10x - 30y - 6xy + 26$

$A = (x^2 - 10x + 25) + (9y^2 - 30y + 25) + 1$

$A = (x - 5)^2 + (3y - 5)^2 + 1$.

Vì $(x - 5)^2 \geq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 5$) ; $(3y - 5)^2 \geq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = \frac{5}{3}$) nên $A \geq 1$. Do đó GTNN của $A = 1$ (khi và chỉ khi $x = 5$; $y = \frac{5}{3}$).

Ta viết min A = 1.

Nhận xét

Qua cách giải của ví dụ trên ta thấy :

1. Các hằng đẳng thức được vận dụng theo hai chiều ngược nhau, chẳng hạn :

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

hoặc ngược lại $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$.

2. Bình phương của mọi số đều không âm :

$$(A - B)^2 \geq 0 \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow A = B).$$

BÀI TẬP

- **Các hằng đẳng thức (1), (2), (3)**

8. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$;

b) $100^2 + 103^2 + 105^2 + 94^2 = 101^2 + 98^2 + 96^2 + 107^2$.

9. Tính giá trị của biểu thức bằng cách hợp lí :

a) $A = \dfrac{258^2 - 242^2}{254^2 - 246^2}$; b) $B = 263^2 + 74.263 + 37^2$; c) $C = 136^2 - 92.136 + 46^2$;

d) $D = (50^2 + 48^2 + 46^2 + \ldots + 2^2) - (49^2 + 47^2 + 45^2 + \ldots + 1^2)$.

10. Cho biết $2(a^2 + b^2) = (a - b)^2$. Chứng minh rằng a và b là hai số đối nhau.

11. Cho a, b, x, y là những số khác 0. Biết rằng $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ hãy tìm hệ thức giữa bốn số a, b, x, y.

12. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng a = b = c.

13. Chứng minh rằng không có các số x, y nào thoả mãn mỗi đẳng thức sau :

a) $3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 26 = 0$; b) $4x^2 + 3y^2 - 4x + 30y + 78 = 0$;

c) $3x^2 + 6y^2 - 12x - 20y + 40 = 0$.

14. Tìm x và tìm $n \in \mathbf{N}$ biết

$$x^2 + 2x + 4^n - 2^{n+1} + 2 = 0.$$

15. Chứng minh rằng :

a) Biểu thức $A = x^2 + x + 1$ luôn luôn dương với mọi x ;

b) Biểu thức $B = x^2 - xy + y^2$ luôn luôn dương với mọi x, y không đồng thời bằng 0 ;

c) Biểu thức $C = 4x - 10 - x^2$ luôn luôn âm với mọi x.

16. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a) $A = 25x^2 + 3y^2 - 10x + 11$;

b) $B = (x - 3)^2 + (x - 11)^2$;

c) $C = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 6)$.

17. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

a) $A = 2x - x^2$; b) $B = 19 - 6x - 9x^2$.

18. Chứng minh rằng :

a) Hai số chẵn hơn kém nhau 4 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 16 ;

b) Hai số lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 24.

19. Cho $x > y > 0$ và $x - y = 7$; $xy = 60$. Không tính x, y hãy tính :

a) $x^2 - y^2$; b) $x^4 + y^4$.

20. Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh rằng :

a) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 4(p - b)(p - c)$;

b) $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

21. Cho $a = m^2 + n^2$; $b = m^2 - n^2$; $c = 2mn$.

Chứng minh rằng nếu $m > n > 0$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

- **Các hằng đẳng thức (4), (5), (6), (7).**

22. Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ với $x = -103$;

b) $B = x^3 - 15x^2 + 75x$ với $x = 25$;

c) $C = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ với $x = -3$.

23. Cho $x - y = 2$, tính giá trị của biểu thức :

$$A = 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2.$$

24. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

25. Rút gọn biểu thức :

$$A = (x - y - 1)^3 - (x - y + 1)^3 + 6(x - y)^2.$$

26. Cho $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0$ và $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16$.

Tìm x và y.

27. Chứng minh rằng :

a) $742^3 - 692^3 \vdots 200$; b) $685^3 + 315^3 \vdots 25\,000$.

28*. Cho $a + b + c + d = 0$, chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad - bc).$$

- **Bình phương đa thức và $(a + b)^n$**

29. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng :

a) $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$;

b) $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$.

30. Xác định các hệ số a, b để đa thức

$A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức.

31. Cho $a + b + c = 0$; $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

32. Cho a, b, c là ba số không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các biểu thức sau có giá trị dương :

$x = (a - b + c)^2 + 8ab$

$y = (a - b + c)^2 + 8bc$

$z = (a - b + c)^2 - 8ca.$

33. Tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển của nhị thức :

a) $(5x - 3)^6$; b) $(3x - 4y)^{20}$.

34. Đa thức $(x + y)^5$ được khai triển theo luỹ thừa giảm của x. Biết hạng tử thứ hai và hạng tử thứ ba có giá trị bằng nhau khi cho $x = a$; $y = b$ trong đó a, b là các số dương và $a - b = 1$. Hãy tìm a và b.

35. Tính :

a) $(x + 2)^5$; b) $(x - 1)^6$; c) $(x - 1)^5$.

36. Tìm số dư của phép chia 38^{10} cho 13 và 38^9 cho 13.

37. Chứng minh rằng hai chữ số tận cùng của 7^{43} là 43.

§3. Phân tích đa thức thành nhân tử. Các phương pháp thông thường

Kiến thức cơ bản

1. Phân tích đa thức thành nhân tử là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

2. Các phương pháp thông thường :

- **Phương pháp đặt nhân tử chung**

  $AB + AC - AD = A(B + C - D).$

- **Phương pháp dùng hằng đẳng thức**

  $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$

  $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$

  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.

- **Phương pháp nhóm các hạng tử**

$AC - AD + BC - BD = A(C - D) + B(C - D) = (C - D)(A + B)$.

Nâng cao

1. Dạng tổng quát của các hằng đẳng thức hiệu hai bình phương, hiệu hai lập phương là :

$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1})$.

2. Dạng tổng quát của hằng đẳng thức tổng hai lập phương là :

$A^n + B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - ... - AB^{n-2} + B^{n-1})$ với n lẻ.

3. Áp dụng vào tính chất chia hết

$A^n - B^n \vdots A - B$ với $n \in \mathbf{N}$ và $A \neq B$;

$A^n + B^n \vdots A + B$ với n lẻ và $A \neq -B$;

$A^{2k} - B^{2k} \vdots A^2 - B^2$ với $k \in \mathbf{N}$ và $A \neq \pm B$.

Ví dụ 4

Cho x và y là hai số khác nhau, thoả mãn điều kiện

$$9x(x - y) - 10(y - x)^2 = 0.$$

Chứng minh rằng $x = 10y$.

Giải

$$\begin{aligned} 9x(x - y) - 10(y - x)^2 &= 9x(x - y) - 10(x - y)^2 \\ &= (x - y)[9x - 10(x - y)] \\ &= (x - y)(-x + 10y). \end{aligned}$$

Theo đề bài ta có $(x - y)(-x + 10y) = 0$.

Vì $x \neq y$ nên $-x + 10y = 0$ hay $x = 10y$.

Nhận xét

1. Bạn đừng mắc sai lầm khi biến đổi

$$9x(x-y) - 10(y-x)^2 = 9x(x-y) + 10(x-y)^2 \ (!)$$

Sai lầm ở chỗ nào ? Sai ở chỗ đã đổi dấu ba nhân tử của tích. Ta đã biết tích không đổi khi ta đổi dấu hai nhân tử (tổng quát, một số chẵn nhân tử). Vì thế

$$(y-x)^2 = (x-y)^2 \text{ và } 9x(x-y) - 10(y-x)^2 = 9x(x-y) - 10(x-y)^2.$$

Lúc đó xuất hiện nhân tử chung là x – y.

2. Phân tích đa thức thành nhân tử có nhiều ứng dụng như để tính giá trị của biểu thức, chứng minh tính chia hết hoặc như trong ví dụ trên, để tìm mối quan hệ giữa các biến,...

BÀI TẬP

- **Phương pháp đặt nhân tử chung**

38. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $5x(x-2y) + 2(2y-x)^2$; b) $7x(y-4)^2 - (4-y)^3$;

c) $(4x-8)(x^2+6) - (4x-8)(x+7) + 9(8-4x)$.

39. Chứng minh rằng :

a) $43^2 + 43.17 \vdots 60$; b) $27^5 - 3^{11} \vdots 80$.

40. Tìm một số biết rằng ba lần bình phương của nó đúng bằng hai lần lập phương của số ấy.

41. Có các số nguyên x, y, z nào thoả mãn đồng thời các đẳng thức sau không ?

$x^3 + xyz = 957$ (1)

$y^3 + xyz = 795$ (2)

$z^3 + xyz = 579$. (3)

42. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n}$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

- **Phương pháp dùng hằng đẳng thức**

43. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $100x^2 - (x^2 + 25)^2$; b) $(x - y + 5)^2 - 2(x - y + 5) + 1$.

44. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$(x^2 + 4y^2 - 5)^2 - 16\,(x^2y^2 + 2xy + 1).$$

45. Cho $A = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng $A > 0$.

46. Chứng minh rằng :

a) $21^{10} - 1 \vdots 200$; b) $39^{20} + 39^{13} \vdots 40$;

c) $2^{60} + 5^{30} \vdots 41$; d) $2005^{2007} + 2007^{2005} \vdots 2006$.

47. Cho n là một số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng $24^n + 1$ chia hết cho 25 nhưng không chia hết cho 23.

48. Cho a là một số nguyên lẻ, $a > 1$. Chứng minh rằng $(a-1)^{\frac{1}{2}(a-1)} - 1$ chia hết cho $a - 2$.

- **Phương pháp nhóm các hạng tử**

49. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 - xz - 9y^2 + 3yz$; b) $x^3 - x^2 - 5x + 125$;

c) $x^3 + 2x^2 - 6x - 27$; d) $12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$.

50. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^4 - 25x^2 + 20x - 4$; b) $x^2(x^2 - 6) - x^2 + 9$;

c) $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)$.

51. Tìm các cặp số x và y sao cho $x - y = xy - 1$.

52. Cho x và y là hai số khác nhau sao cho $x^2 - y = y^2 - x$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$.

53. Cho $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c-d}{d-a}$. Chứng minh rằng hoặc a = c hoặc a + c = b + d.

- **Phối hợp các phương pháp thông thường**

54. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $4x^4 + 4x^3 - x^2 - x$;

b) $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$;

c) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$.

55. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $(xy + 4)^2 - 4(x + y)^2$;

b) $(ab - xy)^2 - (bx - ay)^2$;

c) $(x^2 + 8x - 34)^2 - (3x^2 - 8x - 2)^2$.

56. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 - 4b^2$;

b) $a(b^2 - c^2) - b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$;

c) $a^5 + b^5 - (a + b)^5$.

57. Chứng minh rằng :

a) $999^4 + 999$ có tận cùng bằng 3 chữ số 0 ;

b) $49^5 - 49$ chia hết cho 100.

58. Chứng minh rằng :

a) Lập phương của một số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 6 ;

b) Nếu tổng của ba số nguyên chia hết cho 6 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 6.

59. Cho $a \neq \pm b$ và $a(a + b)(a + c) = b(b + c)(b + a)$.

Chứng minh rằng $a + b + c = 0$.

60. Cho $x^2y - y^2x + x^2z - z^2x + y^2z + z^2y = 2xyz$ (1)

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z ít nhất cũng có hai số bằng nhau hoặc đối nhau.

Chuyên đề 1

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng một số phương pháp khác

1. Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử

Ví dụ 5

Phân tích đa thức A thành nhân tử

$$A = 4x^2 - 8x + 3.$$

Giải

Cách 1 : (tách hạng tử cuối)

$$A = 4x^2 - 8x + 4 - 1 = (2x - 2)^2 - 1^2$$

$$= (2x - 2 - 1)(2x - 2 + 1) = (2x - 3)(2x - 1).$$

Cách 2 : (tách hạng tử thứ hai)

$$A = 4x^2 - 2x - 6x + 3 = 2x(2x - 1) - 3(2x - 1)$$

$$A = (2x - 1)(2x - 3).$$

Nhận xét

1. Ta nhận thấy với các phương pháp thông thường thì không thể phân tích A thành nhân tử được vì A không có nhân tử chung, không có dạng một hằng đẳng thức nào. Đa thức A chỉ có ba hạng tử nên cũng không thể dùng phương pháp nhóm hạng tử. Vì vậy ta đã tách một hạng tử thành hai hạng tử để xuất hiện những nhóm hạng tử sao cho :

– Hoặc có thể dùng hằng đẳng thức để phân tích tiếp ;

– Hoặc có thể đặt nhân tử chung.

2. Trong cách thứ hai ở trên ta đã tách hạng tử thứ hai là – 8x thành –2x – 6x.

Ta thấy (–2) (–6) = 12. Trong khi đó tích các hệ số đầu và cuối là 4.3 = 12.

Hai tích này đúng bằng nhau.

Một cách tổng quát, để phân tích tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ *thành nhân tử, ta tách hạng tử bậc nhất bx thành* $b_1x + b_2x$ *sao cho* $b_1 . b_2 = ac$ *sau đó đặt nhân tử chung theo từng nhóm.*

3. Đối với các đa thức có bậc ba trở lên thì tuỳ theo đặc điểm của các hệ số mà có cách tách riêng cho phù hợp.

Chẳng hạn $A = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = x^3 - x^2 + 6x^2 - 6x + 9x - 9$

$= x^2(x - 1) + 6x(x - 1) + 9(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 + 6x + 9) = (x - 1)(x + 3)^2.$

2. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Ví dụ 6

Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A = 4x^4 + y^4.$$

Giải

$$A = 4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2$$

$$= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 - 2xy + y^2)(2x^2 + 2xy + y^2).$$

Nhận xét

Ta dễ dàng nhận thấy các phương pháp thông thường không dùng được. Ta tăng thêm các hạng tử của A bằng cách thêm bớt cùng một hạng tử là $4x^2y^2$. *Lúc này xuất hiện dạng khai triển của bình phương một tổng và ta tiếp tục phân tích bằng cách áp dụng hằng đẳng thức. Như vậy mục đích của việc thêm bớt cùng một hạng tử là để xuất hiện những nhóm hạng tử sao cho có thể dùng hằng đẳng thức hoặc đặt nhân tử chung.*

3. Phương pháp đổi biến

Ví dụ 7

Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A = (x^2 - 3x - 1)^2 - 12(x^2 - 3x - 1) + 27.$$

Giải

Đặt $y = x^2 - 3x - 1$ ta được

$$A = y^2 - 12y + 27 = (y - 3)(y - 9)$$

$$A = (x^2 - 3x - 1 - 3)(x^2 - 3x - 1 - 9)$$

$$A = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10) = (x + 1)(x - 4)(x + 2)(x - 5).$$

Nhận xét

Trong cách giải trên, nhờ cách đổi biến $y = x^2 - 3x - 1$ ta đã đưa một đa thức bậc 4 đối với x rất phức tạp trở thành một đa thức bậc 2 đối với y rất đơn giản, nhờ đó phân tích thành nhân tử được dễ dàng.

4. Phương pháp đồng nhất hệ số (còn gọi là phương pháp hệ số bất định)

Ví dụ 8

Phân tích đa thức A thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên.

$$A = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3.$$

Giải

Dễ thấy sau khi phân tích thì A có dạng

$$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 3) \text{ hoặc } (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 3).$$

Trường hợp hai hạng tử bậc hai của mỗi tam thức là $-x^2$ và $-x^2$ thì ta chỉ cần đổi dấu cả hai tam thức.

Xét trường hợp $A = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 3)$

$$x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3 = x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 4)x^2 + (3a + b)x + 3.$$

Hai đa thức trên đồng nhất với nhau nên ta có :

$$\begin{cases} a + b = -3 & (1) \\ ab + 4 = 6 & (2) \\ 3a + b = -5. & (3) \end{cases}$$

Từ đây suy ra $a = -1$; $b = -2$.

Vậy $A = (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 3)$.

Nhận xét

> *1. Nếu trường hợp hai hệ số tự do là 1 và 3 không thoả mãn thì ta xét trường hợp hai hệ số tự do là –1 và –3 bằng cách tương tự như trên.*
>
> *2. Phương pháp giải như trên gọi là phương pháp đồng nhất hệ số (hay phương pháp hệ số bất định). Cơ sở phương pháp này là : Hai đa thức (viết dưới dạng thu gọn) là đồng nhất khi và chỉ khi mọi hệ số của các đơn thức đồng dạng chứa trong hai đa thức đó phải bằng nhau.*

BÀI TẬP

- **Phương pháp tách một hạng tử**

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

61. a) $3x^2 - 11x + 6$;

b) $8x^2 + 10x - 3$;

c) $8x^2 - 2x - 1$.

62. a) $6x^2 + 7xy + 2y^2$;

b) $9x^2 - 9xy - 4y^2$;

c) $x^2 - y^2 + 10x - 6y + 16$.

63. a) $x^3 + x + 2$;

b) $x^3 - 2x - 1$;

c) $x^3 + 3x^2 - 4$.

64. a) $x^3y^3 + x^2y^2 + 4$;

b) $x^3 + 3x^2y - 9xy^2 + 5y^3$.

65. a) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$;

b) $x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x + 36$;

c) $x^8y^8 + x^4y^4 + 1$.

66. a) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$;

b) $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$.

67. a) $x^4 + y^4 + (x + y)^4$;

b) $2(x^2 + x + 1)^2 - (2x + 1)^2 - (x^2 + 2x)^2$.

68. a) $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 3xyz$;

b) $xy(x + y) - yz(y + z) - zx(z - x)$;

c) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

69. Cho $a \in \mathbf{Z}$, chứng minh rằng $a^5 - a \vdots 30$.

70*. Cho $x > y > z$, chứng minh rằng biểu thức

$A = x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$ luôn luôn dương.

71. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn điều kiện $(x + y)(y + z)(z + x) = 8xyz$. (1)

Chứng minh rằng $x = y = z$.

- **Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử**

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

72. a) $x^4 + 5x^3 + 10x - 4$; b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

73. a) $x^7 + x^2 + 1$; b) $x^8 + x + 1$.

74. a) $x^5 + x^4 + 1$; b) $x^{10} + x^5 + 1$.

75. Cho $x \in \mathbf{Z}$, chứng minh rằng $x^{200} + x^{100} + 1 \vdots x^4 + x^2 + 1$.

- **Phương pháp đổi biến**

76. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $A = x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4$;

b) $B = (12x^2 - 12xy + 3y^2) - 10(2x - y) + 8$.

77. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$;

b) $B = (a + b - 2c)^3 + (b + c - 2a)^3 + (c + a - 2b)^3$.

78. a) Chứng minh rằng :

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

b) Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$A = (a + b + c)^3 + (a - b - c)^3 + (b - c - a)^3 + (c - a - b)^3.$$

79. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $A = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$;

b) $B = (x^2 + 4x - 3)^2 - 5x(x^2 + 4x - 3) + 6x^2$;

c) $C = (x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$.

80. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$2(x^2 - 6x + 1)^2 + 5(x^2 - 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2.$$

81. Cho $M = 4(x - 2)(x - 1)(x + 4)(x + 8) + 25x^2$.

Chứng minh rằng M không có giá trị âm.

- **Phương pháp đồng nhất hệ số**

82. Phân tích đa thức A thành tích của một nhị thức bậc nhất với một đa thức bậc ba với hệ số nguyên sao cho hệ số cao nhất của đa thức bậc ba là 1 :

$$A = 3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1.$$

83. Phân tích đa thức B thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên :

$$B = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1.$$

84. Phân tích đa thức C thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên và các hệ số cao nhất đều mang dấu dương :

$$C = x^4 - x^3 + 2x^2 - 11x - 5.$$

§4. Chia đa thức

Kiến thức cơ bản

1. Chia đơn thức A cho đơn thức B :

– Chia hệ số của A cho hệ số của B ;

– Chia luỹ thừa của từng biến trong A cho luỹ thừa của cùng biến đó trong B ;

– Nhân các kết quả với nhau.

2. Chia đa thức A cho đơn thức B :

Ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

3. Chia đa thức A cho đa thức B :

Cho A và B là hai đa thức tuỳ ý của cùng một biến, $B \neq 0$, khi đó tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B \cdot Q + R$, trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B.

Q gọi là đa thức thương và R gọi là đa thức dư của phép chia A cho B.

Nếu $R = 0$ thì phép chia A cho B là phép chia hết.

Nâng cao

1. Định lí Bê-du :

Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức bậc nhất $x - a$ đúng bằng f(a).

Chẳng hạn $f(x) = x^3 - 6x + 5$ thì :

– Số dư trong phép chia f(x) cho $(x - 2)$ là $f(2) = 8 - 12 + 5 = 1$;

– Số dư trong phép chia f(x) cho $(x - 1)$ là $f(1) = 1 - 6 + 5 = 0$ nghĩa là f(x) chia hết cho $(x - 1)$.

2. Hệ quả của định lí Bê-du :

Nếu a là nghiệm của đa thức f(x) thì f(x) chia hết cho $(x - a)$.

Đặc biệt :

– Nếu tổng các hệ số của đa thức f(x) bằng 0 thì 1 là nghiệm và f(x) chia hết cho $(x - 1)$.

– Nếu f(x) có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì -1 là nghiệm và f(x) chia hết cho $x - (-1)$ tức là chia hết cho $x + 1$.

3. Áp dụng hệ quả của định lí Bê-du vào việc phân tích đa thức thành nhân tử.

Nếu đa thức f(x) có nghiệm $x = a$ thì khi phân tích f(x) thành nhân tử, tích sẽ chứa nhân tử $(x - a)$.

Cách nhẩm nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỉ của đa thức f(x) với hệ số nguyên.

– Nếu f(x) có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước của hệ số tự do.

– Nếu f(x) có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó có dạng $\frac{p}{q}$; (p, q) = 1 trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất.

Ví dụ 9

Xác định các hệ số a và b sao cho $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho $x^2 - 1$.

Giải

Cách 1 : (thực hiện phép chia)

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 + ax^3 \qquad\qquad + b & x^2 - 1 \\
\cline{3-3}
- & x^4 \qquad\quad - x^2 & x^2 + ax + 1 \\
\cline{2-2}
 & \quad ax^3 + x^2 \qquad + b & \\
 & - \quad ax^3 \qquad - ax & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad x^2 + ax + b & \\
 & \quad - \quad x^2 \qquad - 1 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad ax + (b + 1) &
\end{array}
$$

Để chia hết thì đa thức dư phải bằng 0 với mọi giá trị của x.

Do đó $\begin{cases} a = 0 \\ b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1. \end{cases}$

Cách 2 : (phương pháp đồng nhất hệ số)

Đa thức bị chia có bậc 4, đa thức chia có bậc 2 nên thương là tam thức bậc hai.

$x^4 + ax^3 + b = (x^2 - 1)(x^2 + cx + d) = x^4 + cx^3 + (d - 1)x^2 - cx - d.$

Suy ra $\begin{cases} c = a \\ d - 1 = 0 \\ c = 0 \\ d = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 1. \end{cases}$

Vậy với a = 0 ; b = –1 thì $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho $x^2 - 1$.

Cách 3 : (phương pháp xét giá trị riêng)

Gọi đa thức thương là Q. Ta có

$$x^4 + ax^3 + b = (x - 1)(x + 1).Q$$

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên ta lần lượt cho x = 1 ; x = –1

ta được $\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 1 - a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1. \end{cases}$

Vậy với a = 0 ; b = –1 thì $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho $x^2 - 1$.

Nhận xét

Trong cách giải thứ ba (phương pháp xét giá trị riêng) đẳng thức $x^4 + ax^3 + b = (x - 1)(x - 1)$. Q đúng với mọi x, tại sao ta gán cho x lần lượt các giá trị x = 1 ; x = –1 mà không chọn các giá trị khác ? Rất đơn giản, đó là vì với các giá trị riêng này của x thì việc tính giá trị ở vế trái rất dễ dàng, còn ở vế phải thì sẽ bằng 0. Từ đó ta tìm được a và b.

Ví dụ 10

Phân tích đa thức thành nhân tử

$$M = xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 2xyz.$$

Giải

Thay x bởi –y thì $M = yz(y + z) - yz(z - y) - 2y^2z = 0$.

Vậy M chia hết cho x – (–y) tức là chia hết cho (x + y), do đó M chứa thừa số (x + y).

Do vai trò của x, y, z như nhau trong đa thức M nên M có dạng

$$k(x + y)(y + z)(z + x).$$

Ta thấy M là đa thức bậc 3 đối với tập hợp các biến x, y, z ; tích (x + y)(y + z)(z + x) cũng có bậc 3 đối với tập hợp các biến x, y, z nên k phải là hằng số.

Đẳng thức $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(x + y) + 2xyz = k(x + y)(y + z)(z + x)$ đúng với mọi x, y, z nên ta gán cho x, y, z các giá trị riêng chẳng hạn $x = y = z = 1$ ta được $8 = k.8$

$\Rightarrow k = 1$. Vậy $M = (x + y)(y + z)(z + x)$.

Nhận xét

Qua cách giải của ví dụ 10, ta thấy phương pháp xét giá trị riêng của các biến cũng là một phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

Ví dụ 11

Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A = x^3 - x^2 - 8x + 12.$$

Giải

Lần lượt thử với các ước của 12, ta thấy $x = 2$ là một nghiệm của đa thức A, theo hệ quả của định lí Bê-du ta có $A = (x - 2) . Q$.

Đến đây ta có thể giải tiếp bằng hai cách :

Cách 1 : Thực hiện phép chia đa thức A cho $(x - 2)$ ta được $Q = x^2 + x - 6$.

Vậy $A = (x - 2)(x^2 + x - 6) = (x - 2)(x - 2)(x + 3) = (x - 2)^2(x + 3)$.

Cách 2 : Tách một hạng tử của đa thức A thành nhiều hạng tử sao cho sau khi nhóm và đặt nhân tử chung (hoặc dùng hằng đẳng thức) thì xuất hiện nhân tử $(x - 2)$.

$$A = x^3 - x^2 - 8x + 12 = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 6x + 12$$

$$A = x^2(x - 2) + x(x - 2) - 6(x - 2) = (x - 2)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x - 2)^2 (x + 3).$$

Nhận xét

Phương pháp nhẩm nghiệm của đa thức để vận dụng hệ quả của định lí Bê-du giúp ta định hướng nhanh chóng việc tách một hạng tử thành nhiều hạng tử một cách thích hợp.

BÀI TẬP

85. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để đơn thức $-7x^{n+1}y^6$ chia hết cho $4x^5y^n$.

86. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A luôn luôn không âm với mọi giá trị khác 0 của x và y :

$$A = (75x^5y^2 - 45x^4y^3) : 3x^3y^2 - \left(\frac{5}{2}x^2y^4 - 2xy^5\right) : \frac{1}{2}xy^3.$$

87. Tìm x và y biết

$$[(x - 2y)(x - 7y) - x^2 + 4y^2] : (x - 2y) = 18.$$

88. Tìm giá trị nhỏ nhất của thương

$$(4x^5 + 2x^4 + 4x^3 - x - 1) : (2x^3 + x - 1).$$

89. Tìm các giá trị nguyên của x để thương có giá trị nguyên.

a) $(3x^3 + 13x^2 - 7x + 5) : (3x - 2)$; b) $(2x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 44) : (2x^2 - 7)$.

90. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $n^6 - n^4 - 2n^2 + 9$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n^4 + n^2$.

91. Không làm phép chia đa thức, hãy tìm số dư trong phép chia đa thức f(x) cho đa thức g(x) trong các trường hợp sau :

a) $f(x) = x^{21} + x^{20} + x^{19} + 101$; $g(x) = x + 1$.

b) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 7$; $g(x) = x + 2$.

c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 10$; $g(x) = x - 5$.

92. Chứng minh rằng $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{31} - (x^2 - 4x + 5)^{30} + 2$ chia hết cho $x - 2$.

93. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^3 - 9x^2 + 15x + 25$; b) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$;

c) $2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36$.

94. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $3x^3 + 5x^2 - 14x + 4$; b) $2x^3 - x^2 - 3x - 1$.

95. Tìm đa thức dư trong phép chia

$$(x^{54} + x^{45} + x^{36} + ... + x^9 + 1) : (x^2 - 1).$$

96. Xác định đa thức f(x) thoả mãn cả ba điều kiện sau :

a) Khi chia cho $x - 1$ dư 4 ;

b) Khi chia cho $x + 2$ dư 1 ;

c) Khi chia cho $(x - 1)(x + 2)$ thì được thương là $5x^2$ và còn dư.

97. Cho đa thức $A = ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số b biết rằng khi chia A cho $x - 1$, chia A cho $x + 1$ đều có cùng một số dư.

98. Chứng minh rằng nếu $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c$ chia hết cho $x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ thì $a + b + c = 0$.

99. Đa thức $4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2$ và $x + 1$. Tính $2a - 3b$.

Chuyên đề 2

Số chính phương

1. Số chính phương là số bằng bình phương của một số tự nhiên.

Mười số chính phương đầu tiên là : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 47, 64, 81.

2. Một số tính chất của số chính phương :

a) Số chính phương không tận cùng bởi các chữ số 2, 3, 7, 8.

b) Khi phân tích một số chính phương ra thừa số nguyên tố ta được các thừa số là luỹ thừa của số nguyên tố với số mũ chẵn.

Chẳng hạn $3600 = 60^2 = 2^4.3^2.5^2$.

Từ đó suy ra số chính phương N chia hết cho 2 thì N chia hết cho $2^2 = 4$; số chính phương N chia hết cho $2^3 = 8$ thì N chia hết cho $2^4 = 16$. Tổng quát, nếu số chính phương N chia hết cho p^{2k+1} thì N chia hết cho p^{2k+2} (p là số nguyên tố, $k \in \mathbb{N}$).

c) Số chính phương chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc dư 1.

Thực vậy, xét các trường hợp :

$(3k)^2 = 9k^2$ chia hết cho 3 ;

$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ chia cho 3 dư 1 ; $(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$ chia cho 3 dư 1.

Tương tự, một số chính phương chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc dư 1 ; chia cho 5 dư 0 hoặc dư 1 hoặc dư 4.

Số chính phương lẻ chia cho 4 hoặc chia cho 8 đều dư 1.

d) Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

$n^2 < x^2 < (n + 1)^2$ (1) $\Rightarrow$ không tồn tại $x \in \mathbf{Z}$ thoả mãn (1)

$n^2 < x^2 < (n + 2)^2$ $\Rightarrow x^2 = (n + 1)^2$.

e) Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên đó là số 0.

3. Nhận biết một số chính phương

a) Để chứng minh N là một số chính phương ta có thể :

– Biến đổi N thành bình phương của một số tự nhiên (hoặc số nguyên).

– Vận dụng tính chất : nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là một số chính phương.

b) Để chứng minh N không phải là số chính phương ta có thể :

– Chứng minh N có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 hoặc có *một số lẻ* chữ số 0 tận cùng.

– Chứng minh N chứa số nguyên tố với số mũ lẻ.

– Xét số dư khi chia N cho 3 hoặc cho 4 hoặc cho 5, hoặc cho 8...

Chẳng hạn, nếu N chia cho 3 có số dư là 2 ; hoặc N chia cho 4, cho 5 có số dư là 2 ; 3 thì N không phải là số chính phương.

– Chứng minh N nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

Ví dụ 12

Cho $A = \underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{88...8}_{n} + 1$.

Chứng minh rằng A là một số chính phương.

Giải

$A = \underbrace{11...1}_{n}\ \underbrace{00...0}_{n} + \underbrace{11...1}_{n} - 8.\underbrace{11...1}_{n} + 1.$

Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ thì $\underbrace{99...9}_{n} = 9a$ do đó $\underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n = 9a + 1.$

Ta có $A = a \,.\, 10^n + a - 8a + 1$

$A = a(9a + 1) + a - 8a + 1 = 9a^2 - 6a + 1 = (3a - 1)^2.$

$A = \underbrace{33...3}_{n-1}2^2$. Vậy A là một số chính phương.

Nhận xét

Khi biến đổi một số trong đó có nhiều chữ số giống nhau thành một số chính phương ta nên đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ *và như vậy* $\underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n = 9a + 1.$

Các biến đổi này được áp dụng để giải các bài tập 114, 115.

Ví dụ 13

Chứng minh rằng :

a) Tổng của ba số chính phương liên tiếp không phải là một số chính phương.

b) Tổng $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 30^2$ không phải là một số chính phương.

Giải

a) Gọi ba số chính phương liên tiếp là $(n - 1)^2$; n^2 ; $(n + 1)^2$.

Tổng của chúng là $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 3n^2 + 2$.

Tổng này chia 3 dư 2 nên không phải là số chính phương.

b) Ta viết S thành tổng của 10 nhóm, mỗi nhóm 3 số hạng.

$S = (1^2 + 2^2 + 3^2) + (4^2 + 5^2 + 6^2) + ... + (28^2 + 29^2 + 30^2).$

Mỗi nhóm chia cho 3 dư 2 nên

$S = (3k_1 + 2) + (3k_2 + 2) + ... + (3k_{10} + 2)$

$S = 3k_1 + 3k_2 + ... + 3k_{10} + 18 + 2$

$S = 3k + 2$ (trong đó $k = k_1 + k_2 + ... + k_{10} + 6$).

S chia cho 3 dư 2 nên S không phải là số chính phương.

Nhận xét

Trên đây ta đã chứng minh một số không phải là số chính phương bằng cách xét số dư trong phép chia số đó cho 3. Vì số dư là 2 nên ta khẳng định số đó không phải là số chính phương.

Nếu số dư là 0 hay là 1 thì ta chưa khẳng định được điều gì. Bạn chớ vội vàng kết luận số đó là số chính phương.

BÀI TẬP

100. Có hai số chính phương nào :

a) Có tổng bằng 4567 ?

b) Có hiệu bằng 7654 ?

101. Chứng minh rằng tổng của 20 số chính phương liên tiếp không thể là số chính phương.

102. Cho năm số chính phương bất kì có chữ số hàng đơn vị đều bằng 6 còn chữ số hàng chục thì khác nhau. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của năm số chính phương đó cũng là một số chính phương.

103. Cho a, b, c là các chữ số khác 0.

a) Tính tổng S của tất cả các số có ba chữ số tạo thành bởi cả ba chữ số a, b, c ;

b) Chứng minh rằng S không phải là số chính phương.

104. Tìm một số chính phương có bốn chữ số biết rằng hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

105. Chứng minh rằng nếu n + 1 và 2n + 1 đều là số chính phương thì $n \vdots 24$.

106. Tìm số tự nhiên n biết rằng trong ba mệnh đề sau có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai :

1. n có chữ số tận cùng là 2.

2. n + 20 là một số chính phương.

3. n – 69 là một số chính phương.

107. Cho N là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng :

a) 2N cũng là tổng của hai số chính phương ;

b) N^2 cũng là tổng của hai số chính phương.

108. Cho A, B, C, D là các số chính phương. Chứng minh rằng (A + B)(C + D) là tổng của hai số chính phương.

109. Cho ba số nguyên x, y, z sao cho x = y + z. Chứng minh rằng 2(xy + xz – yz) là tổng của ba số chính phương.

110. Cho a, b, c, d là các số nguyên thoả mãn điều kiện a – b = c + d.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ luôn là tổng của ba số chính phương.

111. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

112. Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

a) Tính a_{n+1} ;

b) Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

113. Cho M là tích của bốn số nguyên liên tiếp. Chứng minh rằng M + 1 là một số chính phương.

114. a) Cho $a = \underbrace{11...1}_{n}5$; $b = \underbrace{11...1}_{n}9$.

Chứng minh rằng ab + 4 là một số chính phương.

b) Cho $a = \underbrace{11...1}_{n}$; $b = 1\underbrace{00...0}_{n-2}11$ $(n \geq 2)$.

Chứng minh rằng ab + 4 là một số chính phương.

115. Cho $M = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n} + 1$.

Chứng minh rằng M là một số chính phương.

116. Chứng minh rằng các số sau là số chính phương.

a) $M = \underbrace{11...1}_{2n} + \underbrace{44...4}_{n} + 1$ $(n \in \mathbf{N})$;

b) $N = \underbrace{11...1}_{2n} + \underbrace{11...1}_{n+1} + \underbrace{66...6}_{n} + 8$ $(n \in \mathbf{N})$.

117. Cho a, b, c là 3 số nguyên thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ là một số chính phương.

118. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 1234$ là một số chính phương.

119. Tìm các số tự nhiên k để cho số $2^k + 2^4 + 2^7$ là một số chính phương.

120. Tìm các số tự nhiên x sao cho $x^2 + 2x + 200$ là một số chính phương.

121. Tìm các số nguyên x sao cho $A = x(x - 1)(x - 7)(x - 8)$ là một số chính phương.

122. Cho $A = p^4$ trong đó p là một số nguyên tố.

a) Số A có những ước dương nào ?

b) Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là một số chính phương.

§5. Ôn tập chương I

Ví dụ 14

Tìm số nguyên m sao cho đa thức $(x + m)(x - 3) + 7$ phân tích được thành $(x + a)(x + b)$ với a, b là các số nguyên và $a \leq b$.

Giải

Vì $(x + m)(x - 3) + 7 = (x + a)(x + b)$ với mọi x (1)

nên với $x = 3$ thì $7 = (x + a)(x + b)$.

Số 7 viết dưới dạng tích của hai số nguyên chỉ bằng hai cách 1.7 và $(-1).(-7)$.

Vì $a \leq b$ nên ta có hai trường hợp :

Trường hợp 1 :

$$\begin{cases} 3+a=1 \\ 3+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được $(x + m)(x - 3) + 7 = (x - 2)(x + 4)$

Với $x = 2$ thì $(2 + m).(-1) + 7 = 0$

$$m = 5.$$

Do đó $(x + 5)(x - 3) + 7 = (x - 2)(x + 4)$.

Trường hợp 2 :

$$\begin{cases} 3+a=-7 \\ 3+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=-4 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được $(x + m)(x - 3) + 7 = (x - 10)(x - 4)$.

Với $x = 4$ thì $(4 + m).1 + 7 = 0$

$$m = -11.$$

Do đó $(x - 11)(x - 3) + 7 = (x - 10)(x - 4)$.

Nhận xét về phương pháp giải

Phương pháp giải ví dụ trên là phương pháp xét các giá trị riêng. Sở dĩ dùng được phương pháp này vì đa thức $(x + m)(x - 3) + 7$ đồng nhất với đa thức $(x + a)(x + b)$.

Ví dụ 15

Chứng minh rằng $A = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \vdots 9$ (1) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Cách thứ nhất : Phân tích A thành nhân tử trong đó A chứa thừa số 9

$$A = n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$
$$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3\,(n^3 + 3n^2 + 5n + 3).$$

Đặt $B = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3$

$$= n^2(n + 1) + 2n(n + 1) + 3(n + 1) = (n + 1)(n^2 + 2n + 3)$$
$$= (n^2 + 2n)(n + 1) + 3(n + 1) = n(n + 1)(n + 2) + 3(n + 1).$$

Ta thấy $n(n+1)(n+2) \vdots 3$ (vì là tích của ba số tự nhiên liên tiếp) ;

$$3(n+1) \vdots 3.$$

Suy ra $B \vdots 3$ do đó $B = 3k$ $(k \in \mathbf{N})$.

Vậy $A = 3B = 3.3k = 9k \vdots 9$.

Cách thứ hai : Dùng phương pháp quy nạp toán học

– Với $n = 1$ thì $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \vdots 9$.

Vậy mệnh đề (1) đúng với $n = 1$.

– Giả sử mệnh đề (1) đúng với $n = k$ nghĩa là $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 \vdots 9$ (ta gọi đây là giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh mệnh đề (1) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \vdots 9.$$

Thật vậy, ta có $9k^2 + 27k + 27 \vdots 9$; $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 \vdots 9$ (do giả thiết quy nạp)

suy ra $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k^3 + 9k^2 + 27k + 27) \vdots 9$

hay $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \vdots 9$.

– Kết luận : Vậy mệnh đề (1) đúng với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ nghĩa là

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \vdots 9$$

với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

Nhận xét

Ta thường dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh những mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n. Nội dung của phương pháp này gồm ba bước

1. Chứng minh mệnh đề đúng với n = 1.

2. Giả sử mệnh đề đúng với n = k (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

3. Kết luận mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

BÀI TẬP

123. Cho bốn số a, b, x, y sao cho $ab = 1$; $ax + by = 2$, chứng minh rằng $xy \leq 1$.

124. Chứng minh rằng $P = x(x - y)(x + y)(x + 2y) + y^4$ là bình phương của một đa thức.

125. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$.

126. Cho $a = 4m + 8n + 9p$; $b = m + 4n + 4p$; $c = 4m + 7n + 8p$. Chứng minh rằng nếu m, n, p là số đo các cạnh của một tam giác vuông (p là số đo cạnh huyền) thì a, b, c cũng là số đo các cạnh của một tam giác vuông.

127. Tìm $x \in \mathbf{N}$ sao cho $(2^x - 8)^3 + (4^x + 13)^3 = (4^x + 2^x + 5)^3$.

128. Cho x, y là hai số khác 0, thoả mãn $(x + y)^5 = x^5 + y^5$. (1)

Chứng minh rằng x và y là hai số đối nhau.

129. Cho $n \in \mathbf{N}$; $n > 1$. Chứng minh rằng các số sau là hợp số :

a) $20^n - 1$; b) $1000^n + 1$.

130. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a) $M = x^9 - x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$;

b) $N = (x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3) + 15$; c) $P = x^7 + x^5 + 1$.

131. Cho $x^2 - y^2 = 1$, tính giá trị của biểu thức

$A = 2(x^6 - y^6) - 3(x^4 + y^4)$.

132. Tìm số dư của phép chia S : 5 trong đó

$S = 1^n + 2^n + 3^n + ... + 8^n$ với n là số tự nhiên lẻ.

133. Cho A là một số chính phương và m là một số tự nhiên tuỳ ý. Chứng minh rằng bao giờ cũng có một số tự nhiên n sao cho $A + mn$ là một số chính phương.

134. Cho $x, y \in \mathbf{Z}$, chứng minh rằng các số sau là số chính phương :

a) $M = (x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 6) + 9$;

b) $N = (x - y)(x - 2y)(x - 3y)(x - 4y) + y^4$.

135. Chứng minh rằng với $n \in \mathbf{N}^*$ thì :

a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$; b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

§1. Định nghĩa và tính chất cơ bản. Rút gọn phân thức và quy đồng mẫu của nhiều phân thức

Kiến thức cơ bản

1. Phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và $B \neq 0$.

   Đặc biệt : Mỗi đa thức cũng được coi như một phân thức với mẫu thức bằng 1.

2. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A.D = B.C$ $(B, D \neq 0)$.

3. Tính chất cơ bản của phân thức :

   $\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$ (M là đa thức khác 0).

   $\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$ (N là một nhân tử chung của A và B).

   Đặc biệt : $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$ (quy tắc đổi dấu).

4. Rút gọn phân thức

   – Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung ;

   – Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung (nếu có).

5. Quy đồng mẫu của nhiều phân thức :

   – Phân tích các mẫu thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung ;

– Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức ;

– Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

Bổ sung

Phân số $\frac{a}{b}$ là một trường hợp đặc biệt của phân thức $\frac{A}{B}$ khi A, B là những đa thức bậc 0. Vì vậy tính chất cơ bản của phân số là một trường hợp đặc biệt của tính chất cơ bản của phân thức đại số.

Ví dụ 16

Cho $\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{5}{8}$, hãy rút gọn phân thức $P=\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

Giải $\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{5}{8}\Rightarrow 5(x^2+y^2)=8xy.$

Ta có $$P=\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{5(x^2+y^2-2xy)}{5(x^2+y^2+2xy)}=\frac{5(x^2+y^2)-10xy}{5(x^2+y^2)+10xy}$$
$$=\frac{8xy-10xy}{8xy+10xy}=\frac{-2xy}{18xy}=\frac{-1}{9}.$$

Nhận xét

Khi biến đổi điều kiện $\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{5}{8}$ thành $5(x^2+y^2)=8xy$ là ta đã vận dụng định nghĩa của hai phân thức đại số bằng nhau. Để vận dụng được điều kiện $5(x^2+y^2)=8xy$ ta đã nhân cả tử và mẫu của phân thức P với 5, đó chính là vận dụng tính chất cơ bản của phân thức đại số. Tính chất cơ bản này cũng được vận dụng ở bước cuối cùng để rút gọn phân thức P : chia cả tử và mẫu cho 2xy.

BÀI TẬP

151. So sánh :

a) $A=\frac{201-200}{201+200}$ và $B=\frac{201^2-200^2}{201^2+200^2}$;

b) $C = \dfrac{1999.4001 + 2000}{2000.4001 - 2001}$ và $D = \dfrac{1501.1503 - 1500.1498}{6002}$.

152. Chứng minh rằng với $n \in \mathbf{N}$ thì :

a) Phân số $A = \dfrac{n^3 - 1}{n^5 + n + 1}$ không tối giản ;

b) Phân số $B = \dfrac{6n + 1}{8n + 1}$ tối giản ;

c) Phân số $C = \dfrac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản.

153. Viết mỗi đa thức sau dưới dạng một phân thức đại số với tử và mẫu là những đa thức có hai hạng tử :

a) $A = x^{19} + x^{18} + x^{17} + ... + x + 1$;

b) $B = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) ... (x^{32} + 1)$.

154. Rút gọn các phân thức :

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!(n+1)}$; b) $\dfrac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$.

155. Rút gọn các phân thức :

a) $A = \dfrac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2y^2 + 1}$; b) $B = \dfrac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2y - x^2z + y^2z - y^3}$.

156. Rút gọn các phân thức :

a) $\dfrac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 - 7}$; b) $\dfrac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}$; c) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2}$.

157. Rút gọn các phân thức :

a) $\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}$; b) $\dfrac{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}$.

158. Cho $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$, hãy rút gọn phân thức $P = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$.

159. Cho $x + y + z = 0$ và x, y, z khác 0 hãy rút gọn các phân thức sau :

a) $P = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}$;

b) $Q = \dfrac{(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)}{16xyz}$.

160. Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ hãy rút gọn phân thức

$$P = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

§2. Phép cộng và phép trừ các phân thức đại số

Kiến thức cơ bản

1. a) Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

b) Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức cùng mẫu vừa tìm được.

2. Phép cộng các phân thức cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp.

3. Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.

$-\dfrac{A}{B} = \dfrac{-A}{B}$ và $-\dfrac{-A}{B} = \dfrac{A}{B}$.

4. $\dfrac{A}{B} - \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} + \left(-\dfrac{C}{D}\right)$.

Bổ sung

Từ cách tìm phân thức đối của một phân thức ta có quy tắc đổi dấu (thứ hai) :

Nếu đổi dấu của tử thức (*hoặc* mẫu thức) đồng thời đổi dấu *đứng trước* phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

$$\frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}.$$

Ví dụ 17

Thực hiện các phép tính :

$$A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

Giải

$$A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(z-y)(x-y)} - \frac{z^2}{(x-z)(z-y)}$$

$$= \frac{x^2(z-y)+y^2(x-z)-z^2(x-y)}{(x-y)(x-z)(z-y)} = \frac{x^2(z-y)+y^2(x-z)-z^2\left[(z-y)+(x-z)\right]}{(x-y)(x-z)(z-y)}$$

$$= \frac{(z-y)(x^2-z^2)+(x-z)(y^2-z^2)}{(x-y)(x-z)(z-y)} = \frac{(x-z)(z-y)(x-y)}{(x-y)(x-z)(z-y)} = 1.$$

Nhận xét

Ta phải tính tổng ba phân thức có mẫu khác nhau. Các nhân tử ở ba mẫu đối nhau từng cặp : x – y và y – x ; x – z và z – x ; y – z và z – y.

Vì vậy để mẫu thức chung được đơn giản ta đã đổi dấu các nhân tử ở mẫu của hai phân thức cuối :

– Đối với phân thức thứ hai, ta đổi dấu cả 2 nhân tử ở mẫu, vì thế không đổi dấu đứng trước phân thức này.

– Đối với phân thức thứ ba, ta đổi dấu một nhân tử ở mẫu, vì thế phải đổi dấu đứng trước phân thức này. Tóm lại, dấu của phân thức không đổi nếu ta đổi dấu một số chẵn lần các nhân tử trong phân thức.

Ví dụ 18

Thực hiện các phép tính :

$$B = \frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}.$$

Giải

$$\frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x^2+xy-xy-yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x(x+y)-y(x+z)}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y}.$$

Tương tự $\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}=\dfrac{y}{y+z}-\dfrac{x}{y+x}$; $\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}=\dfrac{z}{z+y}-\dfrac{x}{z+x}$.

Vậy $$B=\frac{x}{x+z}-\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}-\frac{x}{y+x}+\frac{z}{z+y}-\frac{x}{z+x}$$

$$B=\left(\frac{x}{x+z}-\frac{x}{z+x}\right)+\left(\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+y}\right)-\left(\frac{y}{x+y}+\frac{x}{y+x}\right)$$

$$B=1-1=0.$$

Nhận xét

Phương pháp giải của ví dụ này là tách mỗi phân thức thành một hiệu của hai phân thức rồi nhóm các hạng tử thích hợp lại để cộng hoặc trừ mà không cần quy đồng mẫu. Cách biến đổi này cũng được vận dụng để giải bài tập 164.

BÀI TẬP

161. Thực hiện các phép tính :

a) $\dfrac{x^2}{(x-y)^2(x+y)}-\dfrac{2xy^2}{x^4-2x^2y^2+y^4}+\dfrac{y^2}{(x^2-y^2)(x+y)}$;

b) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}-\dfrac{8}{x^8+1}-\dfrac{16}{x^{16}+1}$.

162. Thực hiện các phép tính :

a) $\dfrac{1}{x(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{y(y-x)(y-z)}+\dfrac{1}{z(z-x)(z-y)}$;

b) $\dfrac{1}{(y-z)(x^2+xz-y^2-yz)}+\dfrac{1}{(z-x)(y^2+xy-z^2-zx)}+\dfrac{1}{(x-y)(z^2+yz-x^2-xy)}$.

163. Thực hiện các phép tính :

a) $M=\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{2}{y-z}+\dfrac{2}{z-x}+\dfrac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$;

b) $N = \frac{yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$.

164. Tính tổng bằng cách hợp lí nhất :

a) $A = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$;

b) $B = \frac{a}{x^2+ax} + \frac{a}{x^2+3ax+2a^2} + \frac{a}{x^2+5ax+6a^2} + \cdots +$

$$+ \cdots + \frac{a}{x^2+19ax+90a^2} + \frac{1}{x+10a}.$$

165. Cho $P = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{xy} + \frac{(x+1)(y+1)}{xyz} + \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyzt}$.

Chứng minh rằng có thể viết P dưới dạng một phân thức có tử và mẫu đều là tích của 4 nhân tử.

166. Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$, tính $S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

167. Cho $xy = a$; $yz = b$; $zx = c$ $(a, b, c \neq 0)$.

Tính $x^2 + y^2 + z^2$.

168. Cho $x + y + z = 0$ và x, y, z khác 0, tính :

a) $M = \frac{x^2}{x^2-y^2-z^2} + \frac{y^2}{y^2-z^2-x^2} + \frac{z^2}{z^2-x^2-y^2}$;

b) $N = \frac{1}{x^2+y^2-z^2} + \frac{1}{y^2+z^2-x^2} + \frac{1}{z^2+x^2-y^2}$.

169. Cho $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{x} = \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$.

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z tồn tại hai số bằng nhau hoặc đối nhau.

170. Cho $\frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$. Tính M . N.

§3. Phép nhân và phép chia các phân thức đại số

Kiến thức cơ bản

1. $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$.

2. $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.\frac{D}{C}$ với $\frac{C}{D}\neq 0$.

3. Phép nhân các phân thức đại số có tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối đối với phép cộng.

Ví dụ 19

Chứng minh rằng :

$$A=\left(1-\frac{3}{2.4}\right).\left(1-\frac{3}{3.5}\right).\left(1-\frac{3}{4.6}\right)...\left(1-\frac{3}{n(n+2)}\right)>\frac{1}{4} \quad \text{với } n\in \mathbf{N}\,;\, n\geq 2.$$

Giải

Ta thấy $1-\frac{3}{n(n+2)}=\frac{n^2+2n-3}{n(n+2)}=\frac{(n-1)(n+3)}{n(n+2)}$.

Do đó $A=\frac{1.5}{2.4}.\frac{2.6}{3.5}.\frac{3.7}{4.6}...\frac{(n-1)(n+3)}{n(n+2)}=\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{5}{4}.\frac{6}{5}.\frac{7}{6}...\frac{n+3}{n+2}\right)$

$$=\frac{1}{n}.\frac{n+3}{4}=\frac{n+3}{n}.\frac{1}{4}>\frac{1}{4}.$$

Nhận xét

Để cộng các phân thức trong ví dụ 18 ta đã dùng phương pháp tách mỗi phân thức thành một hiệu của hai phân thức rồi giao hoán, kết hợp lại, tính toán được dễ dàng.

Còn trong ví dụ 19 này, để nhân các phân thức viết có quy luật ta đã viết mỗi nhân tử thành một tích của hai phân thức rồi giao hoán, kết hợp lại để khử liên tiếp, tìm ra kết quả được nhanh chóng.

Ví dụ 20

Cho $A = \frac{x-y}{x+y}$; $B = \frac{y-z}{y+z}$; $C = \frac{z-x}{z+x}$.

Chứng minh rằng $(1 + A)(1 + B)(1 + C) = (1 - A)(1 - B)(1 - C)$.

Giải

Ta có $1 + A = 1 + \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y}$; tương tự $1 + B = \frac{2y}{y+z}$; $1 + C = \frac{2z}{z+x}$.

Ta có $1 - A = 1 - \frac{x-y}{x+y} = \frac{2y}{x+y}$; tương tự $1 - B = \frac{2z}{y+z}$; $1 - C = \frac{2x}{x+z}$.

Do đó $(1 + A)(1 + B)(1 + C) = \frac{2x}{x+y} \cdot \frac{2y}{y+z} \cdot \frac{2z}{z+x} = \frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$;

$$(1 - A)(1 - B)(1 - C) = \frac{2y}{x+y} \cdot \frac{2z}{y+z} \cdot \frac{2x}{z+x} = \frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Suy ra $(1 + A)(1 + B)(1 + C) = (1 - A)(1 - B)(1 - C)$.

Nhận xét

Trong ví dụ trên, các biểu thức A, B, C có chứa các biến x, y, z. Trong biểu thức A nếu ta thay x bởi y, thay y bởi z thì ta được biểu thức B. Trong biểu thức B nếu ta thay y bởi z, thay z bởi x thì ta được biểu thức C. Trong biểu thức C nếu ta thay z bởi x, thay x bởi y thì ta lại được biểu thức A. Ta gọi đó là cách hoán vị vòng quanh ba chữ x, y, z, kí hiệu là $x \to y \to z \to x$, lúc đó $A \to B \to C \to A$.

Vì 1 + A được biến đổi thành $\frac{2x}{x+y}$ nên 1 + B được biến đổi thành $\frac{2y}{y+z}$; 1 + C được biến đổi thành $\frac{2z}{z+x}$. Đối với 1 – A ; 1 – B ; 1 – C cũng tương tự. Nhận xét về hoán vị vòng quanh giúp ta rút ngắn lời giải và đỡ những nhầm lẫn.

BÀI TẬP

171. Thực hiện các phép tính :

a) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}\cdot\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-10x+25}$;

b) $\dfrac{x(y^2-z)+y(x-xy)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}:\dfrac{xy^2-xz(2y-z)}{2(x^3+y^3+z^3-3xyz)}$.

172. Tìm tích :

a) $A=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ với $n \in \mathbf{N}$; $n \geq 2$;

b) $B=\dfrac{1^4+4}{3^4+4}\cdot\dfrac{5^4+4}{7^4+4}\cdot\dfrac{9^4+4}{11^4+4}\cdots\dfrac{17^4+4}{19^4+4}$.

173. Chứng minh rằng :

$$C=\left(1+\frac{4}{5}\right)\left(1+\frac{4}{12}\right)\left(1+\frac{4}{21}\right)\cdots\left(1+\frac{4}{n(n+4)}\right)<6 \qquad \text{với } n \in \mathbf{N}^*.$$

174. Cho $A=\dfrac{x-y}{1+xy}$; $B=\dfrac{y-z}{1+yz}$; $C=\dfrac{z-x}{1+zx}$.

Chứng minh rằng A + B + C = A . B . C.

175. Cho $A=\dfrac{4yz-x^2}{yz+2x^2}$; $B=\dfrac{4zx-y^2}{zx+2y^2}$; $C=\dfrac{4xy-z^2}{xy+2z^2}$.

Chứng minh rằng nếu x + y + z = 0 và x, y, z đôi một khác nhau thì tích A. B. C là một hằng số.

§4. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ

Kiến thức cơ bản

1. Một phân thức đại số hoặc một biểu thức biểu thị một dãy các phép toán : cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức gọi là một biểu thức hữu tỉ.

Ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

2. Khi giải toán liên quan đến *giá trị của phân thức* thì trước tiên phải tìm điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0. Ta gọi đó là điều kiện để giá trị của phân thức được xác định (viết tắt là ĐKXĐ).

Bổ sung

Trong trường hợp biểu thức hữu tỉ có hai biến x và y thì giá trị của biểu thức đó chỉ được xác định với các cặp số (x ; y) làm cho giá trị của mẫu thức khác 0.

Ví dụ 21

Cho $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 - xy} + \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 - xy}\right) : \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$.

a) Tìm điều kiện của các biến x, y để giá trị của P được xác định ;

b) Rút gọn P ;

c) Tìm giá trị của P với $|2x - 1| = 1$; $|y + 1| = \frac{1}{2}$.

Giải

$$P = \frac{2}{x} - \left[\frac{x^2}{x(x-y)} + \frac{x^2 - y^2}{xy} + \frac{y^2}{y(x-y)}\right] : \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}.$$

a) ĐKXĐ : $x \neq 0$; $y \neq 0$; $x \neq y$.

b) $P = \frac{2}{x} - \frac{x^2y + (x^2 - y^2)(x - y) + xy^2}{xy(x-y)} \cdot \frac{x - y}{x^2 - xy + y^2}$

$$= \frac{2}{x} - \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy(x-y)} \cdot \frac{x - y}{x^2 - xy + y^2} = \frac{2}{x} - \frac{x+y}{xy} = \frac{y - x}{xy}.$$

c) $|2x - 1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 1 \\ 2x - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$;

$|y + 1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 1 = \frac{1}{2} \\ y + 1 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$

- Với $x = 1$; $y = -\frac{1}{2}$ thì $P = \dfrac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}} = 3.$

- Với $x = 1$; $y = -\frac{3}{2}$ thì $P = \dfrac{-\frac{3}{2}-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}.$

Nhận xét

> *Việc rút gọn một biểu thức không phụ thuộc gì vào giá trị của các biến. Tuy nhiên, khi giải những bài toán có liên quan đến việc tính giá trị của biểu thức như ví dụ trên, thì trước tiên ta nên tìm điều kiện xác định. Những giá trị nào của biến thoả mãn điều kiện xác định thì thay vào biểu thức đã được rút gọn để tính giá trị của nó, cũng tức là giá trị của biểu thức đã cho.*

BÀI TẬP

176. Cho các phân thức :

$$A = \frac{x^2+x-2}{x^2-4}\ ; \qquad B = \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}\ ; \qquad C = \frac{x-y}{x^2+y^2+4x-2y+5}.$$

Tìm các giá trị của x và y để :

a) Giá trị mỗi phân thức trên được xác định ;

b) Giá trị mỗi phân thức trên bằng 0.

177. a) Tìm giá trị lớn nhất của phân thức $A = \dfrac{5}{x^2-6x+10}$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức $B = \dfrac{-8}{x^2-2x+5}$.

178. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P luôn luôn dương với mọi x, y, z khác 0

$$P = \frac{1}{x+y+z}\cdot\frac{1}{xy+yz+zx}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

179. Cho biểu thức $P = \dfrac{x + \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x} + y}$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm các cặp giá trị nguyên dương của x và y với $x + y \leq 50$ để P có giá trị là 8.

180. Cho $x.y.z \neq 0$ và $\dfrac{x-y-z}{x} = \dfrac{-x+y-z}{y} = \dfrac{-x-y+z}{z}$.

Tính $A = \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\left(1 + \dfrac{z}{y}\right)\left(1 + \dfrac{x}{z}\right)$.

181. Cho x, y, z khác −1. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến x, y, z :

$$Q = \frac{xy + 2x + 1}{xy + x + y + 1} + \frac{yz + 2y + 1}{yz + y + z + 1} + \frac{zx + 2z + 1}{zx + z + x + 1}.$$

182. Cho $x = by + cz$ (1) ; $y = ax + cz$ (2) ; $z = ax + by$ (3) và $x + y + z \neq 0$; $xyz \neq 0$.

Chứng minh đẳng thức $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} = 2$.

183. Cho $\dfrac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} = m$ với $n \in \mathbf{N}^*$, tính $P = \dfrac{x^{2n} - x^{-2n}}{x^{2n} + x^{-2n}}$ theo m.

§5. Ôn tập chương II

Ví dụ 22

Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \dfrac{3}{x^2 + 9}\right) : \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}\right)$.

a) Rút gọn P ;

b) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào ?

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Giải

a) $P = \left[\dfrac{x(x+3)}{(x+3)(x^2+9)} + \dfrac{3}{x^2+9}\right] : \left[\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6x}{(x-3)(x^2+9)}\right]$

$= \dfrac{x+3}{x^2+9} : \dfrac{x^2+9-6x}{(x-3)(x^2+9)} = \dfrac{x+3}{x^2+9} \cdot \dfrac{(x-3)(x^2+9)}{(x-3)^2} = \dfrac{x+3}{x-3}.$

b) $P = \dfrac{x+3}{x-3} \Rightarrow P \,.\, x - 3P = x + 3 \Rightarrow (P-1)x = 3\,(P+1) \Rightarrow x = \dfrac{3(P+1)}{P-1}.$

$$x > 0 \Leftrightarrow \frac{3(P+1)}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{P+1}{P-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} P+1>0 & \text{và} & P-1>0 \\ P+1<0 & \text{và} & P-1<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P>1 \\ P<-1. \end{array}\right.$$

Vậy P không lấy các giá trị từ -1 đến 1, tức là $P \notin [-1\,;\,1]$.

c) ĐKXĐ : $x \neq \pm 3$; $P = \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{x-3+6}{x-3} = 1 + \dfrac{6}{x-3}.$

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x - 3 \in Ư(6) = \{\pm 1\,;\,\pm 2\,;\,\pm 3\,;\,\pm 6\}$.

$x-3$	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
x	4	2	5	1	6	0	9	-3 (loại)

Vậy khi $x \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,9\}$ thì P có giá trị nguyên.

Nhận xét

– Phương pháp giải câu b trong ví dụ trên là muốn biết P không nhận những giá trị nào ta xem P nhận được những giá trị nào rồi loại bỏ những giá trị đó đi. Muốn vậy từ biểu thức của P theo x là $P = \dfrac{x+3}{x-3}$ ta suy ra một biểu thức của x theo P là $x = \dfrac{3(P+1)}{P-1}$ từ đó tìm được các giá trị của P thoả mãn điều kiện $x > 0$.

– Phương pháp giải câu c trong ví dụ trên là biểu diễn P dưới dạng tổng của một đa thức có hệ số nguyên với một phân thức có tử là một số nguyên, còn mẫu là một đa thức có chứa biến x. Giá trị của mẫu phải là ước của tử.

BÀI TẬP

184. Cho biểu thức $A = \dfrac{|x+1|+2x}{3x^2-2x-1}$.

Hãy rút gọn A rồi tính giá trị với $x = -2$; $x = \dfrac{3}{4}$.

185. Tìm các số A, B, C để có

$$\frac{x^2+x+4}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}.$$

186. Cho $x.y.z \neq 0$ và $x \neq y$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $M = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|y|}{y} + \dfrac{|z|}{z} + \dfrac{|xyz|}{xyz}$;

b) $N = \dfrac{xy}{|xy|} + \dfrac{x-y}{|x-y|}.\left(\dfrac{x}{|x|} - \dfrac{y}{|y|}\right)$.

187. Cho $x.y.z \neq 0$ thoả mãn $x + y + z = xyz$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$.

188. Cho $\dfrac{x}{y-z} + \dfrac{y}{z-x} + \dfrac{z}{x-y} = 0$, $x \neq y$; $y \neq z$; $z \neq x$. Tính giá trị của biểu thức

$Q = \dfrac{x}{(y-z)^2} + \dfrac{y}{(z-x)^2} + \dfrac{z}{(x-y)^2}$.

189. Cho biểu thức $M = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$.

Chứng minh rằng :

a) Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì $M > 1$.

b) Nếu $M = 1$ thì hai trong ba phân thức đã cho của biểu thức M bằng 1, phân thức còn lại bằng -1.

190. Cho biểu thức $P = 1 + \dfrac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\dfrac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \dfrac{3x}{3x^2-12} - \dfrac{1}{x+2} \right)$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm các giá trị của x để P = 0 ; P = 1 ;

c) Tìm các giá trị của x để P > 0.

191. Cho biểu thức.

$$Q = \left(\frac{2x-x^2}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right).$$

a) Rút gọn Q ;

b) Tìm các giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

§1. Mở đầu về phương trình. Phương trình bậc nhất một ẩn. Phương trình đưa được về dạng ax + b = 0

Kiến thức cơ bản

1. Phương trình ẩn x có dạng A(x) = B(x) trong đó A(x) và B(x) là hai biểu thức của cùng một biến x. Giá trị $x = x_0$ làm cho hai vế của phương trình nhận cùng một giá trị gọi là một *nghiệm* của phương trình. Một phương trình có thể có một, hai, ba,... nghiệm, nhưng cũng có thể không có nghiệm nào hoặc có vô số nghiệm. Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó, thường kí hiệu là S.

2. Hai phương trình tương đương là hai phương trình có cùng một tập nghiệm.

   Hai phương trình cùng tương đương với một phương trình thứ ba thì tương đương với nhau.

3. Quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân :

   a) Nếu ta chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu của nó thì được một phương trình tương đương với phương trình đó.

   b) Nếu ta nhân (hay chia) cả hai vế của một phương trình với cùng *một số khác 0* thì được một phương trình tương đương với phương trình đã cho.

4. Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình dạng ax + b = 0 với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$.

   Phương trình bậc nhất ax + b = 0 có nghiệm duy nhất là $x = -\frac{b}{a}$.

5. Phương trình đưa được về dạng ax + b = 0.

   Các bước giải (đối với phương trình mà hai vế là hai biểu thức hữu tỉ, không chứa ẩn ở mẫu) :

Bước 1. Khử mẫu thức.

Bước 2. Bỏ dấu ngoặc và chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia.

Bước 3. Thu gọn về dạng $ax + b = 0$ hay $ax = -b$.

Bổ sung

1. Quy tắc chuyển vế chỉ là một hệ quả của tính chất sau : Nếu ta cộng cùng một *đa thức của ẩn* vào hai vế của một phương trình thì được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

2. Trường hợp phương trình thu gọn có hệ số của ẩn bằng 0

Dạng 1 $\quad 0x = 0.$

Phương trình có vô số nghiệm, $x \in \mathbf{R}$ hay $S = \mathbf{R}$.

Dạng 2 $\quad 0x = c \ (c \neq 0).$

Phương trình vô nghiệm, $S = \varnothing$.

Ví dụ 23

Cho phương trình :

$$\frac{3(2x+1)}{4} - \frac{5x+3}{6} = \frac{2x-1}{3} + \frac{m}{12} \qquad (1) \qquad \text{(m là hằng số).}$$

Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

Giải

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad 9(2x+1) - 2(5x+3) = 4(2x-1) + m \\
&\Leftrightarrow \quad 18x + 9 - 10x - 6 = 8x - 4 + m \\
&\Leftrightarrow \quad 18x - 10x - 8x = m - 4 - 9 + 6 \\
&\Leftrightarrow \quad 0x = m - 7 \qquad (2)
\end{aligned}$$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow m - 7 = 0$

$\Leftrightarrow m = 7.$

Lúc đó chẳng những (1) có nghiệm mà còn có vô số nghiệm.

Nhận xét

Phương trình (1) sau khi thu gọn dẫn đến một trường hợp đặc biệt : hệ số của ẩn số bằng 0. Phương trình thu gọn không phải là phương trình bậc nhất một ẩn.

Khi đã tìm được giá trị của m để (2) có nghiệm, tại sao ta kết luận được (1) có nghiệm ? Đó là vì quan hệ tương đương giữa hai phương trình có tính chất bắc cầu.

Ví dụ 24

Giải và biện luận phương trình sau với m là hằng số :

$$\frac{m^2\left[(x+2)^2-(x-2)^2\right]}{8}-4x=(m-1)^2+3(2m+1). \qquad (1)$$

Giải

(1) $\Leftrightarrow m^2x-4x=m^2+4m+4$

$\Leftrightarrow (m-2)(m+2)x=(m+2)^2.$

– Nếu $m \neq \pm 2$ thì $x=\dfrac{m+2}{m-2}$.

– Nếu $m=2$ thì $0x=16$, phương trình vô nghiệm ; $S=\varnothing$.

– Nếu $m=-2$ thì $0x=0$, phương trình có nghiệm bất kì ; $S=\mathbf{R}$.

Nhận xét

Phương trình (1) với x là ẩn, m là hằng số được gọi là phương trình chứa tham số *m. Sau khi thu gọn được về dạng ax + b = 0 hay ax = – b ta phải* biện luận *theo hai trường hợp :*

– Trường hợp a ≠ 0, phương trình có một nghiệm.

– Trường hợp a = 0, lúc đó xét tiếp đến b :

- *Nếu b ≠ 0, phương trình vô nghiệm.*
- *Nếu b = 0, phương trình có vô số nghiệm.*

BÀI TẬP

192. Cho 3 phương trình :

$(x + 5)(2x - 1) = 0$ (1)

$(x + 5)(2x - 1)(x^2 - 3) = 0$ (2)

$(x + 5)(x^2 - 3) = 0$ (3)

Xét xem trong các phương trình đó, có hai phương trình nào tương đương không nếu :

a) x nhận giá trị trên tập hợp **R** ;

b) x nhận giá trị trên tập hợp **Q** ;

c) x nhận giá trị trên tập hợp **Z** ;

d) x nhận giá trị trên tập hợp **N**.

193. Tìm giá trị của hằng số a để phương trình sau vô nghiệm :

$$\frac{a(3x-1)}{5} - \frac{6x-17}{4} + \frac{3x+2}{10} = 0. \quad (1)$$

194. Giải các phương trình :

a) $\frac{x+1}{1} + \frac{2x+3}{3} + \frac{3x+5}{5} + \cdots + \frac{20x+39}{39} = 22 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{40}{39}$; (1)

b) $(x - 20) + (x - 19) + (x - 18) + ... + 100 + 101 = 101.$ (2)

195. Giải các phương trình :

a) $\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{9.10}\right)(x-1) + \frac{1}{10}x = x - \frac{9}{10}$; (1)

b) $\left(\frac{1}{1.51} + \frac{1}{2.52} + \frac{1}{3.53} + \cdots + \frac{1}{10.60}\right)x = \left(\frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \cdots + \frac{1}{50.60}\right).$

196. Giải và biện luận phương trình chứa tham số m :

a) $\frac{mx+5}{10} + \frac{x+m}{4} = \frac{m}{20}$;

b) $\frac{x-4m}{m+1} + \frac{x-4}{m-1} = \frac{x-4m-3}{m^2-1}.$

197. Giải và biện luận phương trình chứa các tham số a, b, c

a) $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ac}+\dfrac{x-c}{ab}=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; (1)

b) $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}=a+b+c.$ (2)

§2. Phương trình tích

Kiến thức cơ bản

1. Phương trình tích là phương trình có dạng A(x)B(x)... M(x) = 0.

2. Cách giải :

$$A(x)\,B(x)\,...\,M(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0 \\ ..... \\ M(x)=0. \end{array}\right.$$

Như vậy, muốn giải phương trình tích A(x) B(x)... M(x) = 0 ta giải từng phương trình A(x) = 0 ; B(x) = 0 ; ... ; M(x) = 0 rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

Bổ sung

Ở lớp 7 ta đã biết một đa thức bậc n có không quá n nghiệm. Vì thế ta sẽ giải được phương trình bậc n có dạng $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ nếu ta phân tích được vế trái thành nhân tử. Phương trình này có không quá n nghiệm.

Ví dụ 25

Giải phương trình

$$\frac{x+16}{49}+\frac{x+18}{47}=\frac{x+20}{45}-1. \qquad (1)$$

Giải

Thêm 2 vào hai vế của phương trình (1) ta được

$$(1) \quad \Leftrightarrow \frac{x+16}{49}+1+\frac{x+18}{47}+1=\frac{x+20}{45}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+65}{49}+\frac{x+65}{47}-\frac{x+65}{45}=0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow (x+65)\left(\frac{1}{49}+\frac{1}{47}-\frac{1}{45}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+65=0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{49}+\frac{1}{47}-\frac{1}{45}\neq 0\right) \Leftrightarrow x=-65.$$

Nhận xét

Nếu quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu thì việc giải phương trình rất phức tạp vì mẫu thức chung khá lớn.

Ta nhận thấy trong các phân thức ở mỗi vế của phương trình, nếu cộng tử với mẫu thì mỗi tổng đều là x + 65 và có thể đặt x + 65 làm nhân tử chung. Muốn thế, mỗi phân thức phải được cộng với 1 do đó ta đã thêm 2 vào hai vế của phương trình.

Như vậy việc đưa phương trình (2) về dạng một tích giúp ta giải phương trình này được đơn giản.

BÀI TẬP

Giải các phương trình :

198. a) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$;

b) $x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$.

199. $4^x - 10.2^x + 16 = 0$.

200. a) $(2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$;

b) $x(x - 1)(x + 4)(x + 5) = 84$.

201. a) $\frac{x+43}{57}+\frac{x+46}{54}=\frac{x+49}{51}+\frac{x+52}{48}$;

b) $\frac{x-69}{30}+\frac{x-67}{32}+\frac{x-65}{34}=\frac{x-63}{36}+\frac{x-61}{38}+\frac{x-59}{40}$.

202. a) $\frac{x-17}{33}+\frac{x-21}{29}+\frac{x}{25} = 4$;

b*) $\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19} = 10$.

203. a) $(2x-5)^3-(3x-4)^3+(x+1)^3=0$. (1)

b) $(x-1)^3+(2x-3)^3+(3x-5)^3-3(x-1)(2x-3)(3x-5)=0$. (2)

c) $(x^2+3x-4)^3+(3x^2+7x+4)^3=(4x^2+10x)^3$. (3)

204. a) $(x+5)^4+(x-4)^4=(2x+1)^4$; b) $(x-4)^4+(x-2)^4=82$.

205. a) $x(x+2)+a^2-3=2a(x+1)$;

b) $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$;

c) $x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

§3. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Kiến thức cơ bản

1. Điều kiện xác định của một phương trình (viết tắt ĐKXĐ) là điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều có giá trị khác 0.

2. Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

   Bước 1 : Tìm ĐKXĐ.

   Bước 2 : Khử mẫu thức.

   Bước 3 : Giải phương trình vừa nhận được.

   Bước 4 : Loại các giá trị không thoả mãn ĐKXĐ. Các giá trị thoả mãn ĐKXĐ chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

Bổ sung

Nếu ta biến đổi một phương trình thành một phương trình khác có tập hợp nghiệm rộng hơn thì ta gọi phương trình sau là một *phương trình hệ quả* của phương trình ban đầu.

Khi nhân hai vế của một phương trình với cùng một đa thức hoặc khi bình phương hai vế của một phương trình, thường dẫn đến một phương trình hệ quả.

Ví dụ 26

Giải phương trình

$$\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0. \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ : $x \neq \pm 2$.

Đặt $\frac{x+3}{x-2} = u$; $\frac{x-3}{x+2} = v$ thì $\frac{x^2-9}{x^2-4} = uv$.

Phương trình (1) có dạng $u^2 - 7uv + 6v^2 = 0 \qquad (2)$

$\Leftrightarrow (u - v)(u - 6v) = 0$

$\Leftrightarrow u = v$ hoặc $u = 6v$.

• Nếu $u = v$ thì $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \quad (3) \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = x^2 - 5x + 6 \quad (3a)$

$\Leftrightarrow 10x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (thoả mãn ĐKXĐ).

• Nếu $u = 6v$ thì $\frac{x+3}{x-2} = \frac{6(x-3)}{x+2} \quad (4) \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \qquad (4a)$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 6$ (thoả mãn ĐKXĐ).

Vậy $S = \{0 ; 1 ; 6\}$.

Nhận xét

1. Việc đặt ẩn số phụ $\frac{x+3}{x-2} = u$ và $\frac{x-3}{x+2} = v$ giúp ta đưa được phương trình (1) phức tạp về phương trình (2) đơn giản và dễ giải hơn.

2. Khi khử mẫu của phương trình (3) để được phương trình (3a) thì phương trình (3a) chưa chắc đã tương đương với phương trình (3), nó chỉ là phương trình hệ quả của phương trình (3). Vì vậy ta phải xét nghiệm nào của phương trình (3a) thoả mãn ĐKXĐ thì nghiệm đó mới là nghiệm của phương trình đã cho, nếu không nó là nghiệm ngoại lai.

Cũng tương tự như vậy đối với phương trình (4) và (4a).

Ví dụ 27

Giải và biện luận phương trình (m là tham số)

$$\frac{x-m}{x+5} + \frac{x-5}{x+m} = 2. \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ : $x \neq -5$; $x \neq -m$.

Khử mẫu ta được

$$x^2 - m^2 + x^2 - 25 = 2(x+5)(x+m) \qquad (1a)$$

(1a) $\Leftrightarrow -2(m+5)x = m^2 + 10m + 25$

$\Leftrightarrow -2(m+5)x = (m+5)^2$

• Nếu $m = -5$ thì phương trình (1a) có dạng $0x = 0$; phương trình này có nghiệm tuỳ ý. Để nghiệm tuỳ ý này là nghiệm của (1) thì $x \neq \pm 5$.

• Nếu $m \neq -5$ thì phương trình (1a) có nghiệm $x = -\frac{(m+5)^2}{2(m+5)} = -\frac{m+5}{2}$.

Để nghiệm này là nghiệm của (1) thì ta phải có :

$-\frac{m+5}{2} \neq -5$ và $-\frac{m+5}{2} \neq -m$, tức là $m \neq 5$

Vậy nếu $m \neq \pm 5$ thì $x = -\frac{m+5}{2}$ là nghiệm của (1).

Kết luận : • Nếu m = –5 thì phương trình đã cho có nghiệm tuỳ ý $x \neq \pm 5$;

• Nếu $m \neq \pm 5$ thì phương trình đã cho có một nghiệm $x = -\frac{m+5}{2}$;

• Nếu m = 5 thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét

Với m = –5 hoặc m ≠ –5 thì phương trình (1a) có nghiệm. Nhưng nghiệm của phương trình (1a) chưa chắc đã là nghiệm của phương trình (1). Vì thế ta đã buộc nghiệm của phương trình (1a) thoả mãn thêm ĐKXĐ.

BÀI TẬP

Giải các phương trình :

206. a) $\frac{x+1}{x+2}+\frac{5}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}+1$;

b) $\frac{x-1}{x^2-x+1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{10}{x(x^4+x^2+1)}$.

207. a) $\frac{x+9}{10}+\frac{x+10}{9}=\frac{9}{x+10}+\frac{10}{x+9}$;

b) $\frac{x^2-2x+2}{x-1}+\frac{x^2-8x+20}{x-4}=\frac{x^2-4x+6}{x-2}+\frac{x^2-6x+12}{x-3}$.

208. a) $\frac{x-5}{x-5}+\frac{x-6}{x-5}+\frac{x-7}{x-5}+\dots+\frac{1}{x-5}=4$ $(x \in \mathbf{N})$;

b) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\dots+\frac{1}{x^2+15x+56}=\frac{1}{14}$;

c) $\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)\dots\left[1+\frac{1}{x(x+2)}\right]=\frac{31}{16}$ $(x \in \mathbf{N})$.

Giải và biện luận các phương trình :

209. $\frac{a}{1+bx}=\frac{b}{1+ax}$ (1) (với a, b là tham số, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

210. $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x-a+b}$ (1) (với a, b là tham số).

211. $\frac{3}{x-m}-\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-2m}$ (1) (với m là tham số).

§4. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Kiến thức cơ bản

Các bước giải toán bằng cách lập phương trình :

Bước 1. Lập phương trình :

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số ;

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết ;

– Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Nhận định kết quả và trả lời.

Bổ sung

Khi chọn ẩn số, thường ta chọn trực tiếp theo câu hỏi trong đề bài nhưng cũng có khi ta chọn gián tiếp nhằm mục đích suy luận lập phương trình được thuận lợi hơn.

Ví dụ 28

Một sà lan xuôi dòng từ A đến B mất 2,5 giờ và ngược dòng từ B về A mất 4 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3km/h, tính khoảng cách AB.

Giải

Gọi vận tốc riêng của sà lan là x km/h (x > 3).

Suy ra vận tốc xuôi dòng của sà lan là x + 3 (km/h) ;

vận tốc ngược dòng của sà lan là x – 3 (km/h).

Trong 2,5 giờ sà lan xuôi dòng được 2,5(x + 3) (km).

Trong 4 giờ sà lan ngược dòng được 4(x – 3) (km).

Vì khoảng cách AB không đổi nên ta có phương trình

$$2,5(x + 3) = 4(x - 3)$$

$$x = 13 \qquad \text{(thoả mãn điều kiện } x > 3\text{).}$$

Vậy vận tốc riêng của sà lan là 13km/h.

Khoảng cách AB là (13 – 3) . 4 = 40 (km).

Nhận xét

1. Bài toán trên là bài toán chuyển động trong dòng chảy. Ta có công thức :

Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước

Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước

(vận tốc riêng > vận tốc dòng nước).

2. Trong cách giải trên ta đã chọn ẩn số một cách gián tiếp nhằm đi tới một phương trình đơn giản, dễ giải.

Nếu chọn ẩn số một cách trực tiếp, tức là gọi khoảng cách AB là x (km), dẫn tới phương trình

$$\frac{x}{2,5} - 3 = \frac{x}{4} + 3 \text{ (do cả 2 vế đều là vận tốc riêng).}$$

Rõ ràng là phương trình này phức tạp và khó giải hơn.

BÀI TẬP

Giải toán bằng cách lập phương trình.

212. Lúc 7 giờ sáng, một người đi xe máy từ A đến B dài 45km. Tới B, người đó giải quyết xong công việc trong 1h30 phút rồi quay ngay về, tới A lúc 11 giờ. Đoạn đường AB gồm một đoạn đường bằng và một đoạn lên dốc. Vận tốc lúc lên dốc là 24km/h, lúc xuống dốc là 45km/h (lúc về) và trên đường bằng là 40km/h. Hỏi đoạn đường bằng dài bao nhiêu kilômét ?

213. Vận động viên A chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi cách nhau 6km với vận tốc 10km/h rồi chạy xuống với vận tốc 15km/h. Vận động viên B cũng chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi theo cùng một lộ trình với vận tốc 12km/h. Biết rằng B chạy sau A là 15 phút, hỏi khi B gặp A từ đỉnh đồi chạy xuống, họ cách đỉnh đồi bao nhiêu ?

214. Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B trên cùng một con đường. Người đi xe máy khởi hành sau người đi xe đạp là 2 giờ ; ô tô khởi hành sau xe máy là 1 giờ. Biết vận tốc xe đạp, xe máy, ô tô thứ tự là 15 ; 45 ; 60 km/h. Đến 10h 30 phút thì ô tô cách đều người đi xe đạp và người đi xe máy. Hỏi người đi xe đạp khởi hành lúc mấy giờ ?

215. Tìm một số tự nhiên có năm chữ số biết rằng nếu viết thêm 1 vào bên phải số đó thì được một số gấp ba lần số thu được nếu viết thêm 1 vào bên trái số đó.

216. Hai vòi nước khác nhau cùng cho chảy vào một bể. Thời gian cần cho vòi A chảy một mình đầy bể ít hơn thời gian cho vòi B chảy một mình đầy bể là 2 giờ. Tích hai thời gian đó bằng 4 lần thời gian cần cho cả hai vòi cùng chảy đầy bể. Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình mất bao lâu mới đầy bể ?

217. Hiện nay tuổi cha gấp ba lần tuổi con. Sau một thời gian nữa, khi tuổi của con bằng tuổi của cha hiện nay thì lúc đó tổng số tuổi của hai cha con là 112. Tính tuổi cha, tuổi con hiện nay.

218. Tổng của bốn số là 72. Nếu lấy số thứ nhất cộng thêm 5, số thứ hai trừ đi 5, số thứ ba nhân 5, số thứ tư chia cho 5 thì bốn kết quả bằng nhau. Hãy tìm bốn số ban đầu.

219. Một lớp học có 20 học sinh nữ và một số học sinh nam. Cuối năm tất cả đều đạt học sinh giỏi hoặc khá. Biết số nam sinh giỏi bằng số nữ sinh khá. Hỏi lớp học có bao nhiêu học sinh giỏi ?

220. Có ba bạn giải bài toán sau bằng ba cách khác nhau :

Sau khi nhận mức khoán, một công nhân dự định hoàn thành kế hoạch trong 5 giờ. Lúc đầu người đó thực hiện đúng tiến độ, mỗi giờ làm được 12 sản phẩm. Sau khi đã làm được một nửa số lượng sản phẩm được giao, nhờ cải tiến kĩ thuật nên mỗi giờ người đó làm thêm được 3 sản phẩm, do đó mức khoán đã được hoàn thành sớm hơn $\frac{1}{2}$ giờ. Tính số lượng sản phẩm được giao.

- **Bạn Phương giải :**

Gọi số lượng sản phẩm được giao là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Thời gian làm nửa công việc lúc đầu là $\frac{x}{2.12}$ (h).

Thời gian làm công việc còn lại là $\frac{x}{2.15}$ (h).

Vì người đó hoàn thành công việc sớm nửa giờ nên ta có phương trình

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{30} = 5 - \frac{1}{2}.$$

Giải ra được x = 60 (thoả mãn điều kiện).

Vậy số sản phẩm được giao là 60.

- **Bạn Trình nói** : Cách giải của mình *không dùng đến một số liệu* trong đề bài !

Gọi số lượng sản phẩm được giao là x ($x \in \mathbf{N}^*$).

Thời gian làm nửa công việc lúc đầu là $\frac{x}{24}$ (h).

Thời gian làm công việc còn lại là $\frac{x}{30}$ (h).

Thời gian dự định làm là $\frac{x}{12}$ (h).

Vì người đó hoàn thành sớm nửa giờ nên ta có phương trình

$$\frac{x}{12} - \left(\frac{x}{24} + \frac{x}{30}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{1}{2}.$$

Giải ra được x = 60 (thoả mãn điều kiện).

Vậy số sản phẩm được giao là 60.

- **Bạn Nhân nói** : Cách giải của mình *không dùng đến hai số liệu* trong đề bài !

Theo bạn thì cách giải của bạn Phương, bạn Trình có đúng không ?

Bạn có thể cho biết cách giải của bạn Nhân như thế nào không ?

§5. Ôn tập chương III

Ví dụ 29

Giải các phương trình :

a) $8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-34\left(x+\frac{1}{x}\right)+51=0$; (1)

b) $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$. (2)

Giải

a) ĐKXĐ : $x \neq 0$.

Đặt $x+\frac{1}{x}=y$ suy ra $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Phương trình (1) có dạng

$$8(y^2-2)-34y+51=0$$

$\Leftrightarrow 8y^2-34y+35=0 \Leftrightarrow (2y-5)(4y-7)=0$

$\Leftrightarrow y \in \left\{\frac{5}{2}\ ;\ \frac{7}{4}\right\}$.

Với $y=\frac{5}{2}$ thì $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$ (thoả mãn ĐKXĐ).

Với $y=\frac{7}{4}$ thì $x+\frac{1}{x}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow 4x^2-7x+4=0$

$\Leftrightarrow 4\left(x-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{15}{16}=0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy $S=\left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}$.

b) Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình (2).

Chia hai vế của (2) cho $x^2 \neq 0$ ta được :

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ ta được $6(y^2 - 2) - 5y - 38 = 0$

$\Leftrightarrow 6y^2 - 5y - 50 = 0 \Leftrightarrow (3y - 10)(2y + 5) = 0$

$$\Leftrightarrow y \in \left\{\frac{10}{3}\ ;\ -\frac{5}{2}\right\}.$$

Với $y = \frac{10}{3}$ thì $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Với $y = -\frac{5}{2}$ thì $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy $S = \left\{3\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ -2\ ;\ -\frac{1}{2}\right\}$.

Nhận xét

Phương pháp giải các phương trình trong ví dụ trên là phương pháp dùng ẩn số phụ (đổi biến), đưa một phương trình phức tạp về một phương trình có dạng đơn giản hơn. Phương trình $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ có các hệ số của đa thức ở vế trái đối xứng qua hạng tử đứng giữa : 6 ; –5 ; –38 ; –5 ; 6. Ta gọi phương trình này là phương trình có hệ số đối xứng bậc 4. Phương trình này được đưa về phương trình bậc hai đối với y bằng cách đổi biến $x + \frac{1}{x} = y$.

Nếu phương trình có hệ số đối xứng có nghiệm là x_0 thì $\frac{1}{x_0}$ cũng là nghiệm.

BÀI TẬP

- **Giải các phương trình :**

221. $\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}x+100\right)+10\right]+1\right\}+1=0.$

222. $\frac{15x}{x^2+3x-4}-1=12\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{3x-3}\right).$

223. $\frac{2+4+6+...+2x}{1+3+5+...+(2x-1)}=\frac{16}{15}$ $(x \in N^*).$

224. a) $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$; (1)

b) $(x-3)^4+(x-5)^4=16.$ (2)

- **Giải và biện luận phương trình**

225. $\frac{1}{a(b+x)}+\frac{1}{b(b+x)}=2\left[\frac{1}{a(c+x)}+\frac{1}{b(c+x)}\right].$

- **Giải các bài toán bằng cách lập phương trình :**

226. Một ô tô dự định chạy từ A đến B dài 120km trong một thời gian nhất định. Trong nửa đầu của quãng đường AB, do đường xấu nên xe chỉ chạy với vận tốc ít hơn dự định là 4km/h. Trên quãng đường còn lại, do đường tốt nên xe đã chạy với vận tốc nhiều hơn dự định là 5km/h nên đã đến B đúng dự định. Tính thời gian dự định đi hết quãng đường.

227. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì sau 4 ngày sẽ xong. Nếu đội I làm 3 ngày rồi đội II làm tiếp trong 6 ngày nữa thì cũng xong. Hỏi mỗi đội làm một mình thì mất bao lâu mới xong công việc ?

228. Hai trường A và B của một Phường có tổng cộng 480 học sinh thi đỗ tốt nghiệp THCS, đạt tỉ lệ trúng tuyển 96%. Tính riêng thì trường A đỗ 94%, trường B đỗ 99%. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh tốt nghiệp ?

Chương IV

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. Bất đẳng thức. Tính chất của bất đẳng thức

Kiến thức cơ bản

1. Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay dạng $a > b$; $a \le b$; $a \ge b$) là bất đẳng thức

$$a \le b \Leftrightarrow a - b \le 0$$

$$a \ge b \Leftrightarrow a - b \ge 0.$$

2. Tính chất

1. $a \le b \Leftrightarrow b \ge a$
2. $a \le b$; $b \le c \Rightarrow a \le c$ (tính chất bắc cầu)
3. $a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$ (hoặc $a \ge b \Rightarrow a + c \ge b + c$)
4. $a < b \Rightarrow a . c < b. c$ nếu $c > 0$

   $a < b \Rightarrow a . c > b . c$ nếu $c < 0$.

Bổ sung

1. Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều.

2. Trừ từng vế của hai bất đẳng thức ngược chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất.

3. Nhân từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm ta được một bất đẳng thức cùng chiều.

Đặc biệt : $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$; $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ với n là số tự nhiên lẻ.

Ví dụ 30

Cho $a > 2$; $b > 2$ chứng minh rằng $ab > a + b$.

Giải

$$a > 2 \text{ và } b > 0 \Rightarrow ab > 2b \qquad (1)$$

$$b > 2 \text{ và } a > 0 \Rightarrow ab > 2a. \qquad (2)$$

Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều (1) và (2) ta được $2ab > 2(a + b)$.

Chia hai vế cho 2 ta được $ab > (a + b)$.

Nhận xét

Cách chứng minh bất đẳng thức trong ví dụ trên là từ các bất đẳng thức đã biết, dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Ví dụ 31

Cho a, b là hai số cùng dấu.

a) Chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Giải

a) Xét hiệu $H = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$

$$H = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Vì a, b cùng dấu nên $ab > 0$, mặt khác $(a - b)^2 \geq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$)

do đó $H = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) Ta có $P = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Vì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ (theo câu a) nên $P \geq 4$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$) suy ra min P = 4 (khi và chỉ khi a = b).

Nhận xét

a) Cách chứng minh bất đẳng thức ở câu a là dùng định nghĩa. Để chứng minh $A \geq B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh $A - B \geq 0$.

b) Để tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức P, ta cần chứng minh $P \geq k$ (k là hằng số) với mọi giá trị của biến và chỉ rõ dấu "=" có thể xảy ra (bằng cách chỉ rõ với giá trị nào của biến thì dấu "=" xảy ra).

Để tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức P, ta cần chứng minh $P \leq k$ (k là hằng số) với mọi giá trị của biến và chỉ rõ dấu "=" có thể xảy ra.

Ta kí hiệu min P là GTNN của P ; max P là GTLN của P.

c) Bằng cách tương tự, ta có thể chứng minh được nếu a và b trái dấu *thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = -b$).*

BÀI TẬP

229. Cho các số dương a, b, c, d sao cho a > b ; c > d. Chứng minh rằng $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

230. Chứng minh rằng $(a - 1)(a - 2)(a - 3)(a - 4) + 1 \geq 0$.

231. Cho x > y, chứng minh rằng $x^5 - y^5 \geq xy^4 - x^4y$.

232. Cho $a \geq 0$; $b \geq 0$, chứng minh rằng $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

233. Cho a + b > 2, chứng minh rằng $a^4 + b^4 > 2$.

234. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{n^2} < 1 \text{ với } n \in \mathbf{N} ; n \geq 2.$$

235. Cho ba số dương a, b, c sao cho abc = 1 và $a + b + c < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng :

a) $(a-1)(b-1)(c-1)<0$;

b) Trong ba số dương a, b, c có một số nhỏ hơn 1, hai số lớn hơn 1.

236. Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ với $a, b>0$;

b) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ với a, b, c là ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó.

237*. Kí hiệu [a] là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Chứng minh rằng $[x]+[y]\leq[x+y]$.

238. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $A = ad + bc$ trong đó $a, b, c, d > 0$ và $abcd = 1$;

b) $B=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ trong đó $a, b, c > 0$.

239. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $C = x^2 - 7x + 11$; b) $D=\frac{-5}{x^2-4x+7}$.

240. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

a) $E=\frac{2x^2+4x+9}{x^2+2x+4}$; b*) $F=\frac{6x-8}{x^2+1}$.

Chuyên đề 3

Phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Trong §1 ta đã gặp nhiều bài toán về chứng minh bất đẳng thức. Ở đó ta đã dùng các phương pháp sau để chứng minh :

1. Dùng định nghĩa

Muốn chứng minh $A \geq B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh $A - B \geq 0$ (xem ví dụ 31).

2. Dùng các tính chất của bất đẳng thức

Từ các bất đẳng thức đã biết, ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức phải chứng minh (xem ví dụ 30).

Trước khi làm quen với một số phương pháp khác ta nên nhớ một số *hằng bất đẳng thức* hay dùng.

1. Bất đẳng thức Cô-si (dạng không chứa dấu căn)

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \ (*) \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

Từ (*) ta suy ra hai hệ quả :

a) Nếu hai số không âm có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

b) Nếu hai số không âm có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

• Mở rộng : với a, b, c, d ≥ 0 thì : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c$) ; $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d$).

2. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki

$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ tồn tại số k sao cho $x = ka$, $y = kb$ (*)) (nếu $a \neq 0$, $b \neq 0$ thì (*) được viết $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$).

3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với a, b > 0 (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

4. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với a, b > 0 (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$)

$|a - b| \geq |a| - |b|$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq 0$).

Bây giờ ta xét thêm một số phương pháp khác để chứng minh bất đẳng thức.

1. Phương pháp biến đổi tương đương

Ví dụ 32

Chứng minh bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

Giải

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a + b)^2 - 2(a^2 + b^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(a^2 - 2ab + b^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(a - b)^2 \leq 0 \quad \text{(dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a = b).$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

Nhận xét

1. Nội dung của phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng cách dùng các phép biến đổi tương đương là : giả sử phải chứng minh $A > B$ (1), ta biến đổi tương đương $A > B \Leftrightarrow A_1 > B_1 \Leftrightarrow A_2 > B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow C > D$. Nếu bất đẳng thức cuối đúng thì bất đẳng thức đầu tiên (1) là đúng. Cần chú ý là nếu chưa chứng tỏ được bất đẳng thức cuối đúng thì chưa thể kết luận bất đẳng thức đầu tiên là đúng.

2. Ta cũng có thể giải ví dụ trên bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki.

Ta có $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.

Với $x = y = 1$ thì ta được $(a \,.\, 1 + b \,.\, 1)^2 \leq (a^2 + b^2)(1^2 + 1^2)$

hay $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

2. Phương pháp phản chứng

Ví dụ 33

Cho a, b, c là 3 số dương nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai :

$a(1-b) > \frac{1}{4}$; $b(1-c) > \frac{1}{4}$; $c(1-a) > \frac{1}{4}$.

Giải

Giả sử cả 3 bất đẳng thức đã cho đều đúng, nghĩa là

$a(1-b) > \frac{1}{4}$; $b(1-c) > \frac{1}{4}$; $c(1-a) > \frac{1}{4}$.

Nhân từng vế cả 3 bất đẳng thức này ta được $abc(1-b)(1-c)(1-a) > \frac{1}{64}$ (1).

Mặt khác, vì $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow a - a^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow a(1-a) \leq \frac{1}{4}$.

Tương tự $b(1-b) \leq \frac{1}{4}$; $c(1-c) \leq \frac{1}{4}$.

Nhân từng vế 3 bất đẳng thức này ta được

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{64}. \qquad (2)$$

Hai bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn nhau. Vậy điều giả sử là sai, từ đó suy ra trong 3 bất đẳng thức đã cho, ít nhất cũng có một bất đẳng thức sai.

3. Phương pháp xét các khoảng giá trị của biến

Ví dụ 34

Cho $A = x^{10} - x^9 + x^4 - x + 1$.

Chứng minh rằng $A > 0$.

Giải

* Xét trường hợp $x \geq 1$

$$A = x^9(x-1) + x(x^3-1) + 1.$$

Do $x \geq 1$ nên $x^9 > 0$; $x - 1 \geq 0$; $x^3 - 1 \geq 0$

Vậy $A > 0$.

* Xét trường hợp $x < 1$

$$A = x^{10} + x^4 (1 - x^5) + (1 - x).$$

Do $x < 1$ nên $1 - x^5 > 0$; $1 - x > 0$.

Mặt khác $x^{10} \geq 0$; $x^4 \geq 0$ nên $A > 0$.

Tóm lại với mọi giá trị của x ta đều có $A > 0$.

4. Phương pháp quy nạp toán học

Ví dụ 35

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ thì

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots 2n > 2^n. \qquad (1)$$

Giải

Dễ thấy bất đẳng thức (1) đúng với $n = 2$.

Giả sử bất đẳng thức (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$) nghĩa là

$$(k + 1)(k + 2)(k + 3) \ldots 2k > 2^k$$

(đây là giả thiết quy nạp) ta phải chứng minh bất đẳng thức (1) đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh $(k + 2)(k + 3)(k + 4) \ldots 2(k + 1) > 2^{k+1}$

hay $(k + 2)(k + 3)(k + 4) \ldots (2k + 2) > 2^{k+1}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$$(k + 1)(k + 2)(k + 3) \ldots (2k) > 2^k$$

$$\Rightarrow \quad (k + 1)(k + 2)(k + 3) \ldots (2k)(2k + 1) > 2^k$$

$$\Rightarrow \quad 2(k + 1)(k + 2)(k + 3) \ldots (2k)(2k + 1) > 2 \cdot 2^k$$

$$\Rightarrow \quad (k + 2)(k + 3) \ldots (2k)(2k + 1)(2k + 2) > 2^{k+1}.$$

Vậy bất đẳng thức (1) đúng với mọi số tự nhiên lớn hơn 1 nghĩa là

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots (2n) > 2^n.$$

Nhận xét

Bất đẳng thức trong ví dụ 35 là một bất đẳng thức mà hai vế có chứa số tự nhiên n.

Với những mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n, ta thường dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh. Nội dung của nó gồm ba bước :

– Chứng minh mệnh đề đúng với n = 0 (trong ví dụ trên, đúng với số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 1 là n = 2).

– Giả sử mệnh đề đúng với n = k (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

*– Kết luận : Mệnh đề đúng với mọi n $\in$ **N** (trong ví dụ trên là mọi số tự nhiên n > 1).*

Bước 2 là bước quan trọng nhất. Ở bước này trong ví dụ trên ta có sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức dưới dạng phương pháp làm trội.

Từ giả thiết quy nạp (k + 1)(k + 2)(k + 3)... k > 2k ta đã làm trội *vế trái lên bằng cách nhân vế trái với một số tự nhiên lớn hơn 1 là (2k + 1) từ đó suy ra :*

$$(k + 1)(k + 2)(k + 3)\ldots (2k)(2k + 1) > 2^k.$$

Ta cũng đã từng dùng phương pháp làm trội *khi giải bài tập 234.*

BÀI TẬP

241. Cho a + b + c = 1, chứng minh rằng $ab + bc + ca < \frac{1}{2}$.

242. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4 \geq 2(a + b + c + d)$;

c) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

243. Cho a + b + c + d = 2. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$.

244. Cho ba số dương x, y, z thoả mãn xy + yz + zx = 12.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^4 + y^4 + z^4$.

245. Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$ (1) ; b) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{1+xyz}$.

246. Cho a, b, c > 0, chứng minh rằng :

a) $\frac{a^3}{b} \geq a^2 + ab - b^2$; b) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.

247. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1 ; chứng minh rằng :

$$(1 + a)(1 + b) + (1 + b)(1 + c) + (1 + c)(1 + a) > 5.$$

248. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n-1}{n!} < 1$;

b) $\frac{2}{3} < S < 1$ trong đó $S = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + ... + \frac{1}{4n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

249. Cho $|x| \geq 1$; $|y| \geq 1$, chứng minh rằng $\left|\frac{x+y}{xy}\right| \leq 2$.

250. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

251. a) Cho a, b, c > 0, chứng minh rằng :

$$\frac{-a+b+c}{2a} + \frac{a-b+c}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} \geq \frac{3}{2} ;$$

b) Cho x, y, z > 0, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}.$$

252. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

a) $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$;

b) $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác ;

c) $a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$. (1)

253. Cho $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = k$.

Chứng minh rằng : $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{k^2}{n}$.

254. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

255. a) Cho x + 2y = 5 ; chứng minh rằng $x^2 + y^2 \geq 5$;

b) Cho 3x – 4y = 10 ; tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$.

256. a) Chứng minh rằng không có các số dương a, b, c nào thoả mãn cả ba bất đẳng thức :

$$a + \frac{1}{b} < 1 ; \quad b + \frac{1}{c} < 2 ; \quad c + \frac{1}{a} < 3.$$

b) Chứng minh rằng không có các số a, b, c nào thoả mãn cả ba bất đẳng thức :

$$|a - b| > |c| ; \quad |b - c| > |a| ; \quad |c - a| > |b|.$$

257. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $2^n > 2n + 1$ với $n \in \mathbf{N}$; $n \geq 3$;

b) $2^n > n^2$ với $n \in \mathbf{N}$; $n \geq 5$.

258. Giải các phương trình sau bằng phương pháp bất đẳng thức :

a) $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 5)$; (1)

b) $\frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4x + 6} = x^2 - 4x + 8$. (2)

259. a) Chứng minh rằng $A = 31x^4 - 6x + 17 > 0$ với mọi x.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$B = |x - 2| + |x - 3|.$$

260. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}.$$

261. Tìm giá trị lớn nhất ; giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

§2. Bất phương trình một ẩn. Tính chất của bất phương trình. Bất phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải

Kiến thức cơ bản

1. Bất phương trình ẩn x có dạng $A(x) < B(x)$ (hoặc $A(x) > B(x)$; $A(x) \leq B(x)$; $A(x) \geq B(x)$) trong đó A(x) và B(x) là hai biểu thức của cùng một biến x.
2. Hai bất phương trình tương đương là hai bất phương trình có cùng một tập hợp nghiệm.
3. Quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân.

   a) Khi chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia của một bất phương trình ta phải đổi dấu hạng tử đó.

   b) Khi nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải :

   – Giữ nguyên chiều của bất phương trình nếu số đó dương ;

   – Đổi chiều của bất phương trình nếu số đó âm.
4. Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$), trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$.

Bổ sung

1. Trường hợp bất phương trình thu gọn có hệ số của ẩn bằng 0

   Dạng 1 $0x + b < 0$.

   – Nếu $b < 0$ thì bất phương trình có nghiệm bất kì ;

   – Nếu $b \geq 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.

   Dạng 2 $0x + b > 0$.

   – Nếu $b > 0$ thì bất phương trình có nghiệm bất kì ;

   – Nếu $b \leq 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.

2. Một số bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Dạng 1 $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$.

Đặc biệt khi g(x) là hằng số $k > 0$

$$|f(x)| < k \quad \Leftrightarrow -k < f(x) < k.$$

Dạng 2 $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

Đặc biệt khi g(x) là hằng số $k > 0$

$$|f(x)| > k \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > k \\ f(x) < -k. \end{array}\right.$$

Dạng 3

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2;$$

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2.$$

Ví dụ 36

Giải và biện luận bất phương trình :

$$\frac{m(x-1)}{9} - \frac{x+2m}{6} < \frac{x-16}{18}. \qquad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow 2m(x-1) - 3(x+2m) < x - 16$

$\Leftrightarrow 2(m-2)x < 8(m-2)$.

Nếu $m > 2$ thì $x < 4$;

Nếu $m < 2$ thì $x > 4$;

Nếu $m = 2$ thì $0x < 0$; bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 37

Tìm nghiệm nguyên dương của bất phương trình

$$\frac{x^2 - 2x - 4}{(x+1)(x-3)} > 1. \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ : $x \neq -1$; $x \neq 3$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-4}{(x+1)(x-3)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-2x-4)-(x^2-2x-3)}{(x+1)(x-3)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x+1)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0$$

$\Leftrightarrow$ (x + 1) và (x – 3) trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 3 \text{ (thoả mãn ĐKXĐ).}$$

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1 ; 2\}$.

Nhận xét

Khi giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta không nên khử mẫu thức vì ta chưa xác định được chiều của bất phương trình mới. Ta làm theo các bước sau :

– Chuyển tất cả các hạng tử sang một vế (thường là vế trái), lúc đó vế kia là số 0.

– Thu gọn vế trái thành một phân thức.

– Xét dấu của phân thức ở vế trái, xem với những giá trị nào của ẩn thì vế trái có giá trị dương (hay âm), từ đó tìm được nghiệm của bất phương trình.

BÀI TẬP

262. Tìm giá trị nguyên của x nghiệm đúng cả hai bất phương trình sau :

$$\frac{x+24}{5} - \frac{x}{3} > x - \frac{x-2}{2} \quad (1) ; \qquad \frac{7x+3}{8} + \frac{x-3}{12} \geq 3. \quad (2)$$

263. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{22x-3}{21} - \frac{5x-2}{7} > \frac{2x+1}{6}$; b) $\frac{x-1}{5} - \frac{4x+3}{10} < \frac{1-5x}{25}$.

264. Giải bất phương trình :

$$\frac{x-15}{73}+\frac{x-13}{71}\le\frac{x-11}{69}+\frac{x-9}{67}.$$

265. Giải và biện luận các bất phương trình (m là tham số) :

a) $m(2x-m) \ge 2(x-m)+1$;

b) $m(2-x)+(m-1)^2 > 2x+5$;

c) $(m^2-m-1)x-5m > (3-m)x$.

266. Giải bất phương trình :

$$(m-2)x+\frac{mx+2}{m}>\frac{3}{m}-2x. \qquad (1)$$

267. Tìm giá trị của tham số m để 2 bất phương trình sau có đúng 1 nghiệm chung :

$$m(x+3)\le x+5 \qquad (1)$$

$$m(x+2)-3\ge x. \qquad (2)$$

268. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm âm

$$\frac{m(x+4)-5(m-1)}{x+1}=2. \qquad (1)$$

269. Tìm nghiệm nguyên của các bất phương trình :

a) $\frac{4x+3}{2x+1}<2$; b) $\frac{x-3}{x+5}+\frac{x+5}{x-3}<2$.

Giải các bất phương trình :

270. a) $|5x-2|<8$; b) $|3x+2|<5x-4$.

271. a) $3|x+1|>5$; b) $|x^2-1|>x+1$.

272. a) $|4x-3|<|4x+1|$; b) $|7x-1|>|7x+3|$.

273. $[x].\{x\}<2(x-2)$ (*).

(*) Xem chuyên đề 1 : Phần nguyên, phần lẻ của số hữu tỉ x – sách Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 7.

274. Giải phương trình :

a) $[6x - 5] = 2x + 3$; b) $\left[\dfrac{6x+5}{8}\right] = \dfrac{15x-4}{5}$.

Chuyên đề 4

Dấu của nhị thức bậc nhất

1. Ta đã gặp một số bất phương trình mà để giải chúng ta phải xét dấu của những nhị thức bậc nhất có dạng $ax + b$ $(a \neq 0)$.

Xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ nghĩa là xét xem với những giá trị nào của biến x thì $ax + b > 0$; với những giá trị nào của x thì $ax + b < 0$.

Đương nhiên $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$. Giá trị $x = -\dfrac{b}{a}$ gọi là nghiệm của nhị thức $ax + b$.

2. Định lí về dấu của nhị thức bậc nhất.

Nhị thức $ax + b$ $(a \neq 0)$ *cùng dấu với a* với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức ; *trái dấu với a* với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

x		$-\dfrac{b}{a}$	
$ax + b$	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a

3. Việc xét dấu của nhị thức bậc nhất có nhiều ứng dụng :

– Giải bất phương trình tích bằng cách xét dấu các nhân tử của tích. Nếu số nhân tử âm mà chẵn thì tích dương, trái lại tích sẽ âm.

– Giải bất phương trình thương bằng cách xét dấu của tử thức và mẫu thức. Nếu tử và mẫu cùng dấu thì thương sẽ dương, trái lại thương sẽ âm.

– Giải phương trình và bất phương trình có chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối bằng cách khử dấu giá trị tuyệt đối nhờ xét từng khoảng giá trị của ẩn.

– Rút gọn biểu thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối bằng cách khử dấu giá trị tuyệt đối nhờ xét từng khoảng giá trị của biến.

Ví dụ 38

Giải bất phương trình :

$$\frac{2x^2-1}{2x^2+7x-15} > 1. \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{2x^2+7x-15} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-7x+14}{(x+5)(2x-3)} > 0.$$

Các nhị thức $-7x + 14$; $x + 5$; $2x - 3$ có nghiệm lần lượt là 2 ; –5 ; 1,5.

Ta lập bảng xét dấu của biểu thức ở vế trái T

x		–5		1,5		2	
–7x + 14	+	|	+	|	+	0	–
x + 5	–	0	+	|	+	|	+
2x – 3	–	|	–	0	+	|	+
T	+	‖	–	‖	+	0	–

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x < -5$; $1,5 < x < 2$.

Nhận xét

Trong ví dụ trên, bảng xét dấu có 5 dòng.

– Dòng đầu ghi các giá trị của x từ nhỏ đến lớn, các giá trị này là nghiệm của các nhị thức có mặt trong biểu thức T.

– Các dòng thứ hai, thứ ba, thứ tư ghi các nhị thức có mặt và dấu của chúng ứng với các giá trị của biến.

– Dòng cuối là dòng tổng hợp, ghi dấu của biểu thức T :

- *Biểu thức T có dấu "+" nếu số dấu "–" của các nhị thức là chẵn ;*
- *Biểu thức T có dấu "–" nếu số dấu "–" của các nhị thức là lẻ.*

Kí hiệu ‖ để chỉ rằng tại các giá trị x = –5 ; x = 1,5 thì biểu thức T không được xác định.

Ví dụ 39

Giải phương trình $|x + 5| - |1 - 2x| = x.$ (1)

Giải

Để khử được dấu giá trị tuyệt đối ta phải xác định được dấu của các nhị thức trong dấu giá trị tuyệt đối. Muốn vậy ta lập bảng xét dấu các nhị thức $x + 5$ và $1 - 2x$.

x		−5		0,5	
x + 5	−	0	+	|	+
1 − 2x	+	|	+	0	−

Ta xét từng khoảng giá trị của x

- Xét $x < -5$, phương trình (1) trở thành

  $-(x + 5) - (1 - 2x) = x \Leftrightarrow 0x = 6$, vô nghiệm.

- Xét $-5 \le x \le 0,5$, phương trình (1) trở thành

  $(x + 5) - (1 - 2x) = x \Leftrightarrow x = -2$ (thuộc khoảng đang xét).

- Xét $x > 0,5$ phương trình (1) trở thành

  $(x + 5) - (2x - 1) = x \Leftrightarrow x = 3$ (thuộc khoảng đang xét).

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-2 ; 3\}$.

Nhận xét

Trong mỗi khoảng, nếu phương trình có nghiệm thuộc khoảng đang xét thì nghiệm đó là nghiệm của phương trình đã cho.

BÀI TẬP

- **Phương trình và bất phương trình có chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối**

275. Giải các phương trình :

a) $|x - 1| + |x - 4| = 3$; b) $|3x - 1| - |2x + 5| = 4$;

c) $|x^2 - 5x - 6| = x^2 + x - 24$.

276. Giải phương trình $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.

277. Tính tổng các nghiệm của phương trình :

$$|2x + 3| = 3|2x - 3|. \qquad (1)$$

278. Giải và biện luận phương trình theo tham số m :

a) $2|x - m| + |x + 2m| = 7m$ với $m > 0$; (1)

b) $\dfrac{m^2 - 2m|x+m|}{x} = x$. (2)

279. Giải các bất phương trình :

a) $|x + 3| + |x - 1| < 6$; b) $|x + 5| - |x - 7| < 4$;

c) $|x + 2| - 3|x - 1| < 2(x + 4)$.

280. Cho $|x - 5| + |x - 7| < m$ trong đó $m > 0$. Hỏi m có thể lấy những giá trị nào ?

- **Giải bất phương trình tích và thương**

281. Giải bất phương trình

$$\frac{x(x+1)}{22} > 5.$$

282. Tìm nghiệm nguyên của các bất phương trình :

a) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x < 0$;

b) $x^6 - 2x^4 - 7x^2 - 4 < 0$.

283. Giải bất phương trình :

a) $\dfrac{x^2 - 9}{x^4 - 3x^2 - 4} < 0$ (1) ; b) $\dfrac{5x+1}{x+3} - \dfrac{3x-2}{x-1} > 2$. (2)

- **Biểu thức có dấu giá trị tuyệt đối**

284. Cho $M = \dfrac{|x+3| + (x^2 + 5x + 6)}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$.

a) Rút gọn M ;

b) Tính giá trị của M với $x = -2$;

c) Tìm giá trị của x để $M = -\dfrac{1}{5}$.

285. Cho $P = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

§3. Ôn tập chương IV và ôn tập cuối năm

Ví dụ 40

Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình sau nhỏ hơn 3 :

$$\frac{m}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{2m}{x^2+x}. \qquad (1)$$

Giải

ĐKXĐ : $x \neq 0$; $x \neq -1$.

(1) $\Rightarrow mx + m - 4x = 2m$

$\Leftrightarrow \quad (m-4)x = m.$

– Nếu $m = 4$ thì $0x = 4$, vô nghiệm.

– Nếu $m \neq 4$ thì $x = \dfrac{m}{m-4}$ với điều kiện $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

Xét $\dfrac{m}{m-4} \neq 0$ được $m \neq 0$.

Xét $\dfrac{m}{m-4} \neq -1$ được $m \neq 2$.

Phương trình có nghiệm $x < 3 \Leftrightarrow \dfrac{m}{m-4} < 3$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{m-4} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{m-6}{m-4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 4. \end{array}\right.$$

Kết hợp các điều kiện ta được $x < 3$ khi và chỉ khi $m > 6$ hoặc $m < 4$ và $m \neq 0$; $m \neq 2$.

Nhận xét

Trong ví dụ trên ta đã làm 2 việc :

– Giải phương trình ẩn x (có tham số m).

– Giải bất phương trình ẩn m.

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu trước tiên phải nêu ĐKXĐ rồi khử mẫu.

Đối với bất phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta không khử mẫu mà phải chuyển các hạng tử ở một vế sang vế kia rồi tiến hành xét dấu.

Đó là sự khác nhau cơ bản giữa giải phương trình và giải bất phương trình có chứa ẩn ở mẫu thức.

Ví dụ 41

Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{4x - x^3}{1 - 4x^2} - x\right) : \left(\dfrac{4x^2 - x^4}{1 - 4x^2} + 1\right)$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$.

Giải

a) $P = \dfrac{4x - x^3 - x + 4x^3}{1 - 4x^2} : \dfrac{4x^2 - x^4 + 1 - 4x^2}{1 - 4x^2} = \dfrac{3x^3 + 3x}{1 - 4x^2} : \dfrac{1 - x^4}{1 - 4x^2}$

$= \dfrac{3x(x^2 + 1)}{(1 - x^2)(1 + x^2)} = \dfrac{3x}{1 - x^2}$.

b) ĐKXĐ : $x \neq \pm\dfrac{1}{2}$; $x \neq \pm 1$.

$$P > 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{(1 - x)(1 + x)} > 0.$$

x		−1		0		1	
x	−	|	−	0	+	|	+
1 − x	+	|	+	|	+	0	−
1 + x	−	0	+	|	+	|	+
P	+	‖	−	0	+	‖	−

Qua bảng ta thấy với $x < -1$; $0 < x < 1$ thì $P > 0$.

Kết hợp với ĐKXĐ ta được $P > 0$ khi và chỉ khi $x < -1$ hoặc $0 < x < 1$ và $x \neq \frac{1}{2}$.

Nhận xét

– Định lí về dấu của nhị thức bậc nhất là một phương tiện quan trọng giúp ta xét dấu của một biểu thức được dễ dàng. Muốn vận dụng được định lí này, ta phải viết biểu thức cần xét dấu dưới dạng một tích hoặc một thương của những nhị thức bậc nhất.

– Trong ví dụ 41 ở trên, ta đã dùng định nghĩa của hai phân thức bằng nhau và các quy tắc của các phép toán về phân thức để biến đổi rút gọn biểu thức P. Còn trong ví dụ 40, ta đã dùng phép biến đổi tương đương *để giải phương trình và bất phương trình. Phép biến đổi biểu thức hữu tỉ và phép biến đổi tương đương các phương trình là hai phép biến đổi quan trọng trong chương trình đại số lớp 8.*

BÀI TẬP

286. Cho 4 số a, b, c, d ≥ 0. Biết rằng :

$a + d = b + c$ (1) ; $a + b > c + d$ (2) ; $c > b + d$ (3).

Hãy sắp thứ tự 4 số a, b, c, d.

287. Cho 21 số mà tổng của 10 số bất kì đều lớn hơn tổng của 11 số còn lại. Chứng minh rằng cả 21 số đều âm.

288. Hai đội 8A và 8B tổ chức chạy thi, mỗi đội có 3 người. Người nào về đích thứ nhất thì được 1 điểm, về thứ nhì được 2 điểm,... Đội nào có tổng số điểm ít hơn sẽ thắng. Giả sử không có hai người nào về đích cùng một lúc, hỏi đội thắng có thể ghi được tổng cộng bao nhiêu điểm khác nhau ?

289. Cho a, b, c > 0, chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

290. Cho x, y là hai số khác 0, chứng minh rằng :

$$3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) \leq 4.$$

291. Cho a, b, c là 3 số dương nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng 3 số $a(2-b)$; $b(2-c)$; $c(2-a)$ không thể đồng thời lớn hơn 1.

292. Cho x, y, z > 0 thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx}.$$

293. a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$.

b) Cho $4x + 5y = 40$, tính giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy$.

294. Cho $|x - 9| < 1$ và $|x^2 - 81| < m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m.

295. Cho $x, y \ge 0$ và $x + y \le 12$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy^2(8 - x - y)$.

296. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biến x thoả mãn đồng thời

$$\begin{cases} x + a + b + c = 5 & (1) \\ x^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 13 & (2) \end{cases}$$ trong đó a, b, c là tham số.

297. Giải phương trình :

a) $|2x - 3| + |1 - 3x| = |x + 2|$;

b) $|5x - |5x - 10|| = -10m^2x$ với $m \ne 0$ (1).

298. Giải phương trình $|x - 99|^{100} + |x - 100|^{101} = 1$.

299. Tìm giá trị của m để phương trình

$$\frac{m}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = 4 \quad (1)$$ có nghiệm lớn hơn hoặc bằng – 2.

300. Cho số $A = \underbrace{99...9}_{n}$. Hãy so sánh tổng các chữ số của A với tổng các chữ số của A^2.

301. Cho ab = cd, hãy rút gọn biểu thức

$$P = \frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}.$$

302. Cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, tính giá trị của biểu thức :

$$P=\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}.$$

303. Cho $A=\frac{x^2+x^{-2}}{x^2-x^{-2}}$; $B=\frac{x^4+x^{-4}}{x^4-x^{-4}}$.

a) Tính B theo A ;

b) Tính giá trị của B khi A = 3.

304. Cho $M=\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.\frac{4^3-1}{4^3+1}...\frac{100^3-1}{100^3+1}$.

Chứng minh rằng $M>\frac{2}{3}$.

305. Cho biểu thức

$$P=\frac{x^2+x}{x^2-2x+1}:\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{2-x^2}{x^2-x}\right).$$

a) Rút gọn P ;

b) Tìm x để P < 1 ;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi x > 1.

306*. Cho a, b ≥ 0 ; n ∈ **N**. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\le\frac{a^n+b^n}{2}.$$

Phần HÌNH HỌC

Chương I

TỨ GIÁC

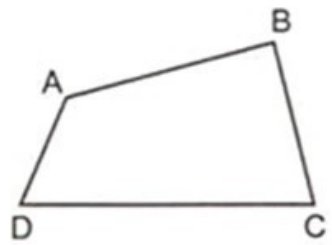
§1. Tứ giác

Kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa

– Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không nằm trên một đường thẳng.

– Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác (h.1). Từ nay khi nói đến tứ giác mà không nói gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.



Hình 1

2. Tính chất

Tổng các góc của một tứ giác bằng 360°.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^o.$$

Bổ sung

Tổng bốn góc ngoài ở bốn đỉnh của một tứ giác bằng 360°.

Ví dụ 1

Cho tứ giác ABCD, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^o$. Vẽ đường phân giác của các góc A và C. Cho biết hai đường phân giác này không trùng nhau, chứng minh rằng chúng song song với nhau.

Giải (h.2)

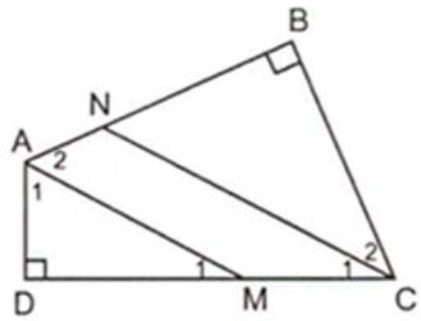
Gọi M là giao điểm của tia phân giác góc A với CD và N là giao điểm của tia phân giác góc C với AB. Tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^o$ nên

$\widehat{A} + \widehat{C} = 360^o - (90^o + 90^o) = 180^o$

suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 180^o : 2 = 90^o$.

Mặt khác, $\widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^o$ (vì tam giác ADM vuông tại D)

nên $\widehat{C_1} = \widehat{M_1} \Rightarrow AM // CN$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).



Hình 2

Nhận xét

Trong một tứ giác, muốn tính tổng số đo của hai góc ta lấy 360° trừ đi tổng số đo của hai góc kia. Muốn tính số đo của một góc, ta lấy 360° trừ đi tổng số đo của ba góc kia.

BÀI TẬP

1. Cho tứ giác ABCD, phân giác các góc C và D cắt nhau tại O.

Chứng minh rằng $\widehat{COD} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$.

2. Cho tứ giác ABCD không có hai góc nào bằng nhau. Chứng minh rằng tứ giác đó có ít nhất một góc nhọn, một góc tù.

3. Cho tứ giác ABCD, M là một điểm nằm trong tứ giác đó. Xác định vị trí của M để tổng MA + MB + MC + MD nhỏ nhất.

4. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng :

a) Tổng hai cạnh đối nhỏ hơn tổng hai đường chéo.

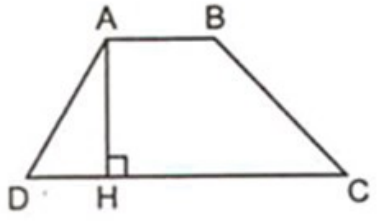
b) Nếu AD + AC < BD + BC thì AD < BD.

5. *Đố* : Một xưởng mộc có thừa rất nhiều miếng gỗ hình tứ giác có hình dạng và kích thước như nhau. Đố em dùng những miếng gỗ ấy ghép lại để lát sàn nhà (lát kín mặt phẳng, không có chỗ nào hổng mà không phải cưa đi một số góc, trừ những chỗ tiếp giáp bốn bức tường).

§2. Hình thang. Hình thang cân

Kiến thức cơ bản

1. Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song (h.3).

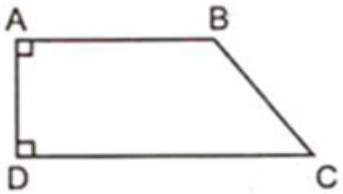


Hình 3

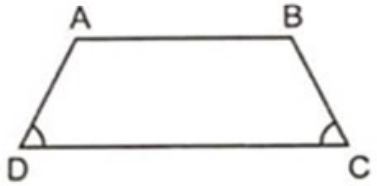
Đặc biệt :

– Hình thang vuông là hình thang có một cạnh bên vuông góc với hai đáy (h.4).

– Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau (h.5).



Hình 4



Hình 5

2. Tính chất của hình thang cân.

Trong hình thang cân :

– Hai cạnh bên bằng nhau ;

– Hai đường chéo bằng nhau.

3. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân (2 cách)

– Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

– Theo định nghĩa.

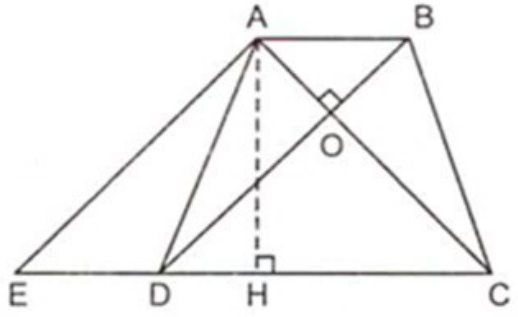
Ví dụ 2

Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có hai đường chéo vuông góc. Biết đường cao AH = h, tính tổng hai đáy.

Giải (h.6)

Vẽ AE // BD ($E \in CD$). Vì $AC \perp BD$ (gt) nên $AC \perp AE$ (quan hệ giữa tính song song và vuông góc).

Ta có AE = BD ; AB = DE (tính chất đoạn chắn), AC = BD (tính chất đường chéo hình thang cân). Suy ra AC = AE ; ΔAEC vuông cân tại A ; đường cao AH cũng là trung tuyến, do đó AH $= \frac{1}{2}$EC = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) hay AB + CD = 2h.



Hình 6

Nhận xét

Khi giải toán về hình thang, đặc biệt là về hình thang cân, nếu cần vẽ đường phụ ta có thể :

– Từ một đỉnh vẽ đường thẳng song song với một đường chéo (như ví dụ trên).

– Từ một đỉnh vẽ đường thẳng song song với một cạnh bên.

– Từ một đỉnh vẽ thêm một đường cao.

Ví dụ 3

Tứ giác ABCD có AD = AB = BC và $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^o$. Chứng minh rằng :

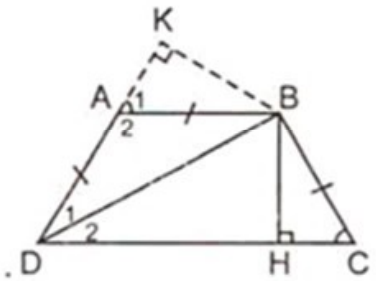
a) Tia DB là tia phân giác của góc D ;

b) Tứ giác ABCD là hình thang cân.

Giải (h.7)

a) Vẽ BH $\perp$ CD, BK $\perp$ AD. Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{C}$ (cùng bù với $\widehat{A}_2$) do đó ΔBHC = ΔBKA (cạnh huyền, góc nhọn), suy ra BH = BK.

Vậy DB là tia phân giác của góc D.



Hình 7

b) Góc A_1 là góc ngoài tại đỉnh A của tam giác cân ADB nên $\widehat{A}_1 = 2\widehat{D}_1 \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{ADC}$ $\Rightarrow$ AB // CD (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Vậy tứ giác ABCD là hình thang. Hình thang này có $\widehat{ADC} = \widehat{C}$ (vì cùng bằng $\widehat{A}_1$) nên là hình thang cân.

Nhận xét

Để chứng minh một tứ giác là hình thang cân, trước tiên phải chứng minh tứ giác đó là hình thang, sau đó chứng minh hai góc kề một đáy bằng nhau (theo định nghĩa) hoặc hai đường chéo bằng nhau.

Trong ví dụ trên, sau khi đã chứng minh được AB // CD cần tránh sai lầm cho rằng vì AD = BC (gt) nên ABCD là hình thang cân, sai lầm ở chỗ hình thang có hai cạnh bên bằng nhau chưa chắc đã là hình thang cân.

BÀI TẬP

6. Tứ giác ABCD có $\widehat{D} < \widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$, bốn góc này làm thành một dãy cộng (tức là $\widehat{C} - \widehat{D} = \widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{A} - \widehat{B}$). Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

7. Cho hình thang ABCD (AB // CD), M là trung điểm của BC. Cho biết DM là tia phân giác của góc D. Chứng minh rằng tia AM là tia phân giác của góc A.

8. Tứ giác ABCD có AD = BC và AC = BD. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

9. Cho điểm O nằm trong tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho OD // BC ; OE // CA ; OF // AB. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOD}$;

b) Ba đoạn thẳng OA, OB, OC thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

10. Cho điểm O nằm trong tam giác đều ABC cạnh a. Qua O vẽ các đường thẳng DE // BC ($D \in AB$; $E \in AC$) ; MN // AC ($M \in BC$; $N \in AB$) ; PQ // AB ($P \in AC$; $Q \in BC$).

a) Chứng minh rằng tứ giác DECB là hình thang cân và ΔOMQ là tam giác đều.

b) Vẽ $OH \perp AB$; $OI \perp BC$; $OK \perp AC$. Chứng minh rằng AH + BI + CK = 1,5a.

11*. Cho tam giác ABC, O là điểm cách đều ba cạnh.Trên tia BC lấy điểm M sao cho BM = BA. Trên tia CB lấy điểm N sao cho CN = CA. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của O trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng : a) NE = MF ; b) Tam giác MON là tam giác cân.

§3. Đường trung bình của tam giác. Đường trung bình của hình thang

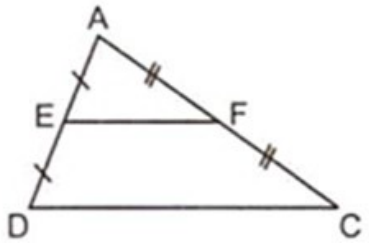
Kiến thức cơ bản

1. a) Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

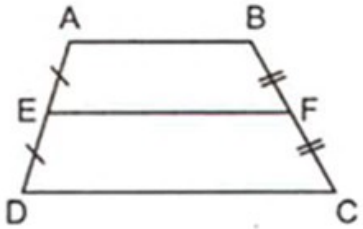
   b) Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai cạnh đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.

2. a) Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác (h.8).

   b) Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang (h.9).



Hình 8



Hình 9

3. a) Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

   b) Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy..

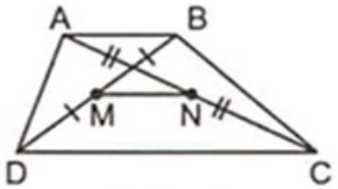
Bổ sung

Trong hình thang có hai cạnh bên không song song, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo thì song song với hai đáy và bằng một nửa hiệu hai đáy.

Trong h.10 :

$$MN \parallel AB \parallel CD$$

$$MN = \frac{CD - AB}{2}.$$



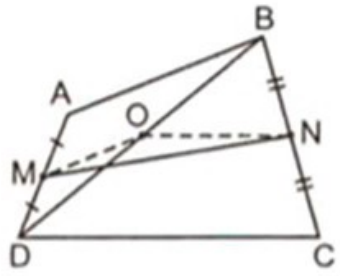
Hình 10

Ví dụ 4

Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng nếu $MN = \frac{AB + CD}{2}$ thì tứ giác ABCD là hình thang.

Giải (h.11)

Gọi O là trung điểm của BD. Các đoạn thẳng OM, ON lần lượt là đường trung bình của ΔABD và ΔBCD nên



Hình 11

$$OM = \frac{AB}{2} \text{ và } OM \,//\, AB; \qquad (1)$$

$$ON = \frac{CD}{2} \text{ và } ON \,//\, CD. \qquad (2)$$

Suy ra $OM + ON = \frac{AB + CD}{2}$. Mặt khác $MN = \frac{AB + CD}{2}$ (gt) nên

$$OM + ON = MN$$

suy ra O nằm giữa M và N. Vậy ba điểm M, O, N thẳng hàng (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra AB // CD do đó tứ giác ABCD là hình thang.

Nhận xét

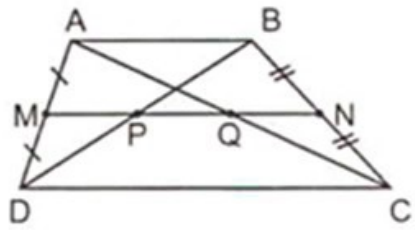
Trong giả thiết của bài toán có trung điểm hai cạnh đối của tứ giác, nối hai điểm này ta chưa được đường trung bình của tam giác nào cả. Vì vậy ta đã vẽ thêm trung điểm của đường chéo BD (hoặc AC) và vận dụng được định lí đường trung bình của tam giác để chứng minh.

Việc vẽ thêm trung điểm của một đoạn thẳng để vận dụng định lí đường trung bình của tam giác là việc vẽ đường phụ thường gặp khi giải bài toán hình học.

Ví dụ 5

Cho hình thang ABCD (đáy AB nhỏ hơn đáy CD). Tìm điều kiện của hình thang này để hai đường chéo của nó chia đường trung bình làm 3 phần bằng nhau.

Giải (h.12)



Hình 12

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC ; MN cắt BD tại P, cắt AC tại Q ; MN là đường trung bình của hình thang nên MN // AB // CD.

Xét ΔABD có MA = MD ; MP // AB nên PB = PD.

Xét ΔADC có MA = MD ; MQ // CD nên QA = QC.

MP và NQ lần lượt là đường trung bình của ΔABD và ΔABC nên

$$MP = NQ = \frac{AB}{2}.$$

PQ là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của hình thang ABCD nên

$$PQ = \frac{CD - AB}{2}.$$

Ta có $MP = PQ = QN \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$

$\Leftrightarrow AB = CD - AB$

$\Leftrightarrow CD = 2.AB.$

Nhận xét

Nếu không có điều kiện đáy AB nhỏ hơn đáy CD thì khi AB = 2CD, chứng minh tương tự như trên ta vẫn có hai đường chéo chia đường trung bình làm ba phần bằng nhau.

Tóm lại, nếu hình thang có một đáy gấp đôi đáy kia thì hai đường chéo của nó chia đường trung bình làm ba phần bằng nhau.

BÀI TẬP

- **Đường trung bình của tam giác**

12. Tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 108^o$. Vẽ phân giác AD và BE. Chứng minh rằng $AD = \frac{1}{2}BE$.

13. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = \frac{1}{4}AB$; $AE = \frac{1}{2}AC$. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại F. Chứng minh rằng $CF = \frac{1}{2}BC$.

14. Tam giác ABC vuông tại A có AB = 8 ; BC = 17. Vẽ vào trong ΔABC một tam giác vuông cân DAB có cạnh huyền là AB. Gọi E là trung điểm của BC. Tính DE.

15. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Trên AM lấy hai điểm D và E sao cho AD = DE = EM. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho CF = CM. Chứng minh rằng ba đường thẳng AC, BE và DF đồng quy.

16*. Cho tam giác ABC nhọn. Dựng ra phía ngoài tam giác này các tam giác đều ABE và ACF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và CF. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $CD = \frac{1}{4}BC$. Chứng minh rằng $DM \perp DN$.

- **Đường trung bình của hình thang**

17. Cho đoạn thẳng AB = 4cm. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Lấy điểm M trên tia Ax, điểm N trên tia By sao cho AM + BN = 3cm. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định. Tính khoảng cách từ điểm cố định đó đến A và B.

18. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB = a ; BC = b ; CD = c ; DA = d (d < c). Các tia phân giác trong của góc A và góc D cắt nhau tại M, các tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau tại N.

a) Chứng minh rằng MN // AB ;

b) Tính độ dài MN.

19. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BM và CN. Trên cạnh BC lấy các điểm D và E sao cho BD = DE = EC. Gọi H là giao điểm của AD và BM, gọi K là giao điểm của AE và CN.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng MK, NH và BC đồng quy.

b) Giả sử BC = 6cm, tính HK.

20. Cho hình thang ABCD, hai cạnh bên AD và BC không song song. Gọi M là trung điểm của AB. Vẽ MH // AD ($H \in BD$) và MK // BC ($K \in AC$). Gọi O là

giao điểm của đường thẳng qua H và vuông góc với MH và đường thẳng qua K vuông góc với MK. Chứng minh rằng điểm O cách đều hai đỉnh C và D.

21. Cho tam giác ABC. Gọi D là một điểm trên đường trung tuyến AM. Qua D vẽ đường thẳng xy cắt hai cạnh AB và AC. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của A, B,C trên xy. Xác định vị trí của D để $AH = \frac{BI + CK}{2}$.

§4. Dựng hình bằng thước và compa. Dựng hình thang

Kiến thức cơ bản

1. Dụng cụ dựng hình : Thước và compa.

2. Các bước giải một bài toán dựng hình

Gồm 4 bước :

a) Phân tích ; b) Cách dựng ; c) Chứng minh ; d) Biện luận.

Đối với một bài toán đơn giản ta có thể không trình bày bước phân tích.

Bổ sung

1. Trong bước *phân tích* ta giả sử đã dựng được hình thoả mãn đề bài. Trên cơ sở đó xét xem bộ phận nào (đoạn thẳng, tam giác...) dựng được ngay, bộ phận nào còn phải xác định thường được quy về việc xác định một điểm thoả mãn hai điều kiện. Ứng với mỗi điều kiện, điểm phải tìm nằm trên một đường nào đó. Giao điểm của hai đường ấy là điểm cần tìm.

2. Trong bước *biện luận* ta phải xét xem với điều kiện nào của các yếu tố đã cho thì dựng được hình và khi đó dựng được bao nhiêu hình.

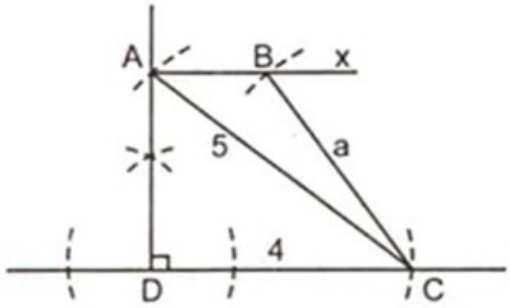
Nếu bài toán cho *dựng hình về kích thước*, không yêu cầu chỉ ra vị trí của hình phải dựng thì *hai hình bằng nhau chỉ coi là một nghiệm hình.*

Ví dụ 6

Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết : $\widehat{D} = 90^o$; CD = 4cm ; AC = 5cm ; BC = a (cm).

Giải

1. Phân tích (h.13)



Hình 13

Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn đầu bài, ta thấy :

– Δ ADC dựng được ngay (cạnh huyền, cạnh góc vuông) ;

– Đỉnh B thoả mãn hai điều kiện :

B nằm trên tia Ax // CD (Ax và DC cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AD) và B nằm trên đường tròn (C ; a).

2. Cách dựng

– Dựng Δ ADC vuông tại D sao cho DC = 4cm ; CA = 5cm ;

– Dựng tia Ax // DC (Ax và DC cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AD) ;

– Dựng đường tròn (C ; a) cắt tia Ax tại B ;

– Nối BC ta được hình thang ABCD phải dựng.

3. Chứng minh

Thật vậy, theo cách dựng tứ giác ABCD có :

AB // CD nên tứ giác ABCD là hình thang.

Hình thang này có $\widehat{D} = 90^o$; DC = 4cm ; AC = 5cm ; BC = a (cm).

4. Biện luận

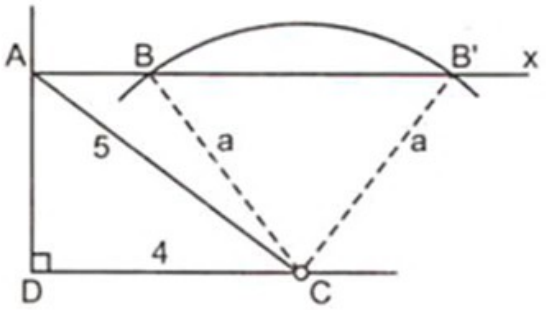
Xét Δ ADC vuông tại D, áp dụng định lí Py-ta-go ta tính được AD = 3cm.

– Nếu a < 3 thì đường tròn (C ; a) không cắt tia Ax do đó không dựng được điểm B, *bài toán không có nghiệm hình.*

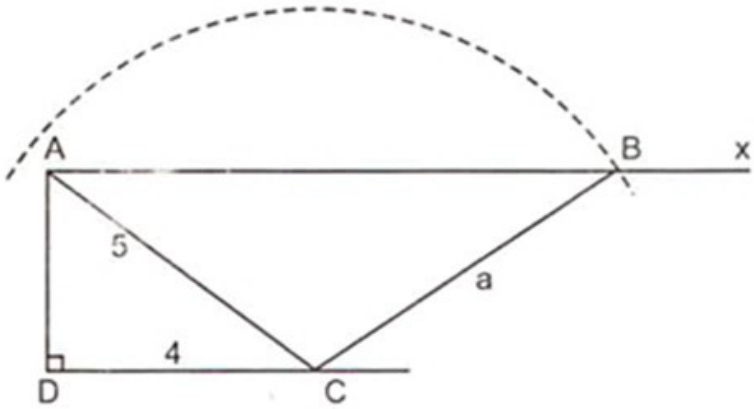
– Nếu a = 3 thì đường tròn (C ; a) chỉ có một điểm chung với tia Ax, ta dựng được một điểm B do đó *bài toán có một nghiệm hình.*

– Nếu 3 < a < 5 thì đường tròn (C ; a) cắt tia Ax tại hai điểm B và B', *bài toán có hai nghiệm hình* là hình thang ABCD và AB'CD (h.14).

– Nếu a ≥ 5 thì đường tròn (C ; a) cắt tia Ax tại một điểm B (khác điểm A) nên bài toán chỉ có một nghiệm hình (h.15).



Hình 14



Hình 15

Nhận xét

Dựng tam giác cần biết 3 yếu tố của nó trong đó có ít nhất là một yếu tố về độ dài.

Dựng hình thang cần biết 4 yếu tố của nó (cạnh, góc, đường chéo,...) trong đó số góc cho trước không được quá 2 (vì trong hình thang nếu biết số đo của hai góc thì sẽ tính được số đo của hai góc còn lại).

BÀI TẬP

22. Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết :

$AB = 2cm$; $BC = 2,5cm$; $CD = 6cm$; $\widehat{D} = 30^o$.

23. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD) biết :

$AB = 2cm$; $CD = 5cm$; $AC = 4cm$.

24. Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD) biết :

$AB = BC = 3cm$ và $AC \perp AD$.

25. Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết :

$AC = CD = 4cm$; $BD = 3cm$; $\widehat{COD} = 120^o$ (O là giao điểm hai đường chéo).

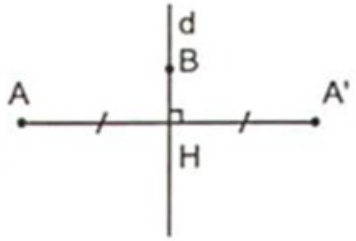
26*. Dựng tam giác ABC biết $\widehat{B} = 60^o$; $AC = b$; $AB + BC = s$.

§5. Đối xứng trục

Kiến thức cơ bản

1. Hai điểm A và A' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng AA' (h.16).

   Quy ước : Nếu B $\in$ d thì điểm đối xứng với B qua d chính là B.



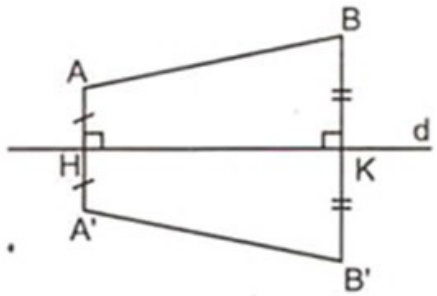
Hình 16

2. Hai hình F và F' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua d với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.

   Định lí :

   – Hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu A đối xứng với A' ; B đối xứng với B' qua d (h.17).

   – Hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu A đối xứng với A' ; B đối xứng với B' ; C đối xứng với C' qua đường thẳng d.



Hình 17

3. *Định lí :* Nếu hai đoạn thẳng (hai góc, hai tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

4. Đường thẳng d là trục đối xứng của hình F nếu điểm đối xứng qua d của mỗi điểm thuộc hình F cũng thuộc hình F.

   Đặc biệt : Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của một hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân (h.17).

Bổ sung

– Hai đường thẳng a và a' đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu hai điểm của đường thẳng này đối xứng với hai điểm của đường thẳng kia qua đường thẳng d.

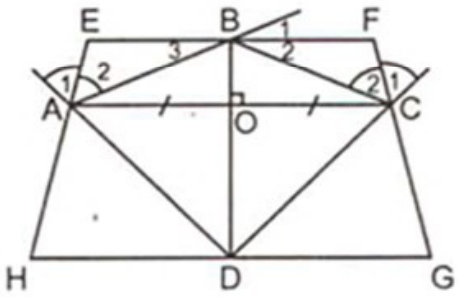
– Một hình có thể không có, có một, có nhiều hoặc vô số trục đối xứng.

– Nếu ba điểm A, M, B thẳng hàng (M nằm giữa A và B) và A', M', B' lần lượt là ba điểm đối xứng của chúng qua đường thẳng d thì ba điểm A', M', B' thẳng hàng (M' nằm giữa A' và B').

Ví dụ 7

Tứ giác ABCD có đường chéo BD là trục đối xứng của hình. Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh A và C cắt đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B lần lượt tại E và F ; cắt đường phân giác góc ngoài tại đỉnh D lần lượt tại H và G. Chứng minh rằng EFGH là hình thang cân và BD là trục đối xứng của nó.

Giải (h.18)



Hình 18

Vì BD là trục đối xứng của tứ giác ABCD nên $\Delta ABD = \Delta CBD \Rightarrow$ BD là tia phân giác của góc ABC và BA = BC ; $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ dẫn tới $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$. Ta có BD $\perp$ BF (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù).

Tương tự, HG $\perp$ BD suy ra EF // HG và EFGH là hình thang.

$\Delta ABE = \Delta CBF$ (g. c. g) $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F}$ và BE = BF.

Tương tự, $\Delta AHD = \Delta CGD$ (g. c. g) $\Rightarrow$ DH = DG.

Hình thang EFGH có hai góc kề đáy bằng nhau nên là hình thang cân. Đường thẳng BD đi qua trung điểm của hai đáy nên là trục đối xứng của hình thang cân này.

Nhận xét

– Phương pháp chứng minh trong ví dụ trên là dựa vào tính chất nếu hai tam giác đối xứng nhau qua một đường thẳng thì hai tam giác đó bằng nhau, suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau, các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

– Ta có thêm một nhận xét : Một tứ giác có một trục đối xứng đi qua đỉnh thì hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của một đường chéo.

BÀI TẬP

27. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$). Gọi M là một điểm trên cạnh AD sao cho chu vi tam giác MBC nhỏ nhất. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$.

28. Cho góc xOy, tia phân giác Ot. Gọi M là một điểm ở trong góc đó và A, B lần lượt là các điểm đối xứng của M qua Ox, Oy.

a) Chứng minh rằng khi M di động ở trong góc xOy thì đường trung trực của AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.

b) Vẽ $MH \perp Ot$ cắt đường trung trực của AB tại N. Chứng minh rằng M và N đối xứng qua Ot.

29. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm khác phía đối với d. Tìm trên đường thẳng d một điểm M sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

30. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O. Lấy một điểm M ở ngoài hai đường thẳng này. Hãy dựng tam giác MAB với $A \in a$ và $B \in b$ sao cho điểm O cách đều ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.

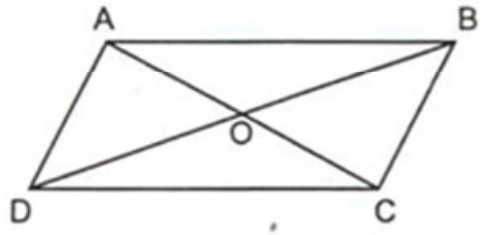
31. Cho góc nhọn xOy và hai điểm M, N ở trong góc đó. Hãy dựng điểm A trên tia Ox và điểm B trên tia Oy sao cho MA + AB + BN có độ dài nhỏ nhất.

§6. Hình bình hành

Kiến thức cơ bản

1. *Định nghĩa* (h.19)

$$\text{ABCD là hình bình hành} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC. \end{cases}$$



Hình 19

2. *Tính chất*

Nếu ABCD là hình bình hành thì :

– Các cạnh đối bằng nhau ;

– Các góc đối bằng nhau ;

– Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

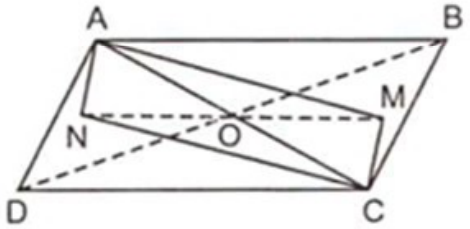
3. *Dấu hiệu nhận biết*

Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu có một trong các điều kiện sau :

1. Các cạnh đối song song (định nghĩa)
2. Các cạnh đối bằng nhau (đảo của tính chất 1)
3. Các góc đối bằng nhau (đảo của tính chất 2)
4. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (đảo của tính chất 3)
5. Hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

Nâng cao

Hai hình bình hành có một đường chéo chung thì các đường chéo của chúng đồng quy tại trung điểm của đường chéo chung (h.20).



Hình 20

Ví dụ 8

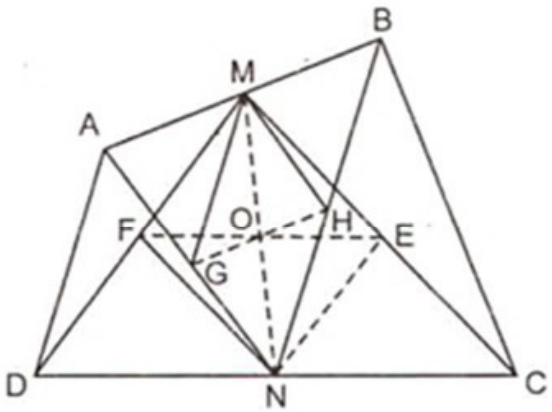
Cho tứ giác ABCD, M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của MC, MD, NA, NB.

Chứng minh rằng ba đường thẳng EF, GH và MN đồng quy.

Giải (h.21)

Ta có NE là đường trung bình của ΔCDM nên NE // MD và $NE = \frac{1}{2}MD = FM$. Tứ giác MENF có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau nên nó là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta được tứ giác MHNG cũng là hình bình hành.



Hình 21

Hai hình bình hành MENF và MHNG có chung đường chéo MN nên các đường chéo EF, GH, MN đồng quy (tại trung điểm O của MN).

Nhận xét

> *Tính chất hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường không những được vận dụng để chứng minh nhiều đường thẳng đồng quy như cách giải trong ví dụ trên mà còn được vận dụng để chứng minh ba điểm thẳng hàng : trong hình bình hành trung điểm của một đường chéo và hai đầu mút của đường chéo kia là 3 điểm thẳng hàng.*

BÀI TẬP

32. Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo không vuông góc với nhau. Vẽ điểm E đối xứng với A qua BD. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, E, D là 4 đỉnh của một hình thang cân.

33. Tứ giác ABCD có AD = AB = BC < CD. Hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Vẽ hình bình hành AMBK. Đường thẳng KO cắt đường thẳng BC tại N. Chứng minh rằng AM = BN.

34. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} \neq 60^o$). Vẽ các tam giác đều ABM và ACN ra ngoài tam giác ABC. Vẽ tam giác đều DBC sao cho D và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC. Chứng minh rằng tứ giác AMDN là hình bình hành.

35. Cho tam giác ABC. Vẽ các tam giác đều ABM và ACN ra phía ngoài tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AM, AN. Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

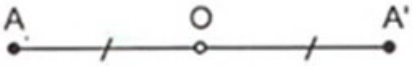
36. Cho tam giác ABC, M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi D, E, F, H, I, K lần lượt là trung điểm của MA, MB, MC, BC, CA và AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng DH, EI, FK đồng quy.

37. Dựng tứ giác ABCD biết AB = 2cm ; AD = 3cm ; BC = 4cm ; $\widehat{C} = 60^o$; $\widehat{D} = 70^o$.

§7. Đối xứng tâm

Kiến thức cơ bản

1. Hai điểm A và A' gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng AA' (h.22).



Hình 22

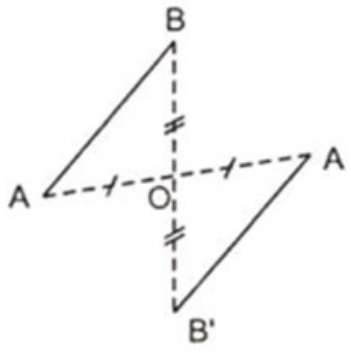
Quy ước : Điểm đối xứng của O qua O cũng là O.

2. Hai hình F và F' gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua O với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.

Định lí :

– Hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng với nhau qua tâm O nếu A đối xứng với A' ; B đối xứng với B' qua O (h.23).

– Hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng với nhau qua tâm O nếu A đối xứng với A' ; B đối xứng với B' ; C đối xứng với C' qua O.



Hình 23

3. *Định lí :*

Hai đoạn thẳng (hai góc, hai tam giác) đối xứng với nhau qua tâm O thì chúng bằng nhau.

4. Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình F nếu điểm đối xứng qua O của mỗi điểm thuộc hình F cũng thuộc hình F.

Đặc biệt : Hình bình hành nhận giao điểm hai đường chéo làm tâm đối xứng của hình.

Bổ sung

– Nếu hai đoạn thẳng AB và A'B' đối xứng qua tâm O (O nằm ngoài đường thẳng AB, A'B') thì AB // A'B' và AB ngược chiều với A'B' (h.23).

– Hai đường thẳng a và a' đối xứng với nhau qua tâm O nếu hai điểm của đường thẳng này đối xứng với hai điểm của đường thẳng kia qua O.

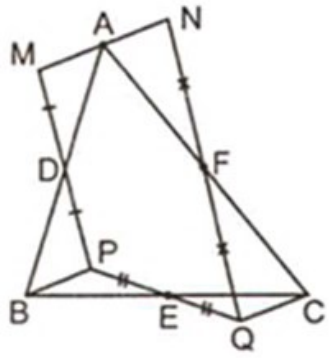
– Một hình có thể không có, có một hoặc vô số tâm đối xứng.

– Nếu ba điểm A, M, B thẳng hàng (M nằm giữa A và B) và A', M', B' lần lượt là ba điểm đối xứng của chúng qua O thì ba điểm A', M', B' thẳng hàng (M' nằm giữa A' và B').

Ví dụ 9

Cho tam giác ABC và M là một điểm không thuộc các cạnh của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Vẽ điểm P đối xứng với M qua D, điểm Q đối xứng với P qua E, điểm N đối xứng với Q qua F. Có nhận xét gì về vị trí của hai điểm M và N ?

Giải (h.24)



Hình 24

A đối xứng với B qua D, M đối xứng với P qua D nên hai đoạn thẳng AM và BP đối xứng với nhau qua D. Suy ra AM = BP và AM // BP (AM và BP ngược chiều). (1)

Chứng minh tương tự ta được BP = CQ ; BP // CQ (BP và CQ ngược chiều). (2)

CQ = AN và CQ // AN (CQ và AN ngược chiều). (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm M, A, N thẳng hàng ; AM = AN (và ngược chiều). Do đó M và N đối xứng với nhau qua A.

Nhận xét

Bạn đọc cũng có thể chứng minh các tứ giác AMBP, BPCQ, CQAN là những hình bình hành, suy ra hai cạnh đối song song và bằng nhau từ đó dẫn tới điều phải chứng minh.

BÀI TẬP

38. Cho hình thang ABCD (AB // CD và AB < CD), M là một điểm trên đáy AB. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và BD. Vẽ điểm H đối xứng với M qua E và điểm K đối xứng với M qua F. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm H, K, C, D thẳng hàng ;

b) Khi M di động trên đáy AB thì HK có độ dài không đổi.

39. Cho tam giác ABC và một điểm M tuỳ ý ở trong tam giác. Gọi D, E, F thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi H, I, K thứ tự là điểm đối xứng của M qua D, E, F. Chứng minh rằng :

a) Ba đường thẳng AH, BI, CK đồng quy tại một điểm O ;

b) Khi M di động trong tam giác thì đường thẳng OM luôn đi qua một điểm cố định.

40. Cho tam giác ABC. Vẽ D đối xứng với A qua B ; E đối xứng với B qua C và F đối xứng với C qua A. Gọi G là giao điểm của đường trung tuyến AM của

tam giác ABC với đường trung tuyến DN của tam giác DEF. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của GA và GD. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác MNIK là hình bình hành ;

b) Trọng tâm của tam giác ABC và tam giác DEF trùng nhau.

41. Cho hai đường thẳng b, c và hai điểm A, M không thuộc hai đường thẳng đó. Dựng tam giác ABC sao cho AM là đường trung tuyến và $B \in b$; $C \in c$.

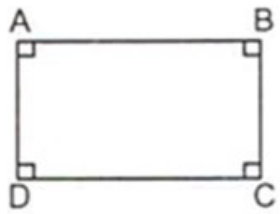
42. Cho hai đường thẳng b, d cắt nhau tại O. Hai điểm A và C không thuộc hai đường thẳng này. Dựng hình bình hành ABCD sao cho $B \in b$; $D \in d$.

§8. Hình chữ nhật

Kiến thức cơ bản

1. Hình chữ nhật là tứ giác có 4 góc vuông (h.25).

Như vậy hình chữ nhật cũng là hình bình hành, hình thang cân.



Hình 25

2. Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành, hình thang cân.

Như vậy : Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau.

3. Dấu hiệu nhận biết :

1. Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.

2. Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.

3. Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

4. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Áp dụng vào tam giác vuông.

1. Trong một tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

2. Đảo lại, nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng một nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

Bổ sung

1. Hình chữ nhật có một tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.
2. Hình chữ nhật có hai trục đối xứng là hai đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối.

Ví dụ 10

Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm M. Trên tia AM lấy điểm E sao cho M là trung điểm của AE. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của E trên BC và DC. Chứng minh rằng :

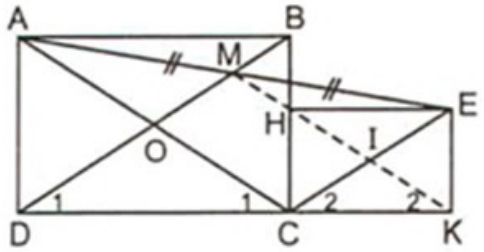
a) HK // AC ;

b) Ba điểm M, H, K thẳng hàng.

Giải (h.26)

a) Tứ giác HEKC có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của HK với CE ; gọi O là giao điểm của AC với BD. Ta có OM là đường trung bình của ΔACE nên OM // CE $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_2$. (1)



Hình 26

ΔCOD cân tại O ; ΔCIK cân tại I $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ (2) ; $\widehat{K}_2 = \widehat{C}_2$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{K}_2$ do đó HK // AC.

b) Xét tam giác ACE có đường thẳng HK đi qua trung điểm I của CE, HK // AC nên đường thẳng HK đi qua trung điểm của AE, tức là đi qua M, do đó ba điểm M, H, K thẳng hàng.

Nhận xét

Tính chất hai đường chéo bằng nhau là tính chất rất quan trọng của hình chữ nhật. Kết hợp với tính chất hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường ta được bốn tam giác cân đỉnh O. Ta đã dùng nhận xét đó để giải ví dụ trên.

BÀI TẬP

43. Cho M là một điểm ở bên trong của hình chữ nhật ABCD. Giả sử MA = 3 ; MB = 2 ; MC = 1. Tính MD.

44. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 6 ; BC = 4. Vẽ $AH \perp BD$. Gọi M là trung điểm của HB ; N là trung điểm của CD. Tính $MA^2 + MN^2$.

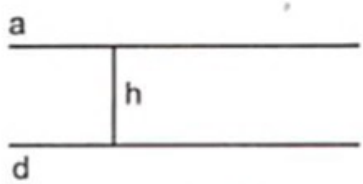
45. Chứng minh rằng nếu một hình thang có tổng hai góc kề một đáy bằng 90° thì đoạn thẳng nối trung điểm hai đáy bằng nửa hiệu hai đáy.

46. Cho tam giác ABC và điểm O ở trong tam giác sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$. Vẽ $OH \perp AB$; $OK \perp AC$. Gọi D là trung điểm của BC, M là trung điểm của HK. Chứng minh rằng $DM \perp HK$.

§9. Tính chất về khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

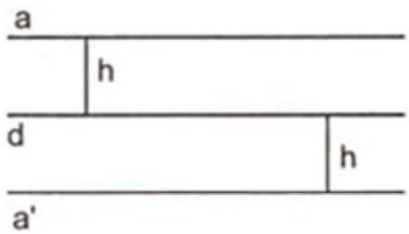
Kiến thức cơ bản

1. *Định nghĩa :* Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia (h.27).



Hình 27

2. *Tính chất :* Các điểm cách đường thẳng d một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với d và cách d một khoảng bằng h (h.28).



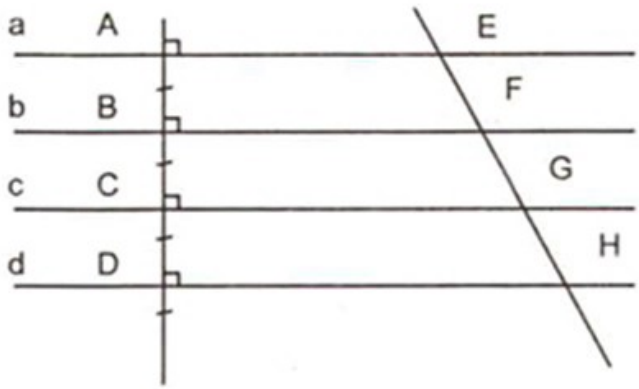
Hình 28

Nhận xét : Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.

3. *Định lí*

– Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau (h.29).

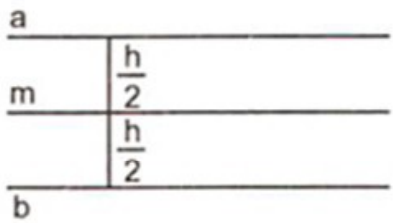
– Đảo lại, nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.



Hình 29

Bổ sung

Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau và cách nhau một khoảng h. Các điểm cách đều a và b thì nằm trên đường thẳng m song song với a và b và cách hai đường thẳng đó một khoảng $\frac{h}{2}$ (h.30).



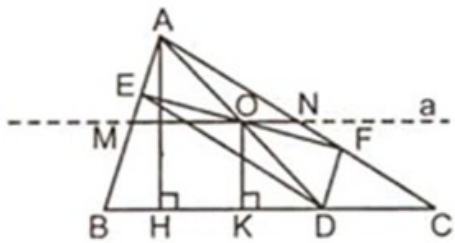
Hình 30

Ví dụ 11

Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC. Vẽ DE // AC ; DF // AB ($E \in AB$; $F \in AC$). Gọi O là trung điểm của EF. Khi điểm D di động trên cạnh BC thì điểm O di động trên đường nào ?

Giải (h.31)

Tứ giác AFDE là hình bình hành suy ra trung điểm O của đường chéo EF cũng là trung điểm của đường chéo AD.



Hình 31

Vẽ đường cao AH, vẽ $OK \perp BC$. Dễ thấy $OK = \frac{AH}{2}$ (không đổi). Điểm O cách đường thẳng BC cho trước một khoảng không đổi $\frac{AH}{2}$ nên O nằm trên đường thẳng a // BC và cách BC một khoảng $\frac{AH}{2}$.

Giới hạn : Khi D trùng với B thì O trùng với trung điểm M của AB. Khi D trùng với C thì O trùng với trung điểm N của AC. Vậy khi D di động trên cạnh BC thì điểm O di động trên đường trung bình MN của tam giác ABC.

Nhận xét

– Nếu đề bài cho điểm D chuyển động trên đường thẳng BC thì điểm O chuyển động trên đường thẳng a // BC và cách BC một khoảng $\frac{AH}{2}$ (không có giới hạn).

– Ta cũng có thể giải ví dụ trên bằng cách khác : Nối HO thì HO = OA (tính chất trung tuyến thuộc cạnh huyền). Điểm O cách đều hai đầu đoạn thẳng AH cố định nên O nằm trên đường trung trực của AH đó chính là đường thẳng a nói trên. Giới hạn lại ta cũng được điểm O di động trên đường trung bình MN của tam giác ABC.

BÀI TẬP

47. Cho hai đường thẳng a và b song song, cách nhau 3 cm. Hỏi điểm M di động trên đường nào nếu tổng các khoảng cách từ M đến a và b là :

a) 3cm ?

b) 5cm ?

48. Cho góc vuông xOy. Trên cạnh Ox lấy điểm A sao cho OA = 2cm. Điểm N di động trên cạnh Oy. Vẽ tam giác AMN vuông cân tại A sao cho M nằm trong góc vuông xOy. Hỏi điểm M di động trên đường nào ?

49. Cho đoạn thẳng AB, điểm D nằm giữa A và B. Trên một nửa mặt phẳng bờ AB ta lấy các điểm E và F sao cho tam giác EAD cân tại E, tam giác FBD cân tại F và $\hat{E} = \hat{F} = m^o$. Hỏi khi D di động trên đoạn thẳng AB thì trung điểm O của EF di động trên đường nào ?

50. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Từ một điểm H trên cạnh BC vẽ một đường thẳng vuông góc với BC, cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại I và K. Gọi E là trung điểm của BI, F là trung điểm của CK. Khi H di động trên BC thì trung điểm O của EF di động trên đường nào ?

§10. Hình thoi và hình vuông

Kiến thức cơ bản

1. *Định nghĩa*

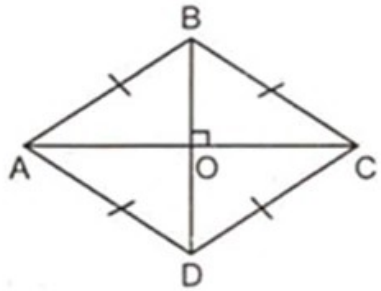
– Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau (h.32).

– Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau (h.33).

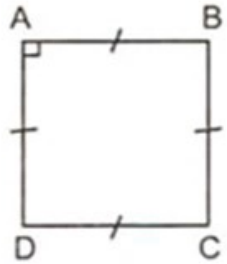
Từ đó suy ra :

– Hình thoi cũng là một hình bình hành.

– Hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.



Hình 32



Hình 33

2. *Tính chất*

1. Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành, ngoài ra còn có :

– Hai đường chéo vuông góc với nhau.

– Hai đường chéo là đường phân giác các góc của hình thoi.

2. Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. *Dấu hiệu nhận biết*

1. Nhận biết hình thoi

– Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.

– Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.

– Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.

– Hình bình hành có một đường chéo là *đường phân giác của một góc là hình thoi.*

2. Nhận biết hình vuông

– Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.

– Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông.

– Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.

– Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.

– Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

Bổ sung

1. Trong hình thoi :

– Hai đường chéo là hai trục đối xứng.

– Giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng.

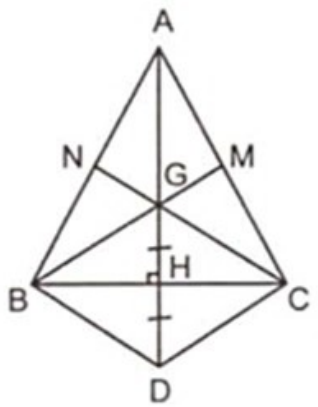
2. Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$.

Ví dụ 12

Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Vẽ điểm D đối xứng với G qua đường thẳng BC.

a) Chứng minh tứ giác BGCD là hình thoi ;

b) Tam giác cân ABC phải có điều kiện gì để BGCD là hình vuông ?



Hình 34

Giải (h.34)

a) $\Delta BMC = \Delta CNB$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = CN \Rightarrow \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}CN$ do đó BG = CG (vì G là trọng tâm của ΔABC). (1)

D đối xứng với G qua BC $\Rightarrow$ BD = BG (2) ; CD = CG. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra BG = CG = CD = DB.

Vậy tứ giác BGCD là hình thoi.

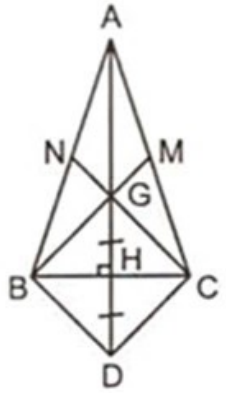
b) Gọi giao điểm của BC và DG là H. Ta có BC $\perp$ DG và HB = HC. Bốn điểm A, G, H, D thẳng hàng vì cùng nằm trên đường trung trực của BC.

Hình thoi BGCD là hình vuông

$\Leftrightarrow BC = GD$

$\Leftrightarrow BC = 2GH$

$\Leftrightarrow BC = \frac{2}{3}AH$ (h.35)



Hình 35

Nhận xét

– Dùng định lí đường trung bình của tam giác ta chứng minh được tứ giác BGCD có các cặp cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.

Hình bình hành này có hai đường chéo vuông góc nên nó là hình thoi.

– Như vậy ta thấy rõ để chứng minh một tứ giác là hình thoi ta có thể chứng minh trực tiếp tứ giác đó có 4 cạnh bằng nhau như đã làm trong ví dụ trên. Nếu chứng minh tứ giác là hình bình hành thì chỉ cần thêm điều kiện hai cạnh kề bằng nhau (hoặc hai đường chéo vuông góc hoặc có một đường chéo là đường phân giác của một góc).

BÀI TẬP

- **Hình thoi**

51. Cho hình thoi ABCD, AB = 2cm, $\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{B}$. Trên cạnh AD và DC lần lượt lấy H và K sao cho $\widehat{HBK} = 60^o$.

a) Chứng minh rằng DH + DK không đổi ;

b) Xác định vị trí của H và của K để cho HK ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất đó.

52. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD, CE. Tia phân giác của các góc ABD và ACE cắt nhau tại O, cắt AC và AB lần lượt tại N và M. Tia BN cắt CE tại K, tia CM cắt BD tại H. Chứng minh rằng :

a) $BN \perp CM$;

b) Tứ giác MNHK là hình thoi.

53. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Gọi D là một điểm trên BC và K là trung điểm của AD. Vẽ DE ⊥ AB, DF ⊥ AC. Chứng minh rằng :

a) Tam giác KHF là tam giác đều ;

b) KH ⊥ EF.

- **Hình vuông**

54. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Từ một điểm H trên đường thẳng BC vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại I và K.

a) Chứng minh rằng BK = CI.

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, CK, KI, IB. Hãy cho biết dạng của tứ giác MNPQ.

55. Cho hình vuông ABCD. Vẽ một tia gốc A cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh rằng các tam giác ANP, AQM là những tam giác vuông cân.

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của NP và MQ. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, B, D thẳng hàng.

56. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tia Cx là tia phân giác góc ngoài tại đỉnh C. Lấy điểm M trên tia Cx. Vẽ ME ⊥ DC, MF ⊥ BC. Trên tia DC lấy điểm G, trên tia đối của tia BC lấy điểm H sao cho DG = BH = ME. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác CEMF ; AHMG là những hình vuông ;

b) Ba đường thẳng AM, HG và BD đồng quy.

57. Cho điểm I di động trên đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông AICD, BIEF. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình vuông đó. Gọi K là giao điểm của AC và BE.

a) Cho biết dạng của tứ giác OKO'I ;

b) Trung điểm M của OO' di động trên đường nào ?

c) Xác định vị trí của điểm I để cho OKO'I là hình vuông.

58. Dựng hình vuông ABCD biết bốn điểm E, F, G, H lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD và DA.

§11. Ôn tập chương I

Ví dụ 13

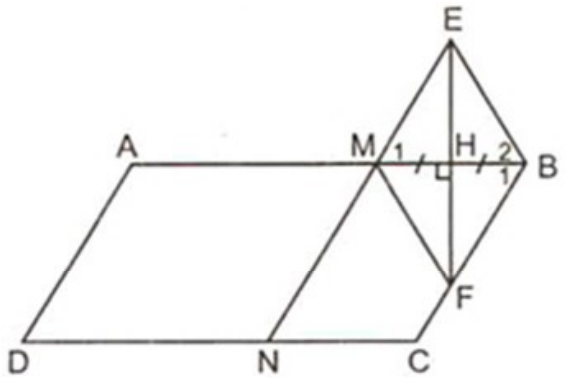
Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = DN. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F.

Chứng minh rằng :

a) E và F đối xứng nhau qua AB ;

b) Tứ giác MEBF là hình thoi ;

c) Hình bình hành ABCD phải có thêm điều kiện gì để tứ giác BCNE là hình thang cân ?



Hình 36

Giải (h.36)

a) AM = DN ; AM // DN $\Rightarrow$ AMND là hình bình hành $\Rightarrow$ MN // AD $\Rightarrow$ MN // BC. Gọi H là giao điểm của EF và MB.

$$\Delta HEM = \Delta HFB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow HE = HF.$$

Mặt khác AB $\perp$ EF (gt) nên E và F đối xứng nhau qua AB.

b) Tứ giác MEBF có HM = HB ; HE = HF nên MEBF là hình bình hành. Hình bình hành này có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi.

c) BC // NE $\Rightarrow$ BCNE là hình thang.

Hình thang BCNE là hình thang cân

$\Leftrightarrow \widehat{C} = \widehat{CBE} \Leftrightarrow \widehat{C} = 2\widehat{B}_1 \Leftrightarrow \widehat{B}_1 = 60^o \Leftrightarrow$ hình bình hành ABCD có $\widehat{B} = 60^o$.

Nhận xét

Ở trên ta đã chứng minh tứ giác MEBF là hình thoi bằng cách chứng minh MEBF là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc. Tứ giác MEBF có đường chéo EF là đường trung trực của BM, có đường chéo BM là đường trung trực của EF, nghĩa là có mỗi đường chéo là một trục đối xứng. Tứ giác nào có hai đường chéo là hai trục đối xứng, tứ giác đó là hình thoi.

BÀI TẬP

59. Cho hình thang cân ABCD, đáy nhỏ AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD.

a) Cho biết dạng của các tứ giác ABMN, NMCD ;

b) Hình thang cân ABCD phải có thêm điều kiện gì để ABMN là hình chữ nhật ?

60. Cho hình bình hành ABCD, BD = 3AD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên BD lấy hai điểm E và F sao cho BE = EF = FD.

a) Chứng minh rằng MENF là hình chữ nhật ;

b) Hình bình hành ABCD phải có thêm điều kiện gì để MENF là hình vuông ?

61. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh bên bằng a. Vẽ hình chữ nhật AEMF có chu vi bằng 2a và $E \in AB$; $F \in AC$.

a) Hỏi điểm M di động trên đường nào ?

b) Từ M vẽ đường thẳng $MN \perp EF$ ($N \in EF$). Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

62. Dựng tam giác ABC biết các trung điểm M, N của AB, BC và đường phân giác của góc A nằm trên đường thẳng d cho trước.

63. Dựng tam giác ABC biết AC = 5cm ; đường cao AH = 2cm và trung tuyến CM = 4cm.

Chương II

ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

§1. Đa giác. Đa giác đều

Kiến thức cơ bản

1. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.
2. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

Bổ sung

1. Tổng các góc trong của đa giác n cạnh là $(n - 2).180^o$.
2. Số đường chéo của một đa giác n cạnh là $\frac{(n-3).n}{2}$.
3. Tổng các góc ngoài của đa giác n cạnh là 360° (tại mỗi đỉnh chỉ chọn một góc ngoài).
4. Trong một đa giác đều, giao điểm O của hai đường phân giác của hai góc là tâm của đa giác đều. Tâm O cách đều các đỉnh, cách đều các cạnh của đa giác đều. Có một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh của đa giác đều gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.

Ví dụ 14

Cho ngũ giác đều ABCDE.

a) Chứng minh rằng các đường chéo AC, AD chia góc A làm 3 góc bằng nhau ;

b) Gọi giao điểm của AD và CE là F. Chứng minh rằng tứ giác ABCF là hình thoi.

Giải (h.37)

a) Số đo mỗi góc của ngũ giác đều là $\frac{(5-2).180}{5} = 108^o$.

ΔABC cân tại B nên $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 = (180^o - 108^o) : 2 = 36^o$.

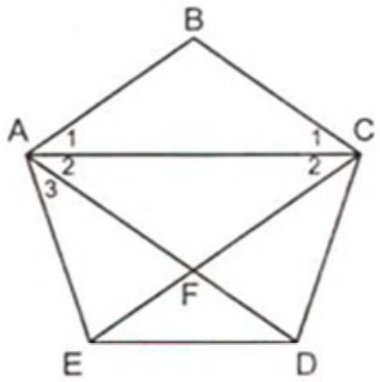
Chứng minh tương tự ta được $\widehat{A}_3 = 36^o$

suy ra $\widehat{A}_2 = 36^o$. Vậy $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3$.

b) Chứng minh tương tự, $\widehat{C}_2 = 36^o$.

$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow AB // CF$; $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AF // BC$.

Vậy tứ giác ABCF là hình bình hành. Ta có AB = BC nên hình bình hành ABCF là hình thoi.



Hình 37

Nhận xét

Trong cách giải của ví dụ này, để tính mỗi góc của đa giác đều n cạnh ta dùng công thức $\frac{(n-2).180}{n}$. *Ta cũng có thể tính số đo của mỗi góc ngoài theo công thức* $\frac{360^o}{n}$, *từ đó suy ra mỗi góc trong là* $180^o - \frac{360^o}{n}$. *Thực chất hai công thức trên chỉ là một.*

BÀI TẬP

64. Một đa giác đều có số đo mỗi góc trong hơn góc ngoài là 140°. Hỏi đa giác đó có mấy cạnh ?

65. Một đa giác đều có số đường chéo bằng số cạnh. Tính số đo mỗi góc của đa giác đều đó.

66. Số đo các góc trong một đa giác n cạnh lập thành một dãy cộng. Biết số đo góc nhỏ nhất là 110° ; số đo góc lớn nhất là 160°. Tính số cạnh của đa giác đó.

67. Một ngũ giác có các cạnh bằng nhau và ba đường chéo bằng nhau. Chứng minh rằng ngũ giác đó là ngũ giác đều.

68. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng ΔMPR và ΔNQS có cùng một trọng tâm.

69*. Cho đa giác 12 cạnh. Tại mỗi đỉnh viết một số tự nhiên nhỏ hơn 50. Chứng minh rằng tồn tại hai đường chéo của đa giác sao cho hiệu hai số viết ở hai đầu đường chéo là bằng nhau.

§2. Diện tích hình chữ nhật, hình vuông

Kiến thức cơ bản

1. Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một số dương có các tính chất sau :

– Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

– Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

– Hình vuông có độ dài cạnh bằng 1 thì có diện tích là 1.

2. Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó. $S = a.b$ (h.38a).

Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó. $S = a^2$ (h.38b).

Hình 38

Nâng cao

1. Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất. (*)

2. Hai hình chữ nhật có *cùng chiều cao* thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.

(*) Xem chuyên đề 3, hệ quả của bất đẳng thức Cô-si.

Ví dụ 15

Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^o$. Vẽ CH ⊥ AB. Biết rằng đường chéo AC là đường phân giác của góc A và CH = a. Tính diện tích tứ giác ABCD.

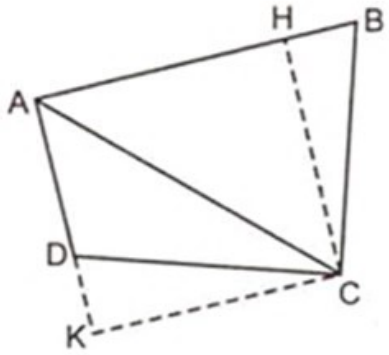
Giải (h.39)

Vẽ CK ⊥ AD. Tứ giác AHCK có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật. AC là tia phân giác của góc A nên AHCK là hình vuông.

$\Delta HBC = \Delta KDC$ (g. c. g) $\Rightarrow S_{HBC} = S_{KDC}$.

$S_{ABCD} = S_{AHCD} + S_{HBC} = S_{AHCD} + S_{KDC}$

$= S_{AHCK} = a^2$.



Hình 39

Nhận xét

Trong ví dụ trên, để tính được diện tích tứ giác ABCD ta đã biến đổi diện tích này thành diện tích hình vuông bằng cách vận dụng các tính chất sau của diện tích đa giác :

– Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

– Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

Nói chung, để tính diện tích của một hình chưa biết công thức tính diện tích, ta biến đổi diện tích này bằng diện tích của một hình khác đã biết cách tính diện tích.

BÀI TẬP

70. Cắt một miếng bìa hình vuông thành 4 hình chữ nhật bằng 3 đường thẳng song song với một cạnh của hình vuông. Biết chu vi mỗi hình chữ nhật là 50cm. Tính diện tích hình vuông.

71. Cho hình chữ nhật ABCD. Góc D được chia làm 3 góc bằng nhau bởi các tia DM, DN trong đó M là trung điểm của AB và N nằm trên cạnh BC sao cho CN = $2\sqrt{3}$. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

72. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc. Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Lấy điểm O nằm trong tứ giác. Gọi M, N, P, Q thứ tự là các điểm đối xứng với O qua E, qua F, qua G, qua H. Tính diện tích của tứ giác MNPQ biết AC = 4cm ; BD = 3cm.

73. Một căn phòng hình vuông được lát gạch men hình vuông cùng cỡ, vừa hết 729 viên (không viên nào bị cắt xén). Gạch gồm hai loại men trắng và men xanh, loại men trắng nằm trên hai đường chéo nền nhà, còn lại là loại men xanh. Tính số gạch mỗi loại.

74. Hình chữ nhật ABCD được chia thành bốn hình chữ nhật nhỏ bởi hai đường thẳng đi qua điểm O nằm trên đường chéo AC và song song với các cạnh, cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $S_{AMOQ} = 18$; $S_{MBNO} = 24$. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

§3. Diện tích hình tam giác, hình thang, hình bình hành

Kiến thức cơ bản

1. Diện tích hình tam giác bằng nửa tích một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó :

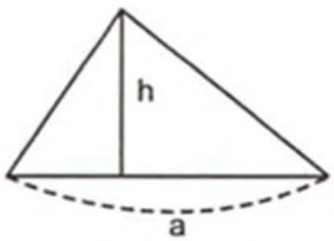
$$S = \frac{1}{2}ah \qquad \text{(h.40).}$$

2. Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao :

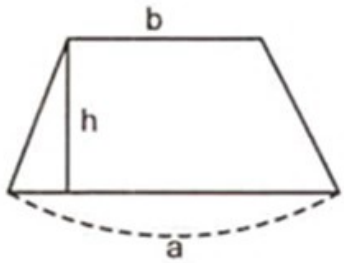
$$S = \frac{1}{2}(a + b)h \qquad \text{(h.41).}$$

3. Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó :

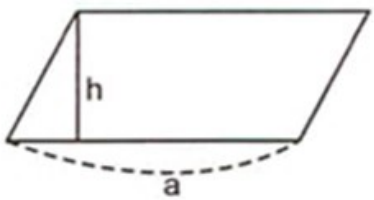
$$S = ah \qquad \text{(h.42).}$$



Hình 40



Hình 41



Hình 42

Nâng cao

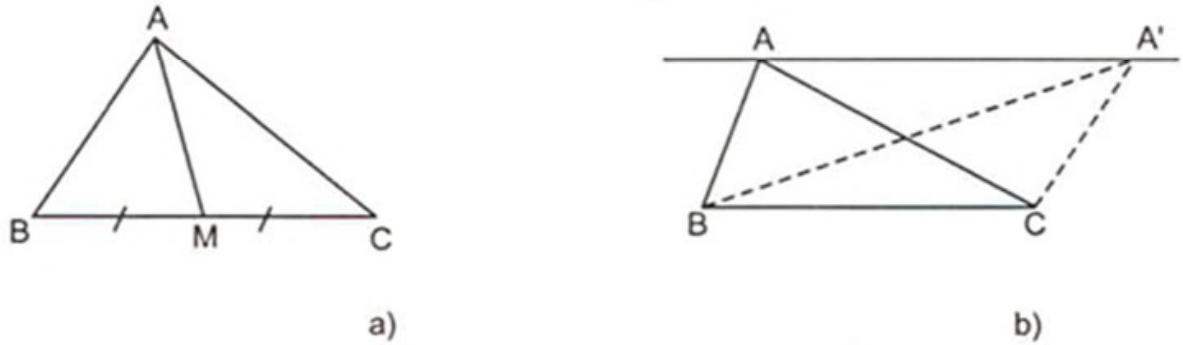
1. Hai tam giác có một cạnh bằng nhau và chiều cao ứng với cạnh đó bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau.

Trong hình 43a, có MB = MC $\Rightarrow S_{ABM} = S_{ACM}$.

Trong hình 43b, có AA' // BC $\Rightarrow S_{ABC} = S_{A'BC}$.

2. Hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy ứng với hai chiều cao.

3. Tam giác đều cạnh a có diện tích là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



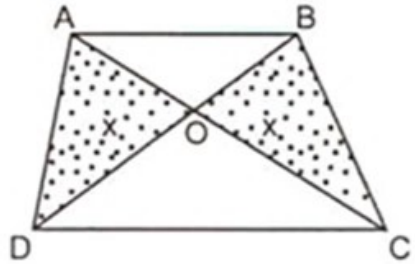
Hình 43

Ví dụ 16

Cho hình thang ABCD (AB // CD), hai đường chéo cắt nhau tại O.

a) Chứng minh rằng $S_{AOD} = S_{BOC}$;

b) Cho biết $S_{AOB} = 9$; $S_{COD} = 25$; tính S_{ABCD}.



Hình 44

Giải (h. 44)

a) Vì AB // CD nên $S_{ADC} = S_{BDC} \Rightarrow S_{ADC} - S_{ODC} = S_{BDC} - S_{ODC}$

$$\Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC}.$$

b) Ta đặt $S_{AOD} = S_{BOC} = x$.

Hai tam giác AOB và COB có cùng chiều cao hạ từ đỉnh B nên $\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \frac{OA}{OC}$. (1)

Tương tự $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{OA}{OC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{9}{x} = \frac{x}{25} \Leftrightarrow x^2 = 225 \Leftrightarrow x = 15$ (vì $x > 0$).

Vậy $S_{ABCD} = 9 + 25 + 15 + 15 = 64$.

Nhận xét

1. Phương pháp giải trong ví dụ trên là dựa vào các tính chất sau của diện tích tam giác :

Nếu hai tam giác có một cạnh bằng nhau và chiều cao ứng với cạnh đó bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau.

Nếu hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy ứng với chiều cao đó.

2. Trong ví dụ trên, nếu $S_{AOB} = a^2$; $S_{COD} = b^2$ thì cũng chứng minh tương tự như trên ta được $S_{ABCD} = (a + b)^2$.

BÀI TẬP

- **Diện tích tam giác**

75. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết $S_{AMND} = S_{BMNC}$. Hãy cho biết dạng của tứ giác ABCD.

76. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ một đường thẳng song song với AC cắt cạnh AB tại M, cắt cạnh BC tại N. Chứng minh rằng $S_{ADM} = S_{CDN}$.

77. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $AD = \frac{1}{4}AB$; $BE = \frac{1}{4}BC$; $CF = \frac{1}{4}CA$. Chứng minh rằng $S_{DEF} < \frac{1}{2}S_{ABC}$.

78*. Cho tứ giác ABCD. Gọi E và G lần lượt là trung điểm của AD và BC. Lấy F và H lần lượt trên AB và CD. Biết rằng EFGH là hình bình hành, F không trùng với trung điểm của AB. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác ABCD là hình thang ;

b) $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

- **Diện tích hình thang**

79. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$). Biết AB = 2, AD = $\sqrt{3}$ và $\widehat{B} = 150^o$. Tính S_{ABCD}.

80. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có đường trung bình bằng 10cm. Biết AD = 3cm ; BC = 4cm. Tính diện tích lớn nhất của hình thang ABCD.

81. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng d cắt các cạnh AB và CD tại M và N sao cho $S_{AMND} = S_{BMNC}$. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

- **Diện tích hình bình hành**

82. Cho O là một điểm nằm trong hình bình hành ABCD.

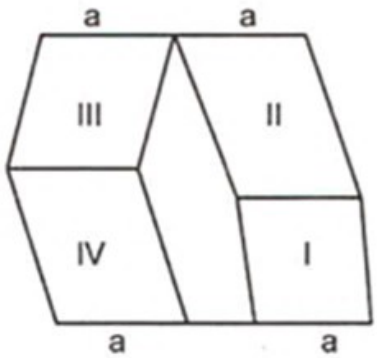
Chứng minh rằng $S_{AOB} + S_{COD} = S_{AOD} + S_{BOC}$.

83. Cho hình bình hành ABCD ; AB = a ; AD = b.

Tính diện tích lớn nhất của hình bình hành đó.

84. Trong *hình 45*, có I, II, III và IV là các hình bình hành có một cạnh là a. Chứng minh rằng

$$S_I + S_{II} = S_{III} + S_{IV}.$$



Hình 45

§4. Diện tích tứ giác. Diện tích đa giác

Kiến thức cơ bản

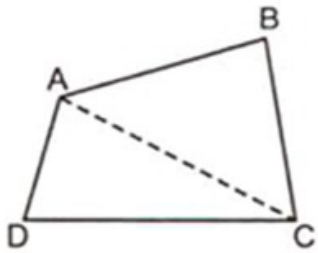
1. Diện tích tứ giác (h.46)

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$$

Đặc biệt :

a) Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích độ dài hai đường chéo.

b) Diện tích hình thoi bằng nửa tích độ dài hai đường chéo.



Hình 46

2. Diện tích đa giác

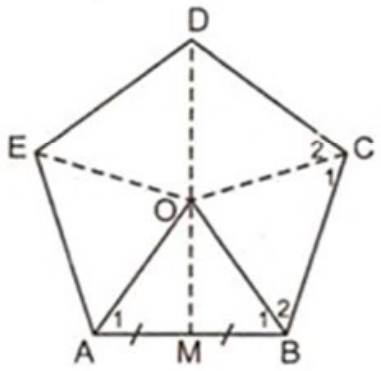
Việc tính diện tích một đa giác bất kì thường được quy về việc tính diện tích các tam giác (hoặc có khi là tính diện tích hình thang).

Bổ sung

Diện tích hình vuông có đường chéo bằng d là $\frac{1}{2}d^2$.

Ví dụ 17

Cho ngũ giác đều ABCDE, AB = a. Đường phân giác của góc A, góc B cắt nhau tại O. Gọi M là trung điểm của AB. Biết OM = r. Tính diện tích ngũ giác ABCDE.



Hình 47

Giải (h.47)

Nối O với C, D, E.

$\Delta AOB = \Delta COB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{C}_2$.

Chứng minh tương tự, ta được $\Delta COB = \Delta COD = \Delta EOD = \Delta EOA$. Các tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau.

ΔAOB cân, đường trung tuyến OM cũng là đường cao.

Vậy $S_{ABCDE} = 5.S_{AOB} = 5.\ \frac{1}{2}AB.OM = \frac{5}{2}AB.OM = \frac{5}{2}ar$.

Nhận xét

1. Phương pháp giải của ví dụ trên là để tính được diện tích của đa giác, ta chia đa giác thành những tam giác. Tính được diện tích của những tam giác đó là tính được diện tích của đa giác.

2. Trong ví dụ trên, thay năm cạnh bởi n cạnh ($n \geq 3$) ta có công thức tính diện tích đa giác đều :

$$S = \frac{n.a.r}{2} = pr \text{ (p là nửa chu vi).}$$

BÀI TẬP

85. Cho ΔABC vuông tại A, AB = 8 ; BC = 17. Trên BC lấy một điểm M. Vẽ hình bình hành ABMN. Tính diện tích tứ giác ANCM.

86. Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Biết diện tích các tam giác AOB, BOC, COD lần lượt là a^2, $2a^2$, $3a^2$, tính diện tích tứ giác ABCD.

87. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Biết MP + NQ = 2a ; AC = BD = 2b ; a > b. Tính diện tích tứ giác ABCD theo a và b.

88. Cho ngũ giác ABCDE. Vẽ AH $\perp$ CD. Vẽ BM // AC, EN // AD (M, N thuộc đường thẳng CD). Cho biết AH = h, MN = a. Tính S_{ABCDE}.

89. Một đa giác có phân giác của tất cả các góc đồng quy tại O. Khoảng cách từ O đến một cạnh nào đó của tứ giác là r. Chứng minh rằng diện tích đa giác được tính theo công thức S = p.r (p là nửa chu vi của đa giác).

Chuyên đề 5

Phương pháp diện tích

1. Ta đã biết một số công thức tính diện tích của đa giác như công thức tính diện tích hình tam giác, hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi,... Khi biết độ dài của một số yếu tố, ta có thể tính được diện tích của những hình ấy. Ngược lại nếu biết quan hệ diện tích của hai hình, chẳng hạn biết hai tam giác có diện tích bằng nhau và có hai đáy bằng nhau thì suy ra được các chiều cao tương ứng bằng nhau. Như vậy các công thức tính diện tích cho ta các quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng. Sử dụng các công thức tính diện tích các hình có thể giúp ta so sánh độ dài các đoạn thẳng.

2. Để so sánh hai độ dài nào đó bằng phương pháp diện tích, ta có thể làm theo các bước sau :

1. Xác định quan hệ diện tích giữa các hình.

2. Sử dụng các công thức tính diện tích để biểu diễn mối quan hệ đó bằng một đẳng thức có chứa các độ dài.

3. Biến đổi đẳng thức vừa tìm được ta có quan hệ về độ dài giữa hai đoạn thẳng cần so sánh.

3. Một số biện pháp thực hiện :

a) Sử dụng trực tiếp công thức tính diện tích tam giác.

Ví dụ 18

Cho tam giác đều ABC. Từ một điểm O ở trong tam giác ta vẽ OH $\perp$ AB ; OI $\perp$ BC, OK $\perp$ CA. Chứng minh rằng khi O di động trong tam giác thì tổng OH + OI + OK không đổi.

Giải (h.48a)

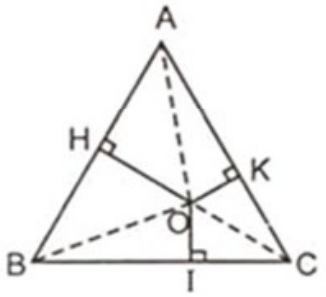
Gọi độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là a, chiều cao là h.

Ta có $S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = S_{ABC}$

$$\frac{1}{2}a.OH + \frac{1}{2}a.OI + \frac{1}{2}a.OK = \frac{1}{2}a.h$$

$$\frac{1}{2}a\,(OH + OI + OK) = \frac{1}{2}ah$$

suy ra OH + OI + OK = h (không đổi).



Hình 48a

Nhận xét

Có thể giải ví dụ trên bằng cách khác nhưng không thể ngắn gọn bằng phương pháp diện tích như đã trình bày.

Bài toán trên vẫn đúng nếu điểm O thuộc cạnh của tam giác đều.

Ta còn có tổng AH + BI + CK không đổi (xem bài 10 câu b).

Nếu thay tam giác đều bởi một đa giác đều bất kì thì tổng các khoảng cách từ điểm O đến các cạnh cũng không đổi.

b) Sử dụng tính chất : Nếu hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số hai đáy tương ứng bằng tỉ số hai diện tích. Ngược lại, nếu hai tam giác có cùng đáy thì tỉ số hai chiều cao tương ứng bằng tỉ số hai diện tích.

Ví dụ 19

Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy (A', B', C' không trùng với các đỉnh của tam giác).

Chứng minh rằng :

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$$

Giải

• *Tìm hướng giải :*

Ta thấy ở vế trái của điều phải chứng minh là tích của 3 tỉ số. Để có thể rút gọn được tích này ta sẽ thay đổi tỉ số của hai cạnh bằng tỉ số diện tích của hai tam giác thích hợp, sau đó khử liên tiếp để được kết quả là 1.

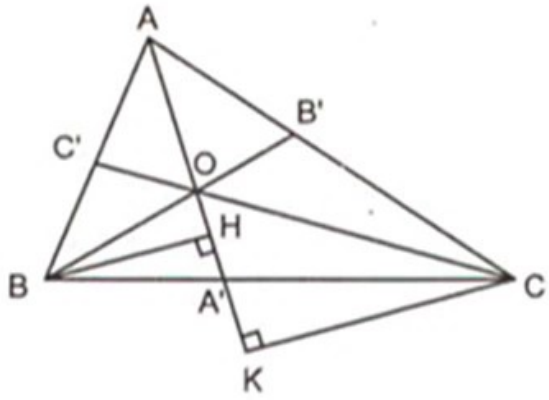
• *Thực hiện chứng minh* (h.48b)

Vẽ BH ⊥ AA' và CK ⊥ AA'.

ΔAA'B và ΔAA'C là hai tam giác có cùng một chiều cao hạ từ đỉnh A và có hai cạnh đáy tương ứng là A'B và A'C nên $\frac{A'B}{A'C}=\frac{S_{AA'B}}{S_{AA'C}}$. (1)

Mặt khác, ΔAA'B và ΔAA'C có chung cạnh AA' và có các chiều cao tương ứng là BH và CK nên $\frac{S_{AA'B}}{S_{AA'C}}=\frac{BH}{CK}$. (2)

ΔAOB và ΔAOC có chung cạnh AO và có các chiều cao tương ứng là BH và CK nên $\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{BH}{CK}$. (3)



Hình 48b

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{A'B}{A'C}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$. (4)

Chứng minh tương tự được $\frac{B'C}{B'A}=\frac{S_{BOC}}{S_{BOA}}$ (5) và $\frac{C'A}{C'B}=\frac{S_{COA}}{S_{COB}}$. (6)

Nhân từng vế các đẳng thức (4), (5), (6) ta được :

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\cdot\frac{S_{BOC}}{S_{BOA}}\cdot\frac{S_{COA}}{S_{COB}}=1.$$

Chú ý : Bài toán trên vẫn đúng nếu các điểm A', B', C' thuộc các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác, trong đó có đúng 2 điểm nằm ngoài tam giác.

c) Sử dụng tích chất : nếu một tam giác và một hình bình hành có cùng đáy và cùng chiều cao (ứng với đáy đó) thì diện tích tam giác bằng nửa diện tích hình bình hành.

Ví dụ 20

Chứng minh định lí Pi-ta-go : Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

• Ở lớp 7 chúng ta đã được học định lí này (công nhận, không chứng minh). Có rất nhiều cách để chứng minh nó. Bây giờ ta sẽ dùng phương pháp diện tích để chứng minh.

Giải (h.48c)

Lấy các cạnh của tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^o$) làm cạnh, dựng ra phía ngoài của tam giác này các hình vuông BCDE, ABFG, ACMN.

Muốn chứng minh $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ta phải chứng minh

$$S_{BCDE} = S_{ABFG} + S_{ACMN}.$$

Vẽ đường cao AH và kéo dài cắt DE tại K. Ta sẽ chứng minh $S_{ABFG} = S_{BHKE}$ và $S_{ACMN} = S_{CHKD}$.

Nối AE, CF.

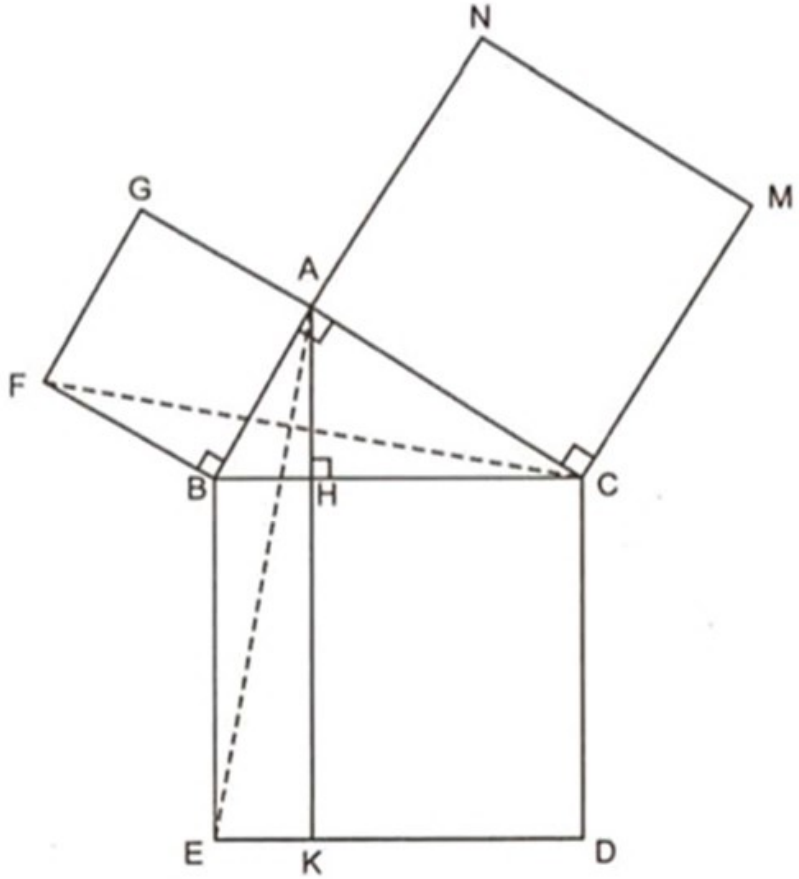
$\Delta FBC = \Delta ABE$ (c.g.c)

$\Rightarrow S_{FBC} = S_{ABE}$. (1)

ΔFBC và hình vuông ABFG có chung đáy BF, đường cao ứng với đáy này bằng nhau (là AB) nên $A_{FBC} = \frac{1}{2}S_{ABFG}$. (2)

Tương tự,

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{BHKE}. \ (3)$$



Hình 48c

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{BHKE} = S_{ABFG}$.

Chứng minh tương tự được $S_{CHKD} = S_{ACMN}$.

Do đó $S_{BHKE} + S_{CHKD} = S_{ABFG} + S_{ACMN}$ hay $S_{BCDE} = S_{ABFG} + S_{ACMN}$ (đpcm).

Nhận xét

Điểm mấu chốt trong cách giải trên là việc vẽ hình phụ : vẽ thêm ba hình vuông. Điều gì gợi ý cho ta cách vẽ ấy ?

Hãy nhìn vào kết luận của định lí : Ta phải chứng minh $BC^2 = AB^2 + AC^2$ mà BC^2, AB^2, AC^2 chính là diện tích các hình vuông có cạnh lần lượt là BC, AB, AC. Để chứng minh diện tích hình vuông BCDE bằng tổng diện tích của hai hình vuông ABFG và ACMN ta đã vẽ đường cao AH rồi kéo dài để chia hình vuông BCDE thành hai hình chữ nhật không có điểm trong chung rồi chứng minh hai hình chữ nhật này có diện tích lần lượt bằng diện tích của hai hình vuông kia.

BÀI TẬP

90. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm M trên đáy BC vẽ MD $\perp$ AB ; ME $\perp$ AC.

a) Chứng tỏ rằng tổng MD + ME không phụ thuộc vào vị trí của M trên đáy BC ;

b) Bạn có nhận xét gì về $|MD - ME|$ khi điểm M di động trên đường thẳng BC nhưng không nằm trên đáy BC ?

91. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Vẽ DH $\perp$ AB. Đặt DH = d, AB = c, AC = b. Chứng minh rằng $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$.

92. Cho tam giác ABC, điểm M ở trong tam giác hoặc ở trên một cạnh sao cho $S_{MBC} = S_{MAB} + S_{MAC}$. Chứng minh rằng M di động trên một đoạn thẳng cố định.

93. Cho hình bình hành ABCD. Trên AB lấy điểm M, trên AD lấy điểm N. Gọi O là giao điểm của BN với DM. Biết OC là tia phân giác của góc BOD, chứng minh rằng BN = DM.

94. Cho tam giác ABC (AB < AC), M là một điểm trên cạnh BC. Vẽ BI ⊥ AM, CK ⊥ AM. Xác định vị trí của M để tổng BI + CK nhỏ nhất.

95. Cho tam giác ABC đường cao BH, CK. Đặt AC = b ; AB = c ; BH = h_b ; CK = h_c. Hỏi tam giác ABC phải có điều kiện gì để $b + h_b = c + h_c$?

96. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F (khác các đỉnh của tam giác) sao cho AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Chứng minh rằng :

a) $\frac{AH}{AD}+\frac{BH}{BE}+\frac{CH}{CF}=2$;

b) $\frac{AH}{HD}+\frac{BH}{HE}+\frac{CH}{HF}\geq 6$.

97. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Vẽ MD ⊥ BC ; ME ⊥ CA ; MF ⊥ AB. Đặt BC = a ; CA = b ; AB = c ; MD = x ; ME = y ; MF = z và S_{ABC} = S.

a) Chứng minh rằng $ax + by + cz = 2S$;

b*) Tìm $\min\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$.

98. a) Cho góc xOy, tia Ot nằm trong góc đó. Lấy điểm A cố định trên Ox, điểm B cố định trên Oy và C là điểm di động trên Ot. Tia Ot cắt AB tại M. Chứng minh rằng $S_{AOC} = S_{BOC}$ khi và chỉ khi M là trung điểm của AB.

b*) Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh AB và BC lần lượt lấy các điểm E và F. Gọi M, N, K thứ tự là trung điểm của DE, DF và EF. Gọi O là giao điểm của AM và CN. Chứng minh rằng ba điểm B, O, K thẳng hàng.

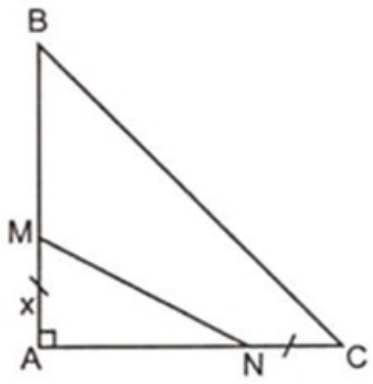
§5. Ôn tập chương II

Ví dụ 21

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AB = 4cm. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = CN. Xác định vị trí của M và N sao cho tứ giác BCNM có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

Giải (h.49)

Đặt $S_{BCNM} = S$; AM = CN = x suy ra AN = 4 – x.



Hình 49

$$S = S_{ABC} - S_{AMN}$$

$$S = \frac{4.4}{2} - \frac{x.(4-x)}{2} = 8 - \frac{x.(4-x)}{2}$$

S nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{x.(4-x)}{2}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow$ x. (4 – x) lớn nhất.

Vì x + (4 – x) = 4 (không đổi) nên x.(4 – x) lớn nhất $\Leftrightarrow$ x = 4 – x

$\Leftrightarrow$ x = 2. (*)

Khi đó M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

$$\min S = 8 - \frac{2.(4-2)}{2} = 6\ (cm^2).$$

Nhận xét

– Trong cách giải trên ta đã sử dụng hệ quả của bất đẳng thức Cô-si : Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số ấy bằng nhau.

– Để sử dụng được các bất đẳng thức đại số ta đặt độ dài cần xác định là x, biểu thị đại lượng cần tìm giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất) bằng một biểu thức có biến x rồi tìm điều kiện của x để biểu thức có giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất).

BÀI TẬP

99. Cho bát giác đều ABCDEFGH cạnh a. Các đường thẳng GH và CD cắt đường thẳng AB lần lượt tại M và N, cắt đường thẳng EF lần lượt tại Q và P. Xác định dạng của tứ giác MNPQ và tính diện tích của tứ giác đó.

(*) Xem chuyên đề 3, hệ quả của bất đẳng thức Cô-si.

100. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm M sao cho CM = CA. Tia phân giác của góc A cắt BM tại N. Cho biết $S_{NBC} = 10$, tính S_{ABM}.

101. Gọi S là diện tích của tứ giác ABCD có độ dài các cạnh là a, b, c, d.

Chứng minh rằng $S \leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$.

102. Cho tứ giác ABCD. Dựng đường thẳng d chia tứ giác đó làm 2 phần có diện tích bằng nhau trong 2 trường hợp :

a) Đường thẳng d đi qua đỉnh A ;

b*) Đường thẳng d đi qua điểm K nằm trên cạnh AB.

103. Cho hình vuông ABCD và 9 đường thẳng trong đó mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích là $\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng trong 9 đường thẳng đó có ít nhất ba đường thẳng đồng quy.

104. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 14cm ; BC = 6cm. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM = AQ = CN = CP. Xác định các điểm M, N, P, Q để :

a) Tứ giác MNPQ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó ;

b) Tứ giác MNPQ là hình thoi. Tính diện tích hình thoi đó.

Chương III

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§1. Định lí Ta-let trong tam giác

Kiến thức cơ bản

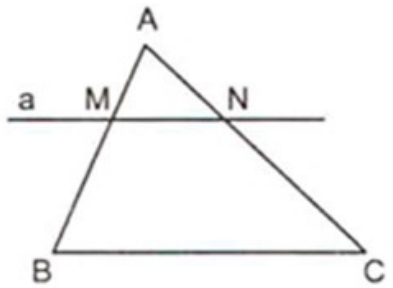
1. *Định lí*

1. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

2. Đảo lại, nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Trên hình 50 : ΔABC

$$a \,//\, BC \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC} \\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \\ \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{CN}{AC}. \end{array}\right.$$



Hình 50

2. *Hệ quả*

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

$$\Delta ABC\,;\, a \,//\, BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Hệ quả trên vẫn đúng nếu đường thẳng a song song với một cạnh và cắt hai đường thẳng chứa hai cạnh kia.

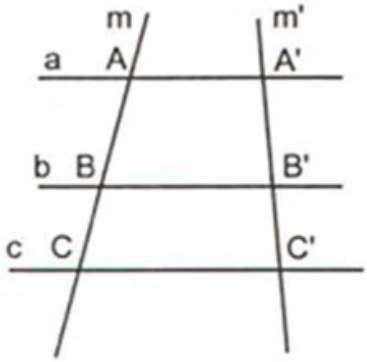
Nâng cao

1. *Định lí Ta-let tổng quát*

Nhiều đường thẳng song song định ra trên hai cát tuyến bất kì các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

Trên hình 51 :

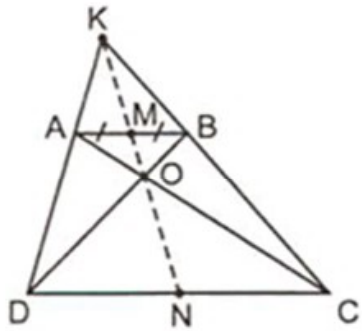
$$a \,//\, b \,//\, c \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$



Hình 51

2. *Bổ đề hình thang*

Trong hình thang hai đáy không bằng nhau, giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy cùng nằm trên một đường thẳng (h.52).



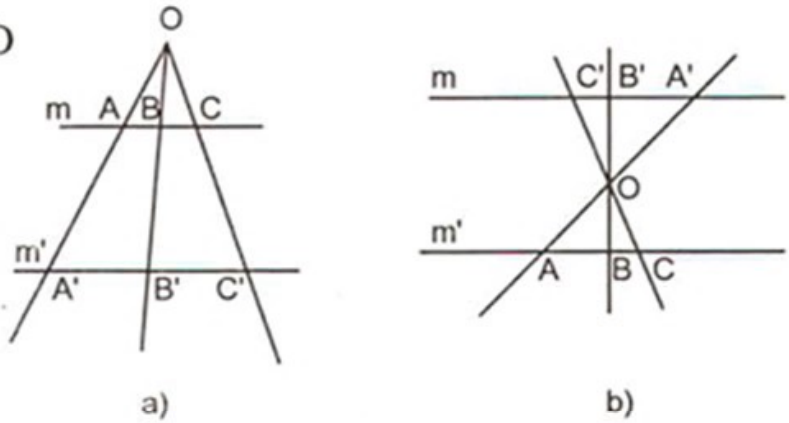
Hình 52

3. Chùm đường thẳng đồng quy

Định lí : Nếu các đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song thì chúng định ra trên hai đường thẳng song song ấy các cặp đoạn thẳng tỉ lệ. Trong *hình 53a, 53b* :

- AA', BB', CC' đồng quy tại O
- m // m'

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}. \end{array}\right.$$



Hình 53

Định lí trên có hai định lí đảo :

– Một định lí đảo cho ta một cách chứng minh hai đường thẳng song song ;

– Một định lí đảo cho ta một cách chứng minh ba đường thẳng đồng quy, chẳng hạn :

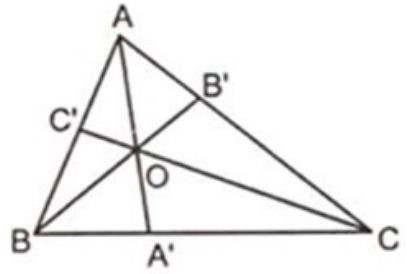
Nếu ba đường thẳng, trong đó có hai đường thẳng cắt nhau, định ra trên hai đường thẳng song song các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì ba đường thẳng đó đồng quy.

4. *Định lí Xê-va*

Cho tam giác ABC và 3 điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB (A', B', C' không trùng với các đỉnh của tam giác).

Khi đó ta có : AA', BB', CC' đồng quy

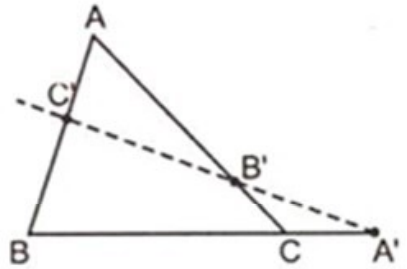
$$\Leftrightarrow \quad \frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B} = 1 \qquad \text{(h. 54).}$$



Hình 54

5. *Định lí Mê-nê-la-uyt*

Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB (A', B', C' không trùng với các đỉnh của tam giác sao cho trong ba điểm đó có đúng một điểm hoặc cả ba điểm nằm ngoài tam giác).

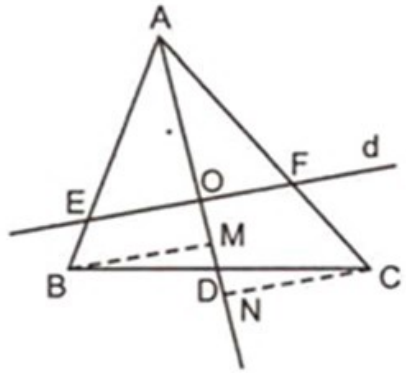


Hình 55

Khi đó ta có : A', B', C' thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{A'B}{A'C}\cdot\dfrac{B'C}{B'A}\cdot\dfrac{C'A}{C'B} = 1$ (h.55).

Ví dụ 22

Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AD. Lấy điểm O nằm giữa A và D. Qua O vẽ đường thẳng d cắt các tia AB, AC tại E và F. Hãy xác định vị trí của điểm O để $\dfrac{BE}{AE}+\dfrac{CF}{AF}=1$.



Hình 56

Giải (h.56)

Vẽ BM // d ; CN // d (M, N thuộc đường thẳng AD).

$\Delta MBD = \Delta NCD$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = DN$.

Áp dụng định lí Ta-let vào các tam giác ABM và ACN ta được :

$$\frac{BE}{AE}=\frac{MO}{AO};\ \frac{CF}{AF}=\frac{NO}{AO}.$$

Do đó $\dfrac{BE}{AE}+\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{MO+NO}{AO}=\dfrac{(OD-DM)+(OD+DN)}{AO}=\dfrac{2.OD}{AO}$.

$$\frac{BE}{AE}+\frac{CF}{AF}=1 \Leftrightarrow \frac{2.OD}{AO}=1 \Leftrightarrow AO=2OD \Leftrightarrow AO=\frac{2}{3}AD$$

$\Leftrightarrow$ O là trọng tâm tam giác ABC.

Nhận xét

> *Trong ví dụ trên ta đã vẽ thêm hai đường phụ cùng song song với d. Nhờ đó có thể vận dụng định lí Ta-let tìm ra các cặp đoạn thẳng tỉ lệ với các cặp đoạn thẳng nêu trong đề bài.*
>
> *Phương pháp vẽ đường thẳng song song là một phương pháp thường dùng để giải các bài toán vận dụng định lí Ta-let, tạo ra các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.*

Ví dụ 23

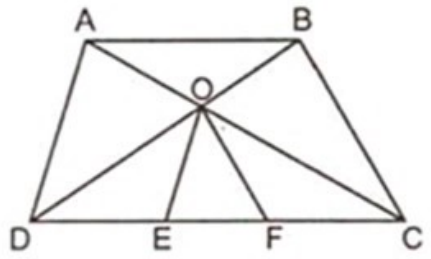
Cho hình thang ABCD (AB // CD) hai đường chéo cắt nhau tại O. Trên đáy CD lấy các điểm E và F sao cho OE // AD ; OF // BC. Chứng minh rằng $S_{ODE} = S_{OCF}$.

Giải (h.57)

$$OE \,//\, AD \Rightarrow \frac{DE}{DC}=\frac{AO}{AC}. \qquad (1)$$

$$OF \,//\, BC \Rightarrow \frac{CF}{CD}=\frac{BO}{BD}. \qquad (2)$$

$$AB \,//\, CD \Rightarrow \frac{AO}{AC}=\frac{BO}{BD}. \qquad (3)$$



Hình 57

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{DE}{DC}=\frac{CF}{DC} \Rightarrow DE = CF$.

Các tam giác ODE, OCF có một cặp cạnh bằng nhau, có cùng chiều cao hạ từ đỉnh O tới cặp cạnh đó nên $S_{ODE} = S_{OCF}$.

Nhận xét

> *Trong ví dụ trên, để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau ta đã dùng phương pháp các đoạn thẳng tỉ lệ và dùng tính chất trong một tỉ lệ thức, nếu hai mẫu bằng nhau thì hai tử cũng bằng nhau.*

BÀI TẬP

- **Định lí Ta-let**

105. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng d đi qua A cắt đường chéo BD tại P, cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng :

a) BM.DN không đổi ;

b) $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AP}$.

106. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng d cắt AB, BC, BD lần lượt tại M, N, I. Chứng minh rằng : $\frac{BA}{BM}+\frac{BC}{BN}=\frac{BD}{BI}$.

107. Cho tam giác ABC, AB = 4 ; AC = 4,5. Trên AB và AC lấy các điểm M và N sao cho AM = AN = 3cm. Gọi O là giao điểm của BN và CM. Tính $\frac{OB}{ON}+\frac{OC}{OM}$.

108. Cho tam giác ABC, AB = 2 ; AC = 3, đường phân giác AD = 1,2. Tính góc BAC.

109. Cho hình thang ABCD (AB // CD), hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua O vẽ một đường thẳng song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh OM = ON ;

b) Chứng minh $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{MN}$.

110. Cho góc xOy. Gọi M và N theo thứ tự là hai điểm di động trên Ox, Oy sao cho $\frac{m}{OM}+\frac{n}{ON}=1$ trong đó m, n là hai độ dài cho trước. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

- **Bổ đề hình thang và chùm đường thẳng đồng quy**

111. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB và AC lấy các điểm M và N. Từ M vẽ một đường thẳng song song với AC cắt BN tại D. Từ N vẽ một đường thẳng song song với AB cắt CM tại E. Chứng minh rằng DE // BC.

112. Cho hình bình hành ABCD. Từ một điểm M trên đường chéo AC (M không là trung điểm của AC) ta vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của

hình bình hành, chúng lần lượt cắt AB, BC, CD, DA tại E, F, G, H. Chứng minh rằng :

a) HE // GF ;

b) Ba đường thẳng EF, GH và AC đồng quy.

113. Cho tứ giác ABCD. Vẽ đường thẳng d // BD cắt AD và AB lần lượt tại P và Q. Vẽ đường thẳng d' // BD cắt BC và CD lần lượt tại M và N. Cho biết hai đường thẳng MQ và NP cắt nhau tại K. Chứng minh rằng đường thẳng AC đi qua K.

114. Cho hình chữ nhật EFGH có tâm O, nội tiếp ΔABC trong đó $E \in AB$; $F \in AC$; $G, H \in BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và đường cao AI. Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng.

- **Định lí Xê-va và định lí Mê-nê-la-uyt**

115. Cho tam giác ABC, trên đường trung tuyến AD lấy một điểm O. Tia CO cắt AB tại M, tia BO cắt AC tại N. Chứng minh rằng $S_{BOM} = S_{CON}$.

116. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d cắt cạnh AB tại D, cắt cạnh AC tại E và cắt đường thẳng BC tại N. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Tia AO cắt BC tại M. Chứng minh rằng hai điểm M và N chia trong và chia ngoài đoạn thẳng BC theo cùng một tỉ số.

117. Tam giác ABC có AB = 4 ; AC = 3. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho AD = 2AE. Điểm F chia trong đoạn thẳng DE theo tỉ số $\frac{3}{2}$ (nghĩa là $\frac{FD}{FE} = \frac{3}{2}$). Tia AF cắt BC tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

§2. Tính chất đường phân giác của một tam giác

Kiến thức cơ bản

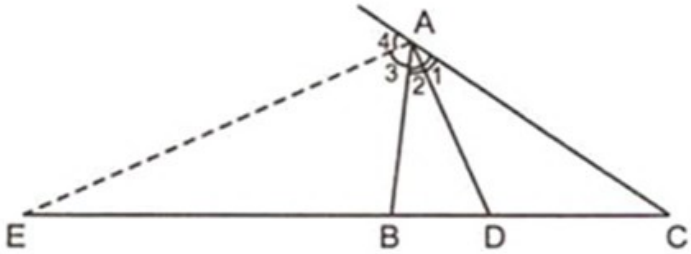
1. Đường phân giác của một góc trong tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề của hai đoạn thẳng ấy.

2. Đường phân giác ngoài của tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng ấy.

Trong hình 58 :

$$\begin{cases}\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4\end{cases} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

Ta nói điểm D *chia trong* cạnh BC, điểm E *chia ngoài* cạnh BC cùng theo tỉ số $\frac{AB}{AC}$.



Hình 58

Bổ sung

Định lí trên có định lí đảo :

Nếu một đường thẳng đi qua một đỉnh của tam giác mà chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng ấy thì nó là đường phân giác trong (hay ngoài) của góc tại đỉnh ấy.

Ví dụ 24

Cho tam giác ABC cân tại A, BC = a ; AC = b. Vẽ các đường phân giác BD, CE.

a) Chứng minh rằng DE // BC ;

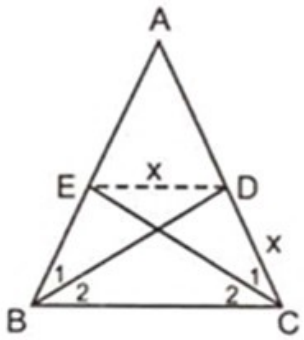
b) Tính DE từ đó suy ra $\frac{1}{DE} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Giải (h.59)

a) $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{b}{a}$; (1)

$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow$ DE // BC.



Hình 59

b) ΔDEC cân. Đặt DE = DC = x thì AD = b – x. Áp dụng hệ quả định lí Ta-let ta có :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \text{ hay } \frac{x}{a} = \frac{b-x}{b} \text{ ; } ax + bx = ab \text{ ; } x = \frac{ab}{a+b} = DE.$$

Suy ra $\frac{1}{DE} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Nhận xét

> *1. Ta cũng có thể chứng minh DE // BC bằng cách khác :*
>
> $\Delta ABD = \Delta ACE$ *(g.c.g)* $\Rightarrow AD = AE$. *Vậy* $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow DE // BC$.
>
> *2. Để tính độ dài DE ta đã đặt DE = x ; lập phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các đoạn thẳng rồi giải phương trình đó.*

BÀI TẬP

118. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 135^o$. Trên cạnh BC lấy các điểm M và N sao cho $AM \perp AC$; $AN \perp AB$. Chứng minh rằng $BM^2 = BC . MN$.

119. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, D, N không trùng với các đỉnh của tam giác. Cho biết AM . BD . CN = AN. CD . BM, chứng minh rằng nếu tia DM là tia phân giác của góc ADB thì tia DN là tia phân giác của góc ADC.

120. Cho hình bình hành ABCD. Đường phân giác của góc A cắt BD tại E, đường phân giác của góc B cắt AC tại F. Chứng minh rằng :

a) $\frac{BE}{ED} = \frac{AF}{FC}$; b) EF // AB.

121. Tam giác ABC có BC = a ; CA = b ; AB = c. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Các điểm D, E, F thứ tự thuộc MN, NP, PM sao cho $\frac{DM}{DN} = \frac{c}{a}$; $\frac{EN}{EP} = \frac{a}{b}$; $\frac{FP}{FM} = \frac{b}{c}$. Chứng minh rằng AF, BD, CE đồng quy.

§3. Khái niệm tam giác đồng dạng. Các trường hợp đồng dạng của tam giác

Kiến thức cơ bản

1. Tam giác A'B'C' gọi là đồng dạng với tam giác ABC (kí hiệu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$) nếu :

$$\begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A}\ ; \widehat{B'} = \widehat{B}\ ;\ \widehat{C'} = \widehat{C}\ ; \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k \end{cases}$$ (k gọi là tỉ số đồng dạng).

2. Một số tính chất

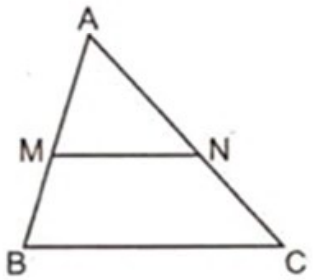
- $\Delta ABC \backsim \Delta ABC$
- Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng k thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$
- Nếu $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta A'B'C'$ và $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta ABC$

3. *Định lí* (về dựng một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho)

Một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì sẽ tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

Trong hình 60 :

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC.$$



Hình 60

4. Các trường hợp đồng dạng

1. Trường hợp đồng dạng thứ nhất (c.c.c) :

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

2. Trường hợp đồng dạng thứ hai (c.g.c) :

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.

3. Trường hợp đồng dạng thứ ba (g.g) :

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Bổ sung

1. Hai tam giác đều luôn đồng dạng với nhau.

2. Hai tam giác cân sẽ đồng dạng nếu có một trong các điều kiện sau :

– Có một cặp góc ở đáy bằng nhau ;

– Có một cặp góc ở đỉnh bằng nhau ;

– Có một cặp cạnh đáy và một cặp cạnh bên tỉ lệ.

3. Nếu hai tam giác đồng dạng thì :

– Tỉ số hai chu vi bằng tỉ số đồng dạng ;

– Tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng ;

– Tỉ số hai đường phân giác tương ứng bằng tỉ số đồng dạng ;

– Tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.

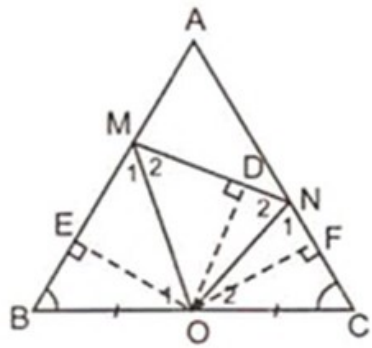
Ví dụ 25

Cho tam giác đều ABC. Gọi O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm di động M và N sao cho $\widehat{MON} = 60^o$. Chứng minh rằng :

a) $\Delta OMB \backsim \Delta NOC$ từ đó suy ra tích BM . CN không đổi ;

b) Các tia MO, NO lần lượt là các tia phân giác của các góc BMN và CNM ;

c) Chu vi của ΔAMN không đổi.



Hình 61

Giải (h. 61)

a) $\widehat{M}_1 + \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_1 = 120^o \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{O}_2$.

Vậy $\Delta OMB \backsim \Delta NOC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BM}{CO} = \dfrac{BO}{CN}$

$\Rightarrow$ BM . CN = BO . CO hay BM . CN $= \dfrac{BC^2}{4}$ (không đổi).

b) $\Delta OMB \backsim \Delta NOC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \dfrac{BM}{CO} = \dfrac{OM}{ON}$ hay $\dfrac{BM}{BO} = \dfrac{OM}{ON}$

suy ra $\dfrac{BM}{OM} = \dfrac{BO}{ON}$. (1)

ΔOMB và ΔNMO có $\widehat{B} = \widehat{O}$ $(= 60^o)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta OMB \backsim \Delta NMO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Chứng minh tương tự ta được $\Delta NOC \backsim \Delta NMO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$.

c) Vẽ $OD \perp MN$; $OE \perp AB$; $OF \perp AC$. Vì O cố định nên E và F cố định.

Ta có MD = ME ; ND = NF.

Chu vi ΔAMN = AM + MD + ND + NA = AM + ME + NF + NA = AE + AF (không đổi).

Nhận xét

> *Ở câu a, nhờ chứng minh hai tam giác đồng dạng ta suy ra được các cạnh tương ứng tỉ lệ. Còn ở câu b, nhờ chứng minh hai tam giác đồng dạng ta suy ra được hai góc tương ứng bằng nhau.*

BÀI TẬP

- **Định lí (về dựng một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho)**

122. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Vẽ DE // AB ; DF // AC ($E \in AC$; $F \in AB$). Cho biết AB = 3 ; AC = 6. Hãy cho biết dạng của tứ giác AEDF và tính chu vi của nó.

123. Dựng tam giác ABC biết $\widehat{B} = 60^o$; $\widehat{C} = 40^o$ và đường trung tuyến AM = 3cm.

124. Cho tam giác ABC, các góc B và C nhọn. Dựng hình vuông EFGH sao cho E nằm trên cạnh AB ; F nằm trên cạnh AC ; G và H nằm trên cạnh BC.

- **Trường hợp cạnh–cạnh–cạnh**

125. Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Trên OA lấy một điểm D sao cho $OD = \frac{1}{3}OA$. Qua D vẽ một đường thẳng song song với AB cắt OB tại E. Qua E vẽ một đường thẳng song song với BC cắt OC tại F. Chứng minh rằng $\Delta DEF \backsim \Delta ABC$ và xác định tỉ số đồng dạng.

126. Tứ giác ABCD có AB = 4 ; $BC = 3\frac{3}{4}$, $CD = 6\frac{1}{4}$, DA = 3 và BD = 5. Hãy xác định dạng của tứ giác ABCD.

127. Cho tam giác ABC, BC = a, CA = b ; AB = c, trong đó a là *trung bình nhân* của b và c (tức là $a^2 = bc$). Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là ba đường cao ứng với các cạnh a, b, c. Chứng minh rằng tam giác có ba cạnh h_a, h_b, h_c và tam giác ABC đồng dạng với nhau.

- **Trường hợp cạnh–góc–cạnh**

128. Cho hình thang ABCD (AB // CD), $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$; AB = 2 ; CD = 4,5 ; BD = 3. Chứng minh rằng BC $\perp$ BD.

129. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ AH $\perp$ CD, AK $\perp$ BC. Chứng minh rằng $\Delta KAH \backsim \Delta ABC$.

130. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại M, tia DE cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh rằng :

a) $\Delta NBC \backsim \Delta BCM$;

b) BM $\perp$ CN.

- **Trường hợp góc–góc**

131. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BM, CN. Biết $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$. Chứng minh rằng BM = CN.

132. Cho tam giác ABC, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$; AB = 5 ; AC = 8. Tính BC.

133. Cho tam giác ABC, BC = a ; CA = b ; AB = c. Cho biết $\widehat{A} = 2\widehat{B}$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, chứng minh rằng :

a) $a^2 = b^2 + bc$;

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

134. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Qua H vẽ một đường thẳng cắt AB tại D, cắt AC tại E sao cho HD = HE. Từ H vẽ một đường vuông góc với DE cắt BC tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

135. Cho tam giác đều ABC, các đường phân giác góc B và góc C cắt nhau tại O. Trên cạnh BC lấy điểm D không trùng với trung điểm của nó. Vẽ DE $\perp$ AB cắt OB tại M ; Vẽ DF $\perp$ AC cắt OC tại N. Chứng minh rằng :

a) $\frac{DM}{DN} = \frac{DE}{DF}$;

b) OD chia đôi EF.

- **Trường hợp góc–góc và cạnh–góc–cạnh**

136. Cho tam giác ABC, AB = 12 ; AC = 15. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy M và N sao cho AM = 5 ; AN = 4.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNCB có các cặp góc đối bù nhau.

b) Gọi O là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng OB . ON = OC . OM

137. Cho tam giác ABC, các góc B và C nhọn. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng :

a) AB . AF = AC . AE ;

b) Δ AEF $\backsim$ Δ ABC ;

c*) BH . BE + CH . CF = BC^2.

§4. Trường hợp đồng dạng của tam giác vuông. Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

Kiến thức cơ bản

1. Nếu hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.
2. Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của một tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.
3. Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Bổ sung

1. Từ công thức $\frac{S'}{S} = k^2$ (S' và S là diện tích của hai tam giác đồng dạng theo tỉ số k) ta có thể tính được diện tích của một tam giác nếu biết tỉ số đồng dạng và diện tích của tam giác kia.

$$S' = k^2 . S ; \quad S = \frac{S'}{k^2}.$$

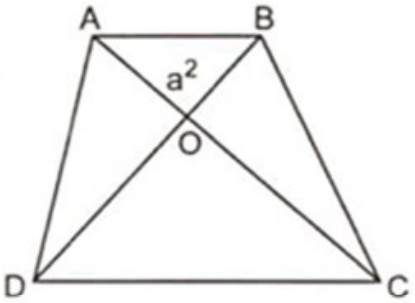
2. Khi sử dụng công thức $\frac{S'}{S} = k^2$, nếu đã biết $S' = a^2$ còn S và k đều chưa xác định thì nên đặt $S = c^2$ để biến đổi được đơn giản (không dùng tới căn bậc hai)

$$\frac{a^2}{c^2} = k^2 \Rightarrow \frac{a}{c} = k \quad \text{(xem bài 144 ; 152).}$$

Ví dụ 26

Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết $AB = \frac{1}{2}CD$ và $AO = \frac{1}{3}AC$. Giả sử diện tích tam giác AOB là a^2, tính diện tích tứ giác ABCD.

Giải (h.62)



Hình 62

$AB = \frac{1}{2}CD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$; $AO = \frac{1}{3}AC \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2}$.

ΔAOB và ΔCOD có :

$\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 90^o$; $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2}$.

Vậy $\Delta AOB \backsim \Delta COD$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{COD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{COD} = 4a^2$.

Vì $\frac{AO}{CO} = \frac{1}{2}$ nên $S_{BOC} = 2S_{AOB} = 2a^2$.

Tương tự, $S_{AOD} = 2a^2$. Do đó $S_{ABCD} = a^2 + 4a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 9a^2$.

Nhận xét

$\Delta AOB \backsim \Delta COD$ với tỉ số $k = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2}$ nên $S_{AOB} = \frac{1}{4}S_{COD}$. Còn ΔAOB, và ΔCOB cũng có tỉ số $\frac{OA}{OC} = \frac{1}{2}$ nhưng bạn chớ nhầm tưởng S_{AOB} cũng bằng $\frac{1}{4}S_{COB}$. Tại sao vậy ? Vì ΔAOB và ΔCOB không đồng dạng với nhau. Hai tam giác này có cùng chiều cao hạ từ đỉnh B tới đường thẳng chứa hai đáy nhưng đáy OA chỉ bằng $\frac{1}{2}$ đáy OC nên $S_{AOB} = \frac{1}{2}S_{COB}$.

BÀI TẬP

- **Trường hợp đồng dạng của tam giác vuông**

138. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 90^o$, BD $\perp$ BC. Biết AB = 2cm, BD = 3cm ; DC = 4,5cm. Hãy cho biết dạng của tứ giác ABCD.

139. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD ; AB < CD). Đường thẳng qua A vuông góc với CD cắt CD tại H, cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh rằng $\Delta ABK \backsim \Delta HDA$.

140. Hình thang ABCD vuông góc tại A và D, AD = 15 ; CD = 9. Gọi M là một điểm trên cạnh AD, biết rằng MB = 5 ; MC = 15.

a) Chứng minh rằng $\Delta ABM \backsim \Delta DMC$.

b) Gọi N là trung điểm của BC. Tính độ dài MN.

- **Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng**

141. Cho ΔABC, $BC = 2\sqrt{3}$ cm. Một đường thẳng song song với BC cắt AB tại điểm M, cắt AC tại N. Biết diện tích MNCB bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC. Tính độ dài MN.

142. Cho tam giác ABC vuông góc tại A, đường cao AH. Vẽ HM $\perp$ AB ; HN $\perp$ AC.

a) Chứng minh AM . AB = AN . AC ;

b) Cho biết AH = 2cm, BC = 5cm. Tính diện tích tứ giác AMHN.

143. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM, O là trung điểm của AM. Tia BO cắt AC tại D, tia CO cắt AB tại E. Cho biết diện tích tam giác ADE = a^2, tính diện tích tam giác ABC.

144. Cho tam giác ABC, vẽ hình bình hành AMON sao cho M $\in$ AB, O $\in$ BC và N $\in$ AC. Biết $S_{MOB} = a^2$; $S_{NOC} = b^2$, tính diện tích hình bình hành AMON.

Chuyên đề 6

Phương pháp tam giác đồng dạng

1. Ta đã biết nếu hai tam giác đồng dạng thì suy ra được các cặp góc tương ứng bằng nhau, các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ, đặc biệt là tỉ số diện tích của

chúng bằng bình phương tỉ số đồng dạng. Từ đó có thể tính được diện tích của một số hình, có thể chứng minh được một số quan hệ hình học khác, như chứng minh các hệ thức hình học bậc hai, tìm giá trị các biểu thức hình học bậc hai,...

2. Để chứng minh hai góc bằng nhau hay các cặp đoạn thẳng tỉ lệ bằng phương pháp tam giác đồng dạng ta có thể làm theo các bước sau :

Bước 1 : Xét hai tam giác có chứa hai góc đó hay chứa các cặp đoạn thẳng ấy.

Bước 2 : Chứng minh hai tam giác đó đồng dạng.

Bước 3 : Suy ra cặp góc tương ứng bằng nhau, cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

3. Để tạo ra được một tam giác đồng dạng với một tam giác khác, ngoài cách vẽ một đường song song với một cạnh của tam giác ta còn có thể vẽ thêm đường phụ bằng nhiều cách khác, chẳng hạn :

– Nối hai điểm có sẵn trong hình làm xuất hiện một tam giác mới (Bài 142)

– Từ một điểm cho trước, vẽ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng (Bài 137)

– Trên một tia cho trước, đặt một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng khác (Bài 130, 133),...

Bạn có thể tích luỹ được kinh nghiệm khi giải nhiều bài tập.

4. Một vài ứng dụng của phương pháp tam giác đồng dạng

a) Dùng phương pháp tam giác đồng dạng để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Ta có thể chứng minh hai tam giác đồng dạng để suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau, từ đó dùng cách cộng góc để được góc bẹt dẫn tới ba điểm thẳng hàng.

Ví dụ 27

Cho tam giác ABC, các tia phân giác góc B và góc C cắt nhau tại O. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy M và N sao cho $BM \,.\, BC = BO^2$; $CN \,.\, CB = CO^2$. Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Giải (h.63a)

$$BM \,.\, BC = BO^2 \Rightarrow \frac{BM}{BO} = \frac{BO}{BC}.$$

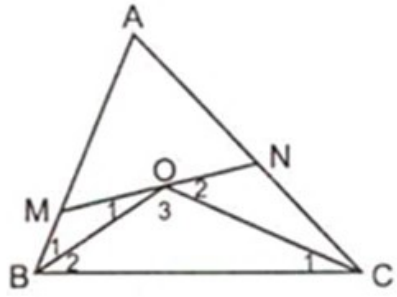
ΔBOM và ΔBCO có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$; $\dfrac{BM}{BO} = \dfrac{BO}{BC}$ nên

$\Delta BOM \backsim \Delta BCO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{C}_1$

Chứng minh tương tự ta được $\Delta CON \backsim \Delta CBO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{O}_2 = \widehat{B}_2$.

Ta có $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{O}_3 = 180^o$

suy ra ba điểm M, O, N thẳng hàng.



Hình 63a

Nhận xét

Điều gì gợi ý cho ta dùng phương pháp tam giác đồng dạng để giải ví dụ trên ? Đó là vì trong đề bài có cho BO là trung bình nhân của BM và BC ; CO là trung bình nhân của CN và CB, từ đó suy ra được các cặp đoạn thẳng tỉ lệ dẫn tới hai tam giác đồng dạng.

b) Dùng phương pháp tam giác đồng dạng để chứng minh tích của hai đoạn thẳng hoặc tổng các tích của các cặp đoạn thẳng bằng một số cho trước.

Ta có thể chứng minh hai tam giác đồng dạng để suy ra các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ, dẫn tới hai tích của các cặp đoạn thẳng bằng nhau.

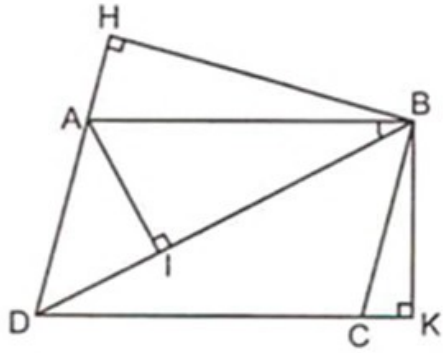
Ví dụ 28

Cho hình bình hành ABCD, góc B nhọn. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên AD và CD. Chứng minh rằng DA . DH + DC . DK = DB^2.

Giải (h.63b)

• *Tìm hướng giải :*

Các tích DA . DH ; DC . DK chưa có mối liên quan trực tiếp nào với nhau cũng như với DB. Vì thế ta sẽ thay các tích này bởi các tích khác bằng chúng, có liên quan với nhau cũng như có liên quan với DB. Muốn vậy phải tạo ra được những cặp tam giác đồng dạng với điều kiện DB phải là cạnh của một trong những tam giác như thế.



Hình 63b

• *Thực hiện chứng minh :*

Vẽ AI ⊥ BD.

$\Delta IDA \backsim \Delta HDB \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DI}{DH} \Rightarrow DA \,.\, DH = DB \,.\, DI.$ (1)

$\Delta IBA \backsim \Delta KDB \Rightarrow \dfrac{BA}{DB} = \dfrac{BI}{DK} \Rightarrow \dfrac{DC}{DB} = \dfrac{BI}{DK} \Rightarrow DC \,.\, DK = DB \,.\, BI.$ (2)

Cộng từng vế các đẳng thức (1) và (2) ta được :

$$DA \,.\, DH + DC \,.\, DK = DB \,.\, DI + DB \,.\, BI = DB(DI + BI) = DB^2 \text{ (đpcm).}$$

Chú ý : Nếu $\widehat{B} = 90^o$ thì hình bình hành ABCD trở thành hình chữ nhật. Lúc đó áp dụng định lí Py-ta-go ta có ngay điều phải chứng minh.

c) Dùng phương pháp tam giác đồng dạng để giải bài toán dựng hình

Đối với một số bài toán dựng hình nhất là dựng hình tam giác, khi chỉ biết một yếu tố về độ dài, còn lại là biết tỉ số giữa các độ dài hoặc biết số đo các góc thì ta có thể nghĩ đến phương pháp tam giác đồng dạng. Trước hết ta tạm bỏ qua một điều kiện (độ dài đã cho) ta dựng được một tam giác đồng dạng với tam giác cần dựng. Sau đó dựa vào điều kiện còn lại ta xác định được hình cần dựng

Ví dụ 29

Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = 60^o$; $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{3}$ và BC = a.

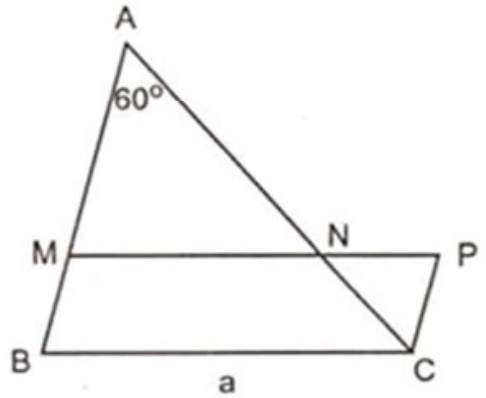
Giải (h.63c)

1. Phân tích

Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn đề bài. Vẽ một đường thẳng song song với BC, cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Từ C vẽ đường thẳng song song với AB cắt MN tại P.

Dễ thấy MP = BC = a.

$\Delta AMN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}.$



Hình 63c

Vậy ΔAMN dựng được, từ đó dựng được P, C rồi B.

2. Cách dựng

– Dựng ΔAMN sao cho $\widehat{A} = 60^o$; AM = 2 ; AN = 3.

– Trên tia MN lấy điểm P sao cho MP = a.

– Dựng PC // AB (C thuộc tia AN).

– Dựng CB // MN (B thuộc tia AM).

ΔABC là tam giác phải dựng.

Phần chứng minh và biện luận dành cho bạn đọc.

BÀI TẬP

145. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AH và BH. Gọi O là giao điểm của AN với CM. Chứng minh rằng :

a) $AN \perp CM$;

b) $AH^2 = 4\ MC\ .\ MO$.

146. Cho tam giác ABC, đường phân giác AE. Chứng minh rằng $AB\ .\ AC > AE^2$.

147. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H, cắt tia BA tại O. Chứng minh rằng :

a) OA . OB = OC . OH ;

b) Góc OHA có số đo không đổi ;

c) Tổng BM . BH + CM . CA không đổi.

148. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Trên đoạn thẳng CH và HB lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho CM = HN. Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt AC tại E. Qua N vẽ đường thẳng $d \perp NE$. Chứng minh rằng khi M di động trên đoạn thẳng CH thì đường thẳng d luôn luôn đi qua một điểm cố định.

149. Lấy các cạnh AB, AC và BC của tam giác ABC làm cạnh đáy, dựng các tam giác vuông cân ABD, ACE và BCF sao cho hai tam giác đầu dựng ra phía ngoài tam giác ABC còn tam giác thứ ba dựng trong cùng một nửa mặt phẳng bờ BC với tam giác ABC. Chứng minh rằng tứ giác AEFD là hình bình hành (hoặc A, E, F, D thẳng hàng).

150. Cho tam giác ABC, ba đường cao AD, BE, CF. Gọi M, N, I, K lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC, BE, CF. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, I, K thẳng hàng.

151. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BN với MC và AC. Cho biết AB = 30cm, tính diện tích các tam giác BEM và AFN.

152. Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ những đường thẳng song song với ba cạnh. Các đường thẳng này chia tam giác ABC thành ba hình bình hành và ba tam giác nhỏ. Biết diện tích của các tam giác đó là a^2, b^2, c^2.

a) Tính diện tích S của ΔABC ;

b) Chứng minh $S \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

153. Cho tam giác nhọn ABC. Hãy dựng hình chữ nhật DEFG nội tiếp tam giác này sao cho nó có diện tích lớn nhất, biết $D \in AB$; $E \in AC$; $F, G \in BC$.

154. Cho góc nhọn xOy và một điểm A cố định nằm trong góc đó. Trên Ox và Oy lần lượt lấy các điểm M và N sao cho OM = 2ON. Hãy xác định vị trí của M và N để cho AM + 2AN có giá trị nhỏ nhất.

§5. Ôn tập chương III

Ví dụ 30

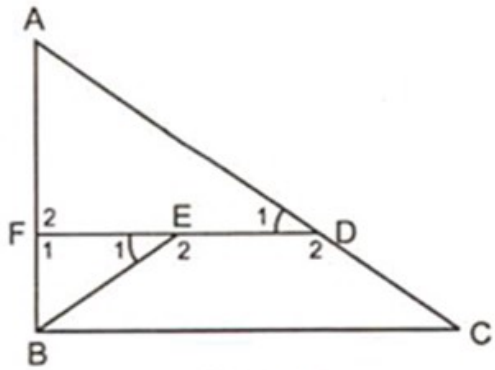
Cho tam giác ABC vuông tại B. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = \frac{1}{3}CA$. Vẽ $DF \perp AB$ ($F \in AB$). Gọi E là trung điểm của DF. Chứng minh rằng tứ giác BCDE là hình thang cân.

Giải (h.64)

$CD = \frac{1}{3}CA \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$; $FE = ED \Rightarrow \frac{FE}{FD} = \frac{1}{2}$.

Ta có FD // BC (vì cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \frac{BF}{AF} = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$ (định lí Ta-let).



Hình 64

ΔBFE và ΔAFD có :

$$\hat{F}_1 = \hat{F}_2 = 90^o ; \frac{BF}{AF} = \frac{FE}{FD} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\Delta BFE \backsim \Delta AFD$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{D}_2$.

Tứ giác BCDE có DE // BC và $\hat{E}_2 = \hat{D}_2$ nên BCDE là hình thang cân.

Nhận xét

Phương pháp giải trong ví dụ trên là vận dụng định lí Ta–let để tìm các cặp đoạn thẳng tỉ lệ, kết hợp các cặp đoạn thẳng tỉ lệ với một cặp góc bằng nhau thích hợp, ta tìm được hai tam giác đồng dạng, suy ra được một cặp góc tương ứng bằng nhau, dẫn tới điều phải chứng minh.

BÀI TẬP

155. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 60^o$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó, các tam giác đều ABM và ACN. Gọi D là giao điểm của AB và CM, E là giao điểm của AC với BN.

a) Chứng minh rằng tam giác ADE là tam giác đều ;

b) Cho biết BD = 4, CE = 9, tính DE.

156. Cho tam giác ABC, BC = 5cm. Trên BC lấy điểm D sao cho BD = 2cm. Lấy E nằm giữa A và B ; F nằm giữa A và C. Cho biết $S_{FBC} = S_{CDEF} = 9\ cm^2$. Tính S_{ABC}.

157. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 36 ; AC = 48. Một đường thẳng song song với BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M và N sao cho MN = BM + CN. Tính MN.

158. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Từ một điểm I bất kì trên cạnh BC vẽ IH // CE, IK // BD ($H \in AB$; $K \in AC$). Chứng minh rằng HK bị hai đường trung tuyến BD và CE chia làm ba phần bằng nhau.

159. Cho hình chữ nhật ABCD, M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Một đường thẳng qua M cắt tia đối của tia BC tại M', cắt tia đối của tia DC tại E và cắt AC tại F. Tia FN cắt đường thẳng CD tại G. Chứng minh rằng :

a) C là trung điểm của EG ;

b) Điểm M và M' chia trong và chia ngoài đoạn thẳng EF theo cùng một tỉ số.

160. Qua điểm O ở trong tam giác ABC ta vẽ một đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại D và E, đường thẳng song song với CA cắt BC và BA lần lượt tại F và H, đường thẳng song song với AB cắt CA và CB lần lượt tại I và K. Chứng minh rằng :

a) $\frac{OD}{OE}.\frac{OF}{OH}.\frac{OI}{OK} = 1$;

b) $\frac{AH}{AB}+\frac{BK}{BC}+\frac{CE}{CA} = 1$.

161. Cho hình thoi ABCD có AC = AB. Một đường thẳng bất kì qua B cắt tia đối của tia AD tại E, cắt tia đối của tia CD tại F. Gọi giao điểm của AF và CE là O. Chứng minh rằng :

a) Tích AE . CF không đổi ;

b) $\Delta AEC \backsim \Delta CAF$;

c) Góc EOF có số đo không đổi.

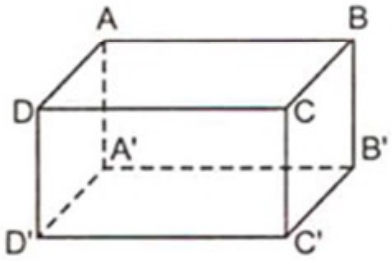
162. Cho tam giác ABC. Dựng hình bình hành AEDF có D, E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\Delta DFE \backsim \Delta ABC$.

Chương IV

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU

§1. Hình hộp chữ nhật

Kiến thức cơ bản



Hình 65

1. *Hình 65* là hình ảnh của một hình hộp chữ nhật, nó có 6 mặt đều là những hình chữ nhật.

Đặc biệt : Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt đều là hình vuông.

2. *Nhận xét*

a) Đường thẳng đi qua 2 điểm A, B của mặt phẳng (ABCD) thì nằm trọn trong mặt phẳng đó (ta hình dung mặt phẳng trải rộng về mọi phía).

b) Qua ba điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng. Ta có thể kí hiệu là mp (P).

c) Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất đi qua điểm đó (đường thẳng này gọi là giao tuyến của 2 mặt phẳng).

3. *Vị trí của hai đường thẳng phân biệt trong không gian.*

a) Hai đường thẳng cắt nhau nếu chúng có một điểm chung. Khi đó có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

b) Hai đường thẳng song song nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, chẳng hạn AB // CD (h.65).

c) Hai đường thẳng chéo nhau nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng nào, chẳng hạn AB và CC' là hai đường thẳng chéo nhau (h.65).

4. *Đường thẳng song song với mặt phẳng. Hai mặt phẳng song song.*

a) Nếu một đường thẳng a không thuộc mp (P) mà song song với một đường thẳng nằm trên mp (P) thì đường thẳng a song song với mp (P). *Trong hình 65* có AB // mp (A'B'C'D').

b) Nếu mp (Q) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau mà a và b cùng song song với mp (P) thì mp (Q) // mp (P).

Trong hình 65, mp(ABCD) // mp (A'B'C'D').

5. *Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc.*

a) Nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng a vuông góc với mp (P).

Đảo lại, nếu đường thẳng a vuông góc với mp (P) tại điểm A thì đường thẳng a vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A của mặt phẳng (P).

b) Nếu một trong hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì mp(P) vuông góc với mp(Q).

6. *Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.*

- $S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao).
- $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$.

Đặc biệt, đối với hình lập phương cạnh a

- $S_{xq} = 4a^2$; $S_{tp} = 6a^2$.

7. *Thể tích hình hộp chữ nhật.*

$V = abc$ (a, b, c là ba kích thước).

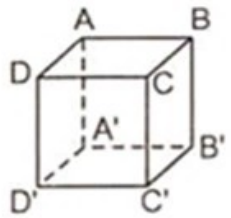
Đặc biệt, thể tích của hình lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Bổ sung

1. *Trong hình hộp chữ nhật :*

- 4 đường chéo đồng quy tại trung điểm của mỗi đường chéo.
- Bình phương của mỗi đường chéo bằng tổng các bình phương của ba kích thước.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Hình 66

2. *Vẽ hình trong hình học không gian*

Xét hình lập phương ABCD.A'B'C'D' được biểu diễn trong *hình 66*

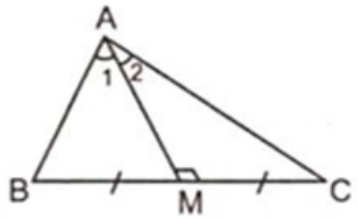
• Trong không gian, hai đoạn thẳng AB, CD song song và bằng nhau thì trong hình biểu diễn của chúng, ta vẽ AB // CD và AB = CD.

• Trong không gian, hai đoạn thẳng AB và BC bằng nhau nhưng chúng không cùng phương nên trong hình biểu diễn của chúng không nhất thiết phải vẽ AB = BC.

• Trong không gian, hai góc bằng nhau nhưng các cạnh tương ứng của chúng không cùng phương thì trong hình biểu diễn của chúng không nhất thiết phải vẽ hai góc bằng nhau.

Chẳng hạn, các góc B và C đều là góc vuông nhưng trong *hình 66* vẽ $\widehat{B} < 90^o$ còn $\widehat{C} > 90^o$.

Hình 67 vẽ tam giác ABC bất kì. Hình này có thể biểu diễn một tam giác đều trong không gian, do đó nếu M là trung điểm của BC thì AM ⊥ BC và $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.



Hình 67

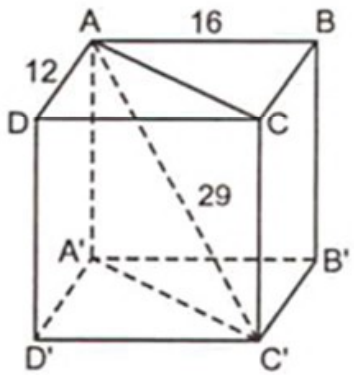
Ví dụ 31

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh AC // A'C' ;

b) Cho biết dạng của tứ giác ACC'A' ;

c) Biết AB = 16cm ; AD = 12cm ; AC' = 29cm, tính diện tích xung quanh và thể tích của hình hộp đã cho.



Hình 68

Giải (h.68)

a) AA' // CC' (vì cùng song song với DD') ;

AA' = CC' (vì cùng bằng DD').

Vậy ACC'A' là hình bình hành ⇒ AC // A'C'.

b) AA' ⊥ mp (A'B'C'D') ⇒ AA' ⊥ A'C'

⇒ hình bình hành ACC'A' là hình chữ nhật.

c) Ta có $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$;

$$29^2 = 16^2 + 12^2 + AA'^2 \Rightarrow AA' = 21.$$

$S_{xq} = 2p.h = 2.(12 + 16).21 = 1176\ (cm^2)$; $V = a.b.c = 12.16.21 = 4032\ (cm^3)$.

Nhận xét

1. Để chứng minh các quan hệ trong một mặt phẳng, ta có thể vận dụng các định lí đã học trong hình học phẳng. Ở câu a, ta đã vận dụng điều này để chứng minh AC // A'C'.

2. Ở câu b, để chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau, ta đã chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại một điểm, từ đó suy ra đường thẳng ấy vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đi qua điểm đó.

BÀI TẬP

163. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Đường thẳng m cắt a và b lần lượt tại A và B. Đường thẳng n cắt a và b lần lượt tại C và D. Hỏi điểm D có thuộc mp(ABC) hay không ? Vì sao ?

164. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

a) mp (ABCD) và mp(ACC'A') cắt nhau theo giao tuyến nào ?

b) mp(BDD'B') và mp(ACC'A') cắt nhau theo giao tuyến nào ?

c) Gọi g là giao tuyến của mp(BDD'B') với mp (ACC'A'). Hỏi g song song với những đường thẳng nào ? g song song với những mặt phẳng nào ?

165. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F, G, M, N lần lượt là trung điểm của CD', CB', CC', B'C' và C'D'. Chứng minh rằng :

a) EFMN là hình bình hành ;

b) CC' // mp(EFMN) và mp(EFG) // mp(A'B'C'D') ;

c) CC' $\perp$ mp(EFG) và mp(EFG) $\perp$ mp(CC'D')

166. Đường chéo của một hình lập phương bằng 5cm. Tính diện tích toàn phần của nó.

167. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Biết AB = 7 ; AC' = 10 và $\widehat{AC'A'} = 30^o$. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

168. Một hình hộp chữ nhật có tổng ba kích thước là 19cm, diện tích toàn phần là $192cm^2$. Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật đó.

169. a) Có thể xếp 512 hình lập phương đơn vị (cạnh dài một đơn vị) thành một hình lập phương hay không ?

b) Muốn được một hình lập phương cạnh dài 10 đơn vị thì phải có thêm bao nhiêu hình lập phương đơn vị nữa ?

c) Nếu ta sơn tất cả các mặt của hình lập phương cạnh dài 10 đơn vị nói trên thì trong các hình lập phương đơn vị, có bao nhiêu hình lập phương mà :

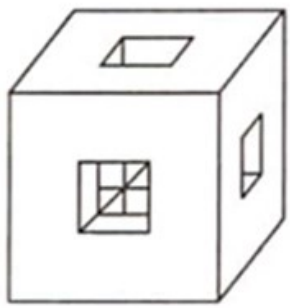
– Có ba mặt sơn ? – Có đúng hai mặt sơn ? – Chỉ có một mặt sơn ?

170. Một khối gỗ hình lập phương cạnh dài n đơn vị ($n \in \mathbf{N}$; $n > 2$) được sơn xanh tất cả các mặt. Xẻ khối gỗ đó bằng những lát cắt song song với các mặt, chia khối gỗ thành n^3 hình lập phương đơn vị. Biết số các khối nhỏ không được sơn mặt nào bằng $\frac{2}{3}$ số khối nhỏ được sơn chỉ một mặt. Tìm n.

171*. Một khối gỗ hình lập phương cạnh 3dm. Ở chính giữa mỗi mặt người ta đục các lỗ thông tới mặt đối diện. Mặt lỗ đục hình vuông cạnh 1dm song song với các cạnh của hình lập phương (h.69)

a) Tính tổng diện tích mặt ngoài và mặt trong của khối ;

b) Thể tích phần bỏ đi chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích phần còn lại ?



Hình 69

§2. Hình lăng trụ đứng. Diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ đứng

Kiến thức cơ bản

1. *Hình 70* là hình ảnh của một hình lăng trụ đứng.

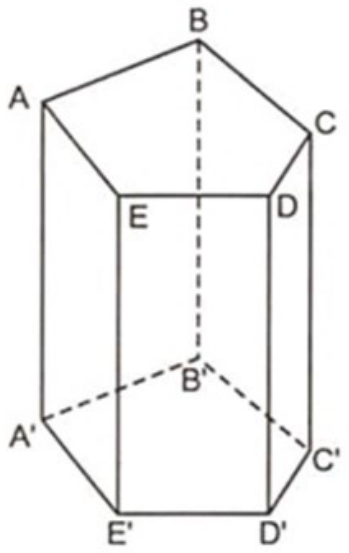
- Hai đáy là hai đa giác bằng nhau, nằm trên hai mặt phẳng song song.

• Các mặt bên là những hình chữ nhật. Các mặt bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

• Các cạnh bên song song và bằng nhau, chúng vuông góc với mặt phẳng đáy.

Độ dài của cạnh bên gọi là chiều cao.

• Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.



Hình 70

2. $S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao)

$$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{đáy}$$

3. V = S.h (S là diện tích một đáy, h là chiều cao).

Bổ sung

1. Lăng trụ đều là một lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều.

Chẳng hạn, lăng trụ tam giác đều là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều ; lăng trụ tứ giác đều là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông.

2. Sự liên hệ giữa số cạnh đáy với số mặt, số đỉnh và số cạnh của một hình lăng trụ.

Số cạnh đáy	Số mặt	Số đỉnh	Số cạnh
n	n + 2	2n	3n

Ví dụ 32

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy là một tam giác vuông cân tại A.

a) Chứng minh rằng mp (ABB'A') ⊥ mp (ACC'A') ;

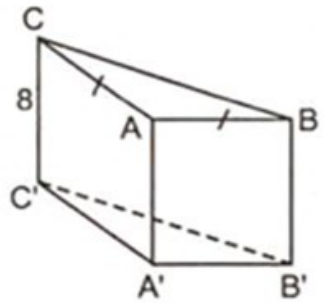
b) Biết lăng trụ có chiều cao là 8cm, thể tích là $100cm^3$, tính diện tích xung quanh của lăng trụ này.

Giải (h.71)

a) AB ⊥ AC ; AB ⊥ AA' ⇒ AB ⊥ mp(ACC'A').

Vì AB ⊂ mp(ABB'A')

nên mp (ABB'A') ⊥ mp(ACC'A').



Hình 71

b) $V = S.h \Rightarrow S = \frac{V}{h} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$ (cm^2).

Đặt AB = AC = a thì $S = \frac{a^2}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow a = 5$.

$BC = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$;

$S_{xq} = 2p.h = (5 + 5 + 5\sqrt{2}).8 = (10 + 5\sqrt{2}).8 = 40(2 + \sqrt{2})$ (cm^2).

Nhận xét

Vì ΔABC vuông cân tại A có thể coi là một nửa của hình vuông nên hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có thể coi là một nửa của hình hộp chữ nhật. Từ đó suy ra mp(ABB'A') $\perp$ mp(ACC'A') và thể tích của hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' bằng một nửa của thể tích hình hộp chữ nhật tương ứng.

BÀI TẬP

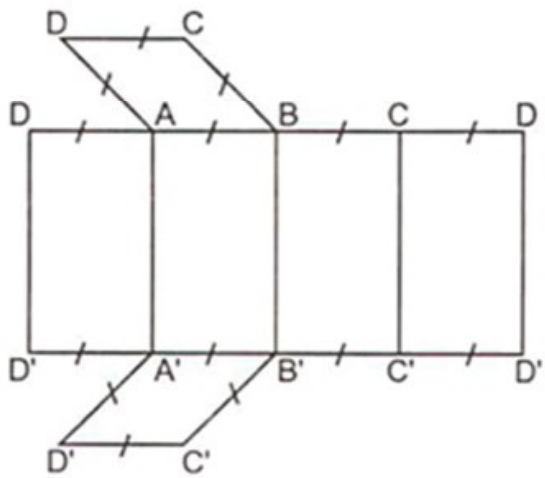
172. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có đường cao bằng cạnh đáy và bằng a.

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của lăng trụ đó ;

b) Vẽ hình khai triển của lăng trụ nói trên.

173. Một lăng trụ đều có tổng số mặt, số đỉnh và số cạnh là 20. Biết diện tích xung quanh là $360cm^2$ chiều cao là 12cm, tính thể tích của lăng trụ đó.

174. Hình 72 là hình khai triển của một hình lăng trụ đứng. Biết AC = 16cm ; BD = 30cm và AA' = 40cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ đứng đó.



Hình 72

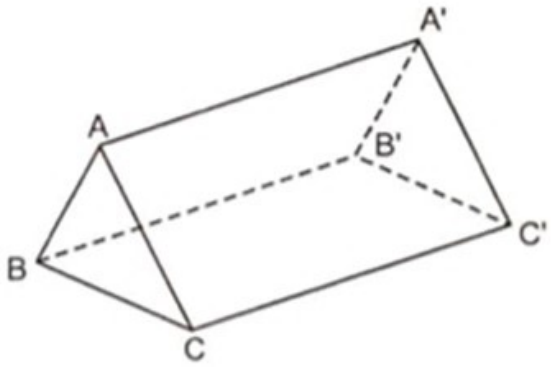
175. Một bể cá cảnh hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có chiều dài AB = 50cm, chiều rộng AD = 40cm, chiều cao AA' = 30cm. Trong bể có nước nhưng không đầy. Nếu ta cho bể nằm nghiêng trên cạnh đáy AB tới khi mép nước

dâng lên tới sát cạnh A'B' thì ở thành đối diện, mép nước rút xuống còn cách cạnh CD là 10cm. Tính thể tích nước trong bể cá.

176. Một tốp học sinh đi pic-nic, dùng một tấm vải bạt kích thước a × b (a > b) để dựng một chiếc lều có 2 mái áp sát đất thành một hình lăng trụ tam giác đều (h.73)

a) Chứng minh rằng dù căng tấm bạt cho chiều có độ dài a hay b áp sát đất thì diện tích mặt bằng được che ở bên trong lều cũng như nhau.

b) Căng tấm bạt theo chiều nào thì phần không gian bên trong lều có thể tích lớn hơn ?



Hình 73

§3. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều. Diện tích xung quanh và thể tích hình chóp đều

Kiến thức cơ bản

1. Hình chóp :

– Đáy là một đa giác

– Các mặt bên là những tam giác chung một đỉnh.

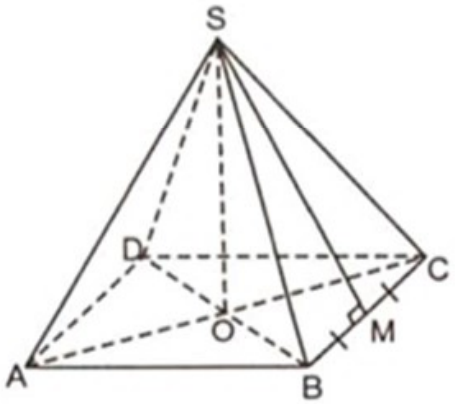
– Đường cao là đường vuông góc hạ từ đỉnh vuông góc với mặt phẳng đáy

2. Hình chóp đều là một hình chóp có đáy là một đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đáy (*). Trong hình chóp đều :

– Các cạnh bên bằng nhau.

– Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.

– Chiều cao của mỗi mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp.



Hình 74

(*) Tâm của đa giác đều : xem phần nâng cao §1 chương II.

Trong *hình 74*, S.ABCD là hình chóp đều đỉnh S, đáy ABCD ; SO là đường cao, SM là trung đoạn.

3. Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy, phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy là một hình chóp cụt đều.

• Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân

• Chiều cao của mỗi hình thang cân (mặt bên) gọi là trung đoạn của hình chóp cụt đều.

4.

Hình chóp đều	*Hình chóp cụt đều*
$S_{xq} = p.d$	$S_{xq} = (p + p').d$
$V = \frac{1}{3}S.h$	

(p, p' là nửa chu vi của các đáy, d là trung đoạn, h là chiều cao)

Bổ sung

1. Hình chóp có đáy là một đa giác đều và tất cả các cạnh bên bằng nhau là một hình chóp đều.

2. Công thức $V = \frac{1}{3}S.h$ cũng được dùng để tính thể tích của hình chóp bất kì.

3. Muốn tính thể tích hình chóp cụt ta có thể tính hiệu thể tích của hai hình chóp hoặc dùng công thức :

$$V_{\text{chóp cụt}} = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'})$$

(S, S' là diện tích của hai đáy, h là chiều cao).

4. Sự liên hệ giữa độ dài mỗi cạnh a của đa giác đều với bán kính R của đường tròn ngoại tiếp

Tam giác đều	$a = R\sqrt{3}$	$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
Hình vuông	$a = R\sqrt{2}$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
Lục giác đều	$a = R$	$R = a$

Ví dụ 33

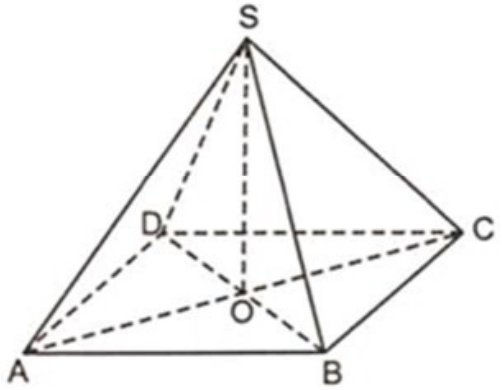
Cho hình chóp S.ABCD trong đó ABCD là hình vuông cạnh a và các mặt bên là những tam giác đều.

a) Chứng minh rằng hình chóp đã cho là một hình chóp đều ;

b) Chứng minh rằng diện tích đáy bằng tổng diện tích của hai mặt chéo (SAC) và (SBD) ;

c) Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp đó.

Giải (h.75)



Hình 75

a) Hình chóp S.ABCD có đáy là một đa giác đều (hình vuông) và tất cả các cạnh bên bằng nhau nên S.ABCD là một hình chóp đều.

b) Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔSOA vuông tại O có SA = a ;

$OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

suy ra $SO^2 = SA^2 - OA^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tổng diện tích hai mặt chéo (SAC) và (SBD) là

$$2.\left(\frac{1}{2}AC.SO\right) = a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2 = \text{diện tích đáy.}$$

c) Diện tích ΔSBC bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình chóp là : $S_{xq} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.4 = a^2.\sqrt{3}$.

Thể tích của hình chóp là $V = \dfrac{1}{3}S.h = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Nhận xét

Phương pháp tính diện tích xung quanh trong ví dụ trên dựa trên nhận xét : Các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác cân có diện tích bằng nhau. Vì vậy ta đã tính diện tích của một mặt bên rồi nhân với 4.

Nếu dùng công thức $S_{xq} = p.d$ thì ta có $p = 2a$;

$$d = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ do đó } S_{xq} = 2a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$$

Hai kết quả hoàn toàn trùng nhau.

BÀI TẬP

177. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng mp (SMC) $\perp$ mp (SAB) ;

b) Biết SM = 5cm ; SA = $\sqrt{29}$ cm, tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp.

178. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng hình chóp C.C'BD là một hình chóp đều ;

b) Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình chóp đó.

179. Một hình chóp cụt tứ giác đều, cạnh đáy lớn bằng a, cạnh đáy nhỏ bằng b, chiều cao là $\frac{ab}{a+b}$. Chứng minh rằng diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy.

180. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, chiều cao bằng 15cm, thể tích là 1280cm^3.

a) Tính độ dài cạnh đáy ;

b) Tính diện tích xung quanh.

181. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

a) Chứng minh rằng A'B'C'.ABC là hình chóp cụt đều ;

b) Cho biết bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là R = $4\sqrt{3}$ cm ; cạnh bên hình chóp là 8cm. Tính thể tích hình chóp cụt đó.

§4. Ôn tập chương IV và ôn tập cuối năm

Ví dụ 34

Hình 76 là hình khai triển của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

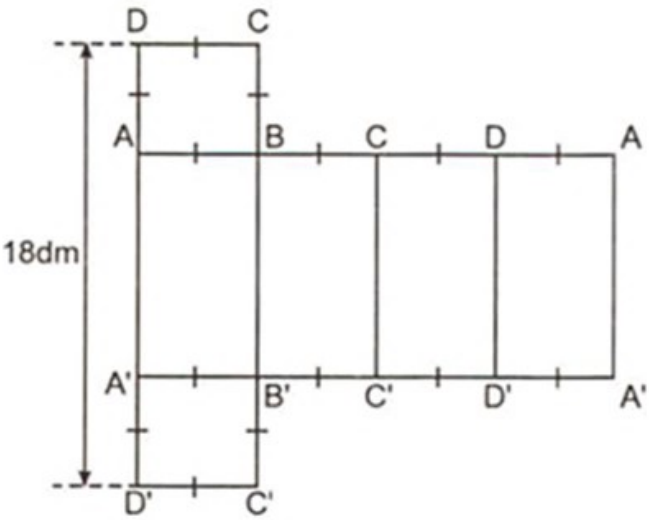
a) Từ hình khai triển, hãy vẽ hình hộp chữ nhật đó ;

b) Chứng minh AC // mp (A'B'C'D') và AC ⊥ mp (BDD'B') ;

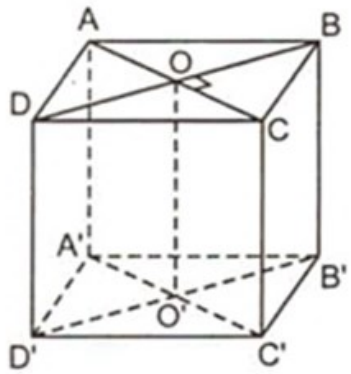
c) Chứng minh mp (ACC'A') ⊥ mp (BDD'B') ;

d) Tính diện tích toàn phần lớn nhất của hình hộp chữ nhật nói trên. Lúc đó thể tích của nó là bao nhiêu ?

Giải



Hình 76



Hình 77

a) Xem *hình 77*.

b) Dễ thấy tứ giác ACC'A' là hình chữ nhật ⇒ AC // A'C' mà A'C' ⊂ mp (A'B'C'D') nên AC // mp (A'B'C'D'). Gọi O là giao điểm của AC với BD ; O' là giao điểm của A'C' với B'D'. Ta thấy OO' là đường trung bình của hình chữ nhật ACC'A' nên OO' // AA', do đó OO' ⊥ AC. Ta có AC ⊥ BD ; AC ⊥ OO' nên AC ⊥ mp (BDD'B').

c) AC ⊂ mp (ACC'A') mà AC ⊥ mp (BDD'B') nên mp (ACC'A') ⊥ mp (BDD'B').

d) Đặt AB = x thì AA' = 18 – 2x .

$$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{đáy} = 4x.(18 - 2x) + 2x^2 = -6x^2 + 72x = -6(x^2 - 12x)$$

$$= -6(x - 6)^2 + 216 \leq 216 \text{ (dấu = xảy ra } \Leftrightarrow x = 6).$$

Vậy max S_{tp} = 216 (đvdt) (khi và chỉ khi cạnh đáy của hình hộp chữ nhật là 6).

Lúc đó chiều cao AA' của hình hộp chữ nhật là 6. Hình hộp chữ nhật này chính là một hình lập phương. Thể tích của nó là $V = 6^3 = 216$ (đvtt).

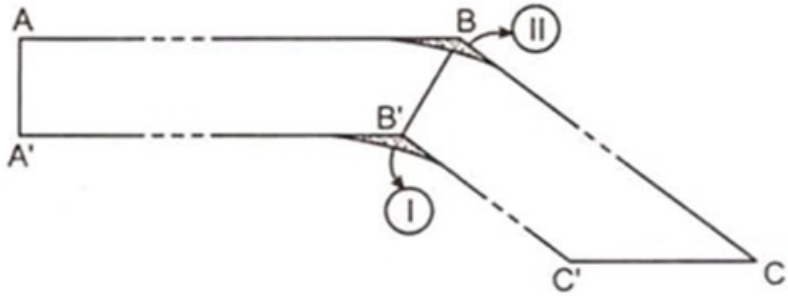
Nhận xét

> *– Đối với hình chữ nhật có tổng hai kích thước không đổi thì diện tích của nó lớn nhất khi và chỉ khi hình chữ nhật đó là hình vuông.*
>
> *– Đối với hình hộp chữ nhật có tổng ba kích thước không đổi thì thể tích của nó lớn nhất khi và chỉ khi hình hộp chữ nhật đó là hình lập phương.*

BÀI TẬP

182. Từ một khối gỗ hình lập phương cạnh dài n đơn vị (n > 2) người ta đục bỏ đi các hình lập phương đơn vị ở các đỉnh. Tính diện tích toàn phần và thể tích của khối gỗ.

183. Thực hiện "bê tông hoá" đường làng ngõ xóm, xóm X đã đổ bê tông đoạn đường của xóm mình (h.78) kích thước như sau : AB = 219 m ; A'B' = 218 m ; BC = 213 m, B'C' = 210m ; bề rộng mặt đường là 2,4m và độ dày của lớp bê tông là 15cm. Ở chỗ ngoặt, diện tích phần I thêm vào đúng bằng diện tích phần II bớt đi. Tính thể tích sỏi để đổ bê tông đoạn đường đó biết sỏi chiếm 50% thể tích bê tông.



Hình 78

184. Cho hình chóp cụt tứ giác đều A'B'C'D'.ABCD có các cạnh đáy AB = 2a ; A'B' = a. Biết diện tích xung quanh là $6a^2$ hãy tính :

a) Cạnh bên của hình chóp cụt ;

b) Chiều cao của hình chóp cụt ;

c) Thể tích của hình chóp cụt.

185. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) hai đường chéo cắt nhau tại O và $\widehat{COD} = 60^o$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD, AC. Gọi các trung điểm của OB và OC là E và F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng ;

b) Chứng minh tam giác OPQ và tam giác EFM là các tam giác đều ;

c) Tính diện tích xung quanh của một hình chóp cụt ngũ giác đều có mặt bên là hình thang cân nói trên biết MN = 4cm.

186. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AD. Lấy điểm O nằm giữa A và D. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của OB và OC. Các tia BO và DF thứ tự cắt AC tại Q và N. Các tia CO và DE thứ tự cắt AB tại P và M. Chứng minh rằng :

a) MN // PQ ;

b) $MN = \dfrac{PQ + BC}{2}$.

187. Từ ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC ta vẽ ba đường thẳng song song với nhau, chúng lần lượt cắt cạnh BC và các đường thẳng CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{CF}$;

b) $S_{DEF} = 2.S_{ABC}$.

188. Cho tam giác ABC, điểm O là giao điểm của các tia phân giác của góc B và góc C. Vẽ $OD \perp BC$; $OE \perp CA$ và $OF \perp AB$. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

189. Cho tam giác đều ABC, AB = 1. Trên cạnh AC lấy hai điểm D và E sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = 20^o$. Gọi M là trung điểm của BE và N là một điểm trên cạnh BC sao cho BN = BM.

a) Chứng minh rằng $\Delta BMN \backsim \Delta BDE$;

b) Tính tổng diện tích các tam giác BCE và BEN.

190. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho AM = CN. Gọi E là trung điểm của MN. Tia DE

cắt BC tại F. Qua M vẽ đường thẳng song song với AD cắt DF tại H. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác MFNH là hình thoi ;

b) $ND^2 = NB.NF$;

c) Chu vi tam giác BMF không đổi khi M di động trên cạnh AB.

191. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường trung tuyến AM. Gọi D và E thứ tự là hình chiếu của H trên AB và AC.

a) Chứng minh rằng AD.AB = AE.AC ;

b) Chứng minh rằng $AM \perp DE$;

c) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì để diện tích tứ giác AEHD bằng $\frac{1}{2}$ diện tích tam giác ABC.

LỜI GIẢI CHỈ DẪN ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I

PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

1. a) $x = 99 \Rightarrow x + 1 = 100$. Thay $100 = x + 1$ vào biểu thức A ta tính được $A = 90$.

b) Thay $20 = x - 1$ rồi thực hiện các phép tính, được $B = 24$.

c) Thay $26 = x + 1$; $27 = x + 2$; $47 = 2x - 3$; $77 = 3x + 2$; $50 = 2x$ rồi thực hiện các phép tính, được $C = 1$.

2. a) $5x + y \vdots 19 \Rightarrow 3(5x + y) \vdots 19$;

$19x \vdots 19 \Rightarrow 19x - 3(5x + y) \vdots 19$ hay $4x - 3y \vdots 19$.

b) Xét $3D - 2C = 3(7x + 2y) - 2(4x + 3y) = 13x \vdots 13$

mà $2C = 2(4x + 3y) \vdots 13$ nên $3D \vdots 13$. Vì $(3,13) = 1$ nên $D \vdots 13$.

3. Gọi 4 số lẻ liên tiếp là $(2a - 3)$; $(2a - 1)$; $(2a + 1)$; $(2a + 3)$; $a \in \mathbb{Z}$.

Ta có $(2a + 1)(2a + 3) - (2a - 3)(2a - 1) = 16a \vdots 16$.

4. a) Gọi 4 số nguyên liên tiếp là a ; $a + 1$; $a + 2$; $a + 3$;

ta có $(a + 1)(a + 2) - a(a + 3) = 2$.

b) $(a + 1)(a + 3) - a(a + 2) = 99 \Leftrightarrow a = 48$. Vậy 4 số nguyên liên tiếp đó là 48, 49, 50, 51.

5. Bạn hãy biến đổi vế trái thành vế phải.

Áp dụng : $62 . 68 = 100 . 6.7 + 2.8 = 4216$

$43 . 47 = 100 . 4.5 + 3.7 = 2021$.

6. a) $(2x - 5)(3x + b) = ax^2 + x + c \Leftrightarrow 6x^2 + (2b - 15)x - 5b = ax^2 + x + c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ 2b - 15 = 1 \\ -5b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \\ c = -40. \end{cases}$$

b) $(ax + b)(x^2 - x - 1) = ax^3 + cx^2 - 1$

$\Leftrightarrow ax^3 + (b - a)x^2 - (a + b)x - b = ax^3 + cx^2 - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - a = c \\ a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 2. \end{cases}$$

7. Gọi a và b là 2 số nguyên. Ta có

$(x + a)(x + b) = x^2 + mx + 72 \Leftrightarrow x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + mx + 72$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = m \\ ab = 72. \end{cases}$$

Dễ thấy a, b phải cùng dấu, hơn nữa vì $m > 0$ nên a, b là các số nguyên dương.

Không giảm tích tổng quát, giả sử $a \le b$ ta có bảng sau :

a	1	2	3	4	6	8
b	72	36	24	18	12	9
m	73	38	27	22	18	17

Vì $m < 30$ nên ta tìm được 4 giá trị của m ; $m \in \{27 ; 22 ; 18 ; 17\}$.

8. a) Viết thêm thừa số $(2 - 1)$ vào đằng trước rồi vận dụng liên tiếp hằng đẳng thức hiệu hai bình phương ta được vế trái bằng vế phải.

b) Đặt $a = 100$ rồi biến đổi cả hai vế được cùng một kết quả là $4a^2 + 4a + 70$.

9. a) Áp dụng $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ được $A = 2$.

b) Áp dụng $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ được $B = (263 + 37)^2 = 300^2 = 90000$.

c) $C = (136 - 46)^2 = 90^2 = 8100$.

d) $D = (50^2 - 49^2) + (48^2 - 47^2) + (46^2 - 45^2) + ... + (2^2 - 1^2)$

$= 50 + 49 + 48 + 47 + 46 + 45 + ... + 2 + 1 = \frac{(50+1).50}{2} = 1275.$

10. $2(a^2 + b^2) = (a - b)^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -b.$

11. Từ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ biến đổi thành $(ay - bx)^2 = 0$

$\Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$

12. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ (1).

Vì $(a - b)^2 \geq 0$; $(b - c)^2 \geq 0$; $(c - a)^2 \geq 0$ nên từ (1) suy ra

$a - b = b - c = c - a = 0$ hay $a = b = c$.

13. a) $(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 10x + 25) + x^2 + 1 = (x - y)^2 + (x + 5)^2 + x^2 + 1 > 0$ trái đề bài.

b) $(4x^2 - 4x + 1) + 3(y^2 + 10y + 25) + 2 = (2x - 1)^2 + 3(y + 5)^2 + 2 > 0$ trái đề bài.

c) $(3x^2 - 12x + 12) + (4y^2 - 20y + 25) + 2y^2 + 3$

$= 3(x - 2)^2 + (2y - 5)^2 + 2y^2 + 3 > 0$ trái đề bài.

14. $(x^2 + 2x + 1) + 2^{2n} - 2 . 2^n + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (2^n - 1)^2 = 0.$

Suy ra $(x + 1)^2 = 0$ và $2^n - 1 = 0$ do đó $x = -1$; $2^n = 2^0$ hay $x = -1$ và $n = 0$.

15. a) $A = x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x.

b) $B = x^2 - 2.\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ (vì x và y không đồng thời bằng 0).

c) $C = -(x^2 - 4x + 10) = -\left[(x^2 - 4x + 4) + 6\right] = -\left[(x-2)^2 + 6\right] < 0$ với mọi x.

16. a) $A = (5x - 1)^2 + 3y^2 + 10 \geq 10$.

Vậy min A = 10 (khi và chỉ khi $x = \frac{1}{5}$; y = 0).

b) $B = 2x^2 - 28x + 130 = 2(x^2 - 14x + 65) = 2(x - 7)^2 + 32 \geq 32$.

Vậy min B = 32 (khi và chỉ khi x = 7).

c) $C = (x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 6) = (x^2 - 5x)^2 - 36 \geq -36$.

Vậy min C = –36 (khi và chỉ khi x = 0 hoặc x = 5).

17. a) $A = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x - 1)^2 + 1 \leq 1$.

Vậy max A = 1 (khi và chỉ khi x = 1).

b) $B = -(9x^2 + 6x - 19) = -(3x + 1)^2 + 20 \leq 20$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$).

Vậy max B = 20 (khi $x = -\frac{1}{3}$).

18. a) Gọi hai số chẵn đó là 2a – 2 và 2a + 2 (với $a \in \mathbf{Z}$).

Hiệu các bình phương của chúng là : $(2a + 2)^2 - (2a - 2)^2 = 16a \vdots 16$.

b) Gọi hai số lẻ đó là 2a – 3 và 2a + 3 (với $a \in \mathbf{Z}$).

Hiệu các bình phương của chúng là $(2a + 3)^2 - (2a - 3)^2 = 24a \vdots 24$.

19. a) $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = 7^2 + 4 . 60 = 289$.

Vì x > y > 0 nên x + y = 17. Vậy $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 7 . 17 = 119$.

b) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 289 - 120 = 169$.

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 169^2 - 2.3600 = 21361$.

20. a) $T = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) = a^2 - (b - c)^2$

$T = (a - b + c)(a + b - c) = (2p - 2b)(2p - 2c) = 4(p - b)(p - c)$.

b) $T = p^2 + (p^2 - 2ap + a^2) + (p^2 - 2bp + b^2) + (p^2 - 2cp + c^2)$

$T = 4p^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2p\,(a + b + c)$

$T = a^2 + b^2 + c^2 + 4p^2 - 2p\,.\,2p = a^2 + b^2 + c^2.$

21. Vì $m > n > 0$ nên $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$

Xét $b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2$

$b^2 + c^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$; $a^2 = (m^2 + n^2)^2$.

Vậy $a^2 = b^2 + c^2$, suy ra a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

22. a) $A = (x + 3)^3 = (-103 + 3)^3 = (-100)^3 = -1\,000\,000.$

b) $B = (x - 5)^3 + 125 = (25 - 5)^3 + 125 = 8000 + 125 = 8125.$

c) $C = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = x^6 - 1 = (-3)^6 - 1 = 728.$

23. $A = 2(x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x^2 + 2xy + y^2) = 4(x^2 + xy + y^2) - 3x^2 - 6xy - 3y^2$

$A = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 2^2 = 4.$

24. $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow (x + y)^3 = -z^3$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3$

$\Rightarrow x^3 + y^3 - 3xyz = -z^3 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$

25. Đặt $x - y = a$, ta được $A = (a - 1)^3 - (a + 1)^3 + 6a^2 = -2.$

26. Ta có $x^3 + 8y^3 = 0$ (1) ; $x^3 - 8y^3 = 16$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2x^3 = 16$; $x = 2$; thay $x = 2$ vào (1) được $y = -1$.

27. a) $A = 742^3 - 692^3 = (742 - 692)(742^2 + 742.692 + 692^2).$

Mỗi số hạng trong dấu ngoặc thứ hai là tích của hai số chẵn nên chia hết cho 4 do đó $A = 50\,.\,4k$ $(k \in \mathbf{Z})$; $A = 200k \,\vdots\, 200$.

b) $B = 685^3 + 315^3 = (685 + 315)(685^2 - 685.315 + 315^2).$

Mỗi số hạng trong dấu ngoặc thứ hai chia hết cho 25 do đó

$B = 1000\,.\,25k$ $(k \in \mathbf{Z})$; $B = 25\,000k \,\vdots\, 25\,000.$

28. Bạn có thể dùng phương pháp giải như bài 24.

$a + b + c + d = 0 \Rightarrow b + c = -(a + d) \Rightarrow (b + c)^3 = -(a + d)^3$

$\Rightarrow b^3 + c^3 + 3bc\,(b + c) = -\left[a^3 + d^3 + 3ad(a + d)\right]$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ad(a + d) - 3bc(b + c) = 3ad\,(b + c) - 3bc(b + c)$

$= 3(b + c)(ad - bc).$

29. a) $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2\,(ab^2c + a^2bc + abc^2)$

$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc\,(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ (vì $a + b + c = 0$).

b) $a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2\,(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 4\left[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)\right]$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 2\,(ab + bc + ca)^2$ (theo câu a).

30. • Xét trường hợp $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b = (x^2 + cx + d)^2$

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2,$$

suy ra $\begin{cases} 2c = -2 \\ c^2 + 2d = 3 \\ 2cd = a \\ d^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$

• Trường hợp $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b = (-x^2 + cx + d)^2$, bạn đọc giải tương tự như trên cũng được $a = -2$; $b = 1$ (và $c = 1$; $d = -1$).

Tóm lại $a = -2$; $b = 1$.

31. • Bình phương hai vế của $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ được

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2\,(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 1.$$

• Bình phương hai vế của $a + b + c = 0$ được $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$.

Suy ra $ab + bc + ca = -\dfrac{1}{2}$ (vì $a^2 + b^2 + c^2 = 1$).

• Bình phương hai vế của đẳng thức này ta được

$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc\,(a + b + c) = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$

(vì $a + b + c) = 0$.

Vậy $a^4 + b^4 + c^4 + 2.\frac{1}{4} = 1 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

32. Ta cần chứng minh $x + y + z > 0$

$x + y + z = 3(a - b + c)^2 + 8\,(ab + bc - ca)$

$= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 6ab - 6bc + 6ac + 8ab + 8bc - 8ca$

$= a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + (b^2 + 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c - a)^2 > 0$ (vì a, b, c không đồng thời bằng 0), suy ra có ít nhất một trong ba biểu thức x, y, z nhận giá trị dương.

33. a) Với $x = 1$ thì $(5x - 3)^6 = (5 . 1 - 3)^6 = 2^6 = 64$.

Vậy tổng số các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển nhị thức $(5x - 3)^6$ là 64.

b) Với $x = 1$; $y = 1$ thì $(3x - 4y)^{20} = (3.1 - 4.1)^{20} = (-1)^{20} = 1$.

Vậy tổng số các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển nhị thức $(3x - 4y)^{20}$ là 1.

34. $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.

Với $x = a$; $y = b$ theo đề bài ta có : $5a^4b = 10a^3b^2 \Rightarrow a = 2b$.

Kết hợp $a = 2b$ với $a - b = 1$ ta được $b = 1$; $a = 2$.

35. a) $(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.

b) $(x - 1)^6 = [x + (-1)]^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$.

c) $(x - 1)^5 = [x + (-1)]^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

36. a) $38^{10} = (39 - 1)^{10} = B(39) + (-1)^{10} = 13k + 1$. Vậy 38^{10} chia cho 13 dư 1.

b) $38^9 = (39 - 1)^9 = B(39) + (-1)^9 = 13k - 1$. Vậy 38^9 chia cho 13 dư 12.

37. $7^{43} = 7^3 . 7^{40} = 343. (7^4)^{10} = 343.2401^{10} = 343(2400+1)^{10}$

$= 343[B(2400) + 1^{10}] = 343.B(2400) + 343 = 100k + 300 + 43$

$= 100(k + 3) + 43.$

Vậy 2 chữ số tận cùng của 7^{43} là 43.

38. a) $(x - 2y)(7x - 4y)$; b) $(4 - y)^2(7x + y - 4)$; c) $4(x - 2)(x^2 - x - 10)$.

39. a) $43(43 + 17) = 60.43 \vdots 60$;

b) $(3^3)^5 - 3^{11} = 3^{15} - 3^{11} = 3^{11} . (3^4 - 1) = 80. 3^{11} \vdots 80.$

40. Gọi số phải tìm là x. Ta có $3x^2 = 2x^3$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 (3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1,5. \end{array}\right.$

41. Giả sử có các số nguyên x, y, z thoả mãn các đẳng thức đã cho.

Xét (1) $x^3 + xyz = x(x^2 + yz) = 957 \Rightarrow$ x là số lẻ. Tương tự, xét (2) ; (3) ta được y, z là số lẻ.

Vậy x^3 là một số lẻ ; xyz là một số lẻ, do đó $x^3 + xyz$ là một số chẵn, trái với (1).

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thoả mãn các đẳng thức đã cho.

42. Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ thì $\underbrace{99...9}_{n} = 9a$ do đó $9a + 1 = \underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n$.

Ta có $N = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n} = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n} + \underbrace{22...2}_{n} = \underbrace{11...1}_{n}.10^n + 2.\underbrace{11...1}_{n}.$

$= a.10^n + 2a = a(10^n + 2) = a(9a + 1 + 2) = a(9a + 3) = 3a (3a + 1).$

Vậy N là tích của hai số nguyên liên tiếp là 3a và 3a + 1, cụ thể là :

$N = \underbrace{33...3}_{n} . \underbrace{33...3}_{n-1}4$ hoặc $N = -\underbrace{33...3}_{n-1}4 . \left(-\underbrace{33...3}_{n}\right).$

43. a) $(10x)^2 - (x^2 + 25)^2 = (10x - x^2 - 25)(10x + x^2 + 25) = -(x - 5)^2(x + 5)^2.$

b) $\left[(x - y + 5) - 1\right]^2 = (x - y + 4)^2.$

44. $(x^2 + 4y^2 - 5)^2 - 16(xy + 1)^2 =$

$= [(x^2 + 4y^2 - 5) - 4(xy + 1)]\,[(x^2 + 4y^2 - 5) + 4(xy + 1)]$

$= (x^2 - 4xy + 4y^2 - 9)(x^2 + 4xy + 4y^2 - 1) = [(x - 2y)^2 - 3^2]\,[(x + 2y)^2 - 1^2]$

$= (x - 2y - 3)(x - 2y + 3)(x + 2y - 1)(x + 2y + 1).$

45. $A = (2ab - a^2 - b^2 + c^2)\,(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = [c^2 - (a - b)^2]\,[(a + b)^2 - c^2]$

$= (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$

Trong một tam giác, mỗi cạnh nhỏ hơn tổng của hai cạnh còn lại nên

$c - a + b > 0$; $c + a - b > 0$; $a + b - c > 0$; $a + b + c > 0$ do đó $A > 0$.

46. a) $21^{10} - 1 = (21 - 1)(21^9 + 21^8 + 21^7 + ... + 21 + 1)$

$= 20.\underbrace{(...1 + ...1 + ...1 + ... + ...1 + 1)}_{\text{10 số hạng}} = 20.10k\ (k \in \mathbf{N}) = 200k \,\vdots\, 200.$

b) $39^{20} + 39^{13} = 39^{13}(39^7 + 1) \,\vdots\, (39 + 1) = 40.$

c) $2^{60} + 5^{30} = (2^4)^{15} + (5^2)^{15} = 16^{15} + 25^{15} \,\vdots\, (16 + 25) = 41.$

d) $2005^{2007} + 2007^{2005} = (2005^{2007} + 1) + (2007^{2005} - 1).$

Vì $2005^{2007} + 1 \,\vdots\, (2005 + 1) = 2006$; $2007^{2005} - 1 \,\vdots\, (2007 - 1) = 2006$

nên $2005^{2007} + 2007^{2005} \,\vdots\, 2006.$

47. Vì n là số tự nhiên lẻ nên $24^n + 1 \,\vdots\, (24 + 1) = 25.$

Mặt khác, $24^n + 1 = (24^n - 1) + 2$ chia cho 23 dư 2.

48. Vì a lẻ, $a > 1$ nên $a - 1$ là số dương chẵn. Vậy $(a - 1) = 2n$ với $n \in \mathbf{N}^*$.

Suy ra $(a-1)^{\frac{1}{2}(a-1)} - 1 = (2n)^n - 1 \,\vdots\, (2n - 1) = (a - 1 - 1) = (a - 2)$.

49. a) $(x - 3y)(x + 3y - z)$; b) $(x + 5)\,(x^2 - 6x + 25)$;

c) $(x - 3)(x^2 + 5x + 9)$; d) $(2x - 3)(2x + 3)(3x + 1)$.

50. a) $x^4 - (5x - 2)^2 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + 5x - 2).$

b) $(x^4 - 6x^2 + 9) - x^2 = (x^2 - 3)^2 - x^2 = (x^2 - x - 3)(x^2 + x - 3).$

c) $(abx^2 - a^2xy) - (b^2xy - aby^2) = ax(bx - ay) - by(bx - ay)$

$= (bx - ay)(ax - by).$

51. $x - y - xy + 1 = 0 \Leftrightarrow x(1 - y) + (1 - y) = 0 \Leftrightarrow (1 - y)(x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ ; y bất kì} \\ y = 1 \quad \text{; x bất kì.} \end{array}\right.$$

52. $x^2 - y = y^2 - x \Rightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0$

Vì $x \neq y$ nên $x + y + 1 = 0 \Rightarrow x + y = -1$.

$A = (x + y)^2 - 3(x + y) = (-1)^2 - 3(-1) = 4.$

53. $(a - b)(d - a) = (b - c)(c - d) \Rightarrow ad - a^2 - bd + ab - bc + bd + c^2 - cd = 0$

$\Rightarrow (c^2 - a^2) - (bc - ab) - (cd - ad) = 0 \Rightarrow (c - a)(c + a) - b(c - a) - d(c - a) = 0$

$$\Rightarrow (c - a)(c + a - b - d) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c - a = 0 \\ c + a - b - d = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = c \\ a + c = b + d \end{array}\right.$$

54. a) $x(x + 1)(2x - 1)(2x + 1)$.

b) $x^2[(x^2(x^2 - 1) - 9(x - 1)] = x^2(x - 1)(x^3 + x^2 - 9)$.

c) $(x^2 + 4)^2 - 4x(x^2 + 4) = (x^2 + 4)(x^2 + 4 - 4x) = (x^2 + 4)(x - 2)^2$.

55. a) $(xy + 4 - 2x - 2y)(xy + 4 + 2x + 2y) = (x - 2)(y - 2)(x + 2)(y + 2)$.

b) $(ab - xy - bx + ay)(ab - xy + bx - ay) = (a - x)(b + y)(a + x)(b - y)$.

c) $(x^2 + 8x - 34 - 3x^2 + 8x + 2)(x^2 + 8x - 34 + 3x^2 - 8x - 2)$

$= (-2x^2 + 16x - 32)(4x^2 - 36) = -8(x - 4)^2(x + 3)(x - 3)$.

56. a) $(a + b + c)^2 + (a - b + c + 2b)(a - b + c - 2b) =$

$= (a + b + c)^2 + (a + b + c)(a - 3b + c)$

$= (a + b + c)(a + b + c + a - 3b + c) = 2(a + b + c)(a - b + c)$.

b) $ab^2 - ac^2 - bc^2 + a^2b + c(a^2 - b^2) = ab(a + b) - c^2(a + b) + c(a + b)(a - b)$

$= (a + b)(ab - c^2 + ac - bc) = (a + b)(b + c)(a - c)$.

c) $a^5 + b^5 - (a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5) =$

$= -5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)$

$= -5ab[(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a + b)] = -5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)$.

57. a) $999(999^3 + 1) = 999.(999 + 1)(999^2 - 999 + 1)$

$= 1000 . 999.(...3) = 1000 . (...7)$ có tận cùng bằng 3 chữ số 0.

b) $49^5 - 49 = 49(49^4 - 1) = 49.(49^2 + 1).(49^2 - 1)$

$= 49(49^2 + 1)(49 - 1)(49 + 1) = 49.(49^2 + 1). 24 . 100 \vdots 100$.

58. a) Gọi a là một số nguyên.

$a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1) \vdots 6$ vì là tích của ba số nguyên liên tiếp.

b) Gọi a, b, c là ba số nguyên.

Xét hiệu $(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$

Theo câu a) thì $a^3 - a \vdots 6$; $b^3 - b \vdots 6$; $c^3 - c \vdots 6$

$\Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) \vdots 6$.

Do $a + b + c \vdots 6$ nên $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 6$.

59. $a(a + b)(a + c) - b(b + c)(b + a) = 0 \Rightarrow (a + b)(a^2 + ac - b^2 - bc) = 0$

$\Rightarrow (a + b)(a - b)(a + b + c) = 0 \quad \Rightarrow a + b + c = 0$ (vì $a \neq \pm b$).

60. Từ (1) suy ra $(x^2y - y^2x) - (z^2x - z^2y) + (x^2z + y^2z - 2xyz) = 0$

$\Rightarrow xy(x - y) - z^2(x - y) + z(x - y)^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(xy - z^2 + zx - zy) = 0$

$\Rightarrow (x - y)(x - z)(z + y) = 0$

$\Rightarrow$ hoặc $x = y$ hoặc $x = z$ hoặc $y = -z$, do đó trong ba số x, y, z ít nhất cũng có hai số bằng nhau hoặc đối nhau.

61. a) Tách $-11x = -9x - 2x$; ĐS $(x - 3)(3x - 2)$.

b) Tách $10x = 12x - 2x$; ĐS $(2x + 3)(4x - 1)$.

c) Tách $-2x = -4x + 2x$; ĐS $(2x - 1)(4x + 1)$.

62. a) Tách $7xy = 3xy + 4xy$; ĐS $(2x + y)(3x + 2y)$.

b) Tách $-9xy = 3xy - 12xy$; ĐS $(3x + y)(3x - 4y)$.

c) Tách $16 = 25 - 9$; ĐS $(x - y + 2)(x + y + 8)$.

63. a) Tách $2 = 1 + 1$; ĐS $(x + 1)(x^2 - x + 2)$.

b) $x^3 - x - x - 1 = x(x - 1)(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - x - 1)$.

c) $x^3 + 2x^2 + x^2 - 4 = x^2(x + 2) + (x - 2)(x + 2) = (x + 2)(x^2 + x - 2)$.

64. a) $x^3y^3 + 8 + x^2y^2 - 4 = (xy + 2)(x^2y^2 - 2xy + 4) + (xy + 2)(xy - 2)$

$= (xy + 2)(x^2y^2 - xy + 2)$.

b) $x^3 - x^2y + 4x^2y - 4xy^2 - 5xy^2 + 5y^3 = x^2(x - y) + 4xy(x - y) - 5y^2(x - y)$

$= (x - y)(x^2 + 4xy - 5y^2) = (x - y)^2(x + 5y)$.

65. a) Tách $6x^2 = x^2 + 5x^2$; Đáp số $(x^2 + x + 1)(x^2 + 5)$.

b) Tách $-12x^2 = -6x^2 - 6x^2$; Đáp số $(x^2 - 2x - 6)(x^2 - 6)$.

c) $x^8y^8 + 2x^4y^4 + 1 - x^4y^4 = (x^4y^4 + 1)^2 - (x^2y^2)^2$

$= (x^4y^4 + x^2y^2 + 1)(x^4y^4 - x^2y^2 + 1) = [(x^2y^2 + 1)^2 - x^2y^2](x^4y^4 - x^2y^2 + 1)$

$= (x^2y^2 - xy + 1)(x^2y^2 + xy + 1)(x^4y^4 - x^2y^2 + 1)$.

66. a) $(x - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

b) $x^5 + 2x^4 - x^4 - 2x^3 + x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x + x + 2$

$= (x + 2)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

67. a) $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + (x + y)^4$

$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 + (x + y)^4 - x^2y^2$

$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) + [(x + y)^2 + xy][(x + y)^2 - xy]$

$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2 + x^2 + 3xy + y^2) = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

b) $(x^2 + x + 1)^2 - (2x + 1)^2 + (x^2 + x + 1)^2 - (x^2 + 2x)^2$

$= (x^2 - x)(x^2 + 3x + 2) + (-x + 1)(2x^2 + 3x + 1)$

$= x(x - 1)(x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x + 1)(2x + 1)$

$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2x - 2x - 1) = (x - 1)^2(x + 1)^2$.

68. a) Tách $3xyz = xyz + xyz + xyz$; ĐS $(x + y + z)(xy + yz + zx)$.

b) $xy(x + y) - yz(y + z) + zx\,[(x + y) - (y + z)]$

$= xy(x + y) + zx(x + y) - yz(y + z) - zx\,(y + z)$

$= x(x + y)(y + z) - z(y + z)(y + x) = (x + y)(y + z)(x - z)$.

c) Tách $x^2 - y^2 = -\,[(y^2 - z^2) + (z^2 - x^2)]$. Đáp số $(x - y)(y - z)(z - x)$.

69. $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)$

$= a(a - 1)(a + 1)[a^2 - 4 + 5] = a(a - 1)(a + 1)[(a - 2)(a + 2) + 5]$

$= a(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2) + 5a(a - 1)(a + 1)$.

Hạng tử thứ nhất chia hết cho 5 vì là tích của 5 số nguyên liên tiếp. Hạng tử thứ hai cũng chia hết cho 5 do đó $a^5 - a \,\vdots\, 5$.

Ta thấy $a^5 - a = a\,(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$.

Do $(a - 1)a\,(a + 1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 2 và 3, tức là chia hết cho 6 vì $(2, 3) = 1$.

$a^5 - a$ vừa chia hết cho 5, vừa chia hết cho 6 mà $(5, 6) = 1$ nên $a^5 - a \,\vdots\, 30$.

70. $A = x^4(y - z) + y^4(z - x) - z^4[(y - z) + (z - x)]$

$= x^4(y - z) - z^4(y - z) + y^4(z - x) - z^4(z - x)$

$= (y - z)(x^4 - z^4) + (z - x)(y^4 - z^4)$

$= (y - z)(x - z)(x + z)(x^2 + z^2) - (x - z)(y - z)(y + z)(y^2 + z^2)$

$= (y - z)(x - z)(x^3 + xz^2 + x^2z + z^3 - y^3 - yz^2 - y^2z - z^3)$

$= (y - z)(x - z)[(x^3 - y^3) + z^2(x - y) + z(x^2 - y^2)]$

$= (y - z)(x - z)(x - y)(x^2 + xy + y^2 + z^2 + zx + yz)$

$= (x - y)(y - z)(x - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$

$= \dfrac{1}{2}\,(x - y)(y - z)(x - z)\,[(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2]$.

Vì $x > y > z$ nên $A > 0$.

71. (1) $\Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) - 8xyz = 0.$

Khai triển và thu gọn đẳng thức trên ta được

$$xy^2 + xz^2 + yz^2 + yx^2 + zx^2 + zy^2 - 6xyz = 0$$

$$(xy^2 - 2xyz + xz^2) + (yz^2 - 2xyz + yx^2) + (zx^2 - 2xyz + zy^2) = 0$$

$$x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 = 0.$$

Kết hợp với điều kiện x, y, z là các số dương ta suy ra

$$(y - z)^2 = (z - x)^2 = (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z.$$

72. a) Thêm bớt $2x^2$; ĐS $(x^2 + 5x - 2)(x^2 + 2)$.

b) Thêm bớt $3xy(x + y)$ ta được

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + z^3 - 3xy(x + y) - 3xyz$$

$$= (x + y)^3 + z^3 - 3xy\,(x + y + z)$$

$$= (x + y + z)[(x + y)^2 - z(x + y) + z^2] - 3xy\,(x + y + z)$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Nhận xét : Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ tức là $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, ta được lại kết quả ở *bài 24*. Bạn nên nhớ kết quả này.

73. a) Thêm bớt x ta được :

$$x^7 + x^2 + 1 = x^7 - x + (x^2 + x + 1) = x(x^3 + 1)(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1).$$

b) Thêm bớt x^2 ta được :

$$x^8 + x + 1 = x^8 - x^2 + (x^2 + x + 1) = x^2(x^3 + 1)(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x^2(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1).$$

74. a) Thêm bớt x^3 ta được :

$$x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - (x^3 - 1)$$
$$= x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1).$$

b) Thêm bớt $x^2 + x$ ta được :

$$x^{10} + x^5 + 1 = (x^{10} - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$$
$$= x[(x^3)^3 - 1] + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= x(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)[x(x - 1)(x^6 + x^3 + 1) + x^2(x - 1) + 1]$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

75. Thêm bớt $x^4 + x^2$ ta được

$$A = x^{200} + x^{100} + 1 = (x^{200} - x^2) + (x^{100} - x^4) + (x^4 + x^2 + 1)$$
$$= x^2(x^{198} - 1) + x^4(x^{96} - 1) + (x^4 + x^2 + 1)$$
$$= x^2[(x^6)^{33} - 1] + x^4 . [(x^6)^{16} - 1] + (x^4 + x^2 + 1)$$
$$= x^2 (x^6 - 1). B(x) + x^4(x^6 - 1).C(x) + (x^4 + x^2 + 1)$$

Dễ thấy $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1) \vdots (x^4 + x^2 + 1)$.

Mỗi hạng tử của A đều chia hết cho $x^4 + x^2 + 1$ nên $A \vdots (x^4 + x^2 + 1)$.

76. a) $A = (x - y)^2 + 3(x - y) - 4$. Đặt $x - y = a$.

ĐS : $(x - y + 4)(x - y - 1)$.

b) $B = 3(2x - y)^2 - 10(2x - y) + 8$. Đặt $2x - y = a$.

ĐS $(2x - y - 2)(6x - 3y - 4)$.

77. a) Đặt $x = a - b$; $y = b - c$; $z = c - a$ thì $x + y + z = 0$,

do đó $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (xem *bài 24*).

Vậy $A = 3(a - b)(b - c)(c - a)$.

b) Đặt $x = a + b - 2c$; $y = b + c - 2a$; $z = c + a - 2b$

thì $x + y + z = 0$ do đó $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Vậy $B = 3(a + b - 2c)(b + c - 2a)(c + a - 2b)$.

78. a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = [(x + y) + z]^3 - x^3 - y^3 - z^3$

$= (x + y)^3 + z^3 + 3z(x + y)(x + y + z) - x^3 - y^3 - z^3$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + z^3 + 3z(x + y)(x + y + z) - x^3 - y^3 - z^3$

$= 3(x + y)(xy + xz + yz + z^2) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

b) $A = (a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (b + a - c)^3$.

Đặt $x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = b + a - c$ thì $x + y + z = a + b + c$.

Vậy $A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$ (theo câu a)

$= 3(b + c - a + c + a - b)(c + a - b + b + a - c)(b + a - c + b + c - a)$

$= 3 . 2c . 2a . 2b = 24abc$.

79. a) Đặt $a = x^2 - 2x$ thì $x^2 - 2x - 1 = a - 1$; $A = (x + 1)(x - 3)(x^2 - 2x + 2)$.

b) Đặt $a = x^2 + 4x - 3$ thì $B = a^2 - 5ax + 6x^2$; $B = (x + 3)(x - 1)(x^2 + x - 3)$.

c) Đặt $a = x^2 + x + 4$ thì $C = a^2 + 8ax + 15x^2$; $C = (x + 2)^2(x^2 + 6x + 4)$.

80. Đặt $a = x^2 - 6x + 1$; $b = x^2 + 1$

thì $A = 2a^2 + 5ab + 2b^2 = (2a + b)(a + 2b) = 9(x - 1)^2(x^2 - 4x + 1)$.

81. $M = 4(x^2 + 2x - 8)(x^2 + 7x - 8) + 25x^2$.

Đặt $x^2 + 2x - 8 = a$ thì $x^2 + 7x - 8 = a + 5x$;

$M = (2a + 5x)^2 = (2x^2 + 9x - 16)^2 \geq 0$.

82. $3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = (3x - 1)(x^3 + ax^2 + bx - 1)$

$3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 3x^4 + (3a - 1)x^3 + (3b - a)x^2 - (b + 3)x + 1$.

Suy ra $\begin{cases} 3a - 1 = 11 & (1) \\ 3b - a = -7 & (2) \\ b + 3 = 2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1. \end{cases}$ Vậy $A = (3x - 1)(x^3 + 4x^2 - x - 1)$.

83. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$

$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 + (a + b)x + 1$

Suy ra $\begin{cases} a + b = -6 \\ ab + 2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -3. \end{cases}$ Vậy $B = (x^2 - 3x + 1)^2$.

84. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 11x - 5 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx + 5)$

$x^4 - x^3 + 2x^2 - 11x - 5 = x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 4)x^2 + (5a - b)x - 5$

Suy ra $\begin{cases} a + b = -1 \\ ab + 4 = 2 \\ 5a - b = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1. \end{cases}$ Vậy $C = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + x + 5)$.

85. $\begin{cases} n + 1 \geq 5 \\ n \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{4 ; 5 ; 6\}$.

86. $A = 25x^2 - 20xy + 4y^2 = (5x - 2y)^2 \geq 0$.

87. $[(x - 2y)(x - 7y) - (x - 2y)(x + 2y)] : (x - 2y) = 18 \quad (x \neq 2y)$

$(x - 7y) - (x + 2y) = 18$; $-9y = 18$; $y = -2$ và $x \neq -4$.

88. Thương $Q = 2x^2 + 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \min Q = \frac{1}{2}$ (khi và chỉ khi $x = -\frac{1}{2}$).

89. a) Thực hiện phép chia ta được số dư là 7.

Ta phải có $3x - 2 \in Ư(7) = \{\pm 1 ; \pm 7\}$

$3x - 2$	1	-1	7	-7
$3x$	3	1	9	-5
x	1	1/3 (Loại)	3	$-5/3$ (Loại)

Vậy $x \in \{1 ; 3\}$.

b) Thực hiện phép chia ta được số dư là 5.

Ta phải có $(2x^2 - 7) \in Ư(5) = \{\pm 1 ; \pm 5\}$

$2x^2 - 7$	1	-1	5	-5
x^2	4	3	6	1
x	± 2	$\pm\sqrt{3}$ (Loại)	$\pm\sqrt{6}$ (Loại)	± 1

Vậy $x \in \{\pm 1 ; \pm 2\}$.

90. Chia $n^6 - n^4 - 2n^2 + 9$ cho $n^4 + n^2$ được số dư là 9.

Ta phải có $n^4 + n^2$ là ước của 9 nhưng điều này không thể xảy ra vì

$n^4 + n^2 = n^2(n^2 + 1)$ là một số chẵn.

91. a) $f(-1) = (-1) + 1 + (-1) + 101 = 100$ = số dư

b) $f(-2) = 3.(-2)^3 + 4.(-2)^2 - 2(-2) + 7 = 3$ = số dư

c) $f(5) = 5^4 - 5.5^3 + 2.5 - 10 = 0$ = số dư

92. $f(2) = (2^2 - 3.2 + 1)^{31} - (2^2 - 4.2 + 5)^{30} + 2 = (-1)^{31} - 1^{30} + 2 = 0.$

Vậy f(x) chia hết cho $(x - 2)$.

93. a) $x = -1$ là một nghiệm ; đa thức có chứa nhân tử $(x + 1)$

$x^3 - 9x^2 + 15x + 25 = x^3 + x^2 - 10x^2 - 10x + 25x + 25.$

Đáp số : $(x + 1)(x - 5)^2$.

b) $x = 2$ là một nghiệm của đa thức. Đa thức có chứa nhân tử $(x - 2)$

$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x - 15x + 30.$

Đáp số : $(x - 2)(x - 5)(x + 3)$.

c) $x = 3$ là một nghiệm ; đa thức có chứa nhân tử $(x - 3)$

$2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36 = 2x^4 - 6x^3 + 7x^3 - 21x^2 - x^2 + 3x + 12x - 36$

$= (x - 3)(2x^3 + 7x^2 - x + 12).$

Ta phân tích tiếp nhân tử thứ hai với nhận xét $x = -4$ là một nghiệm

$2x^3 + 7x^2 - x + 12 = 2x^3 + 8x^2 - x^2 - 4x + 3x + 12 = (x + 4)(2x^2 - x + 3)$.

Đáp số : $(x - 3)(x + 4)(2x^2 - x + 3)$.

94. a) $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm ; đa thức có chứa nhân tử $(3x - 1)$

$$3x^3 + 5x^2 - 14x + 4 = 3x^3 - x^2 + 6x^2 - 2x - 12x + 4 .$$

Đáp số : $(3x - 1)(x^2 + 2x - 4)$.

b) $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm ; đa thức có chứa nhân tử $(2x + 1)$

$2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 2x^3 + x^2 - 2x^2 - x - 2x - 1$. Đáp số : $(2x + 1)(x^2 - x - 1)$.

95. Đa thức chia có bậc 2 nên bậc của đa thức dư không vượt quá 1.

Ta có $(x^{54} + x^{45} + x^{36} + ... + x^9 + 1) = (x^2 - 1).\ Q + (ax + b)$.

Lần lượt cho x các giá trị riêng $x = 1$; $x = -1$ ta được

$$\begin{cases} 7 = a + b \\ 1 = -a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}.$$ Vậy đa thức dư là $3x + 4$.

96. Từ điều kiện c ta thấy đa thức chia có bậc 2 nên đa thức dư có bậc không quá 1.

Vậy $f(x) = 5x^2(x - 1)(x + 2) + (ax + b)$. Lần lượt cho x các giá trị riêng $x = 1$; $x = -2$ ta được

$$f(1) = a + b = 4 ; \quad f(-2) = -2a + b = 1.$$

Suy ra $a = 1$; $b = 3$.

Vậy $f(x) = 5x^2(x^2 + x - 2) + x + 3 = 5x^4 + 5x^3 - 10x^2 + x + 3$.

97. $A = ax^2 + bx + c = (x - 1).\ Q_1 + R$ (1)

$A = ax^2 + bx + c = (x + 1).\ Q_2 + R$ (2)

Cho $x = 1$ thì từ (1) $\Rightarrow$ $a + b + c = R$.

Cho $x = -1$ thì từ (2) $\Rightarrow$ $a - b + c = R$.

Do đó $a + b + c = a - b + c \Rightarrow b = 0$.

98. $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c = (x^3 + 3x^2 - 9x - 3)(x + m)$

$$= x^4 + (m + 3)x^3 + (3m - 9)x^2 - (9m + 3)x - 3m$$

Suy ra : $m + 3 = -4 \Rightarrow m = -7$

$3m - 9 = 5a \Rightarrow a = -6$

$9m + 3 = 4b \Rightarrow b = -15$

$-3m = c \Rightarrow c = 21$.

Vậy $a + b + c = -6 - 15 + 21 = 0$.

99. Đa thức $4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2$ và $x + 1$, mà $(x - 2)$ và $(x + 1)$ không có nhân tử chung có bậc khác 0 nên $4x^3 + ax + b$ chia hết cho $(x - 2)(x + 1)$.

Ta đặt $4x^3 + ax + b = (x^2 - x - 2)(4x + c) = 4x^3 + (c - 4)x^2 - (c + 8)x - 2c$.

Suy ra : $c - 4 = 0 \Rightarrow c = 4$

$c + 8 = -a \Rightarrow a = -12$

$-2c = b \Rightarrow b = -8$

Vậy $2a - 3b = 2.(-12) - 3.(-8) = 0$.

100. a) Tổng của hai số chính phương khi chia cho 4 chỉ có thể có số dư là 0, 1, 2. Số 4567 chia cho 4 có số dư là 3. Vậy không có hai số chính phương nào mà tổng bằng 4567.

b) Hiệu hai số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư là 0, 1, 3. Số 7654 chia cho 4 có số dư là 2. Vậy không có hai số chính phương nào mà hiệu bằng 7654.

101. Bạn hãy chứng minh tổng của 4 số chính phương liên tiếp chia cho 4 dư 2. Từ đó suy ra tổng của 20 số chính phương liên tiếp chia cho 4 dư 2, đó không phải là một số chính phương.

102. Nếu một số chính phương $A = n^2$ có chữ số hàng đơn vị là 6 thì n phải là một số chẵn, $n \vdots 2$ do đó $A = n^2 \vdots 4$, suy ra hai chữ số tận cùng của A chỉ có thể là 16, 36, 56, 76, 96.

Tổng các chữ số hàng chục là $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ là một số chính phương.

103. a) $S = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222\,(a + b + c) = 2.3.37(a + b + c)$

Vì $0 < a + b + c \leq 27$ nên $a + b + c \not\vdots\, 37$

$(6,37) = 1 \Rightarrow 6(a + b + c) \not\vdots\, 37$ do đó S không phải là số chính phương.

104. $N = \overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b)$.

Để N là số chính phương ta phải có $100a + b = 99a + (a + b) = 11t^2$ $(t \in \mathbf{N})$

$99a \vdots 11$ nên $a + b \vdots 11 \Rightarrow a + b = 11$. Vậy $99a + 11 = 11(9a + 1) = 11t^2$;
$9a + 1 = t^2$. (1)

Cho a các giá trị từ 1 đến 9, chỉ có $a = 7$ thoả mãn (1), từ đó suy ra $b = 4$.
Số phải tìm là $7744 = 88^2$.

105. $24 = 3.8$; $(3, 8) = 1$. Ta cần chứng minh $n \vdots 3$ và $n \vdots 8$.

• Nếu $n \not\vdots\, 3$ bạn đọc hãy chứng minh $n + 1$ và $2n + 1$ không thể đồng thời là số chính phương $\Rightarrow n \vdots 3$ (1)

• $2n + 1$ là số chính phương lẻ $\Rightarrow 2n + 1$ chia cho 8 dư 1

$\Rightarrow 2n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow n + 1$ là số lẻ.

Theo đề bài $n + 1$ là số chính phương (lẻ) $\Rightarrow n + 1$ chia cho 8 dư $1 \Rightarrow n \vdots 8$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n \vdots 24$

106. Nếu mệnh đề (1) đúng thì từ mệnh đề (2) suy ra $n + 20$ có chữ số tận cùng là 2 và từ mệnh đề (3) suy ra $n - 69$ có chữ số tận cùng là 3. Một số chính phương không có chữ số tận cùng là 2 hoặc 3. Như vậy nếu mệnh đề (1) là đúng thì các mệnh đề (2) và (3) đều sai, trái giả thiết. Vậy mệnh đề (1) sai, mệnh đề (2) và (3) đúng.

Đặt $n + 20 = a^2$; $n - 69 = b^2$ $(a, b \in \mathbf{N}\,;\, a > b)$

Suy ra $a^2 - b^2 = 89$; $(a + b)(a - b) = 89 \,.\, 1$

do đó $\begin{cases} a + b = 89 \\ a - b = 1 \end{cases}$ suy ra $a = 45$; $n = 45^2 - 20$; $n = 2005$.

107. $N = a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbf{N})$

a) $2N = 2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$.

b) $N^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$.

108. $A = a^2$; $B = b^2$; $C = c^2$; $D = d^2$ $\quad$ $(a, b, c, d \in \mathbf{N})$

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

109. $x = y + z \Rightarrow (x - y - z)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz = 0$

$\Rightarrow 2(xy + xz - zy) = x^2 + y^2 + z^2$.

110. $a - b = c + d \Rightarrow a - b - c - d = 0 \Rightarrow 2a(a - b - c - d) = 0$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2a(a - b - c - d)$

$= (a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2$.

111. $n^2 + (n + 1)^2 + n^2(n + 1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)^2$

$n^2 + n$ là số chẵn nên $n^2 + n + 1$ là số lẻ. Suy ra $(n^2 + n + 1)^2$ là số chính phương lẻ.

112. a) $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + (n + 1)$.

b) $a_n + a_{n+1} = \dfrac{(1+n)n}{2} + \dfrac{(1+n+1)(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+n+2)}{2} = (n+1)^2$.

113. $M + 1 = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$

$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

114. a) $ab + 4 = a(a + 4) + 4 = (a + 2)^2 = \underbrace{11...1}_{n}7^2$.

b) $ab + 4 = a(9a + 12) + 4 = (3a + 2)^2 = \underbrace{33...3}_{n-1}5^2$.

115. Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ thì $9a + 1 = 10^n$.

$M = a \,.\, 10^n + 5a + 1 = a(9a + 1) + 5a + 1 = (3a + 1)^2 = \underbrace{33...3}_{n-1}4^2$.

116. Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ thì $9a + 1 = 10^n$.

a) $M = a \,.\, 10^n + a + 4a + 1 = a(9a + 1) + 5a + 1 = (3a + 1)^2 = \underbrace{33...3}_{n-1}4^2.$

b) $N = a \,.\, 10^n + a + 10a + 1 + 6a + 8$

$= a(9a + 1) + 17a + 9 = (3a + 3)^2 = \underbrace{33...3}_{n-1}6^2.$

117. $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) =$

$= (a^2 + ab + bc + ca)(b^2 + ab + bc + ca)(c^2 + ab + bc + ca)$

$= (a + b)(a + c)(a + b)(b + c)(a + c)(b + c) = [(a + b)(b + c)(c + a)]^2.$

118. Giả sử $n^2 + 1234 = m^2$ ($m \in \mathbf{N}$), suy ra $m^2 - n^2 = 1234$.

Hiệu của hai số chính phương chia cho 4 không có số dư là 2.

Vậy không có số tự nhiên nào để cho $n^2 + 1234$ là số chính phương.

119. Giả sử $2^k + 2^4 + 2^7 = a^2$ ($a \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow 2^k = a^2 - 144 = (a + 12)(a - 12)$.

Ta đặt $a + 12 = 2^m$; $a - 12 = 2^n$ trong đó $m, n \in \mathbf{N}$; $m > n$ và $m + n = k$

Ta được $2^m - 2^n = 24 = 8.3$; $2^n(2^{m-n} - 1) = 2^3 \,.\, 3$.

Suy ra $n = 3$ và $2^{m-n} - 1 = 3$; $2^{m-n} = 2^2$; $m - n = 2$, dẫn tới $m = 5$

$k = m + n = 5 + 3 = 8$.

Thử lại : $2^8 + 2^4 + 2^7 = 400 = 20^2$.

120. Giả sử $x^2 + 2x + 200 = a^2$ ($a \in \mathbf{N}$; $a > 14$) $\Rightarrow a^2 - (x + 1)^2 = 199$

$(a + x + 1)(a - x - 1) = 199 \,.\, 1$

Vì $a + x + 1 > a - x - 1$ nên $\begin{cases} a + x + 1 = 199 \\ a - x - 1 = 1 \end{cases}$ suy ra $x = 98$.

121. $A = (x^2 - 8x)(x^2 - 8x + 7)$. Đặt $x^2 - 8x = y$ thì $A = y(y + 7) = y^2 + 7y$.

Giả sử : $y^2 + 7y = m^2$ ($m \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow 4y^2 + 28y + 49 - 4m^2 = 49$;

$(2y + 7)^2 - 4m^2 = 49$

$(2y + 7 + 2m)(2y + 7 - 2m) = 49.$

Ta thấy $2y + 7 + 2m \geq 2y + 7 - 2m$

nên $(2y + 7 + 2m)(2y + 7 - 2m) = 49 \,.\, 1 = (-1) \,.\, (-49) = 7.7 = -7(-7)$.

Xét các trường hợp :

$\begin{cases} 2y+7+2m=49 \\ 2y+7-2m=1 \end{cases}$ suy ra $y = 9$

do đó $x^2 - 8x = 9$; $x^2 - 8x - 9 = 0$; $x \in \{-1 ; 9\}$.

$\begin{cases} 2y+7+2m=-1 \\ 2y+7-2m=-49 \end{cases}$ suy ra $y = -16$

do đó $x^2 - 8x = -16$; $(x - 4)^2 = 0$; $x = 4$.

$\begin{cases} 2y+7+2m=7 \\ 2y+7-2m=7 \end{cases}$ suy ra $y = 0$

do đó $x^2 - 8x = 0$; $x \in \{0 ; 8\}$.

$\begin{cases} 2y+7+2m=-7 \\ 2y+7-2m=-7 \end{cases}$ suy ra $y = -7$

do đó $x^2 - 8x = -7$; $x^2 - 8x + 7 = 0$; $x \in \{1 ; 7\}$.

Vậy $x \in \{-1 ; 0 ; 1 ; 4 ; 7 ; 8 ; 9\}$.

122. a) $1 ; p ; p^2 ; p^3 ; p^4$; b) $S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ $(n \in \mathbf{N})$

$\Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$

Dễ thấy $4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p$

$(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2$

Suy ra $(2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2$

Do đó $4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$;

$p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow p_1 = -1$ (loại) ; $p_2 = 3$.

123. $ax + by = 2 = 2ab = ab + ab \Rightarrow ax - ab = ab - by$ hay $a(x - b) = b(a - y)$.

Do tích của hai số bằng nhau thì lớn hơn hoặc bằng 0, suy ra $ab(x - b)(a - y) \geq 0$.

Do $ab = 1$ nên $ax + by - xy - ab \geq 0$ hay $2 - xy - 1 \geq 0 \Rightarrow xy \leq 1$.

124. $P = (x^2 + xy)(x^2 + xy - 2y^2) + y^4 = (x^2 + xy)^2 - 2(x^2 + xy)y^2 + y^4$

$= (x^2 + xy - y^2)^2.$

125. $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -(y + z) \Rightarrow x^2 = y^2 + 2yz + z^2$

$\Rightarrow 2yz = x^2 - y^2 - z^2 \Rightarrow 4y^2z^2 = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2$

$\Rightarrow 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = x^4 + y^4 + z^4.$ (1)

Mặt khác $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2.$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$.

126. Vì m, n, p là số đo các cạnh của một tam giác vuông nên $m > 0$; $n > 0$; $p > 0$ suy ra $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$ và $p^2 = m^2 + n^2$.

Ta có $a^2 = 16m^2 + 64n^2 + 81p^2 + 64mn + 72mp + 144np$

$b^2 = m^2 + 16n^2 + 16p^2 + 8mn + 8mp + 32np$

$c^2 = 16m^2 + 49n^2 + 64p^2 + 56mn + 64mp + 112np.$

Suy ra $a^2 - b^2 - c^2 = p^2 - m^2 - n^2 = 0$; $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ (đpcm).

127. Đặt $a = 2^x - 8$; $b = 4^x + 13 \Rightarrow a + b = 2^x + 4^x + 5$.

Theo đề bài ta có $a^3 + b^3 = (a + b)^3 \Leftrightarrow 3ab(a + b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x - 8 = 0 \\ 4^x + 13 = 0 \\ 2^x + 4^x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3.$$

128. Theo đề bài ta có $(x + y)^5 - (x^5 + y^5) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y)^5 - (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y)\,[(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) - (x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)] = 0$

$\Leftrightarrow (x + y)\,(5x^3y + 5x^2y^2 + 5xy^3) = 0 \Leftrightarrow 5xy(x + y)\,(x^2 + xy + y^2) = 0$

$\Leftrightarrow x + y = 0$ (vì $x \neq 0$; $y \neq 0$)

$\Leftrightarrow x = -y.$

129. a) $20^n - 1 \vdots (20 - 1) = 19$; $20^n - 1 > 19$ (vì $n > 1$) $\Rightarrow 20^n - 1$ là hợp số.

b) $1000^n + 1 = (10^n)^3 + 1^3 \vdots (10^n + 1)$; $1000^n + 1 > 10^n + 1$ (vì $n > 1$)

$\Rightarrow 1000^n + 1$ là hợp số.

130. a) Dùng phương pháp nhóm các hạng tử.

$M = (x + 1)^3(x - 1)^2(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$.

b) $N = (x^2 - 9)(x^2 - 1) + 15 = x^4 - 10x^2 + 24$.

Dùng phương pháp tách các hạng tử để phân tích tiếp.

$N = (x - 2)(x + 2)(x^2 - 6)$.

c) Thêm bớt $x^2 + x$; $P = (x^7 - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$.

Đáp số : $P = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

131. $A = 2(x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) - 3(x^4 + y^4)$

$= 2x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 - 3x^4 - 3y^4 = -x^4 + 2x^2y^2 - y^4$

$= -(x^2 - y^2)^2 = -1$.

132. $S = 1^n + 5^n + (2^n + 8^n) + (3^n + 7^n) + (4^n + 6^n)$

Do n lẻ nên $2^n + 8^n \vdots (2 + 8) = 10 \Rightarrow 2^n + 8^n \vdots 5$.

Tương tự, $3^n + 7^n$ và $4^n + 6^n$ đều chia hết cho 5, suy ra S chia cho 5 dư $1^n = 1$.

133. $A = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$). Ta đặt $n = m + 2a$ ta được $A + mn = a^2 + m(m + 2a) = (a + m)^2$.

134. Nhân các nhân tử đầu và cuối, nhân tử thứ hai với nhân tử thứ ba.

a) $M = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 12) + 9$

$= (x^2 + 7x)^2 + 18(x^2 + 7x) + 81 = (x^2 + 7x + 9)^2$.

b) $N = (x^2 - 5xy + 4y^2)(x^2 - 5xy + 6y^2) + y^4$

$= (x^2 - 5xy)^2 + 10y^2(x^2 - 5xy) + 25y^4$

$= (x^2 - 5xy + 5y^2)^2$.

135. a) – Với n = 1 thì $1 = 1^2$ đẳng thức đã cho là đúng.

– Giả sử đẳng thức đã cho đúng với n = k tức là $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$ (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh đẳng thức đã cho đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Thật vậy, $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

– Vậy đẳng thức đã cho đúng với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

b) – Với n = 1 thì $1^3 = 1^2$ đẳng thức đã cho đúng.

– Giả sử đẳng thức đã cho đúng với n = k tức là $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = (1 + 2 + 3 + ... + k)^2$ (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh đẳng thức đã cho đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1)^2.$$

Thật vậy, $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + ... + k)^2 + (k + 1)^3$

$$= \left[\frac{(k+1).k}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right]}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 = (1+2+3+...+k+k+1)^2.$$

– Vậy đẳng thức đã cho đúng với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

151. a) Nhân cả tử và mẫu của A với 201 + 200 ; A < B.

b) Đặt 2000 = x thì $C = \frac{(x-1).(2x+1)+x}{x.(2x+1)-(x+1)} = \frac{2x^2-1}{2x^2-1} = 1$.

Đặt 1500 = y thì $D = \frac{(y+1)(y+3)-y(y-2)}{4y+2} = \frac{3(2y+1)}{2(2y+1)} = \frac{3}{2}$

Vậy C < D.

152. a) Phân tích $n^5 + n + 1$ thành nhân tử bằng cách thêm bớt n^2

$$A = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n^2+n+1)(n^3-n^2+1)} = \frac{n-1}{n^3-n^2+1}.$$

Cả tử và mẫu của phân thức A có nhân tử chung là $n^2 + n + 1 > 1$ nên A không tối giản.

b) Giả sử $(6n + 1, 8n + 1) = d \Rightarrow 4(6n + 1) - 3(8n + 1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

c) Giả sử $(10n^2 + 9n + 4, 20n^2 + 20n + 9) = d$

$\Rightarrow (20n^2 + 20n + 9) - 2(10n^2 + 9n + 4) \vdots d$

$\Rightarrow 2n + 1 \vdots d.$ (1)

Ta có $10n^2 + 9n + 4 = (2n + 1)(5n + 2) + 2$

mà $10n^2 + 9n + 4 \vdots d$ nên $(2n + 1)(5n + 2) + 2 \vdots d$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow 2n \vdots d$. (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

153. a) $A = \frac{(x-1)(x^{19}+x^{18}+x^{17}+\cdots+x+1)}{x-1} = \frac{x^{20}-1}{x-1}.$

b) $B = \dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)...(x^{32}+1)}{x-1} = \dfrac{x^{64}-1}{x-1}$.

154. a) $\dfrac{1.2.3...(n-1).n}{1.2.3...(n-1)(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$; b) $\dfrac{n!.(n+1-1)}{n!(n+1+1)} = \dfrac{n}{n+2}$.

155. a) $A = \dfrac{(x^2-1)(y^2+y+1)}{(x^2+1)(y^2+y+1)} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; b) $B = \dfrac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x-y)(x+y)(y-z)} = \dfrac{x-z}{x+y}$.

156. a) $\dfrac{x^2-3}{x^2+7}$; b) $\dfrac{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

c) $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{x+2}{x-1}$.

157. a) $\dfrac{(x+1)(x+2)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+5)} = \dfrac{x-2}{x+5}$; b) $\dfrac{(x^2+3x-1)(x^2+3x+1)}{(x^2+3x-1)^2} = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+3x-1}$.

158. Đặt $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = k \Rightarrow x = ak$; $y = bk$; $z = ck$.

Thay vào biểu thức P ta được $P = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$.

159. a) $x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$;

$$P = \frac{x^2+y^2+z^2}{2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{1}{3}.$$

b) $x + y + z = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = (-z)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -2xy$;

Tương tự : $y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$; $z^2 + x^2 - y^2 = -2zx$.

$$Q = \frac{(-2xy)(-2yz)(-2zx)}{16xyz} = \frac{-xyz}{2}.$$

160. $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$\Rightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$ (xem *bài 72b*)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x+y+z=0 & (1) \\ x=y=z. & (2) \end{array}\right.$$

Xét trường hợp (1) $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$; $y + z = -x$; $z + x = -y$

do đó $P = \dfrac{xyz}{(-z)(-x)(-y)} = -1.$

Xét trường hợp (2) $P = \dfrac{x.x.x}{2x.2x.2x} = \dfrac{1}{8}.$

161. a) Mẫu thức chung là $(x + y)^2(x - y)^2$. Đáp số $\dfrac{1}{x-y}$.

b) Không nên quy đồng mẫu của tất cả các phân thức. Lấy phân thức thứ nhất trừ đi phân thức thứ hai rồi lấy kết quả trừ đi phân thức thứ ba, ... Đáp số $\dfrac{32}{x^{32}-1}$.

162. a) Giải tương tự *ví dụ 17*. Đáp số $\dfrac{1}{xyz}$.

b) Mẫu thức chung : $(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$. Đáp số 0.

163. a) $M = \dfrac{2(y-z)(z-x)+2(x-y)(z-x)+2(x-y)(y-z)+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

$$= \frac{[(x-y)+(y-z)+(z-x)]^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0.$$

b) $N = \dfrac{yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)+xyz+xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} = ...$

$$= \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 1.$$

164. a) $A = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} + ... + \dfrac{1}{x+99} - \dfrac{1}{x+100}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+100} = \frac{100}{x(x+100)}.$$

b) $B = \dfrac{a}{x(x+a)} + \dfrac{a}{(x+a)(x+2a)} + \cdots + \dfrac{a}{(x+9a)(x+10a)} + \dfrac{1}{x+10a}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+2a} + ... + \frac{1}{x+9a} - \frac{1}{x+10a} + \frac{1}{x+10a} = \frac{1}{x}.$$

165. $P = \dfrac{(x+1)(y+1)(z+1)(t+1)}{xyzt}$.

166. $\dfrac{x^2}{y+z} + x = \dfrac{x(x+y+z)}{y+z}$; $\dfrac{y^2}{z+x} + y = \dfrac{y(x+y+z)}{z+x}$; $\dfrac{z^2}{x+y} + z = \dfrac{z(x+y+z)}{x+y}$.

Vậy $S + (x + y + z) = (x + y + z)\left(\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y}\right) = x + y + z$.

Do đó $S = 0$.

167. $x^2y^2z^2 = abc \Rightarrow x^2 . b^2 = abc \Rightarrow x^2 = \dfrac{ac}{b}$; tương tự $y^2 = \dfrac{ab}{c}$; $z^2 = \dfrac{bc}{a}$.

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc}$.

168. a) $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -(y + z)$; $y = -(z + x)$; $z = -(x + y)$

$\Rightarrow x^2 - y^2 - z^2 = 2yz$; $y^2 - z^2 - x^2 = 2zx$; $z^2 - x^2 - y^2 = 2xy$.

Vậy $M = \dfrac{x^2}{2yz} + \dfrac{y^2}{2zx} + \dfrac{z^2}{2xy} = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{2xyz}$.

Mặt khác vì $x + y + z = 0$ nên $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (xem *bài 24*) do đó $M = \dfrac{3}{2}$.

b) $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x + y)$; $x = -(y + z)$; $y = -(z + x)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -2xy$; $y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$; $z^2 + x^2 - y^2 = -2zx$.

Vậy $N = \dfrac{1}{-2xy} + \dfrac{1}{-2yz} + \dfrac{1}{-2zx} = \dfrac{z+x+y}{-2xyz} = 0$.

169. $\dfrac{x^2z - y^2x - z^2y}{xyz} = \dfrac{y^2z - z^2x - x^2y}{xyz} \Rightarrow x^2z + x^2y + z^2x - y^2x - z^2y - y^2z = 0$

$\Rightarrow (x - y)(y + z)(z + x) = 0 \Rightarrow$ hoặc $x = y$ hoặc $y = -z$ hoặc $z = -x$.

170. $\dfrac{M(x-2) + N(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{32x - 19}{(x+1)(x-2)}$; $(M + N)x + (N - 2M) = 32x - 19$.

Suy ra $\begin{cases} M + N = 32 \\ -2M + N = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 17 \\ N = 15 \end{cases} \Rightarrow M.N = 255$.

171. a) $\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)}.\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-5)^2}=\dfrac{x-2}{x-5}.$

b) $\dfrac{x(y-z)}{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}.\dfrac{2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{x(y-z)^2}$

$=\dfrac{x+y+z}{y-z}.$

172. a) $A=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{3}...\dfrac{n-1}{n}.\dfrac{n+1}{n}$

$=\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4}...\dfrac{n-1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{2}.\dfrac{4}{3}.\dfrac{5}{4}...\dfrac{n+1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}.\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{n+1}{2n}.$

b) Nhận xét : $n^4+4=[(n-1)^2+1]\,[(n+1)^2+1]$

Do đó

$B=\dfrac{1.(2^2+1)}{(2^2+1)(4^2+1)}.\dfrac{(4^2+1)(6^2+1)}{(6^2+1)(8^2+1)}.\dfrac{(8^2+1)(10^2+1)}{(10^2+1)(12^2+1)}...\dfrac{(16^2+1)(18^2+1)}{(18^2+1)(20^2+1)}$

$B=\dfrac{1}{20^2+1}=\dfrac{1}{401}.$

173. $C=\left(1+\dfrac{4}{1.5}\right)\left(1+\dfrac{4}{2.6}\right).\left(1+\dfrac{4}{3.7}\right)...\left(1+\dfrac{4}{n(n+4)}\right).$

Nhận xét : $1+\dfrac{4}{n(n+4)}=\dfrac{(n+2)^2}{n(n+4)}.$

Do đó $C=\dfrac{3^2}{1.5}.\dfrac{4^2}{2.6}.\dfrac{5^2}{3.7}...\dfrac{(n+2)^2}{n(n+4)}=\left(\dfrac{3}{1}.\dfrac{4}{2}.\dfrac{5}{3}...\dfrac{n+2}{n}\right)\left(\dfrac{3}{5}.\dfrac{4}{6}.\dfrac{5}{7}...\dfrac{n+2}{n+4}\right)$

$=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}.\dfrac{3.4}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}.6<6.$

174. Bạn nên tính A + B trước, được $\dfrac{(x-z)(y^2+1)}{(1+xy)(1+yz)}$ sau đó tính

$A+B+C=\dfrac{(x-z)(y^2+1)}{(1+xy)(1+yz)}+\dfrac{z-x}{1+zx}=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(1+xy)(1+yz)(1+zx)}=A.B.C.$

175. $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -(y + z) \Rightarrow 4yz - x^2 = 4yz - (y + z)^2 = -(y - z)^2$.

Bằng cách hoán vị vòng quanh $x \to y \to z \to x$ ta được :

$$4zx - y^2 = -(z - x)^2 \; ; \; 4xy - z^2 = -(x - y)^2.$$

Xét các mẫu thức :

$$yz + 2x^2 = yz + x^2 + x^2 = yz + x^2 + x(-y - z) = yz + x^2 - xy - xz$$
$$= (x - y)(x - z).$$

Bằng cách hoán vị vòng quanh như trên ta được :

$$zx + 2y^2 = (y - z)(y - x) \; ; \quad xy + 2z^2 = (z - x)(z - y).$$

Do đó $A \,.\, B \,.\, C = \dfrac{-(y-z)^2}{(x-y)(x-z)} \cdot \dfrac{-(z-x)^2}{(y-z)(y-x)} \cdot \dfrac{-(x-y)^2}{(z-x)(z-y)} = 1$.

176. a) ĐKXĐ của A là $x \neq \pm 2$; ĐKXĐ của B là $x \neq y$;

ĐKXĐ của C là $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \neq 0$ nghĩa là mọi cặp số $(x ; y)$ trừ cặp số $(-2 ; 1)$.

b) $A = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $B = 0 \Leftrightarrow x = -y$; $C = 0 \Leftrightarrow x = y$.

177. a) $A = \dfrac{5}{(x-3)^2 + 1} > 0$; A có GTLN $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + 1$ có GTNN

$\Leftrightarrow (x - 3)^2$ có GTNN $\Leftrightarrow x = 3$.

Lúc đó max $A = 5$ (khi và chỉ khi $x = 3$).

b) $B = \dfrac{-8}{(x-1)^2 + 4} < 0$; B có GTNN $\Leftrightarrow \dfrac{8}{(x-1)^2 + 4}$ có GTLN

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + 4$ có GTNN $\Leftrightarrow (x - 1)^2$ có GTNN $\Leftrightarrow x = 1$.

Lúc đó min $B = -2$ (khi và chỉ khi $x = 1$).

• **178.** $P = \dfrac{1}{x^2y^2z^2} > 0$ với mọi x, y, z khác 0.

179. a) $P = \dfrac{x}{y}$; b) $P = 8 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = 8 \Leftrightarrow x = 8y$.

Xét điều kiện $x + y \le 50 \Rightarrow 9y \le 50 \Rightarrow y \le 5$ do đó có năm cặp số (x ; y) nguyên dương để P có giá trị bằng 8 : (8 ; 1) ; (16 ; 2) ; (24 ; 3) ; (32 ; 4) ; (40 ; 5).

180. Cộng –2 vào các vế trong đẳng thức đã cho ta được :

$$\frac{-x-y-z}{z} = \frac{-x-y-z}{y} = \frac{-x-y-z}{x}.$$

– Nếu $x + y + z = 0$ thì $A = \frac{x+y}{x}.\frac{y+z}{y}.\frac{z+x}{z} = \frac{(-z).(-x).(-y)}{xyz} = -1$.

– Nếu $x + y + z \ne 0$ thì $z = y = x$; $A = 2.2.2 = 8$.

181. Ta có $\frac{xy+2x+1}{xy+x+y+1} = \frac{xy+x+y+1+x-y}{xy+x+y+1} = 1 + \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}$.

Bằng cách hoán vị vòng quanh $x \to y \to z \to x$ ta được

$$\frac{yz+2y+1}{yz+y+z+1} = 1 + \frac{y}{y+1} - \frac{z}{z+1} \; ; \qquad \frac{zx+2z+1}{zx+x+z+1} = 1 + \frac{z}{z+1} - \frac{x}{x+1}.$$

Từ đó suy ra Q = 3 (không phụ thuộc vào x, y, z).

182. Cộng từng vế của (1) và (2) ta được $2cz + z = x + y$

$$\Rightarrow 2cz = x + y - z \Rightarrow c = \frac{x+y-z}{2z} \Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{2z}{x+y+z}.$$

Bằng cách hoán vị vòng quanh $z \to x \to y \to z$ ta được

$$\frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z} \; ; \quad \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z} \text{ do đó}$$

$$T = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2.$$

183. $1 + m = \frac{2x^n}{x^n + \frac{1}{x^n}}$; $1 - m = \frac{2}{x^n\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)}$. Suy ra $\frac{1+m}{1-m} = x^{2n}$.

$$\text{Do đó } P = \frac{\frac{1+m}{1-m} - \frac{1-m}{1+m}}{\frac{1+m}{1-m} + \frac{1-m}{1+m}} = \frac{(1+m)^2 - (1-m)^2}{(1-m)(1+m)} \cdot \frac{(1-m)(1+m)}{(1+m)^2 + (1-m)^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

184. $A = \dfrac{|x+1|+2x}{(x-1)(3x+1)}$. Điều kiện : $x \neq 1$; $x \neq -\dfrac{1}{3}$.

– Nếu $x > -1$ thì $A = \dfrac{3x+1}{(x-1)(3x+1)} = \dfrac{1}{x-1}$.

– Nếu $x < -1$ thì $A = \dfrac{x-1}{(x-1)(3x+1)} = \dfrac{1}{3x+1}$.

Với $x = -2 < -1$ thì $A = \dfrac{1}{3x+1} = \dfrac{1}{3.(-2)+1} = -\dfrac{1}{5}$.

Với $x = \dfrac{3}{4} > -1$ thì $A = \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}-1} = -4$.

185. $\dfrac{x^2+x+4}{(x+2)^3} = \dfrac{A.(x+2)^2+B(x+2)+C}{(x+2)^3}$;

$x^2 + x + 4 = Ax^2 + (4A + B)x + (4A + 2B + C)$.

Do đó $\begin{cases} A = 1 \\ 4A+B = 1 \\ 4A+2B+C = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 6. \end{cases}$

186. a) Nếu $x, y, z > 0$ thì $M = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

Nếu $x, y, z < 0$ thì $M = -1 -1 -1 -1 = -4$.

Nếu x, y, z không cùng âm hoặc không cùng dương thì $M = 0$.

b) Xét hai trường hợp $xy > 0$ và $xy < 0$, giá trị của N đều bằng 1.

187. Có $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+2\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}\right)$

$\left(\sqrt{3}\right)^2 = P + 2 \cdot \dfrac{z+y+x}{xyz}$; $3 = P + 2$ (vì $x + y + z = xyz$) $\Rightarrow P = 1$.

188. Ta có $\dfrac{x}{y-z} = \dfrac{y}{x-z} - \dfrac{z}{x-y} = \dfrac{xy-y^2-xz+z^2}{(x-z)(x-y)}$

do đó $\dfrac{x}{(y-z)^2} = \dfrac{xy-y^2-xz+z^2}{(x-z)(x-y)(y-z)}$.

Hoán vị vòng quanh $x \to y \to z \to x$ ta được

$$\frac{y}{(z-x)^2} = \frac{yz - z^2 - yx + x^2}{(y-x)(y-z)(z-x)} \; ; \; \frac{z}{(x-y)^2} = \frac{zx - x^2 - zy + y^2}{(z-y)(z-x)(x-y)}.$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được $Q = 0$.

189. Đặt $A = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$; $B = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $C = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$.

a) Ta phải chứng minh $A + B + C > 1$ hay $A + B + C - 1 > 0$. (1)

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (A + 1) + (B - 1) + (C - 1) > 0$. (2)

Ta có $A + 1 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 = \dfrac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}$;

$$B - 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 1 = \frac{(b-c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}.$$

Tương tự $C - 1 = \dfrac{(c-a-b)(c-a+b)}{2ca}$.

$$(2) \Leftrightarrow (a + b - c)\left[\frac{c(a+b+c) + a(b-c-a) - b(c-a+b)}{2abc}\right] > 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - c)\,[c^2 - (a - b)^2] > 0 \quad (\text{vì } abc > 0)$$

$$\Leftrightarrow (a + b - c)\,(a - b + c)\,(-a + b + c) > 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì a, b, c thoả mãn bất đẳng thức tam giác, từ đó suy ra đpcm.

b) $M = 1 \Leftrightarrow (A + 1) + (B - 1) + (C - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (a + b - c)\,(a - b + c)(-a + b + c) = 0.$$

Ta xét ba trường hợp :

Trường hợp 1. $a + b - c = 0 \Rightarrow A + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -1$

$B - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 1$

$C - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$

Trường hợp 2. $a - b + c = 0$

$$A - 1 = \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$B - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

$$C + 1 = \frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1.$$

Trường hợp 3. $-a + b + c = 0$

$$A - 1 = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$C - 1 = 0 \Rightarrow C = 1$$

$$B + 1 = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} = 0 \Rightarrow B = -1.$$

Tóm lại, trường hợp nào cũng có hai trong ba phân thức A, B, C bằng 1, phân thức còn lại bằng -1.

190. a) $P = 1 + \frac{1}{x+2} : \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x+2}\right)$; $P = \frac{x+4}{6}$.

b) ĐKXĐ : $x \neq 0$; $x \neq -3$; $x \neq \pm 2$

$P = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ (thoả mãn).

$P = 1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (không thoả mãn).

Vậy không có giá trị nào của x để $P = 1$.

c) $P > 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} > 0 \Leftrightarrow x + 4 > 0$ (vì $6 > 0$) $\Leftrightarrow x > -4$ (và $x \neq 0$; $x \neq -3$; $x \neq \pm 2$).

191. a) $Q = \frac{x+1}{2x}$;

b) ĐKXĐ : $x \neq 0$; $x \neq 2$; $Q = \frac{x+1}{2x}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{x+1}{x}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x \in Ư(1) \Leftrightarrow x \in \{1 ; -1\}$.

Thử lại, với $x = 1$ thì $P = 1$; $x = -1$ thì $P = 0$.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

192. a) Trên tập hợp **R**, tập hợp nghiệm của các phương trình (1), (2), (3) lần lượt là :

$$S_1 = \left\{-5\ ;\ \frac{1}{2}\right\}\ ;\ S_2 = \left\{-5\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \pm\sqrt{3}\right\}\ ;\ S_3 = \left\{-5\ ;\ \pm\sqrt{3}\right\}.$$

Các phương trình đã cho đôi một không tương đương với nhau.

b) Trên tập hợp **Q**, tập hợp nghiệm của các phương trình (1), (2), (3) lần lượt là :

$$S_1 = \left\{-5\ ;\ \frac{1}{2}\right\}\ ;\ S_2 = \left\{-5\ ;\ \frac{1}{2}\right\}\ ;\ S_3 = \{-5\}.$$

Các phương trình (1) và (2) tương đương.

c) Trên tập hợp **Z**, tập hợp nghiệm của các phương trình (1), (2), (3) lần lượt là :

$S_1 = S_2 = S_3 = \{-5\}$. Cả ba phương trình đã cho tương đương với nhau.

d) Trên tập hợp **N**, tập hợp nghiệm của các phương trình (1) ; (2) ; (3) lần lượt là :

$S_1 = S_2 = S_3 = \varnothing$. Cả ba phương trình tương đương với nhau.

193. Thu gọn được $12(a-2)x = 4a - 89$ (2)

(2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = 0 \\ 4a-89 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$

194. a) (1) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}x + \cdots + \frac{20}{39}x\right) + 20 = 22 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{40}{39}$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{20}{39}\right)x = 2\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{20}{39}\right) \Leftrightarrow x = 2.$$

b) Xoá hạng tử 101 ở hai vế ; gọi số hạng tử còn lại ở vế trái là n ($n \in \mathbf{N}^*$), ta được

$$(2) \Leftrightarrow \frac{(x-20+100).n}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 80 = 0 \qquad (\text{vì } n \neq 0) \Leftrightarrow x = -80.$$

195. a) $(1) \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)(x-1)+\frac{1}{10}x = x-\frac{9}{10}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{10}x+\frac{1}{10}x-x=0$; $0x = 0$; phương trình có nghiệm bất kì.

b) Phương trình có dạng ax = b, trong đó

$$a = \frac{1}{50}\left(\frac{50}{1.51}+\frac{50}{2.52}+\frac{50}{3.53}+\cdots+\frac{50}{10.60}\right)$$

$$= \frac{1}{50}\left(1-\frac{1}{51}+\frac{1}{2}-\frac{1}{52}+\frac{1}{3}-\frac{1}{53}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{60}\right)$$

$$= \frac{1}{50}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\cdots+\frac{1}{60}\right)\right].$$

$$b = \frac{1}{10}\left(\frac{10}{1.11}+\frac{10}{2.12}+\frac{10}{3.13}+\cdots+\frac{10}{50.60}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left[1-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{50}-\frac{1}{60}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{50}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{50}\right)-\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{60}\right)\right] = 5a.$$

Vậy x = 5.

196. a) Thu gọn được $(2m + 5)x = -2(2m + 5)$.

- Nếu $m \neq -\frac{5}{2}$ thì $x = -2$;
- Nếu $m = -\frac{5}{2}$ thì phương trình có nghiệm bất kì.

b) Thu gọn được $(2m - 1)x = (2m - 1)^2$.

- Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ thì $x = 2m - 1$;
- Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm bất kì.

197. a) Điều kiện để phương trình có nghĩa : $abc \neq 0$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow (a + b + c)x = (a + b + c)^2$

- Nếu $a + b + c \neq 0$ thì $x = a + b + c$;
- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm tuỳ ý.

b) Điều kiện để phương trình có nghĩa : $a \neq -b$; $b \neq -c$; $c \neq -a$.

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a+b}+\frac{x}{b+c}+\frac{x}{c+a}\right)=\left(\frac{ab}{a+b}+c\right)+\left(\frac{bc}{b+c}+a\right)+\left(\frac{ca}{c+a}+b\right)$$

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)x=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

- Nếu $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \neq 0$ thì $x = ab + bc + ca$.
- Nếu $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} = 0$ thì phương trình có nghiệm bất kì.

198. a) $(x + 1)(x - 2)^2 = 0$; $S = \{-1 ; 2\}$.

b) $(x - 1)(x + 3)(x^2 - x + 1) = 0$; $x^2 - x + 1 > 0$; $S = \{-3 ; 1\}$.

199. $2^{2x} - 2.2^x - 8.2^x + 16 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 2)(2^x - 8) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 2^1 \\ 2^x = 2^3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. ; \ S = \{1 ; 3\}.$$

200. a) Đặt $2x^2 - 3x - 1 = y$ thì $2x^2 - 3x - 5 = y - 4$.

Phương trình đã cho có dạng $y^2 - 3(y - 4) - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (y + 1)(y - 4) = 0 \Leftrightarrow y \in \{-1 ; 4\}$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 1 = -1 \\ 2x^2 - 3x - 1 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(2x-3) = 0 \\ (x+1)(2x-5) = 0 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \{-1 ; 0 ; \frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\}$.

b) $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 5) = 84$.

Đặt $x^2 + 4x = y$; phương trình đã cho có dạng

$$y(y - 5) - 84 = 0 \Leftrightarrow (y + 7)(y - 12) = 0 \ ; \ y \in \{-7 ; 12\}.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x = 12 \\ x^2 + 4x = -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)(x+6) = 0 \\ x^2 + 4x + 7 = 0. \end{array}\right.$

Vì $x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3 > 0$ nên $S = \{-6 ; 2\}$.

201. a) Cộng 1 vào mỗi phân thức rồi đặt nhân tử chung.

$$(x + 100)\left(\frac{1}{57} + \frac{1}{54} - \frac{1}{51} - \frac{1}{48}\right) = 0 ; \ S = \{-100\}.$$

b) Trừ 1 vào mỗi phân thức.

$$(x - 99)\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{32} + \frac{1}{34} - \frac{1}{36} - \frac{1}{38} - \frac{1}{40}\right) = 0 ; \ S = \{99\}.$$

202. a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x-17}{33} - 1\right) + \left(\frac{x-21}{29} - 1\right) + \left(\frac{x}{25} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow (x - 50)\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{29} + \frac{1}{25}\right) = 0 ;$$

$S = \{50\}$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{148-x}{25} - 1\right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2\right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3\right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123 - x)\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19}\right) = 0 \ ; \ S = \{123\}.$$

203. a) $(2x - 5)^3 + (4 - 3x)^3 + (x + 1)^3 = 0$ (1).

Áp dụng kết quả *bài 24*, nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, ta được

(1) $\Leftrightarrow 3(2x - 5)(4 - 3x)(x + 1) = 0$; $S = \{-1 ; \frac{4}{3} ; \frac{5}{2}\}$.

b) Áp dụng kết quả *bài 72 b*

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\,[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

Ta được : (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(6x - 9)\,[(x - 2)^2 + (2x - 4)^2 + (x - 2)^2] = 0$

$\Leftrightarrow 9(x - 2)^2(2x - 3) = 0$; $S = \{2 ; \frac{3}{2}\}$.

c) Áp dụng kết quả $a^3 + b^3 = (a + b)^3 \Leftrightarrow 3ab(a + b) = 0$

(3) $\Leftrightarrow 3.(x^2 + 3x - 4)(3x^2 + 7x + 4)(4x^2 + 10x) = 0$

$S = \{1 ; -4 ; -1 ; -\frac{4}{3} ; 0 ; -\frac{5}{2}\}$.

204. a) Đặt $x + 5 = y$; $x - 4 = z$ thì $2x + 1 = y + z$.

Phương trình đã cho có dạng :

$y^4 + z^4 = (y + z)^4$

$\Leftrightarrow y^4 + z^4 = y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 \Leftrightarrow 2yz(2y^2 + 3yz + 2z^2) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x + 5)(x - 4)(7x^2 + 7x + 22) = 0$ (1).

Dễ thấy $7x^2 + 7x + 22 = 7\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{81}{4} > 0$

(1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 5 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{array}\right.$; $S = \{4 ; -5\}$.

b) Đặt $x - 3 = y$ thì $x - 4 = y - 1$; $x - 2 = y + 1$.

Phương trình đã cho có dạng $(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2(y^4 + 6y^2 + 1) = 82$.

$\Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 4)(y^2 + 10) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$; $S = \{1 ; 5\}$.

205. a) $x^2 + 2x - 2ax + a^2 - 2a - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - ax - x) - (ax - a^2 - a) + (3x - 3a - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - a - 1)(x - a + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a+1 \\ x = a-3. \end{array}\right.$

b) $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$; $S = \{a ; b ; c\}$.

c) $(x + a)^3 + b^3 + c^3 - 3bc(x + a) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + a + b + c)\,[(x + a - b)^2 + (x + a - c)^2 + (b - c)^2] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -(a+b+c) \\ x = b-a = c-a. \end{array}\right.$

206. a) ĐKXĐ : $x \neq \pm 2$.

Giải ra được $x = -2$ (không thoả mãn ĐKXĐ). Vậy $S = \varnothing$.

b) ĐKXĐ : $x \neq 0$

Giải ra được $x = -5$ (thoả mãn ĐKXĐ). Vậy $S = \{-5\}$.

207. a) ĐKXĐ : $x \neq -9$; $x \neq -10$.

Thu gọn được $x(x + 19)(19x + 181) = 0$; $S = \left\{0 ; -19 ; \frac{-181}{19}\right\}$.

b) ĐKXĐ : $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$.

Đưa phương trình đã cho về dạng :

$$(x - 1) + \frac{1}{x-1} + (x-4) + \frac{4}{x-4} = (x-2) + \frac{2}{x-2} + (x-3) + \frac{3}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \Rightarrow 2x(2x - 5) = 0 ;\ S = \{0 ; 2,5\}$$

208. a) ĐKXĐ : $x \neq 5$.

Số phân thức ở vế trái là $(x - 5) - 1 + 1 = x - 5$.

Thu gọn vế trái được $\frac{[(x-5)+1](x-5)}{2(x-5)} = \frac{x-4}{2}$.

Phương trình đã cho đưa về dạng $\frac{x-4}{2} = 4 \Leftrightarrow x = 12$ (thoả mãn ĐKXĐ).

Vậy $S = \{12\}$.

b) $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + ... + \frac{1}{(x+7)(x+8)} = \frac{1}{14}$.

ĐKXĐ : $x \notin \{-1 ; -2 ; -3 ; ... ; -8\}$

$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + ... + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+8} = \frac{1}{14}$;

$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+8} = \frac{1}{14} \Rightarrow (x-6)(x+15) = 0$; $S = \{6 ; -15\}$

c) ĐKXĐ : $x \in \mathbf{N}^*$

Bạn hãy biểu diễn mỗi tổng ở vế trái thành một tích rồi khử liên tiếp.

Ta có $1 + \frac{1}{x(x+2)} = \frac{(x+1)^2}{x(x+2)}$

Phương trình đã cho có dạng : $\frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} ... \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} = \frac{31}{16}$; $\frac{2(x+1)}{x+2} = \frac{31}{16}$;

$S = \{30\}$.

209. ĐKXĐ : $x \neq -\frac{1}{a}$; $x \neq -\frac{1}{b}$.

Phương trình đã cho đưa về dạng : $(a-b)(a+b)x = -(a-b)$.

* Nếu $a = b$ thì ta được $0x = 0$. Phương trình có nghiệm x tuỳ ý và $x \neq -\frac{1}{a}$;

$x \neq -\frac{1}{b}$.

* Nếu $a = -b$ thì ta được $0x = 2b$, phương trình vô nghiệm.

* Nếu $a \neq \pm b$ thì $x = -\frac{1}{a+b}$ với điều kiện :

$-\frac{1}{a+b} \neq -\frac{1}{a}$ và $-\frac{1}{a+b} \neq -\frac{1}{b}$, tức là $a \neq 0$; $b \neq 0$.

Vậy nếu $a \neq \pm b$ thì phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{a+b}$.

210. Điều kiện để phương trình có nghĩa : $a \neq 0$; $b \neq 0$.

ĐKXĐ : $x \neq 0$; $x \neq a - b$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x-a+b} - \frac{1}{x} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{a-b}{x(x-a+b)} = \frac{a-b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[\frac{1}{x(x-a+b)} - \frac{1}{ab}\right] = 0.$$

* Nếu $a = b$ thì phương trình đã cho có nghiệm tuỳ ý thoả mãn điều kiện $x \neq 0$.

* Nếu $a \neq b$ thì $\frac{1}{x(x-a+b)} = \frac{1}{ab} \Rightarrow (x-a)(x+b) = 0$; $S = \{a ; -b\}$.

211. ĐKXĐ : $x \neq 2$; $x \neq m$; $x \neq 2m$.

Phương trình đã cho đưa về dạng $x(m + 2) = 2m(4 - m)$.

* Nếu $m = -2$ thì $0x = -24$; phương trình vô nghiệm.

* Nếu $m \neq -2$ thì $x = \frac{2m(4-m)}{m+2}$ với điều kiện $x \neq 2$; $x \neq m$; $x \neq 2m$.

Với $\frac{2m(4-m)}{m+2} \neq 2$ thì $(m - 1)(2m - 4) \neq 0$ hay $m \neq 1$ và $m \neq 2$.

Với $\frac{2m(4-m)}{m+2} \neq m$ thì $3m(m - 2) \neq 0$ hay $m \neq 0$ và $m \neq 2$.

Với $\frac{2m(4-m)}{m+2} \neq 2m$ thì $4m(m - 1) \neq 0$ hay $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

Vậy khi $m \neq \pm 2$ và $m \neq 0$; $m \neq 1$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{2m(4-m)}{m+2}$.

212. Gọi độ dài đoạn đường bằng là x km ($0 < x < 45$).

Phương trình $\frac{2x}{40} + \frac{45-x}{24} + \frac{45-x}{45} = 2,5$; $x = 27$ (thoả mãn điều kiện).

Độ dài đoạn đường bằng là 27km.

213. Gọi khoảng cách từ chỗ gặp nhau của hai người đến đỉnh đồi là x km ($0 < x < 6$).

Phương trình $\frac{6}{10} + \frac{x}{15} = \frac{6-x}{12} + \frac{1}{4}$; $x = 1$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy chỗ gặp nhau cách đỉnh đồi là 1km.

214. Gọi thời gian từ lúc xe đạp khởi hành đến 10h 30 phút là x giờ ($x > 0$).

Phương trình $60(x - 3) = \frac{15x + 45(x-2)}{2}$; $x = 4,5$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy xe đạp khởi hành lúc 6 giờ.

215. Gọi số phải tìm là x ($x \in \mathbf{N}^*$) ;

$x = \overline{abcde}$; $\overline{abcde1} = 10x + 1$; $\overline{1abcde} = 100\,000 + x$.

Phương trình $10x + 1 = 3(100\,000 + x)$; $x = 42857$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy số phải tìm là 42857.

216. Gọi thời gian để vòi A chảy một mình đầy bể là x giờ ($x > 0$).

Suy ra thời gian để vòi B chảy một mình đầy bể là $x + 2$ (giờ).

Trong 1 giờ vòi A chảy được $\frac{1}{x}$ (bể) ; vòi B chảy được $\frac{1}{x+2}$ (bể) ; cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x+2}{x(x+2)}$ (bể).

Thời gian để hai vòi cùng chảy cho đầy bể là $1 : \frac{2(x+1)}{x(x+2)} = \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$ (giờ).

Phương trình $x(x + 2) = 4.\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$; $x = 1$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy vòi A chảy trong 1 giờ thì đầy bể ; vòi B chảy trong 3 giờ thì đầy bể.

217. Gọi tuổi con hiện nay là x ($x \in \mathbf{N}^*$), suy ra tuổi cha là 3x ; cha hơn con 2x (tuổi).

Khi tuổi con là 3x thì tuổi cha là 5x.

Phương trình $3x + 5x = 112$; $x = 14$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy hiện nay tuổi con là 14 ; tuổi cha là 42.

218. Gọi mỗi kết quả là x, suy ra bốn số đó lần lượt là $x - 5$; $x + 5$; $5x$; $\frac{x}{5}$.

Phương trình $(x - 5) + (x + 5) + 5x + \frac{x}{5} = 72$; $x = 10$.

Bốn số đó là 5 ; 15 ; 2 ; 50.

219. Gọi số *nam sinh giỏi* là x ($x \in \mathbf{N}^*$).

Suy ra số *nữ sinh khá* cũng là x.

Số nữ sinh giỏi là $20 - x$.

Số học sinh giỏi (cả nam và nữ) trong lớp là :

$$x + (20 - x) = 20 \text{ (học sinh).}$$

220. Bạn Phương, bạn Trình giải đúng.

Cách giải của bạn Nhân có thể là :

Gọi số sản phẩm được giao là x ($x \in \mathbf{N}^*$).

Ta có phương trình $x = 12.5$; $x = 60$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy số sản phẩm được giao là 60 sản phẩm.

221. Lần lượt chuyển vế rồi nhân hai vế của phương trình với cùng một số, sau bốn lần ta được $x = -9000$.

222. ĐKXĐ : $x \neq 1$; $x \neq -4$.

Phương trình đã cho đưa về dạng $3x(x + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = 0 & \text{(thoả mãn ĐKXĐ)} \\ x_2 = -4 & \text{(không thoả mãn ĐKXĐ).} \end{array}\right. \qquad \text{Vậy } S = \{0\}.$$

223. Ta có $2 + 4 + 6 + ... + 2x = \frac{(2+2x).x}{2} = x(x + 1)$;

$$1 + 3 + 5 + ... + (2x - 1) = \frac{[1+(2x-1)].x}{2} = x^2.$$

Phương trình đã cho có dạng $\frac{x+1}{x} = \frac{16}{15} \Leftrightarrow x = 15.$

224. a) Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

Chia hai vế của (1) cho x^2 ta được :

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ ta được $2(y^2 - 2) - 9y + 14 = 0$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 10 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(2y - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Với $y = 2$ thì $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$

Với $y = \frac{5}{2}$ thì $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Vậy $S = \left\{1 \ ; \ 2 \ ; \ \frac{1}{2}\right\}.$

b) Đặt $x - 4 = y$, phương trình đã cho có dạng $(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 16$

$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow (y^2 + 7)(y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1.$

Với $y = 1$ thì $x = 5$; với $y = -1$ thì $x = 3$. Vậy $S = \{3 ; 5\}$.

225. Điều kiện để phương trình có nghĩa $a \neq 0$, $b \neq 0$.

ĐKXĐ : $x \neq -b$; $x \neq -c$

$$\frac{a+b}{ab(b+x)} = \frac{2(a+b)}{ab(c+x)} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}\left(\frac{2}{c+x} - \frac{1}{b+x}\right) = 0.$$

* Nếu $a = -b$ thì phương trình có nghiệm x tuỳ ý với $x \neq -b$; $x \neq -c$.

* Nếu $a \neq -b$ thì $\frac{2}{c+x} = \frac{1}{b+x}$ suy ra $2b + 2x = c + x$; $x = c - 2b$ với điều kiện $c - 2b \neq -b$ hay $c \neq b$ và $c - 2b \neq -c$ hay $c \neq b$.

Vậy nếu $a \neq -b$ và $b \neq c$ thì phương trình có nghiệm $x = c - 2b$.

226. Gọi vận tốc dự định là x km/h ($x > 4$).

Phương trình $\frac{120}{x} = \frac{60}{x-4} + \frac{60}{x+5}$; $x = 40$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy vận tốc dự định là 40km/h. Thời gian dự định đi hết quãng đường là 3 giờ.

227. Gọi phần việc đội I làm được trong một ngày là x (công việc ; $x > 0$).

Trong 1 ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{4}$ công việc nên trong 1 ngày đội II làm được $\frac{1}{4} - x$ (công việc).

Phương trình $3x + 6\left(\frac{1}{4} - x\right) = 1$; $x = \frac{1}{6}$ (thoả mãn điều kiện).

Trong 1 ngày đội I làm được $\frac{1}{6}$ công việc ; do đó thời gian đội I làm một mình xong công việc là 6 ngày. Thời gian đội II làm một mình xong công việc là : $1 : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = 12$ (ngày).

228. Số học sinh dự thi của hai trường là $480 : \frac{96}{100} = 500$ (học sinh).

Gọi số học sinh dự thi của trường A là x (x nguyên ; $0 < x < 500$).

Phương trình $\frac{94}{100}x + \frac{99}{100}(500 - x) = 480$; $x = 300$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy số học sinh dự thi của trường A là 300 học sinh, của trường B là 200 học sinh.

Số học sinh tốt nghiệp của trường A là $300 . \frac{94}{100} = 282$ (học sinh).

Số học sinh tốt nghiệp của trường B là $480 - 282 = 198$ (học sinh).

Chương IV

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

229. $a > b$; $c > d \Rightarrow ac > bd$ (vì a, b, c, d > 0) $\Rightarrow \frac{ac}{cd} > \frac{bd}{cd} \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

230. $T = (a-1)(a-2)(a-3)(a-4) + 1 = (a^2 - 5a + 4)(a^2 - 5a + 6) + 1$.

Đặt $a^2 - 5a + 5 = m$ thì $T = (m-1)(m+1) + 1 = m^2 \geq 0$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 5 = 0$).

231. Xét hiệu $H = (x^5 - y^5) - (xy^4 - x^4y) = (x^5 + x^4y) - (xy^4 + y^5)$

$$= (x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)$$

Ta thấy $(x+y)^2 \geq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -y$). Vì $x > y$ nên $x - y > 0$ và $x^2 + y^2 > 0$.

Suy ra $H \geq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -y$). Vậy $x^5 - y^5 \geq xy^4 - x^4y$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -y$).

232. Xét hiệu $H = \frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{3a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 3b^3}{8}$

$$= \frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$). Vậy $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

233. $a + b > 2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 4$; $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

suy ra $2(a^2 + b^2) > 4$; $a^2 + b^2 > 2$. Tiếp tục như trên ta được $a^4 + b^4 > 2$.

234. Ta có $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{3.4}$; ... ; $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$.

Do đó $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n-1)}$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}<1.$

235. a) $a+b+c<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Rightarrow (a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)<0$

$\Rightarrow abc(a+b+c)-(ab+bc+ca)<0$

$\Rightarrow (a+b+c)-(ab+bc+ca)<0$ (1) (do $abc=1$).

Ta có $(a-1)(b-1)(c-1)=abc+(a+b+c)-(ab+bc+ca)-1$

$=(a+b+c)-(ab+bc+ca)<0.$

b) Vì $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ nên số nhân tử âm phải là số lẻ, tức là trong các nhân tử $a-1$; $b-1$; $c-1$ có một nhân tử âm hoặc 3 nhân tử âm.

Trường hợp $a-1<0$; $b-1<0$; $c-1<0$ thì $0<a<1$; $0<b<1$; $0<c<1 \Rightarrow abc<1$ (trái đề bài).

Vậy trong các nhân tử $a-1$; $b-1$; $c-1$ có một nhân tử âm suy ra trong 3 số a ; b ; c có một số nhỏ hơn 1 ; hai số lớn hơn 1.

236. a) Xét hiệu $H=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{4}{a+b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)-4ab}{ab(a+b)}=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab(a+b)}$

$=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\geq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$).

Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$).

b) Vì a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên $a, b, c>0$; $p-a>0$; $p-b>0$; $p-c>0$.

- Áp dụng kết quả câu a có $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geq\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c}$.

$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{4}{2p-b-c}=\frac{4}{a}$; $\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\geq\frac{4}{2p-c-a}=\frac{4}{b}$.

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức trên ta được :

$$2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$).

237. Vì $[x] \leq x$; $[y] \leq y$ nên $[x] + [y] \leq x + y$ tức là $[x] + [y]$ là *số nguyên không vượt quá* $x + y$ (1). Mặt khác theo định nghĩa của phần nguyên thì $[x + y]$ là *số nguyên lớn nhất* không vượt quá $x + y$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $[x] + [y] \leq [x + y]$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 0 \leq \{x\} + \{y\} < 1$.

238. a) $abcd = 1 \Rightarrow ad = \frac{1}{bc}$. Mặt khác vì $a, b, c, d > 0$ nên $ad > 0$ và $\frac{1}{bc} > 0$.

Ta có $ad + bc = \frac{1}{bc} + bc \geq 2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{bc} = bc \Leftrightarrow bc = ad = 1$).

Vậy min $(ad + bc) = 2$ (khi và chỉ khi $ad = bc = 1$).

b) $B = 3 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$.

Do $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$; $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$; $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c$).

Vậy $B \geq 9 \Rightarrow$ min $B = 9$ (khi và chỉ khi $a = b = c$).

239. a) $C = \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$). Vậy min $C = -\frac{5}{4}$ (khi và chỉ khi $x = \frac{7}{2}$).

b) $D = \frac{-5}{(x-2)^2+3}$ có GTNN $\Leftrightarrow \frac{5}{(x-2)^2+3}$ có GTLN.

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + 3$ có GTNN $\Leftrightarrow x = 2$. Lúc đó min $D = \frac{-5}{3}$.

240. a) $E = 2 + \frac{1}{(x+1)^2+3}$ có GTLN $\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2+3}$ có GTLN

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + 3$ có GTNN $\Leftrightarrow x = -1$

Lúc đó max $E = 2\frac{1}{3}$ (khi và chỉ khi $x = -1$).

b) $F = \frac{6x-8}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-6x+9)}{x^2+1} = 1 - \frac{(x-3)^2}{x^2+1}$.

F có GTLN $\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{x^2+1}$ có GTNN $\Leftrightarrow x = 3$.

Lúc đó max $F = 1$ (khi và chỉ khi $x = 3$).

Nhận xét : Phương pháp chung tìm GTNN của biểu thức C ; D cũng như tìm GTLN của biểu thức E ; F là tách mỗi biểu thức thành một tổng (hiệu) giữa một số với một phân thức mà phân thức này có thể tìm được GTNN (hay GTLN).

241. $a + b + c = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1$.

Do $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ nên $2(ab + bc + ca) < 1 \Rightarrow ab + bc + ca < \frac{1}{2}$.

242. a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$).

b) $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$; $d^2 + 1 \geq 2d$.

Cộng từng vế bốn bất đẳng thức trên, suy ra điều phải chứng minh (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$).

c) Từ kết quả câu a, suy ra $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$

do đó $2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

hay $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$).

243. Áp dụng $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ta chứng minh được

$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$\Rightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$\Rightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2 = 4$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d$).

244. Dễ thấy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 12 \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 144$

$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 144.$ (1)

Mặt khác $2(x^4 + y^4 + z^4) \geq 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được $3(x^4 + y^4 + z^4) \geq 144$

$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq 48$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$)

$\Rightarrow \min(x^4 + y^4 + z^4) = 48$ (khi và chỉ khi $x = y = z = 2$).

245. a) (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+xy}\right) + \left(\dfrac{1}{1+y^2} - \dfrac{1}{1+xy}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0.$$

Vì $x \geq 1$; $y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$, bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng, suy ra (1) đúng (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$).

b) Áp dụng kết quả câu a, ta có $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} \geq \dfrac{2}{1+xy} \geq \dfrac{2}{1+xyz}$ (vì $z \geq 1$).

Tương tự $\dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+z^2} \geq \dfrac{2}{1+xyz}$; $\dfrac{1}{1+z^2} + \dfrac{1}{1+x^2} \geq \dfrac{2}{1+xyz}$.

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức ta suy ra được

$\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+z^2} \geq \dfrac{3}{1+xyz}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$).

246. a) Xét hiệu $\dfrac{a^3}{b} - (a^2 + ab - b^2) = \dfrac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}{b} = \dfrac{(a-b)^2(a+b)}{b} \geq 0$ (vì $a, b > 0$).

Vậy $\dfrac{a^3}{b} \geq a^2 + ab - b^2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

b) Tương tự ta có $\frac{b^3}{c} \geq b^2 + bc - c^2$; $\frac{c^3}{b} \geq c^2 + ca - a^2$.

Suy ra $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$).

247. Vì a, b, c > 0 nên $1 + a + b + ab > 1 + a + b \Rightarrow (1 + a)(1 + b) > 1 + a + b$.

Tương tự, $(1 + b)(1 + c) > 1 + b + c$; $(1 + c)(1 + a) > 1 + c + a$.

Suy ra $(1 + a)(1 + b) + (1 + b)(1 + c) + (1 + c)(1 + a) > 3 + 2(a + b + c) = 5$.

248. a) $\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2!}$; $\frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$; $\frac{3}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$; ... ; $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$.

Vậy $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{n-1}{n!} < 1$.

b) Tổng S có $(4n + 1) - (2n + 1) + 1 = 2n + 1$ hạng tử ; hạng tử ở giữa là $\frac{1}{3n+1}$.

Trừ hạng tử ở giữa, ta ghép tổng S thành n cặp, mỗi cặp là hai hạng tử cách đều hạng tử ở giữa. Mỗi cặp bằng

$$\frac{1}{3n+1-k} + \frac{1}{3n+1+k} = \frac{6n+2}{(3n+1)^2 - k^2} > \frac{2(3n+1)}{(3n+1)^2} = \frac{2}{3n+1}.$$

Vậy $S > \frac{2}{3n+1} \cdot n + \frac{1}{3n+1} = \frac{2n+1}{3n+1} > \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Để chứng minh S < 1 ta làm trội S bằng cách thay mỗi hạng tử của S bởi hạng tử có giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2n+1}$.

$$S < \frac{1}{2n+1} \cdot (2n + 1) = 1. \qquad \text{Vậy } \frac{2}{3} < S < 1.$$

249. $\left|\frac{x+y}{xy}\right| = \left|\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy}\right| = \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| \leq 2$ (vì $|x| \geq 1$; $|y| \geq 1$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |x| = |y| = 1$).

250. $a + b + c = 3 \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} = 1$; $P = \frac{a+b+c}{3a} + \frac{a+b+c}{3b} + \frac{a+b+c}{3c}$.

$P = \frac{1}{3}\left[3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right]$; $P \geq \frac{1}{3}.9 = 3$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c = 1$).

Vậy min P = 3 (khi và chỉ khi $a = b = c = 1$).

251. a) Xét vế trái, đặt $\frac{1}{2}$ làm nhân tử chung, nhóm thành từng nhóm hai số nghịch đảo nhau, từ đó suy ra đpcm.

b) Đặt $y + z = a$; $z + x = b$; $x + y = c$ $\Rightarrow$ $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{-a+b+c}{2}$; $y = \frac{a-b+c}{2}$; $z = \frac{a+b-c}{2}$.

Vậy $P = \frac{-a+b+c}{2a} + \frac{a-b+c}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} \geq \frac{3}{2}$ (câu a)

$\Rightarrow$ min $P = \frac{3}{2}$ (khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z$).

252. a) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow$ $\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$.

Tương tự, $\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, ta suy ra đpcm.

b) Ta có $a + c > b$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c} = \frac{2}{a+b+c} > \frac{2}{(a+c)+(a+c)} = \frac{1}{c+a}.$$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} > \frac{1}{b+c}$.

c) Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể sắp thứ tự của các biến. Không giảm tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

(1) $\Leftrightarrow a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) - 3abc \leq 0$

$\Leftrightarrow a(ab + ac - a^2 - bc) + b(bc + ba - b^2 - ac) + c(ac + bc - c^2 - ab) \leq 0$

$\Leftrightarrow\ a(a-b)(c-a)+b(b-c)(a-b)+c(c-a)(b-c)\le 0$

$\Leftrightarrow\ (a-b)(b-a)(b+a-c)+c(c-a)(b-c)\le 0$

$\Leftrightarrow\ (a-b)^2(c-a-b)+c(c-a)(b-c)\le 0.$

Dễ thấy cả hai hạng tử đều không dương nên bất đẳng thức cuối cùng đúng, suy ra bất đẳng thức (1) đúng.

253. Đặt $a_1=\frac{k}{n}+x_1$; $a_2=\frac{k}{n}+x_2$; ... ; $a_n=\frac{k}{n}+x_n$.

Vì $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=k$ nên $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0$.

Ta có $a_1^2+a_2^2+a_2^3+\cdots+a_n^2$

$$=\left(\frac{k}{n}+x_1\right)^2+\left(\frac{k}{n}+x_2\right)^2+\left(\frac{k}{n}+x_3\right)^2+\cdots+\left(\frac{k}{n}+x_n\right)^2$$

$$=\frac{k^2}{n^2}\cdot n+(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2)+2\cdot\frac{k}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$$

$$=\frac{k^2}{n}+(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2)\ge\frac{k^2}{n}$$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=...=x_n=0\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=...=a_n=\frac{k}{n}$).

254. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{c}$; $\frac{c}{a}$ ta được :

$$\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\right)^3\ge\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1.$$

Suy ra $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$).

255. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta được :

a) $(x+2y)^2\le(1^2+2^2)(x^2+y^2)$ suy ra $25\le 5(x^2+y^2)$

$\Rightarrow x^2+y^2\ge 5$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow x=1\ ;\ y=2$) ;

b) $(3x - 4y)^2 \le (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2)$ suy ra $100 \le 25(x^2 + y^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \ge 4$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$; $y = \frac{-8}{5}$)

$\Rightarrow$ min A = 4 (khi và chỉ khi $x = \frac{6}{5}$; $y = -\frac{8}{5}$).

256. a) Giả sử có các số dương a, b, c thoả mãn cả ba bất đẳng thức $a + \frac{1}{b} < 1$;

$b + \frac{1}{c} < 2$; $c + \frac{1}{a} < 3$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức ta được $\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) < 6$. (1)

Mặt khác $a + \frac{1}{a} \ge 2$; $b + \frac{1}{b} \ge 2$; $c + \frac{1}{c} \ge 2$ nên

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \ge 6. \qquad (2)$$

Hai bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn nhau, từ đó suy ra đpcm.

b) Giả sử có ba số a, b, c thoả mãn cả ba bất đẳng thức.

$$|a - b| > |c| \ ; \ |b - c| > |a| \ ; \ |c - a| > |b|$$

suy ra $(a - b)^2 > c^2$; $(b - c)^2 > a^2$; $(c - a)^2 > b^2$

$\Rightarrow (a - b)^2 - c^2 > 0 \Rightarrow (a - b - c)(a - b + c) > 0$. (1)

Tương tự : $(b - c - a)(b - c + a) > 0$ (2)

$(c - a - b)(c - a + b) > 0$. (3)

Nhân từng vế các bất đẳng thức (1) ; (2) ; (3) sẽ dẫn đến mâu thuẫn.

257. a) Với n = 3 bất đẳng thức đã cho là đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k (với $k \ge 3$) tức là $2^k > 2k + 1$ (đây là giả thiết quy nạp), ta phải chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với n = k + 1, nghĩa là phải chứng minh $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.

Thật vậy, ta có $2^k > 2k + 1$ (do giả thiết quy nạp) ; $2^k > 2$ (vì $k \ge 3$)

do đó $2 . 2^k > 2k + 3$ hay $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$ nghĩa là bất đẳng thức $2^n > 2n + 1$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

b) Với $n = 5$, bất đẳng thức đã cho là đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k$ ($k \geq 5$) tức là $2^k > k^2$ (đây là giả thiết quy nạp) ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh $2^{k+1} > (k + 1)^2$.

Thật vậy, ta có $2^k > k^2$ (do giả thiết quy nạp) $\Rightarrow 2^{k+1} > 2k^2$. (1)

Mặt khác, với $k \geq 5$ thì $(k - 1)^2 - 2 > 0$ hay $k^2 - 2k - 1 > 0 \Rightarrow k^2 > 2k + 1$

$\Rightarrow 2k^2 > k^2 + 2k + 1 \Rightarrow 2k^2 > (k + 1)^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2^{k+1} > (k + 1)^2$.

Vậy bất đẳng thức $2^n > n^2$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 5$.

258. a) Dễ thấy $x^2 - 2x + 3 > 0$, $x^2 - 4x + 5 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si đối với hai số dương ta có :

$$\left[\frac{(x^2-2x+3)+(x^2-4x+5)}{2}\right]^2 \geq (x^2-2x+3)(x^2-4x+5)$$

hay $(x^2 - 3x + 4)^2 \geq (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 5)$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow x = 1$.

b) (2) $\Leftrightarrow 1 + \dfrac{6}{(x-2)^2+2} = (x-2)^2 + 4$.

Ta thấy vế trái $T \leq 1 + 3 = 4$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$)

vế phải $P \geq 4$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$).

Vậy $T = P \Leftrightarrow x = 2$.

259. a) Nếu $x \geq 1$; $A = 25x^4 + 6x^4 - 6x + 17 = 25x^4 + 6x(x^3 - 1) + 17 > 0$;

Nếu $x < 1$; $A = 31x^4 + 6(1 - x) + 11 > 0$.

Vậy $A > 0$ với mọi x.

b) Nếu $x < 2$ thì $B = (2 - x) + (3 - x) = 5 - 2x > 1$;

Nếu $2 \le x \le 3$ thì $B = (x - 2) + (3 - x) = 1$;

Nếu $x > 3$ thì $B = (x - 2) + (x - 3) = 2x - 5 > 1$.

Vậy min B = 1 (khi và chỉ khi $2 \le x \le 3$).

260. $A = \dfrac{2(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1) + 1}{(x-1)^2} = 2 - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Đặt $\dfrac{1}{x-1} = y$ thì $A = 2 - 2y + y^2 = (y - 1)^2 + 1 \ge 1$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$).

Vậy min A = 1 (khi và chỉ khi $y = 1 \Leftrightarrow x = 2$).

261. Dễ thấy $x^2 + x + 1 > 0$.

Ta có $2(x - 1)^2 \ge 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 \ge 0 \Rightarrow 3(x^2 - x + 1) \ge x^2 + x + 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \ge \frac{1}{3} \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 1).$$

Ta có $2(x + 1)^2 \ge 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 \ge 0 \Rightarrow 3(x^2 + x + 1) \ge x^2 - x + 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \le 3$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -1$). Vậy $\dfrac{1}{3} \le P \le 3$.

Do đó min $P = \dfrac{1}{3}$ (khi và chỉ khi $x = 1$) ; max P = 3 (khi và chỉ khi $x = -1$).

262. Giải bất phương trình (1) ta được $x < 6$;

Giải bất phương trình (2) ta được $x \ge 3$.

Nghiệm chung là $3 \le x < 6$.

Vậy nghiệm nguyên chung của cả hai bất phương trình là $x \in \{3, 4, 5\}$.

263. a) $0x > 1$; bất phương trình vô nghiệm.

b) $0x < 27$; nghiệm tuỳ ý.

264. Cộng thêm 1 vào mỗi phân thức ở hai vế, dẫn tới

$$(x + 58)\left(\frac{1}{73} + \frac{1}{71} - \frac{1}{69} - \frac{1}{67}\right) \le 0$$

vì $\dfrac{1}{73} + \dfrac{1}{71} - \dfrac{1}{69} - \dfrac{1}{67} < 0$ nên $x + 58 \ge 0$; $x \ge -58$.

265. a) $2(m-1)x \geq (m-1)^2$.

– Nếu $m > 1$ thì $x \geq \dfrac{m-1}{2}$;

– Nếu $m < 1$ thì $x \leq \dfrac{m-1}{2}$;

– Nếu $m = 1$ thì $0x \geq 0$, nghiệm đúng với mọi x.

b) $(m+2)x < (m+2)(m-2)$.

– Nếu $m > -2$ thì $x < m-2$;

– Nếu $m < -2$ thì $x > m-2$;

– Nếu $m = -2$ thì $0x < 0$, vô nghiệm.

c) $(m^2-4)x > 5m$

– Nếu $m = 2$ thì được $0x > 10$, vô nghiệm ;

– Nếu $m = -2$ thì được $0x > -10$, nghiệm tuỳ ý ;

– Nếu $|m| > 2$ thì $x > \dfrac{5m}{m^2-4}$;

– Nếu $|m| < 2$ thì $x < \dfrac{5m}{m^2-4}$.

266. Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là $m \neq 0$. Bạn không nên khử mẫu vì như vậy phải xét 2 trường hợp $m > 0$ và $m < 0$.

$(1) \Leftrightarrow (m-2)x + x + \dfrac{2}{m} > \dfrac{3}{m} - 2x \quad \Leftrightarrow (m+1)x > \dfrac{1}{m}$.

– Nếu $m > -1$ thì $x > \dfrac{1}{m(m+1)}$;

– Nếu $m < -1$ thì $x < \dfrac{1}{m(m+1)}$;

– Nếu $m = -1$ thì $0x > -1$; nghiệm tuỳ ý.

267. $(1) \Leftrightarrow (m-1)x \leq 5-3m$.

– Nếu $m > 1$ thì $x \leq \dfrac{5-3m}{m-1}$;

– Nếu $m < 1$ thì $x \geq \dfrac{5-3m}{m-1}$;

– Nếu $m = 1$ thì $0x \leq 2$, nghiệm tuỳ ý.

(2) $\Leftrightarrow (m-1)x \geq 3-2m$

– Nếu $m > 1$ thì $x \geq \dfrac{3-2m}{m-1}$;

– Nếu $m < 1$ thì $x \leq \dfrac{3-2m}{m-1}$;

– Nếu $m = 1$ thì $0x \geq 2$, vô nghiệm.

So sánh 3 trường hợp ta thấy :

Khi $m = 1$, hai bất phương trình không có nghiệm chung

– Khi $m > 1$, hai bất phương trình có đúng một nghiệm chung khi

$$\frac{5-3m}{m-1} = \frac{3-2m}{m-1}$$

$\Leftrightarrow m = 2$. Lúc đó $x = -1$.

– Khi $m < 1$, lập luận tương tự như trên ta được $m = 2$ (loại). Vậy hai bất phương trình có đúng một nghiệm chung là $x = -1$ khi $m = 2$.

268. ĐKXĐ : $x \neq -1$.

(1) $\Rightarrow (m-2)x = m-3$.

Nếu $m \neq 2$ thì $x = \dfrac{m-3}{m-2}$;

Để $\dfrac{m-3}{m-2}$ là nghiệm của (1) ta phải có $\dfrac{m-3}{m-2} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 2{,}5$.

Mặt khác, $x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{m-3}{m-2} < 0 \Leftrightarrow$ $m-3$ và $m-2$ trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ m-3<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2 < m < 3$

Kết hợp lại ta được $2 < m < 3$ và $m \neq 2{,}5$.

269. a) ĐKXĐ : $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{4x+3}{2x+1}-2<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1}<0 \Leftrightarrow 2x+1<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}.$$

Vì $x \in \mathbf{Z}$ nên $x \in \{-1 ; -2 ; -3 ; ... \}$.

b) ĐKXĐ : $x \neq -5$; $x \neq 3$.

$$\frac{x-3}{x+5}+\frac{x+5}{x-3}-2<0 \Leftrightarrow \frac{64}{(x+5)(x-3)}<0 \Leftrightarrow (x+5) \text{ và } (x-3) \text{ khác dấu}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow -5<x<3.$$ Vì $x \in \mathbf{Z}$ nên $x \in \{-4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$.

270. a) Giải $-8 < 5x - 2 < 8$ được $-\frac{6}{5} < x < 2$.

b) Giải $4 - 5x < 3x + 2 < 5x - 4$ được $x > 3$.

271. a) Giải $\left[\begin{array}{l} 3(x+1)>5 \\ 3(x+1)<-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{2}{3} \\ x<-\frac{8}{3}. \end{array}\right.$

b) Giải $\left[\begin{array}{ll} x^2-1>x+1 & (1) \\ x^2-1<-(x+1) & (2) \end{array}\right.$

Giải (1) được $x > 2$ hoặc $x < -1$.

Giải (2) được $-1 < x < 0$.

Kết hợp lại được $x > 2$ hoặc $x < 0$ và $x \neq -1$.

(Bạn có thể biểu diễn tập hợp nghiệm của bất phương trình (1) và của bất phương trình (2) trên trục số sẽ dễ dàng nhận thấy được tập hợp nghiệm của bất phương trình đã cho).

272. Bình phương cả hai vế của bất phương trình.

a) $x > \frac{1}{4}$; b) $x < -\frac{1}{7}$.

273. Thay $x = [x] + \{x\}$ ta được $[x] . \{x\} < 2([x] + \{x\} - 2)$;

$$[x] . \{x\} < 2[x] + 2\{x\} - 4$$

$[x]\,(\{x\} - 2) < 2\,(\{x\} - 2)$

Vì $\{x\} - 2 < 0$ nên $[x] > 2 \Rightarrow x \geq 3$.

274. a) Đặt $2x + 3 = t\ (t \in \mathbf{Z}) \Rightarrow x = \dfrac{t-3}{2}$

Thay vào phương trình đã cho ta được :

$$\left[6.\frac{(t-3)}{2} - 5\right] = t \Leftrightarrow [3t - 14] = t \Leftrightarrow t \leq 3t - 14 < t + 1$$

$$\Leftrightarrow 7 \leq t < 7{,}5 \Leftrightarrow t = 7.$$

Suy ra $2x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 2$.

b) Đặt $\dfrac{15x-4}{5} = t\ \ (t \in \mathbf{Z}) \Rightarrow x = \dfrac{5t+4}{15}$

Thay vào phương trình đã cho rồi thu gọn được

$$\left[\frac{10t+33}{40}\right] = t \Leftrightarrow t \leq \frac{10t+33}{40} < t + 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{30} < t \leq \frac{33}{30} \Leftrightarrow t \in \{0\,;\,1\}.$$

Suy ra $\dfrac{15x-4}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{15}$; $\dfrac{15x-4}{5} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$.

275. Lập bảng xét dấu rồi xét từng khoảng giá trị của ẩn.

a) Xét $x < 1$ ta được $x = 1$ (loại) ;

Xét $1 \leq x \leq 4$ được $0x = 0$, nghiệm tuỳ ý trong khoảng đang xét ;

Xét $x > 4$ ta được $x = 4$ (loại).

Vậy $1 \leq x \leq 4$.

b) Xét $x < -\dfrac{5}{2}$ ta được $x = 2$ (loại) ;

Xét $-\dfrac{5}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{3}$ ta được $x = -1{,}6$;

Xét $x > \dfrac{1}{3}$ ta được $x = 10$.

Vậy $S = \{-1{,}6\,;\,10\}$.

c) $|(x-6)(x+1)| = x^2 + x - 24$.

Xét $x \geq 6$ hoặc $x \leq -1$ ta được $x = 3$ (loại) ;

Xét $-1 < x < 6$ ta được $x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+3) = 0$

suy ra $x = 5$ hoặc $x = -3$ (loại). Vậy $S = \{5\}$.

276. Xét $x < 1$ ta được $x = 1$ (loại) ;

Xét $1 \leq x \leq 2$ ta được $0x = 0$, nghiệm tuỳ ý trong khoảng đang xét ;

Xét $2 < x < 3$ ta được $x = 2$ (loại) ;

Xét $x \geq 3$ ta được $x = 5$.

Gộp lại ta được $x = 5$; $1 \leq x \leq 2$.

277. (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3 = 3(2x-3) \\ 2x+3 = -3(2x-3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm của (1) là 3,75.

278. a) Vì $m > 0$ nên $-2m < m$

x		$-2m$		m	
$x - m$	$-$	|	$-$	0	$+$
$x + 2m$	$-$	0	$+$	|	$+$

Xét $x < -2m$ được $x = \dfrac{-7m}{3}$;

Xét $-2m \leq x < m$ được $x = -3m$ (loại) ;

Xét $x \geq m$ được $x = \dfrac{7m}{3}$;

Vậy $S = \{-\dfrac{7}{3}m ; \dfrac{7}{3}m\}$.

b) ĐKXĐ : $x \neq 0$.

Xét $x \geq -m$ thì (2) trở thành $m^2 - 2m(x+m) = x^2 \Leftrightarrow (x+m)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -m$ (thuộc khoảng đang xét).

Xét $x < -m$ thì (2) trở thành $m^2 + 2m(x + m) = x^2$

$\Leftrightarrow (x + m)(x - 3m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \text{ (loại)} \\ x = 3m \end{array}\right.$ $x = 3m < -m$ trong trường hợp $m < 0$.

Kết luận :

– Nếu $m = 0$ thì (2) vô nghiệm vì $x = -m$ và $x = 3m$ không thoả mãn ĐKXĐ là $x \neq 0$.

– Nếu $m > 0$ thì (2) có nghiệm $x = -m$.

– Nếu $m < 0$ thì (2) có nghiệm $x = -m$; $x = 3m$.

279. a) Xét $x < -3$ ta được $x > -4$. Vậy $-4 < x < -3$.

Xét $-3 \leq x \leq 1$ ta được $0x < 2$, nghiệm tuỳ ý trong khoảng đang xét.

Xét $x > 1$ ta được $x < 2$. Vậy $1 < x < 2$.

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình là $-4 < x < 2$.

b) Xét $x < -5$ ta được $0x < 16$, nghiệm tuỳ ý trong khoảng đang xét.

Xét $-5 \leq x \leq 7$ ta được $x < 3$. Vậy $-5 \leq x < 3$.

Xét $x > 7$ ta được $0x < -8$, vô nghiệm.

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình là $x < 3$.

c) Xét $x < -2$ ta được $0x < 13$, nghiệm tuỳ ý trong khoảng đang xét.

Xét $-2 \leq x \leq 1$ ta được $x < 4,5$, nghiệm tuỳ ý trong khoảng đang xét.

Xét $x > 1$ ta được $x > -\frac{3}{4}$, nghiệm tuỳ ý trong khoảng đang xét.

Kết luận : Bất phương trình có nghiệm tuỳ ý.

280. Xét $x < 5$ thì vế trái $T = 12 - 2x > 2$;

Xét $5 \leq x \leq 7$ ta được $T = 2$;

Xét $x > 7$ ta được $T = 2x - 12 > 2$.

Vậy với mọi x, $T \geq 2$. Để $T < m$ thì $m > 2$.

281. $x > 10$ hoặc $x < -11$.

282. a) $x(x-3)(x-1)^2 < 0$ có nghiệm $0 < x < 3$ trừ $x = 1$. Nghiệm nguyên là $x = 2$.

b) $(x-2)(x+2)(x^2+1)^2 < 0$ có nghiệm $-2 < x < 2$. Nghiệm nguyên là $x \in \{-1 ; 0 ; 1\}$.

283. a) (1) $\Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x^2+1)(x-2)(x+2)} < 0$ có nghiệm $-3 < x < -2$; $2 < x < 3$.

b) (2) $\Leftrightarrow \dfrac{-15x+11}{(x+3)(x-1)} > 0$ có nghiệm $x < -3$; $\dfrac{11}{15} < x < 1$.

284. $M = \dfrac{|x+3| + (x+3)(x+2)}{(x+1)(x+3)^2}$ ĐKXĐ : $x \neq -1$; $x \neq -3$

a) – Nếu $x < -3$ thì $M = \dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+3)^2} = \dfrac{1}{x+3}$.

– Nếu $x > -3$ thì $M = \dfrac{(x+3)^2}{(x+1)(x+3)^2} = \dfrac{1}{x+1}$.

b) Với $x = -2 > -3$ thì $M = \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{-2+1} = -1$.

c) Xét $x < -3$ thì $M = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+3} = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x = -8$ (thuộc khoảng đang xét).

Xét $x > -3$ thì $M = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x = -6$ (không thuộc khoảng đang xét).

Vậy $M = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x = -8$.

285. $P = |x^2 - x + 1| + |2 + x - x^2| \geq |x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2| = 3$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(2 + x - x^2) \geq 0$.

Vì $x^2 - x + 1 > 0$ nên dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$. Vậy min $P = 3$ khi và chỉ khi $-1 \leq x \leq 2$.

286. Cộng từng vế (1) và (2) được $2a > 2c$ hay $a > c$.

Đổi dấu hai vế của (2) rồi cộng từng vế với (1) được $d - b < b - d$ hay $b > d$.

Từ (3) ta có $c > b$ vì $d \geq 0$.

Từ đó suy ra $a > c > b > d$.

287. Không giảm tính tổng quát, ta giả sử $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_{21}$

Ta có $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{10} > a_{11} + a_{12} + a_{13} + ... + a_{20} + a_{21}$. (1)

Mặt khác $a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_{10} \leq a_{11} + a_{12} + a_{13} + ... + a_{20}$. (2)

Trừ từng vế hai bất đẳng thức ngược chiều được $0 > a_{21}$.

Do a_{21} là số lớn nhất nên suy ra cả 21 số đều âm.

288. Vì có 6 người chạy thi nên tổng số điểm của hai đội là

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Số điểm *ít nhất* của đội thắng là $1 + 2 + 3 = 6$.

Gọi x là số điểm của đội thắng thì số điểm của đội thua là $21 - x$.

Ta có $x \geq 6$ và $x < 21 - x$ hay $2x < 21$; $x \leq 10$.

Suy ra $6 \leq x \leq 10$, do đó $x \in \{6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

Vậy đội thắng có thể được tổng cộng 5 loại điểm khác nhau.

289. Vì a, b, c > 0 nên $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2 \Rightarrow a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 2a$.

Tương tự $b\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2b$; $c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2c$.

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức trên ta được $2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geq 2(a + b + c)$

$\Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq (a + b + c)$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$).

290. Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$.

Gọi vế trái là T. Xét hiệu $T - 4 = 3t - (t^2 - 2) - 4 = -t^2 + 3t - 2 = -(t - 1)(t - 2)$.

• Xét trường hợp $xy > 0$ thì $t \geq 2 \Rightarrow T - 4 \leq 0 \Rightarrow T \leq 4$;

• Xét trường hợp $xy < 0$ thì $t \leq -2 \Rightarrow T - 4 \leq 0 \Rightarrow T \leq 4$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ hoặc $x = -y$).

291. Giả sử $a(2 - b) > 1$; $b(2 - c) > 1$; $c(2 - a) > 1$.

Suy ra $abc(2 - b)(2 - c)(2-a) > 1$ (1)

Vì $0 < a < 2$ nên $2 - a > 0$.

Ta có $a + (2 - a) = 2$ (không đổi) $\Rightarrow a(2 - a)$ lớn nhất $\Leftrightarrow a = 2 - a \Leftrightarrow a = 1$.

Tương tự $b(2 - b)$ lớn nhất $\Leftrightarrow b = 1$; $c(2 - c)$ lớn nhất $\Leftrightarrow c = 1$.

Vậy $a(2 - a) . b(2 - b) . c(2 - c) \leq 1 . 1 . 1 = 1$

hay $abc(2 - a)(2 - b)(2 - c) \leq 1$ (2) (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$)

(1) và (2) mâu thuẫn nhau, do đó 3 số $a(2 - b)$; $b(2 - c)$; $c(2 - a)$ không thể đồng thời lớn hơn 1.

292. Đặt $1 + xy = a$; $1 + yz = b$; $1 + zx = c$ thì $a + b + c = 3 + xy + yz + zx$.

Áp dụng bất đẳng thức $(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (xem *bài 238*)

ta được $(3 + xy + yz + zx). P \geq 9$

$$\Rightarrow P \geq \frac{9}{3+xy+yz+zx} \geq \frac{9}{3+x^2+y^2+z^2} \geq \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Khi $x = y = z = 1$ thì $P = \frac{3}{2} \Rightarrow \min P = \frac{3}{2}$.

293. a) $P = \frac{x^2}{x^4+x^2+1}$. Dễ thấy khi $x = 0$ thì $P = 0$ giá trị này không phải là giá trị lớn nhất. P đạt giá trị lớn nhất với $x \neq 0$.

$P = \frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1}$ đạt GTLN $\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

(khi và chỉ khi $x = \pm 1$). Vậy $\max P = \frac{1}{3}$ (khi và chỉ khi $x = \pm 1$).

b) Áp dụng bất đẳng thức $4ab \le (a + b)^2$, ta có :

$$4 \,.\, 4x \,.\, 5y \le (4x + 5y)^2 = 40^2.$$

Suy ra $xy \le 20$, do đó max Q = 20 (khi và chỉ khi $4x = 5y$ hay khi và chỉ khi $x = 5$ và $y = 4$).

Lúc đó max Q = 20.

294. $|x - 9| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 9 < 1 \Leftrightarrow 8 < x < 10$

$|x^2 - 81| = |x - 9| \,.\, |x + 9| < 1 \,.\, 19 = 19$. Vậy GTNN của m là 19.

295. • Xét trường hợp $x + y \le 8$ thì $8 - x - y \ge 0$ và $P \ge 0$.

$$P = 4 \cdot x \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot (8 - x - y) \le 4\left(\frac{x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + 8 - x - y}{4}\right)^4 = 4 \,.\, 2^4 = 64$$

$\Rightarrow$ max P = 64 khi và chỉ khi $x = \frac{y}{2} = 8 - x - y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$

• Xét trường hợp $x + y > 8$ thì $8 - x - y < 0$ và $P \le 0$.

$$-P = xy^2(x + y - 8) = 4 \cdot x \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2}\,(x + y - 8) \le 4 \,.\, \left(\frac{x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + x + y - 8}{4}\right)^4$$

$$= 4.\left(\frac{x + y - 4}{2}\right)^4 \le 4 \,.\, \left(\frac{4}{2}\right)^4 = 64.$$

Suy ra $P \ge -64 \Rightarrow$ min P = –64 khi và chỉ khi $x = \frac{y}{2} = x + y - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8. \end{cases}$

296. Ta có $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$) (*Bài 242c*)

Từ (1) $\Rightarrow a + b + c = 5 - x \Rightarrow (a + b + c)^2 = (5 - x)^2$.

Từ (2) $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 13 - x^2$.

Vậy $3(13 - x^2) \ge (5 - x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 \le 0 \Leftrightarrow (2x - 7)(x + 1) \le 0$

$$\Leftrightarrow -1 \le x \le \frac{7}{2}.$$

Do đó x đạt GTNN là -1 khi và chỉ khi $a = b = c = 2$; x đạt GTLN là $\frac{7}{2}$ khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

297. a) Áp dụng bất đẳng thức $|a + b| \le |a| + |b|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \ge 0$, ta được :

$|(2x - 3) + (1 - 3x)| \le |2x - 3| + |1 - 3x|$;

$|-2 - x| \le |2x - 3| + |1 - 3x|$;

$|x + 2| \le |2x - 3| + |1 - 3x|$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2x - 3)(1 - 3x) \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \le \frac{3}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $\frac{1}{3} \le x \le \frac{3}{2}$.

b) Ta phải có $-10m^2x \ge 0 \Rightarrow x \le 0 \Rightarrow 5x - 10 \le 0$, (1) trở thành

$|5x + 5x - 10| = -10m^2x \Rightarrow 10|x - 1| = -10m^2x$. (2)

Vì $x - 1 < 0$ nên (2) trở thành $1 - x = -m^2x \Rightarrow (1 - m^2)x = 1$.

- Nếu $m = \pm 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m \ne \pm 1$ thì $x = \frac{1}{1 - m^2}$ với điều kiện $x < 0$.

Xét điều kiện $x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - m^2} \le 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 \le 0 \Leftrightarrow m > 1$ hoặc $m < -1$.

298. Dễ thấy $x = 99$; $x = 100$ là nghiệm của phương trình.

Ta sẽ chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác.

Thật vậy nếu $x < 99$ thì $|x - 100| > 1$; $x < 99$ không phải là nghiệm ;

nếu $x > 100$ thì $|x - 99| > 1$; $x > 100$ không phải là nghiệm.

Xét khoảng $99 < x < 100$ ta được $0 < |x - 99| < 1$

$0 < |x - 100| = |100 - x| < 1$.

Ta được $|x - 99| + |x - 100| = x - 99 + 100 - x = 1$.

Dễ thấy $|x-99|^{100} < |x-99|$; $|x-100|^{101} < |x-100|$

Vậy $|x-99|^{100} + |x-100|^{101} < |x-99| + |x-100| = 1$.

Vậy $99 < x < 100$ không là nghiệm của phương trình.

Kết luận : Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 99$; $x_2 = 100$.

299. ĐKXĐ : $x \neq \pm 1$.

Phương trình đã cho đưa về dạng $(m-4)x = -(m+4)$.

Nếu $m = 4$ thì $0x = -8$, vô nghiệm.

Nếu $m \neq 4$ thì $x = \dfrac{4+m}{4-m}$ với điều kiện $\dfrac{4+m}{4-m} \neq 1$ hay $m \neq 0$; $\dfrac{4+m}{4-m} \neq -1$, đúng với mọi m.

Để $x \geq -2$ thì $\dfrac{4+m}{4-m} \geq -2 \Leftrightarrow \dfrac{12-m}{4-m} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 4 \\ m \geq 12 \end{array}\right.$

Kết luận : Để phương trình (1) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng -2 thì $m \geq 12$ hoặc $m < 4$ và $m \neq 0$.

300. Số $A = \underbrace{99...9}_{n}$ có tổng các chữ số là 9n.

$$A^2 = A^2 - 1 + 1 = (A-1)(A+1) + 1 = \left[\underbrace{99...9}_{n} - 1\right]\left[\underbrace{99...9}_{n} + 1\right] + 1$$

$$= \underbrace{99...9}_{n-1}8.1\underbrace{00...0}_{n} + 1 = \underbrace{99...9}_{n-1}8\underbrace{00...0}_{n-1}1$$

Tổng các chữ số của A^2 là $\quad 9(n-1) + 8 + 1 = 9n$.

Vậy số A và số A^2 có tổng các chữ số như nhau.

301. Đáp số ab.

302. $P = \dfrac{xyz}{x^3} + \dfrac{xyz}{y^3} + \dfrac{xyz}{z^3} = xyz\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3}\right)$.

Áp dụng kết quả *bài 24* nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{3}{xyz}$. Vậy $P = xyz.\dfrac{3}{xyz} = 3$.

303. a) $A = \dfrac{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}{x^2 - \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{x^4+1}{x^4-1} \Rightarrow x^4 = \dfrac{A+1}{A-1}$;

$$B = \left[\frac{A+1}{A-1} + \frac{A-1}{A+1}\right] : \left[\frac{A+1}{A-1} - \frac{A-1}{A+1}\right] = \frac{A^2+1}{2A}.$$

b) $B = \dfrac{5}{3}$.

304. $M = \dfrac{100^3-1}{2^3+1}.\dfrac{2^3-1}{3^3+1}.\dfrac{3^3-1}{4^3+1}...\dfrac{99^3-1}{100^3+1}$. Dễ thấy $\dfrac{a^3-1}{(a+1)^3+1} = \dfrac{a-1}{a+2}$.

Cho a lần lượt các giá trị 2, 3, 4, ... , 99 ta được

$$M = \frac{999\,999}{9}.\frac{1}{4}.\frac{2}{5}.\frac{3}{6}...\frac{98}{101} =$$

$$= \frac{999\,999.1.2.3}{9.99.100.101} = \frac{10101.2}{3.100.101} = \frac{20202}{30300} > \frac{20200}{30300} = \frac{2}{3}.$$

305. a) $\dfrac{x^2}{x-1}$;

b) $x < 1$ và $x \neq 0$; $x \neq -1$;

c) $P = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + 2$. Vì $x > 1$ nên $x - 1 > 0$

do đó $x - 1 + \dfrac{1}{x-1} \geq 2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$). Vậy $P \geq 4 \Rightarrow \min P = 4$ (khi và chỉ khi $x = 2$).

306. Với $n = 0$, bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ tức là $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k \leq \dfrac{a^k+b^k}{2}$, ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}. \qquad (1)$$

Thật vậy, xét hiệu

$$H = \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)$$

suy ra $\quad H \geq \dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \dfrac{a^{k}+b^{k}}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2}$;

$$H \geq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \frac{a^{k+1}+a^{k}b+ab^{k}+b^{k+1}}{4}$$

$$H \geq \frac{a^{k+1}-a^{k}b+b^{k+1}-ab^{k}}{4} \ ; \ H \geq \frac{(a-b)(a^{k}-b^{k})}{4}$$

$H \geq \dfrac{(a-b)^2(a^{k-1}+a^{k-2}b+\cdots+b^{k-1})}{4}$; $H \geq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

Vậy $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

Suy ra bất đẳng thức đã cho đúng với mọi $n \in \mathbf{N}$.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

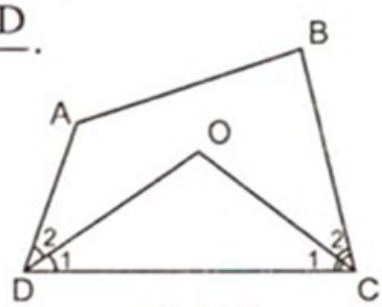
TỨ GIÁC

1. (h.79)

Xét ΔCOD có $\widehat{COD} = 180^o - (\hat{C}_1 + \hat{D}_1) = 180^o - \dfrac{\hat{C} + \hat{D}}{2}$.

Xét tứ giác ABCD có $\hat{C} + \hat{D} = 360^o - (\hat{A} + \hat{B})$

do đó $\widehat{COD} = 180^o - \dfrac{360^o - (\hat{A} + \hat{B})}{2} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$.



Hình 79

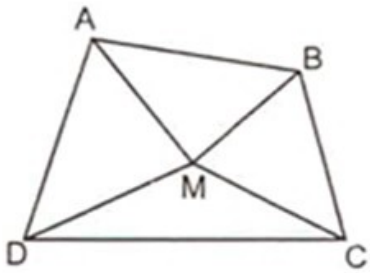
2. Giả sử tứ giác ABCD không có một góc nhọn nào, thế thì cả bốn góc của nó đều là góc tù hoặc cùng lắm là có 1 góc vuông và ba góc tù (vì theo đề bài, không có hai góc nào bằng nhau). Như vậy, tổng bốn góc lớn hơn 360°, đó là điều vô lí. Suy ra tứ giác ABCD phải có ít nhất một góc nhọn. Chứng minh tương tự, tứ giác ABCD phải có ít nhất một góc tù.

3. (h.80)

MA + MC ≥ AC (dấu "=" xảy ra ⇔ M thuộc đoạn thẳng AC)

MB + MD ≥ BD (dấu "=" xảy ra ⇔ M thuộc đoạn thẳng BD)

Suy ra MA + MB + MC + MD ≥ AC + BD.

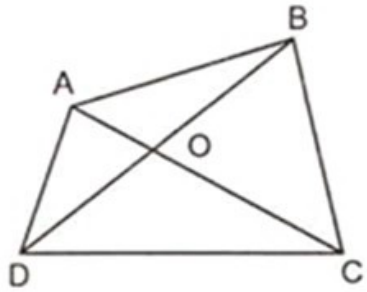


Hình 80

Vậy MA + MB + MC + MD nhỏ nhất bằng AC + BD

⇔ M là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

4. (h.81)



Hình 81

a) Gọi O là giao điểm hai đường chéo.

Dùng bất đẳng thức tam giác ta chứng minh được

AB + CD < AC + BD

AD + BC < AC + BD.

b) Ta có AD + BC < AC + BD (chứng minh trên) ; (1)

AD + AC < BD + BC (gt). (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được

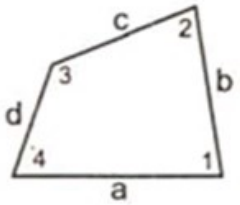
2AD + (BC + AC) < 2BD + (BC + AC).

Suy ra AD < BD.

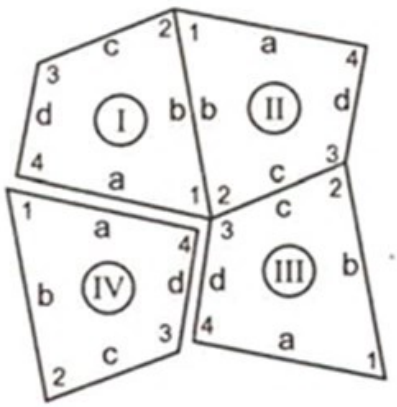
5. (h.82a, 82b)

Kí hiệu các cạnh, các góc như hình 82a.

Ghép như hình 82b.



Hình 82a



Hình 82b

6. Ta có $\widehat{C} = \widehat{D} + d^o$; $\widehat{B} = \widehat{D} + 2d^o$; $\widehat{A} = \widehat{D} + 3d^o$

do đó $\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 2\widehat{D} + 3d^o$.

Suy ra $\widehat{A} + \widehat{D} = 360^o : 2 = 180^o$

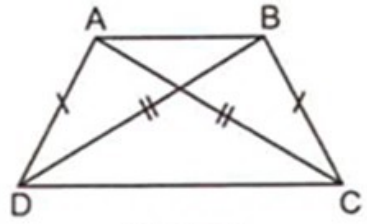
Vậy AB // CD (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau) dẫn tới ABCD là hình thang.

7. Gọi E là giao điểm của tia AM với tia DC. Bạn hãy chứng minh các góc MAD và MAB cùng bằng góc E.

8. (h.83)

$\Delta ADC = \Delta BCD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$;

$\Delta DAB = \Delta CBA$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{CBA}$.



Hình 83

Xét tứ giác ABCD có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^o$

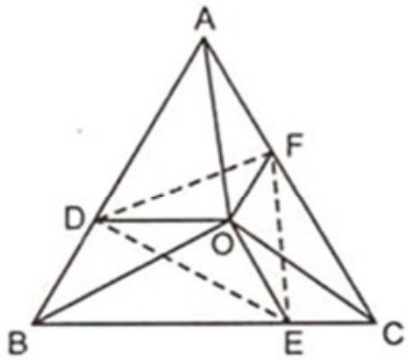
suy ra $2(\widehat{DAB} + \widehat{ADC}) = 360^o$

hay $\widehat{DAB} + \widehat{ADC} = 180^o$ suy ra AB // CD.

Vậy tứ giác ABCD là hình thang.

Hình thang này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

9. (h.84)



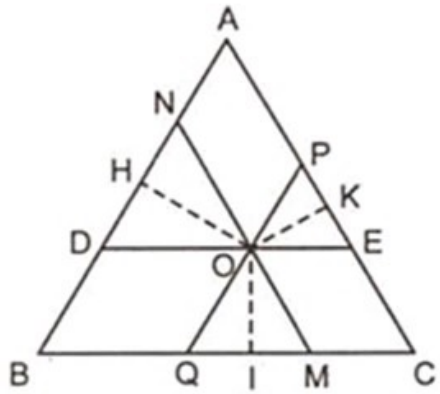
Hình 84

a) Chứng minh các tứ giác DOEB, EOFC, FODA là hình thang cân, từ đó suy ra $\widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOD}$ (= 120°).

b) Trong hình thang cân hai đường chéo bằng nhau nên OA = DF ; OB = DE ; OC = EF.

Ba đoạn thẳng OA, OB, OC lần lượt bằng ba cạnh của ΔDEF do đó ba đoạn thẳng OA, OB, OC thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

10. (h.85)



Hình 85

a) Chứng minh DECB là hình thang cân (theo định nghĩa).

ΔOMQ có hai góc bằng 60° nên là tam giác đều.

b) Chứng minh tương tự ta được PQBA, MNAC là hình thang cân ;

ΔODN ; ΔOPE là tam giác đều.

Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau ; đường cao của tam giác đều cũng là đường trung tuyến, do đó ta có :

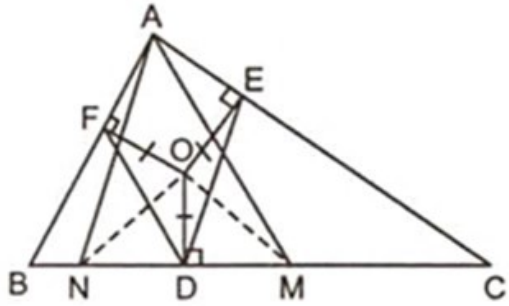
AN = CM ; HN = HD ; BQ = AP ; IQ = IM ; CE = BD ; KE = KP.

Cộng từng vế sáu đẳng thức trên ta được :

AN + HN + BQ + IQ + CE + KE = CM + HD + AP + IM + BD + KP.

Suy ra $AH + BI + CK = AK + CI + BH = \dfrac{a + a + a}{2} = 1,5a$.

11. (h.86)



Hình 86

a) Ta có OD = OE = OF (gt).

Dễ thấy AE = AF ; BD = BF ; CD = CE ;

ΔBFD và ΔBAM cân tại B.

Suy ra $\widehat{BFD} = \widehat{BAM} = \widehat{BMA} = \dfrac{180^o - \hat{B}}{2}$,

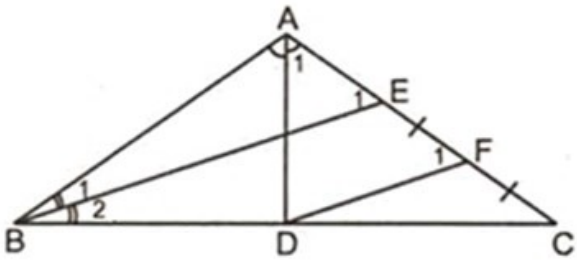
do đó FD // AM, dẫn tới FDMA là hình thang cân, suy ra MF = AD.

Chứng minh tương tự ta được DEAN là hình thang cân, suy ra NE = AD, do đó MF = NE.

b) Ta có DM = AF (1) ; DN = AE (2). Từ (1) và (2) kết hợp với AE = AF ta được DM = DN.

Mặt khác OD $\perp$ MN nên ΔOMN cân.

12. (h.87)



Hình 87

Dễ thấy $\widehat{ABC} = 36^o$; $\hat{B}_1 = 18^o$;

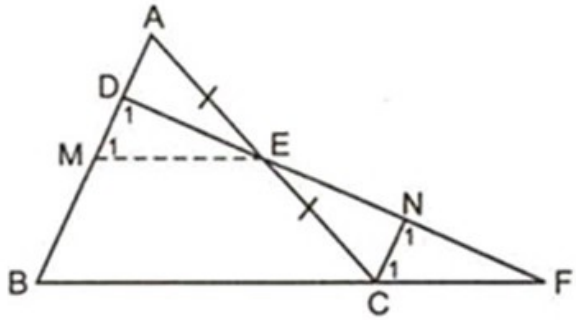
$\hat{E}_1 = 54^o$; $\hat{A}_1 = 54^o$ và DB = DC.

Gọi F là trung điểm của EC thì DF là đường trung bình của ΔCBE

$\Rightarrow$ DF // BE và DF = $\dfrac{1}{2}$BE. (1)

Từ đó chứng minh được DA = DF (2) dẫn tới AD = $\dfrac{1}{2}$BE.

13. (h.88)



Hình 88

Gọi M là trung điểm của AB thì ME là đường trung bình của ΔABC nên ME // BC và ME = $\dfrac{1}{2}$BC (1).

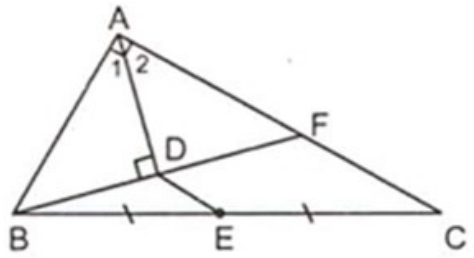
Dễ thấy AD = MD. Vẽ CN // AB (N $\in$ DF) thì :

$\Delta CEN = \Delta AED$ (g.c.g) $\Rightarrow$ CN = AD do đó CN = MD.

$\Delta NCF = \Delta DME$ (g.c.g) suy ra CF = ME. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CF = \frac{1}{2}BC$.

14. (h.89)



Hình 89

ΔDAB vuông cân tại D nên $\widehat{A_1} = 45^o$

suy ra $\widehat{A_2} = 45^o$.

Kéo dài BD cắt AC tại F.

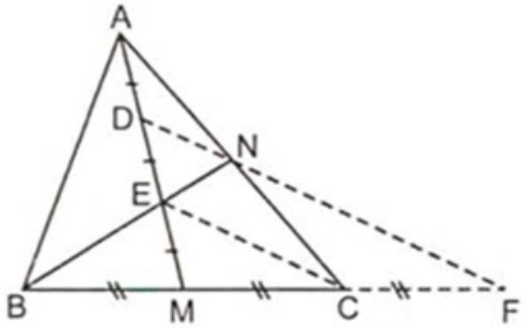
ΔABF có AD là đường phân giác đồng thời là đường cao nên ΔABF cân tại A do đó AF = AB = 8.

Có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 17^2 - 8^2 = 225$;

$AC = 15 \Rightarrow CF = 15 - 8 = 7$.

DE là đường trung bình của ΔBCF nên $DE = \frac{1}{2}CF = 3,5$.

15. (h. 90)



Hình 90

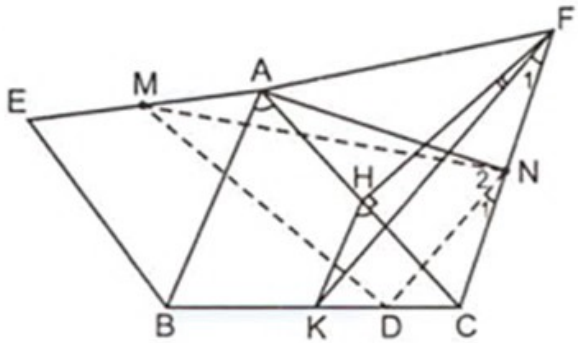
E là trọng tâm của ΔABC suy ra BE cắt AC tại trung điểm N của AC.

Xét ΔAEC có DN là đường trung bình nên DN // EC (1).

Xét ΔMDF có EC là đường trung bình nên DF // EC (2).

Từ (1) và (2) theo tiên đề Ơ-clit suy ra ba điểm D, N, F thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng AC, BE và DF đồng quy tại N.

16. (h.91)



Hình 91

Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AC và BC.

$\Delta MAN = \Delta KHF$ (c.g.c)

suy ra MN = KF và $\widehat{ANM} = \widehat{HFK}$.

Ta có DN // KF và DN = $\frac{1}{2}$KF suy ra DN = $\frac{1}{2}$MN và $\widehat{F}_1 = \widehat{N}_1$ (đồng vị).

$$\widehat{N}_2 = 90^o - (\widehat{N}_1 + \widehat{ANM}) = 90^o - (\widehat{F}_1 + \widehat{HFK}) = 90^o - 30^o = 60^o.$$

Xét ΔDMN có $\widehat{N}_2 = 60^o$ và DN = $\frac{1}{2}$MN nên ΔDMN là nửa tam giác đều.

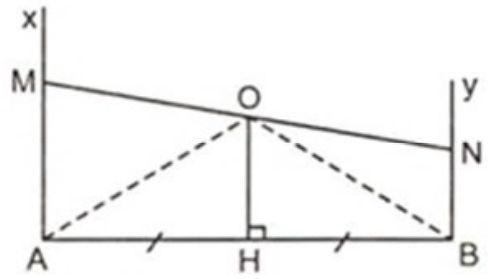
Từ đó suy ra DM ⊥ DN.

17. (h.92)

a) Gọi H là trung điểm của AB. Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt MN tại O.

Tính được OH = 1,5 (cm) suy ra O là một điểm cố định.

Vậy các đoạn thẳng MN đi qua một điểm cố định là điểm O.



Hình 92

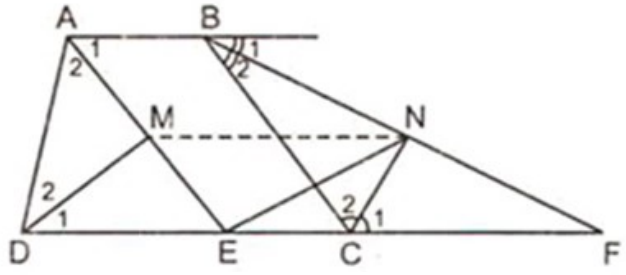
b) OA = OB = $\sqrt{AH^2 + HO^2} = \sqrt{2^2 + 1,5^2}$ = 2,5 (cm).

18. (h.93)

a) Tia AM và BN lần lượt cắt CD tại E và F.

Ta chứng minh được AM ⊥ DM ; BN ⊥ CN.

Suy ra DE = DA ; ME = MA ; CF = CB ; NF = NB. Tứ giác ABFE là hình thang, có MN là đường trung bình nên MN // AB.

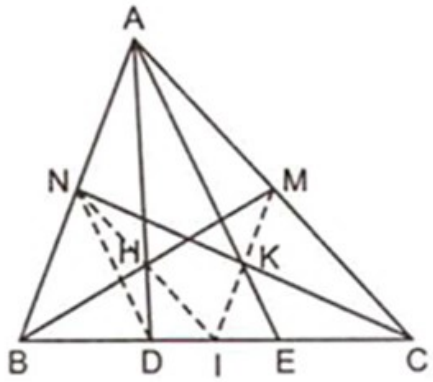


Hình 93

b) Ta có MN = $\frac{AB + EF}{2} = \frac{AB + FC + CE}{2}$

$$= \frac{AB + FC + (CD - DE)}{2} = \frac{a + b + c - d}{2}.$$

19. (h.94)



Hình 94

a) Xét ΔABE có ND là đường trung bình nên ND // AE.

Xét ΔCND có EC = ED và EK // ND nên KC = KN.

Chứng minh tương tự được HB = HM.

Xét ΔABM có NH là đường trung bình nên NH // AC.

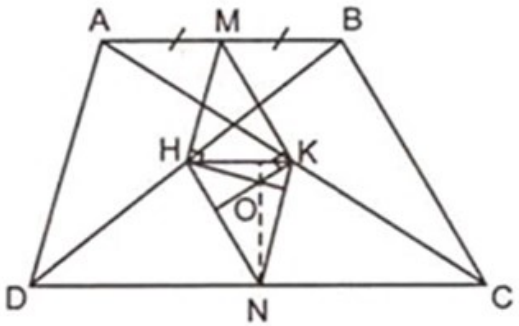
Xét ΔABC có NA = NB và NH // AC nên đường thẳng NH đi qua trung điểm I của BC.

Chứng minh tương tự ta được MK đi qua trung điểm I của BC, suy ra ba đường thẳng NH, MK và BC đồng quy tại I.

b) Ta có MN // BC (đường trung bình của ΔABC).

Vậy MNBC là hình thang. Đoạn thẳng HK nối trung điểm hai đường chéo nên $HK = \frac{BC - MN}{2} = \frac{6-3}{2} = 1,5$ (cm).

20. (h.95)



Hình 95

Ta có MA = MB, MH // AD nên HB = HD.

Tương tự ta có KA = KC.

Gọi N là trung điểm của CD, thì NK // AD ;

NH // BC (tính chất đường trung bình của tam giác) suy ra NK // MH ; NH // MK ; do đó HO ⊥ NK ; KO ⊥ NH.

ΔNHK có O là trực tâm nên NO ⊥ HK.

HK là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của hình thang nên HK // CD suy ra NO ⊥ CD do đó NO là đường trung trực của CD. Vậy OC = OD.

21. (h.96)

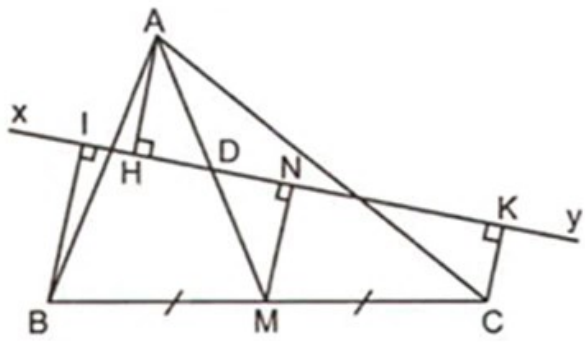
Vẽ MN ⊥ xy thì MN // BI // CK. Do MB = MC nên NI = NK, vậy MN là đường trung bình của hình thang BCKI

suy ra $MN = \dfrac{BI + CK}{2}$.

$AH = \dfrac{BI + CK}{2} \Leftrightarrow MN = AH$

$\Leftrightarrow \Delta DMN = \Delta DAH \Leftrightarrow DM = DA$

$\Leftrightarrow$ D là trung điểm của AM.



Hình 96

22. (h.97)

Phân tích : Vẽ AE // BC (E ∈ CD) thì AE = BC = 2,5cm ; AB = EC = 2cm ; DE = 6 – 2 = 4cm.

– ΔADE dựng được ngay (c.g.c).

– Điểm C thoả mãn hai điều kiện : C nằm trên tia DE và DC = 6cm.

– Điểm B thoả mãn hai điều kiện : B nằm trên Ax // DC và nằm trên Cy // AE.

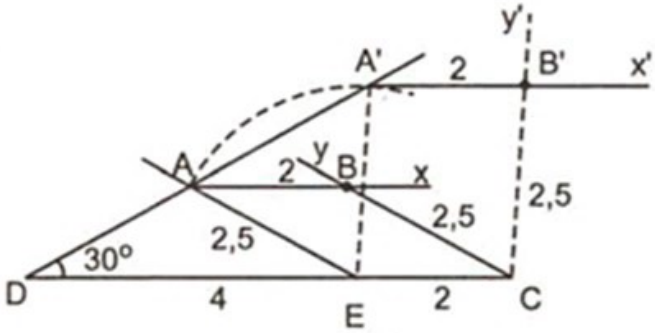
Cách dựng :

– Dựng ΔADE sao cho có $\widehat{D} = 30^o$;

DE = 4cm ; EA = 2,5cm.

– Trên tia DE đặt DC = 6cm.

– Dựng Ax // DC và Cy // AE chúng cắt nhau tại B.



Hình 97

Tứ giác ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh : (bạn đọc tự chứng minh).

Biện luận : Bài toán có hai nghiệm hình là hình thang ABCD và hình thang A'B'CD.

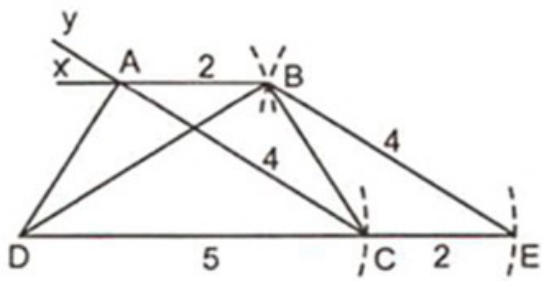
23. (h.98)

Phân tích : Vẽ BE // AC (E ∈ DC).

Cách dựng :

– Dựng ΔBDE sao cho DE = 7cm ; DB = EB = 4cm.

– Trên tia DE đặt DC = 5cm.



Hình 98

– Dựng Bx // DE và Cy // BE, chúng cắt nhau tại A.

Chứng minh : (bạn đọc tự chứng minh).

Biện luận : Bài toán chỉ có một nghiệm hình.

24. (h.99)

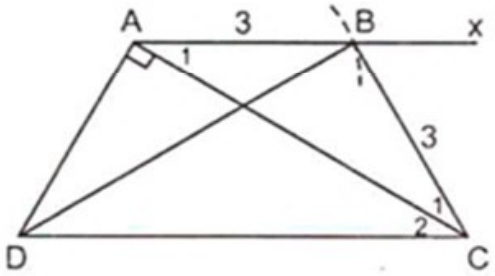
Phân tích : ΔBAC cân suy ra $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{D} = 30^o$

do đó $AD = \frac{1}{2}CD$; AD = 3cm ; CD = 6cm.

Cách dựng :

– Dựng ΔACD sao cho $\widehat{A} = 90^o$; AD = 3cm ; CD = 6cm.

– Dựng tia Ax // DC (tia Ax và DC cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AD).



Hình 99

– Dựng đường tròn (D ; AC) cắt Ax tại B.

– Nối BC ta được hình thang cân ABCD phải dựng.

Chứng minh : (bạn đọc tự chứng minh).

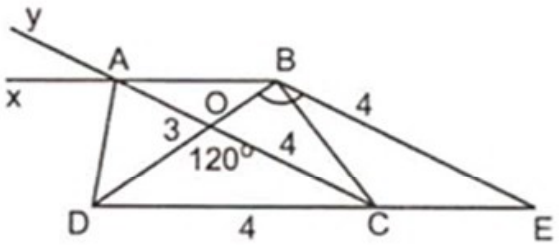
Biện luận : Bài toán có một nghiệm hình.

25. (h.100)

Phân tích : Vẽ BE // AC (E ∈ DC).

Cách dựng :

– Dựng ΔBDE sao cho $\widehat{B} = 120^o$; BD = 3cm ; BE = 4cm.



Hình 100

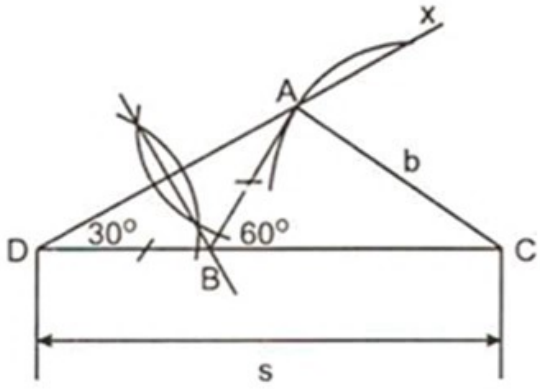
– Trên tia DE đặt DC = 4cm.

– Dựng Bx // DE, Cy // BE chúng cắt nhau tại A.

– Nối AD, BC ta được hình thang phải dựng.

Biện luận : Bài toán có một nghiệm hình.

26. (h.101)



Hình 101

Phân tích : Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn đề bài. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = BA.

Ta có CD = BC + BD = BC + BA = s.

ΔABD cân tại B nên $\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 30^o$.

ΔADC dựng được.

Điểm B thoả mãn hai điều kiện : B nằm trên CD và B nằm trên đường trung trực của AD.

Cách dựng :

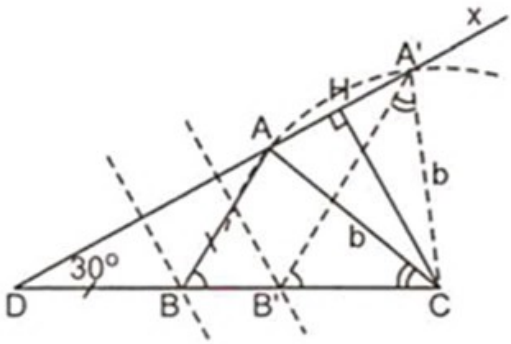
– Dựng ΔADC sao cho $\widehat{D} = 30^o$; DC = s ; CA = b.

– Dựng đường trung trực của AD cắt DC tại B.

– Nối AB ta được ΔABC phải dựng.

Chứng minh : Bạn đọc tự chứng minh.

Biện luận : (h.102)



Hình 102

Vẽ $CH \perp Dx$ thì $CH = \frac{1}{2}CD = \frac{s}{2}$.

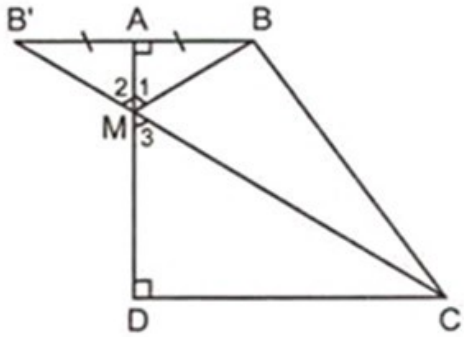
– Nếu $b < \frac{s}{2}$ thì đường tròn (C ; b) không cắt tia Dx nên bài toán không có nghiệm hình.

– Nếu $b = \frac{s}{2}$ thì đường tròn (C ; b) và tia Dx chỉ có một điểm chung (A trùng với H) nên bài toán có một nghiệm hình là ΔABC vuông tại A.

– Nếu $\frac{s}{2} < b < s$ thì đường tròn (C ; b) cắt tia Dx tại hai điểm A và A'. Ta dựng được ΔABC và $\Delta A'B'C$ cùng thoả mãn đề bài. Nhưng $\Delta ABC = \Delta CB'A'$ (g.c.g) do đó bài toán chỉ có một nghiệm hình.

– Nếu $b \geq s$ thì bài toán không có nghiệm hình (vì không thoả mãn bất đẳng thức tam giác).

27. (h.103)



Hình 103

Vẽ B' đối xứng với B qua A, ta được MB = MB' và $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. (1)

Chu vi ΔMBC nhỏ nhất (gt)

⇒ MB + MC + BC nhỏ nhất

⇒ MB + MC nhỏ nhất (vì BC không đổi)

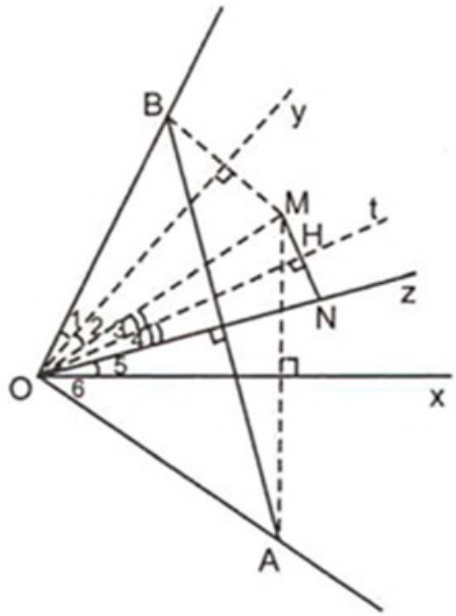
⇒ MB' + MC nhỏ nhất

⇒ MB' + MC = B'C ⇒ M nằm giữa B' và C

⇒ B', M, C thẳng hàng ⇒ $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$ (đpcm).

28. (h.104)



Hình 104

a) OA = OB (= OM) do đó đường trung trực của AB đi qua điểm cố định là điểm O.

b) Gọi đường trung trực của AB là đường thẳng Oz.

Ta có $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = \widehat{O}_5 + \widehat{O}_6$.

Mặt khác $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$; $\widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 + \widehat{O}_5 = \widehat{O}_6$

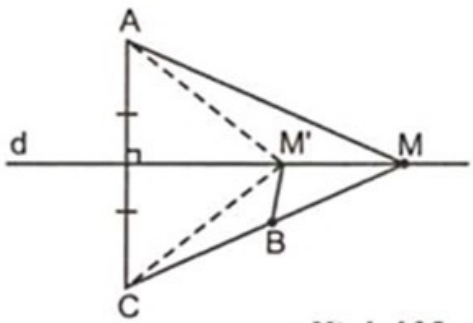
nên $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = \widehat{O}_5 + (\widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 + \widehat{O}_5)$

suy ra $2\widehat{O}_2 = 2\widehat{O}_5 \Rightarrow \widehat{O}_2 = \widehat{O}_5$.

Ta có $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 + \widehat{O}_5$ (vì tia Ot là tia phân giác của góc xOy)

nên $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ dẫn tới HM = HN, suy ra M và N đối xứng qua Ot.

29. (h.105)



Hình 105

– Dựng C đối xứng với A qua d.

– Đường thẳng BC cắt d tại M. Đó là điểm cần dựng.

Ta có |MA – MB| = |MC – MB| = BC.

Gọi M' là điểm bất kì khác M (M' ∈ d) ta có |M'A – M'B| = |M'C – M'B| < BC.

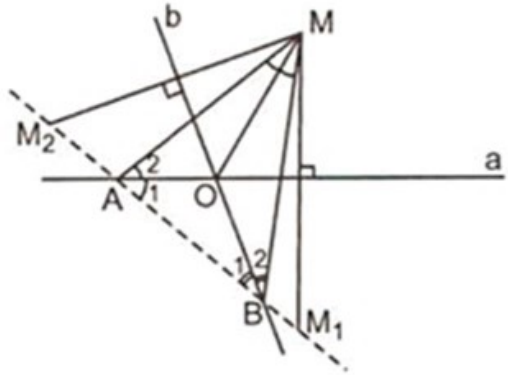
Nếu BC // d thì bài toán không có lời giải.

30. (h.106)

Dựng M_1 đối xứng với M qua a ; M_2 đối xứng với M qua b.

Nếu đường thẳng M_1M_2 cắt a tại A và cắt b tại B thì ΔMAB là tam giác phải dựng.

Chứng minh : Dùng tính chất giao điểm các đường phân giác của tam giác.

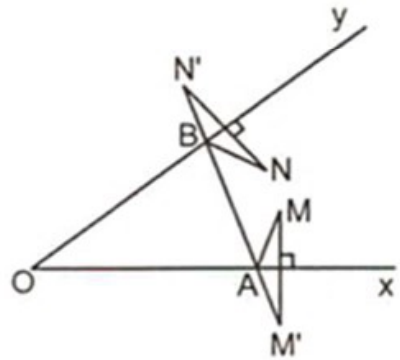


Hình 106

31. (h.107)

– Dựng M' đối xứng với M qua Ox ; N' đối xứng với N qua Oy.

– Đoạn thẳng M'N' cắt Ox tại A, cắt Oy tại B, ta được MA + AB + BN nhỏ nhất (bạn đọc tự chứng minh).

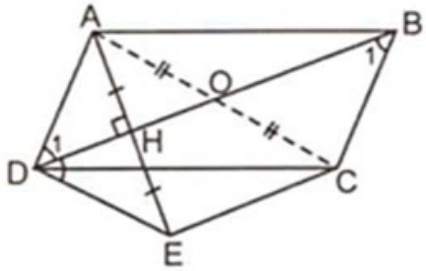


Hình 107

32. (h.108)

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Xét ΔACE có OH là đường trung bình nên OH // CE. Vậy BCED là hình thang.

Hình thang này có $\widehat{BDE} = \widehat{B}_1$ $(= \widehat{D}_1)$ nên là hình thang cân.



Hình 108

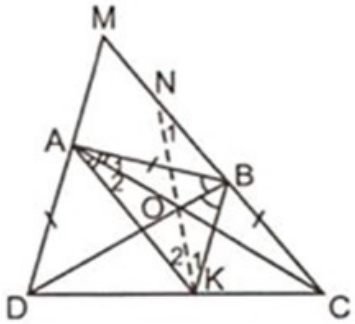
33. (h.109)

Xét ΔABC cân tại B có $\widehat{A}_1 = \widehat{BCA} = \widehat{A}_2$, do đó tia AO là tia phân giác của góc BAK.

Chứng minh tương tự ta có tia BO là tia phân giác của góc ABK suy ra tia KO là tia phân giác của góc AKB, do đó $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$.

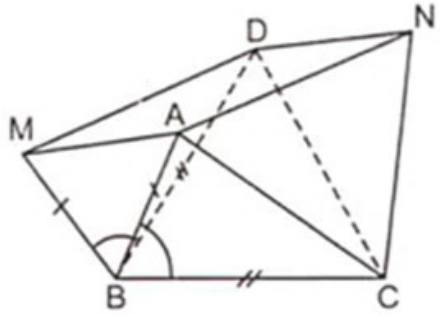
Mặt khác $\widehat{N}_1 = \widehat{K}_2$ nên $\widehat{K}_1 = \widehat{N}_1$

⇒ ΔBKN cân ⇒ BN = BK = AM.



Hình 109

34. (h.110)



Hình 110

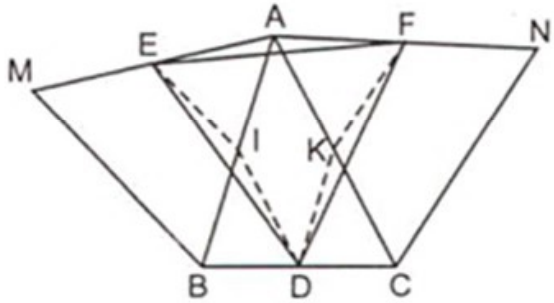
• Xét trường hợp $\widehat{A} > 60^o$

Chứng minh $\Delta MBD = \Delta ABC$ (c.g.c) suy ra $MD = AC = AN$.

Chứng minh tương tự ta được $ND = AM$, suy ra AMDN là hình bình hành.

• Xét trường hợp $\widehat{A} < 60^o$: chứng minh tương tự.

35. (h.111)



Hình 111

• Xét trường hợp $\widehat{A} < 60^o$

Gọi I và K thứ tự là trung điểm của AB và AC.

Ta chứng minh được AKDI là hình bình hành.

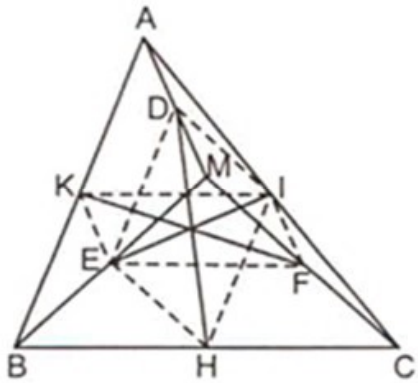
$\Delta AEF = \Delta IED = \Delta KDF$ (c.g.c)

$\Rightarrow EF = ED = DF \Rightarrow \Delta DEF$ đều.

• Xét trường hợp $\widehat{A} > 60^o$: chứng minh tương tự.

• Xét trường hợp $\widehat{A} = 60^o$ có $EF = DE = DF = \frac{1}{2}(AB + AC)$ nên ΔDEF đều.

36. (h.112)



Hình 112

Chứng minh DIHE, KIFE là hình bình hành.

Hai hình bình hành này có chung đường chéo EI nên các đường chéo của chúng đồng quy.

37. (h.113)

Phân tích :

Giả sử đã dựng được tứ giác ABCD thoả mãn đầu bài.

Dựng hình bình hành ABMD. Tia BM cắt CD tại N.

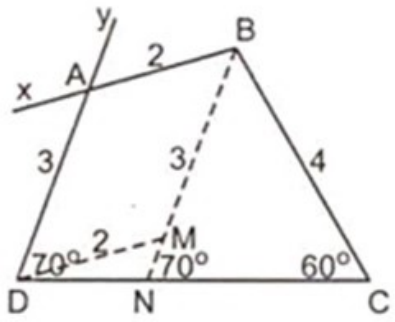
Ta được $\widehat{BNC} = \widehat{D} = 70^o$ (đồng vị) từ đó tính được $\widehat{CBN} = 50^o$.

– ΔBCN dựng được ngay (g.c.g).

– Điểm M thoả mãn hai điều kiện : M nằm trên tia BN và BM = 3cm.

– Điểm D thoả mãn hai điều kiện : D nằm trên tia CN và D cách M là 2cm.

– Điểm A thoả mãn hai điều kiện : A nằm trên tia Bx // MD và A nằm trên tia Dy // BM.

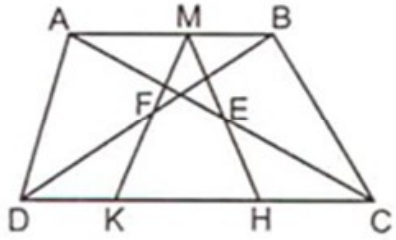


Hình 113

Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.

38. (h.114)

a) C đối xứng với A qua E ; H đối xứng với M qua E do đó hai đoạn thẳng CH và AM đối xứng với nhau qua E suy ra CH = AM và CH // AM hay CH // AB. (1)



Hình 114

Chứng minh tương tự được DK = BM và DK // MB hay DK // AB. (2)

Mặt khác CD // AB (3) nên từ (1), (2), (3) theo tiên đề Ơ-clit ta suy ra H, K, C, D thẳng hàng.

b) HK = CD – (CH + DK) = CD – (AM + BM) = CD – AB (không đổi).

39. (h.115)

a) AK và BM đối xứng nhau qua F nên

AK = BM và AK // BM. (1)

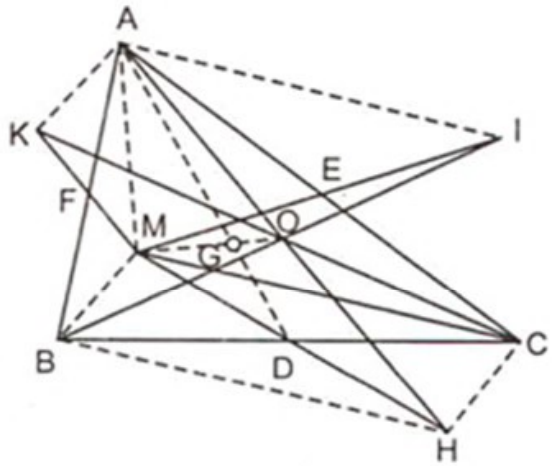
BM và CH đối xứng nhau qua D

nên BM = CH và BM // CH. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AK = CH và AK // CH

$\Rightarrow$ AKHC là hình bình hành.

Chứng minh tương tự, ta được ABHI là hình bình hành.



Hình 115

Hai hình bình hành AKHC và ABHI có chung đường chéo AH nên AH, BI, CK đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường.

b) Xét ΔAMH có AD và MO là hai đường trung tuyến. Gọi G là giao điểm của chúng suy ra GA = $\frac{2}{3}$AD. Xét ΔABC có AD là đường trung tuyến mà GA = $\frac{2}{3}$AD nên G là trọng tâm của ΔABC. Vậy đường thẳng OM luôn đi qua một điểm cố định là trọng tâm G của ΔABC.

40. (h.116)

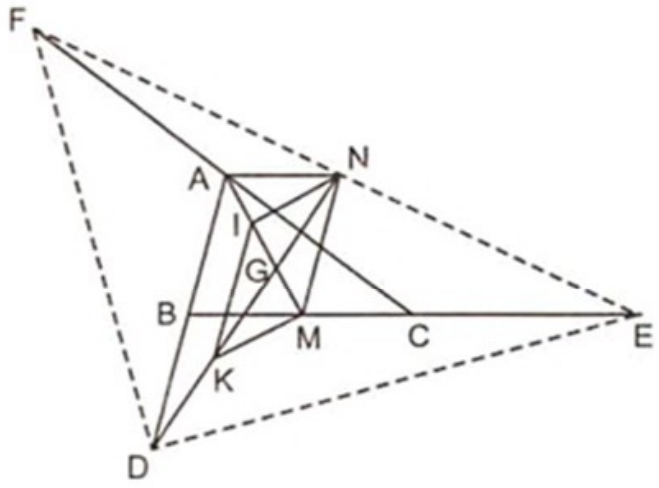
a) Xét ΔFCE có AN là đường trung bình nên AN // CE và AN = $\frac{1}{2}$CE

suy ra AN // BM và AN = BM

⇒ ANMB là hình bình hành

⇒ MN // AB và MN = $\frac{1}{2}$AD.

Mặt khác, IK // AB và IK = $\frac{1}{2}$AD



Hình 116

nên MN // IK và MN = IK ⇒ MNIK là hình bình hành.

b) Ta có GM = GI = IA ⇒ G là trọng tâm của ΔABC.

Ta có GN = GK = KD ⇒ G là trọng tâm của ΔDEF.

Vậy ΔABC và ΔDEF có trọng tâm trùng nhau.

41. (h.117)

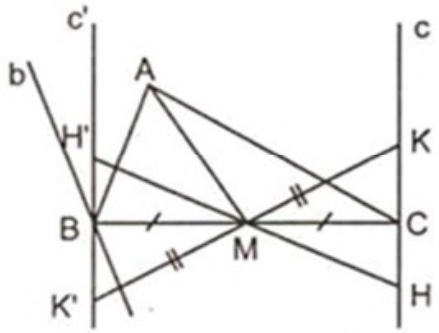
Cách dựng :

– Dựng đường thẳng c' đối xứng với đường thẳng c qua M ; c' cắt b tại B.

– Tia BM cắt c tại C.

– Nối AB, AC ta được ΔABC phải dựng.

Bạn đọc giải nốt những bước còn lại.



Hình 117

42. (h.118)

Cách dựng :

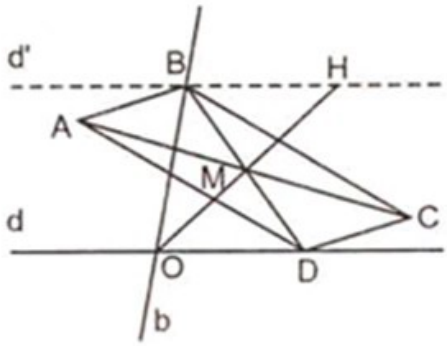
– Dựng trung điểm M của AC.

– Dựng đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua M ; d' và b cắt nhau tại B.

– Tia BM cắt d tại D.

– Nối AB, BC, CD, DA ta được ABCD là hình bình hành phải dựng.

Bạn đọc giải nốt những bước còn lại.



Hình 118

43. (h.119)

Qua M vẽ một đường thẳng song song với BC, cắt AB, CD lần lượt tại H và K.

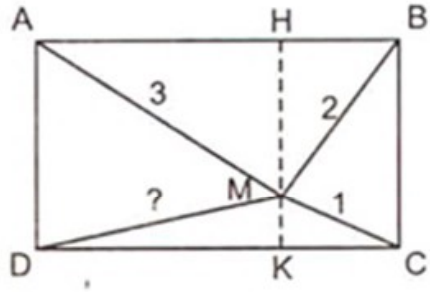
Các tứ giác AHKD, BHKC là những hình chữ nhật. Suy ra AH = DK ; BH = CK. (1)

Áp dụng định lí Py–ta–go ta được :

$MA^2 - MB^2 = (AH^2 + MH^2) - (BH^2 + MH^2)$

$= AH^2 - BH^2.$ (2)

Tương tự $MD^2 - MC^2 = DK^2 - CK^2$. (3)



Hình 119

Từ (1), (2), (3) suy ra $MA^2 - MB^2 = MD^2 - MC^2$; $9 - 4 = MD^2 - 1$;

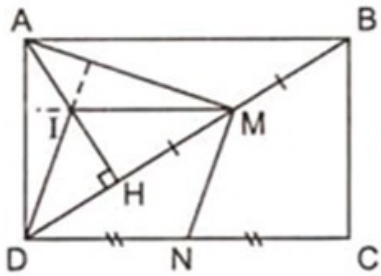
$$MD^2 = 6 \text{ ; } MD = \sqrt{6}.$$

44. (h.120)

Gọi I là trung điểm của AH, chứng minh được IMND là hình bình hành ⇒ DI // MN.

Dễ thấy IM ⊥ AD ; I là trực tâm của ΔADM

⇒ DI ⊥ AM ⇒ MN ⊥ AM.



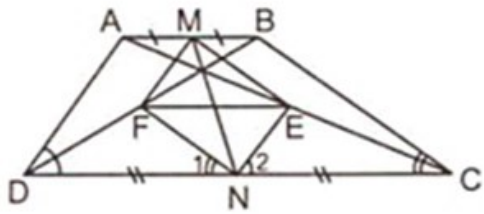
Hình 120

Vậy $MA^2 + MN^2 = AN^2 = AD^2 + DN^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

45. (h.121)

ABCD là hình thang có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^o$ và M, N lần lượt là trung điểm của hai đáy AB, CD.

Ta phải chứng minh $MN = \dfrac{CD - AB}{2}$.



Hình 121

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC, BD.

Dùng tính chất đường trung bình của tam giác ta chứng minh được tứ giác MENF là hình bình hành.

Ta có $\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = \widehat{C} + \widehat{D} = 90^o \Rightarrow \widehat{ENF} = 90^o$.

Vậy MENF là hình chữ nhật $\Rightarrow MN = EF = \dfrac{CD - AB}{2}$ (tính chất đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo của hình thang).

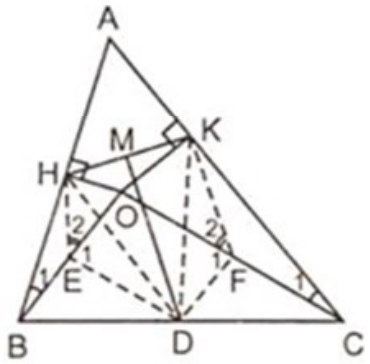
46. (h.122)

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của OB, OC.

Tứ giác OFDE là hình bình hành suy ra

$$DE = OF\ ;\ OE = DF \text{ và } \widehat{E}_1 = \widehat{F}_1.$$

Ta có HE = EB = OE ; KF = FC = FO (tính chất đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông) suy ra $\widehat{E}_2 = 2\widehat{B}_1$; $\widehat{F}_2 = 2\widehat{C}_1$ mà $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ nên $\widehat{E}_2 = \widehat{F}_2$



Hình 122

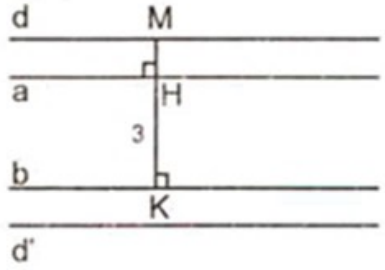
do đó $\widehat{HED} = \widehat{DEK}$; $\Delta HED = \Delta DFK$ (c.g.c)

$\Rightarrow DH = DK \Rightarrow \Delta DHK$ cân $\Rightarrow$ trung tuyến DM cũng là đường cao $\Rightarrow DM \perp HK$.

47. (h.123)

a) M thuộc phần mặt phẳng nằm giữa hai đường thẳng song song a và b, kể cả a và b.

b) Điểm M di động trên hai đường thẳng d và d' song song với a và b cách a hoặc cách b là 1 cm, (d và d' nằm ngoài phần mặt phẳng giới hạn bởi a và b).



Hình 123

48. (h.124)

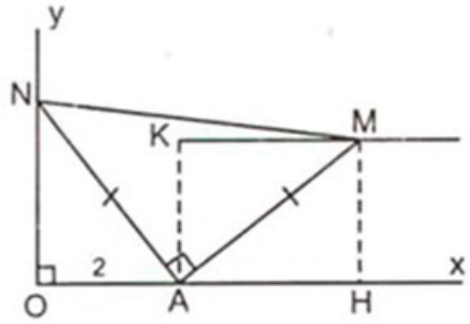
Vẽ $MH \perp Ox$.

$\Delta MHA = \Delta AON \Rightarrow MH = AO = 2cm$.

Vậy M di động trên đường thẳng d // Ox và cách Ox là 2cm.

Giới hạn : Khi N trùng với O thì M trùng với K (K là đỉnh của ΔAOK vuông cân tại A ; K nằm trong góc vuông).

Vậy điểm M chỉ di động trên một tia gốc K song song với Ox (tia này không cắt Oy).

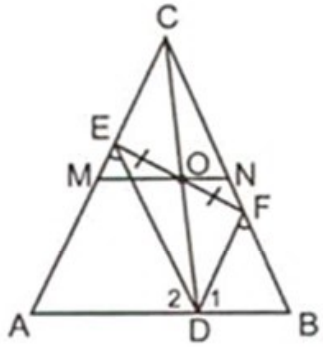


Hình 124

49. (h.125)

Gọi C là giao điểm của AE và BF.

Chứng minh tứ giác CFDE là hình bình hành suy ra trung điểm O của EF cũng là trung điểm của CD (điểm C cố định). Vậy điểm O di động trên đường trung bình MN của ΔCAB.

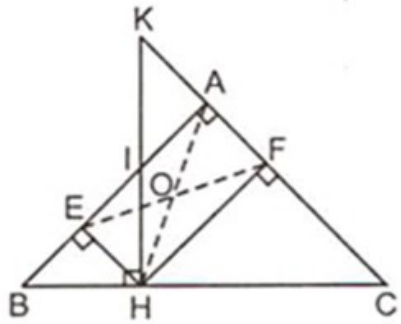


Hình 125

50. (h.126)

ΔABC vuông cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^o$.

Các tam giác HIB, HKC vuông cân ⇒ HE ⊥ AB ; HF ⊥ AC. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật suy ra trung điểm O của EF cũng là trung điểm của AH. Vậy O di động trên đường trung bình MN của ΔABC.



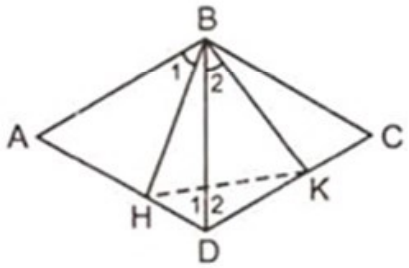
Hình 126

51. (h.127)

a) $\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{A} = 60^o$; ΔABD đều ;

$\widehat{D_1} = \widehat{D_2} = 60^o$; $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (vì cùng cộng với góc HBD cho góc 60°).

ΔABH = ΔDBK (g.c.g) ⇒ AH = DK. Ta có DH + DK = DH + AH = AD = 2cm (không đổi).



Hình 127

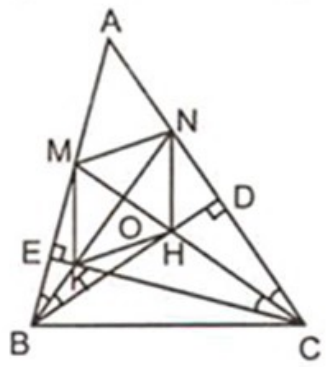
b) BH = BK và $\widehat{HBK} = 60^o$ ⇒ ΔBHK đều.

HK nhỏ nhất ⇔ BH nhỏ nhất ⇔ BH ⊥ AD ⇔ H là trung điểm của AD, lúc đó K là trung điểm của CD.

Ta có $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 2^2 - 1^2 = 3$; $BH = \sqrt{3}$ do đó giá trị nhỏ nhất của HK là $\sqrt{3}$.

Ta viết min HK = $\sqrt{3}$ (cm).

52. (h.128)



Hình 128

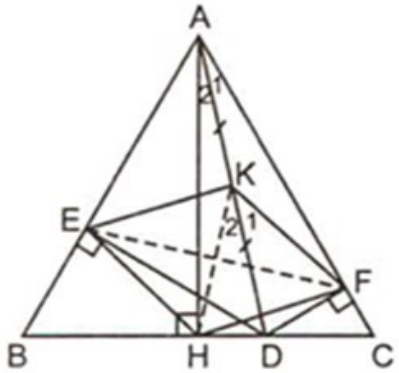
a) $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \widehat{NBD} = \widehat{NCM}$.

ΔBOH và ΔCDH có 2 cặp góc bằng nhau suy ra cặp góc còn lại cũng bằng nhau, do đó $\widehat{O} = \widehat{D} = 90^o \Rightarrow BN \perp CM$.

b) $\Delta BOM = \Delta BOH$ (g.c.g) $\Rightarrow OM = OH$.

Tương tự ON = OK $\Rightarrow$ MNHK là hình bình hành, lại có $KN \perp MH$ nên MNHK là hình thoi.

53. (h.129)



Hình 129

a) KF = KH = KA (đường trung tuyến thuộc cạnh huyền) $\Rightarrow \Delta KAF$, ΔKAH cân tại K $\Rightarrow \widehat{K}_1 = 2\widehat{A}_1$; $\widehat{K}_2 = 2\widehat{A}_2$.

Vậy $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2)$

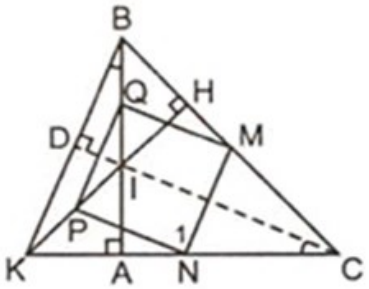
hay $\widehat{FKH} = 2.\ \widehat{CAH} = 2.30^o = 60^o$,

suy ra ΔKHF đều.

b) Chứng minh tương tự ta được ΔEKH đều suy ra EK = KF = FH = HE (= KH).

Vậy EKFH là hình thoi $\Rightarrow KH \perp EF$.

54. (h.130)



Hình 130

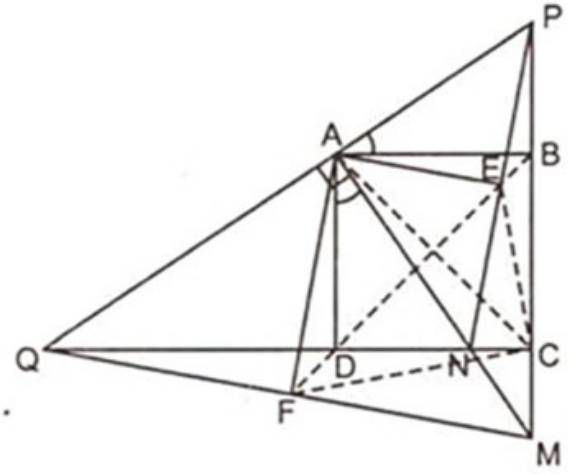
a) Xét ΔBKC có I là trực tâm $\Rightarrow CI \perp BK$ (tại D).

$\Delta ABK = \Delta ACI$ (g.c.g) $\Rightarrow BK = CI$.

b) Dùng tính chất đường trung bình của tam giác ta chứng minh được MNPQ là hình bình hành.

Có MN = NP và $\widehat{N_1} = \widehat{D} = 90^o$ (hai góc có cạnh tương ứng song song) suy ra MNPQ là hình vuông.

55. (h.131)



Hình 131

a) $\widehat{PAB} = \widehat{NAD}$ (cùng phụ với $\widehat{BAN}$).

$\Delta PAB = \Delta NAD$ (g.c.g) $\Rightarrow$ AP = AN

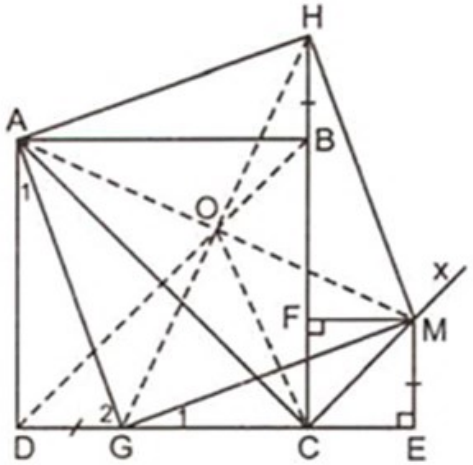
$\Rightarrow \Delta ANP$ vuông cân.

Chứng minh tương tự, ΔAQM vuông cân.

b) $EA = EC = \frac{1}{2}NP$; $FA = FC = \frac{1}{2}MQ$ (tính chất đường trung tuyến thuộc cạnh huyền)

Bốn điểm E, F, B, D cách đều hai đầu đoạn thẳng AC nên chúng cùng nằm trên đường trung trực của AC suy ra E, F, B, D thẳng hàng.

56. (h.132)



Hình 132

a) Tứ giác CEMF có 3 góc vuông nên nó là hình chữ nhật. Đường chéo CM là đường phân giác của góc C nên CEMF là hình vuông.

Ta chứng minh được các tam giác HAB, MHF, MGE, GAD bằng nhau (c.g.c) suy ra AH = HM = MG = GA (1) và $\widehat{G_1} = \widehat{A_1}$.

Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{G_2} = 90^o \Rightarrow \widehat{G_1} + \widehat{G_2} = 90^o$

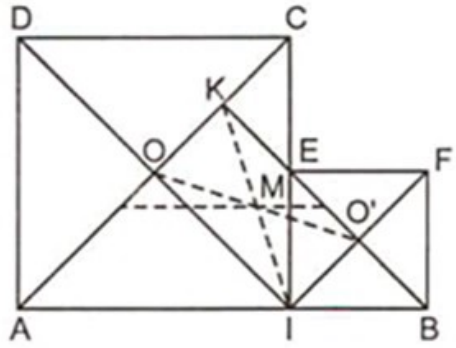
$\Rightarrow \widehat{AGM} = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AHMG là hình vuông.

b) CA $\perp$ CM (hai tia phân giác của hai góc kề bù).

Gọi O là giao điểm của AM và HG, ta có $OC = OA = \frac{1}{2}AM$ (tính chất đường trung tuyến thuộc cạnh huyền). Ba điểm B, O, D cách đều hai đầu đoạn thẳng AC nên chúng thẳng hàng (vì đều thuộc đường trung trực của AC). Suy ra ba đường thẳng AM, HG, BD đồng quy.

57. (h.133)



Hình 133

a) AC ⊥ ID ; BE ⊥ IF (tính chất hai đường chéo của hình vuông) ; $\widehat{DIF} = 90^o$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù).

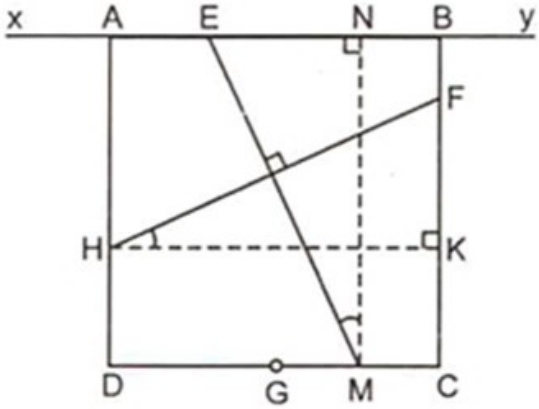
Tứ giác OKO'I có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

b) Trung điểm M của OO' cũng là trung điểm của KI (K cố định) suy ra M di động trên đường trung bình của ΔKAB (đường trung bình này song song với AB).

c) Hình chữ nhật OKO'I là hình vuông ⇔ IO = IO'

⇔ ΔOAI = ΔO'IB ⇔ AI = IB ⇔ I là trung điểm của AB.

58. (h.134)



Hình 134

Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD thoả mãn đề bài. Vẽ EM ⊥ FH (M ∈ CD).

Vẽ MN ⊥ AB (N ∈ AB) và HK ⊥ BC (K ∈ BC). Ta chứng minh được MN = HK và EM = FH.

Suy ra cách dựng :

– Dựng EM ⊥ FH và lấy EM = FH.

– Từ E dựng xy // MG.

– Từ F dựng một đường thẳng vuông góc với xy, cắt xy tại B và cắt MG tại C.

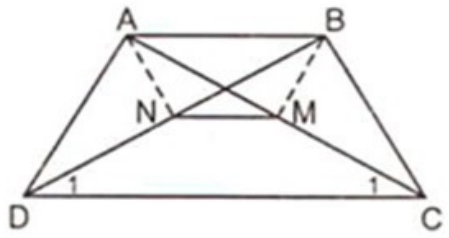
– Từ H dựng một đường thẳng vuông góc với xy, cắt xy tại A và cắt MG tại D. Tứ giác ABCD là hình vuông phải dựng.

Bạn đọc giải tiếp các bước còn lại.

59. (h.135)

a) Ta có MN // AB và $MN = \dfrac{CD - AB}{2}$ (xem §3 phần bổ sung).

Hình thang ABMN có AM = BN (một nửa của hai đường chéo bằng nhau) nên ABMN là hình thang cân.



Hình 135

$\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$.

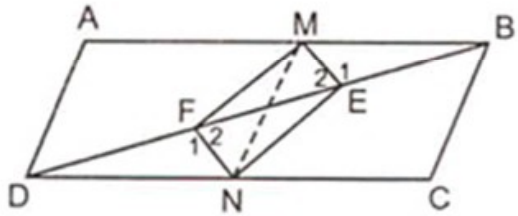
Hình thang NMCD là hình thang cân.

b) Hình thang cân ABMN là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow MN = AB \Leftrightarrow \dfrac{CD - AB}{2} = AB \Leftrightarrow CD = 3AB.$

60. (h.136)

a) $\Delta BEM = \Delta DFN$ (c.g.c) $\Rightarrow ME = NF$ và $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1 \Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{F}_2 \Rightarrow ME // NF \Rightarrow$ MENF là hình bình hành.



Hình 136

Ta có $BD = 3AD \Rightarrow BD = 3MN$.

Mặt khác $BD = 3EF$ nên $MN = EF$

$\Rightarrow$ hình bình hành MENF là hình chữ nhật.

b) Hình chữ nhật MENF là hình vuông

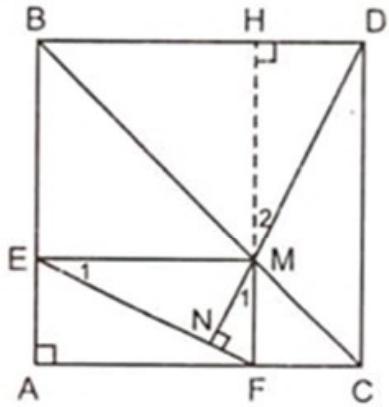
$\Leftrightarrow EF \perp MN \Leftrightarrow BD \perp MN \Leftrightarrow BD \perp AD$ (vì MN // AD).

61. (h.137)

a) $ME + MF = a$; $AF + FC = a \Rightarrow MF = FC$

$\Rightarrow \widehat{FCM} = 45^o \Rightarrow M \in BC$.

Vậy M di động trên cạnh huyền BC.



Hình 137

b) Vẽ hình vuông ABDC, D là một điểm cố định. $MN \perp EF \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{E}_1$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Gọi H là giao điểm của FM với BD. $\Delta HMD = \Delta MEF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{E}_1$ do đó $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_1$, dẫn tới M, N, D thẳng hàng. Vậy đường thẳng MN đi qua một điểm cố định là điểm D.

62. (h.138)

Cách dựng :

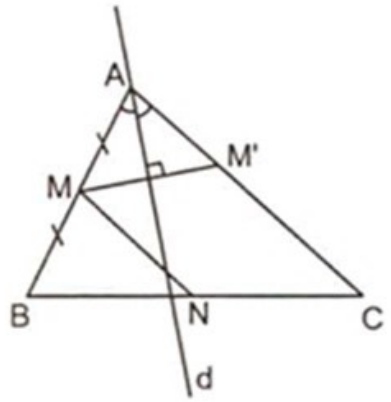
– Dựng M' đối xứng với M qua d.

– Qua M' dựng đường thẳng song song với MN cắt d tại A.

– Dựng B đối xứng với A qua M.

– Dựng đường thẳng BN cắt AM' tại C.

ΔABC là tam giác phải dựng.



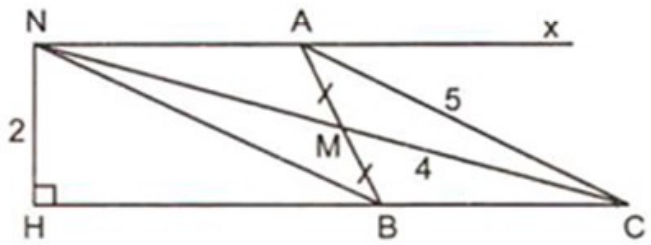
Hình 138

63. (h.139)

Phân tích :

– Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn đề bài.

Vẽ điểm N đối xứng với C qua M, tứ giác NACB là hình bình hành, NC = 8 ; NB = 5.



Hình 139

Vẽ NH ⊥ BC thì NH = 2.

– ΔNHC dựng được (cạnh huyền, cạnh góc vuông).

– Điểm B thoả mãn hai điều kiện : B nằm trên HC và B nằm trên đường tròn (N ; 5).

– Điểm A thoả mãn hai điều kiện : A nằm trên tia Nx // HC và A nằm trên đường tròn (N ; BC).

Bạn đọc tự giải các bước còn lại.

Chương II

ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

64. Số đo của mỗi góc ngoài là $(180^o - 140^o) : 2 = 20^o$.

Số cạnh của đa giác là : 360 : 20 = 18 (cạnh).

65. Gọi số cạnh là n ($n \in \mathbf{N}$; $n \geq 3$).

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0 \Leftrightarrow n(n-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \text{ (loại)} \\ n = 5 \text{ (thoả mãn).} \end{array}\right.$$

Số đo mỗi góc của ngũ giác đều là 108°.

66. Gọi n là số cạnh của đa giác. Tổng số đo các góc của đa giác này là $(n - 2).180^o$.

Mặt khác, tổng số đo các góc là tổng của n số hạng trong một dãy cộng, số hạng đầu là 110°, số hạng cuối là 160° nên tổng đó là $\frac{(110+160).n}{2}$ hay 135.n.

Do đó $(n - 2).180 = 135n \Leftrightarrow n = 8$.

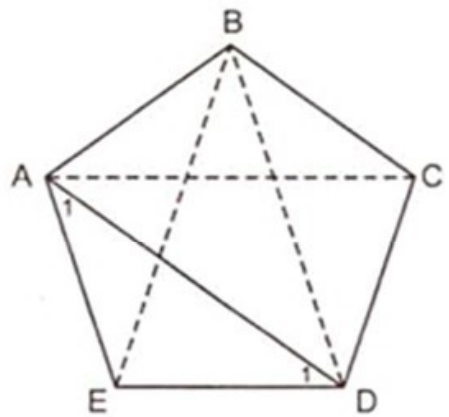
67. (h.140). Giả sử ngũ giác ABCDE có

AB = BC = CD = DE = EA và AC = BD = BE.

$\Delta ABE = \Delta BCA = \Delta CDB$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

Xét tứ giác ABCD có AB = CD ; AC = BD nên ABCD là hình thang cân (xem *bài 8*) suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CDA}$.

Mặt khác $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{CDE}$ (tức là $\widehat{A} = \widehat{D}$).

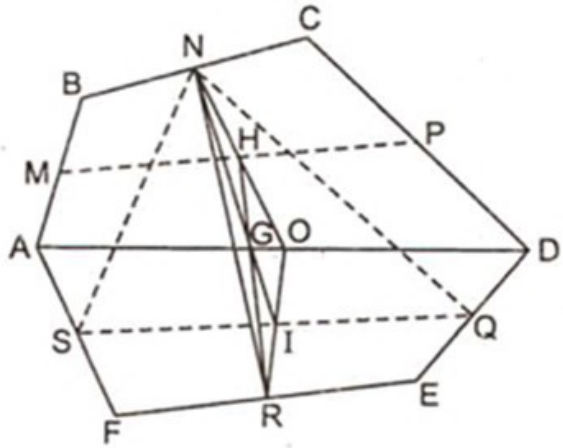


Hình 140

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{C} = \widehat{E}$. Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$ do đó ngũ giác ABCDE là ngũ giác đều.

68. (h.141)

Gọi O là trung điểm AD. Ta chứng minh được tứ giác MNPO, OQRS là hình bình hành. Suy ra MP và ON cắt nhau tại trung điểm H của mỗi đường ; SQ và OR cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. ΔNQS và ΔNOR có chung đỉnh N ; chung đường trung tuyến NI nên cùng chung trọng tâm G.



Hình 141

Chứng minh tương tự, ΔMPR và ΔNOR cũng có cùng trọng tâm G suy ra ΔNQS và ΔMPR có cùng một trọng tâm (là trọng tâm của ΔNOR).

69. Số đường chéo của đa giác là $\frac{12.(12-3)}{2} = 54$.

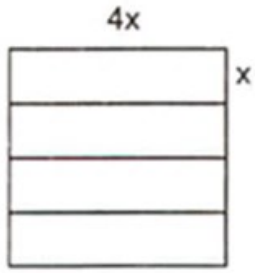
Hiệu hai số ở hai đầu đường chéo có giá trị nhỏ nhất là 0 (nếu hai số ở hai đầu đường chéo bằng nhau), có giá trị lớn nhất là 49. Như vậy số giá trị khác nhau của các hiệu nhiều nhất chỉ có thể là 49 – 0 + 1 = 50. Có 54 đường chéo mà chỉ có 50 hiệu nên theo nguyên lí Đi-rich-lê phải tồn tại hai đường chéo có hiệu hai số ở hai đầu bằng nhau.

70. (h.142)

Gọi chiều rộng mỗi hình chữ nhật là x, cạnh hình vuông là 4x. Vì chu vi mỗi hình chữ nhật là 50cm nên ta có :

$$(x + 4x) . 2 = 50 \Leftrightarrow x = 5.$$

Diện tích hình vuông là : $S = (4.5)^2 = 400(cm^2)$.



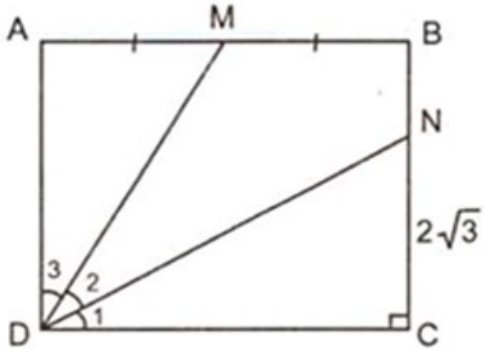
Hình 142

71. (h.143)

ΔCDN vuông tại C có $\widehat{D_1} = 30^o$ nên $DN = 2CN = 4\sqrt{3}$, từ đó tính được CD = 6 suy ra AM = 3.

ΔADM vuông tại A có $\widehat{D_3} = 30^o$ nên DM = 2AM = 6, từ đó tính được $AD = 3\sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = 6.3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (đvdt).



Hình 143

72. (h.144)

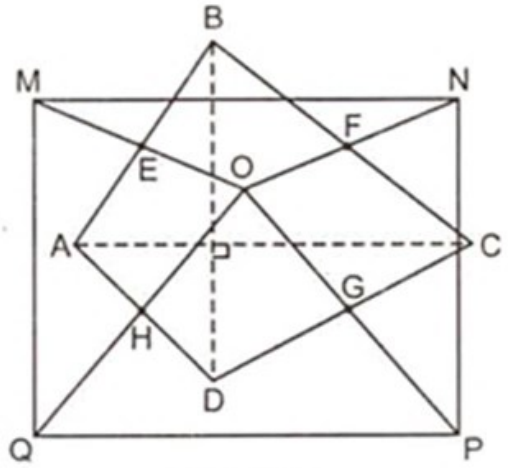
MN // AC (// EF) và MN = AC (= 2 EF). (1)

Tương tự PQ // AC và PQ = AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MNPQ là hình bình hành.

Vì AC ⊥ BD nên MN ⊥ MQ do đó MNPQ là hình chữ nhật.

$S_{MNPQ} = MN.MQ = 4.3 = 12\ (cm^2)$.



Hình 144

73. Số viên gạch trong mỗi hàng là $\sqrt{729} = 27$ (viên).

Trên mỗi đường chéo có 27 viên. Viên gạch tại tâm hình vuông nằm trên cả hai đường chéo nên số viên gạch men trắng là 27.2 – 1= 53 (viên).

Số viên gạch men xanh là 729 – 53 = 676 (viên).

74. (h.145) Đặt $S_{ONCP} = x$.

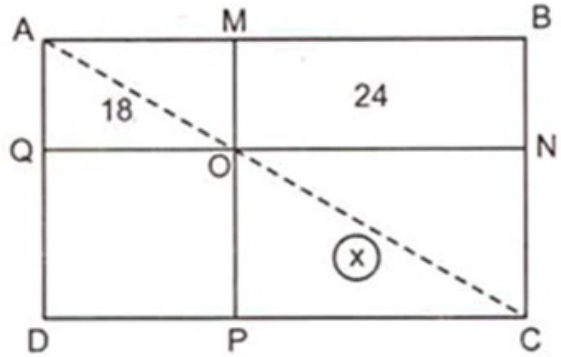
ΔABC = ΔCDA ; ΔAMO = ΔOQA ;

ΔONC = ΔCPO, do đó $S_{QOPD} = S_{MBNO} = 24$ (đvdt).

Hai hình chữ nhật AMOQ, MBNO có cùng chiều cao, hai hình chữ nhật QOPD, ONCP có cùng chiều cao nên tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy OQ và ON.

Vậy $\frac{24}{x} = \frac{18}{24}$ $\left(= \frac{OQ}{ON}\right)$; x = 32.

$S_{ABCD} = 18 + 24 + 24 + 32 = 98$ (đvdt).



Hình 145

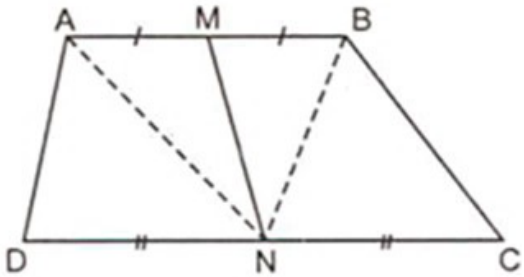
75. (h.146)

Vì MA = MB nên $S_{NMA} = S_{NBM}$.

Mặt khác $S_{AMND} = S_{BMNC}$

suy ra $S_{ADN} = S_{BNC}$.

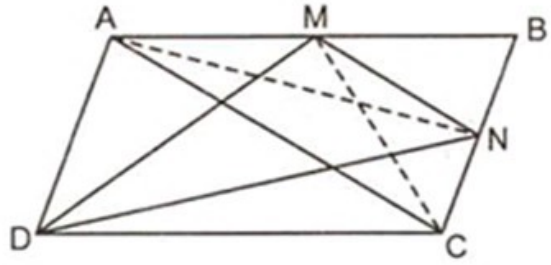
Hai tam giác ADN và BNC có cùng diện tích, có cạnh ND = NC nên các chiều



Hình 146

cao hạ từ A và B tới đường thẳng CD phải bằng nhau, suy ra AB // CD. Vậy ABCD là hình thang.

76. (h.147)



Hình 147

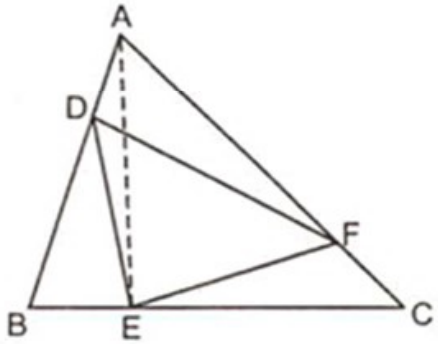
Vì AB // CD nên $S_{ADM} = S_{ACM}$. (1)

Vì AD // BC nên $S_{CDN} = S_{ACN}$. (2)

Vì MN // AC nên $S_{ACM} = S_{ACN}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{ADM} = S_{CDN}$.

77. (h.148)



Hình 148

Vì $BD = \frac{3}{4}AB$ nên $S_{DBE} = \frac{3}{4}S_{ABE}$. (1)

Vì $BE = \frac{1}{4}BC$ nên $S_{ABE} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. (2)

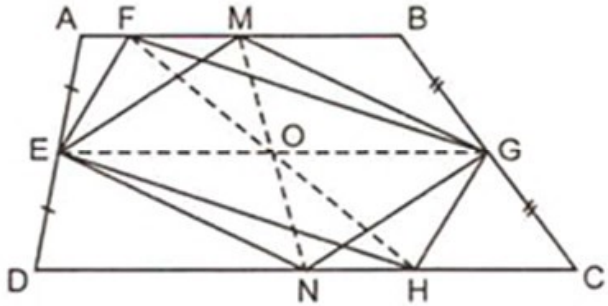
Từ (1) và (2) suy ra

$$S_{DBE} = \frac{3}{4}.\frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{3}{16}S_{ABC}.$$

Chứng minh tương tự ta được $S_{ADF} = S_{CFE} = \frac{3}{16}S_{ABC}$.

Do đó $S_{DBE} + S_{ADF} + S_{CFE} = \frac{9}{16}S_{ABC}$. Vậy $S_{DEF} = \frac{7}{16}S_{ABC} < \frac{1}{2}S_{ABC}$.

78. (h.149)



Hình 149

a) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Các tứ giác EMGN, EFGH là hình bình hành có chung đường chéo EG nên các đường chéo của chúng đồng quy tại O suy ra OM = ON và OF = OH.

Vậy tứ giác FMHN là hình bình hành, suy ra FM // HN do đó ABCD là hình thang.

b) EG là đường trung bình của hình thang ABCD nên EG // AB, suy ra $S_{FEG} = S_{MEG} \Rightarrow S_{EFGH} = S_{EMGN}$. (1)

Ta có $S_{AEM} = \frac{1}{4}S_{ABD}$; $S_{CGN} = \frac{1}{4}S_{BCD}$. Suy ra $S_{AEM} + S_{CGN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Tương tự $S_{BMG} + S_{DEN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Vậy $S_{AEM} + S_{CGN} + S_{BMG} + S_{DEN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Suy ra $S_{EMGN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

79. Chỉ dẫn : Vẽ đường cao BH. Đáp số $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

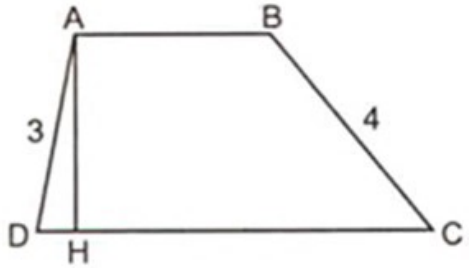
80. (h.150).

Vẽ đường cao AH.

Ta có $S_{ABCD} = (AB + CD).\frac{AH}{2} = 10.AH \leq 10.\ AD = 10\ .\ 3 = 30\ (cm^2)$.

Giá trị lớn nhất của S là $30cm^2$ khi và chỉ khi AH = AD tức là AD ⊥ CD, ta viết max $S = 30cm^2$.

Bạn đọc giải thích tại sao AH không thể bằng BC ?



Hình 150

81. (h.151)

Các tứ giác AMND và BMNC là hai hình thang có cùng chiều cao.

Vì $S_{AMND} = S_{BMNC}$ nên AM + DN = BM + CN.

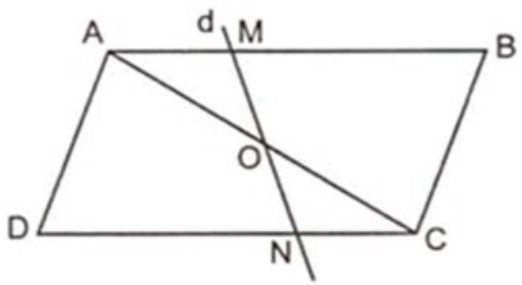
Ta có AM + DN + BM + CN = (AM + BM) + (DN + CN) = 2CD.

Suy ra AM + DN = CD.

Do đó AM = CN.

Gọi O là giao điểm của AC với MN. ΔAOM = ΔCON (g.c.g) ⇒ OA = OC.

Vậy d luôn đi qua một điểm cố định là tâm của hình bình hành.



Hình 151

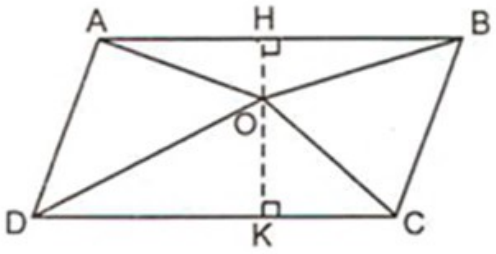
82. (h.152)

Qua O vẽ một đường thẳng vuông góc với AB tại H, cắt CD tại K.

$$S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2}AB.OH + \frac{1}{2}CD.OK$$

$$= \frac{1}{2}CD(OH + OK) = \frac{1}{2}CD.HK = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Suy ra $S_{AOB} + S_{COD} = S_{AOD} + S_{BOC}$.



Hình 152

83. Vẽ đường cao AH.

$S_{ABCD} = AB.AH \leq AB.AD = ab$.

max S = ab khi và chỉ khi AH = AD tức là ABCD là hình chữ nhật.

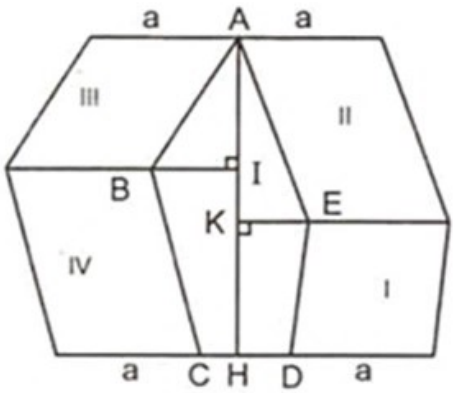
84. (h.153)

Vẽ $AH \perp CD$; $EK \perp AH$; $BI \perp AH$.

Ta có $S_I + S_{II} = a(HK + AK) = a . AH$. (1)

$S_{III} + S_{IV} = a(AI + HI) = a. AH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_I + S_{II} = S_{III} + S_{IV}$.



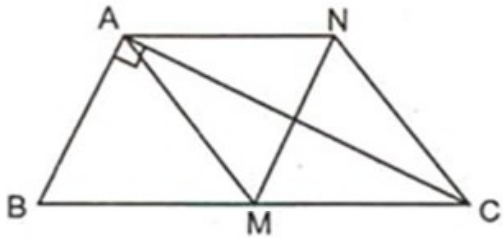
Hình 153

85. (h.154)

ABMN là hình bình hành ⇒ MN = AB = 8 ;

MN // AB nên MN⊥AC.

Áp dụng định lí Py-ta-go ta tính được AC = 15. Vậy $S_{ANCM} = \frac{15.8}{2} = 60$ (đvdt).



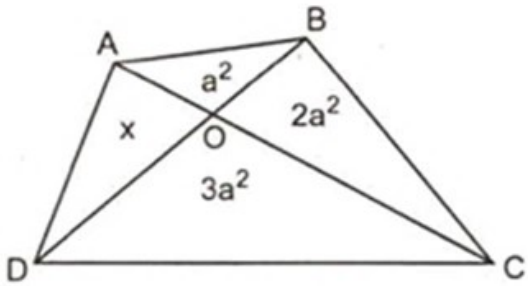
Hình 154

86. (h.155)

Đặt $S_{AOD} = x$ ta có $\frac{x}{3a^2} = \frac{a^2}{2a^2}\left(= \frac{OA}{OC}\right)$;

$x = 1,5a^2$.

Vậy $S_{ABCD} = a^2 + 2a^2 + 3a^2 + 1,5a^2 = 7,5a^2$.



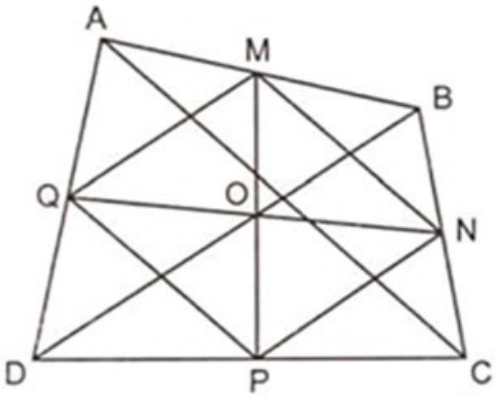
Hình 155

87. (h.156)

Gọi O là giao điểm của MP và NQ ta chứng minh được MNPQ là hình thoi và

$S_{ABCD} = 2S_{MNPQ}$;

$S_{ABCD} = 2.\frac{1}{2}MP.NQ = 4.OM.ON.$ (1)



Hình 156

Vì MP + NQ = 2a nên OM + ON = a. Ta có $(OM + ON)^2 = a^2$;

$b^2 + 2.OM.ON = a^2$; $2.OM.ON = a^2 - b^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABCD} = 2(a^2 - b^2)$.

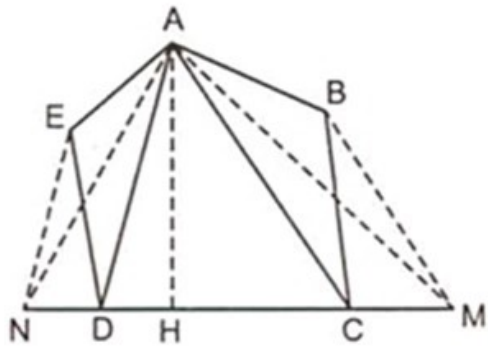
88. (h.157)

BM // AC $\Rightarrow S_{ABC} = S_{AMC}$;

EN // AD $\Rightarrow S_{AED} = S_{AND}$;

$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}$

$= S_{AMC} + S_{ACD} + S_{AND} = S_{AMN} = \frac{1}{2}a.h.$



Hình 157

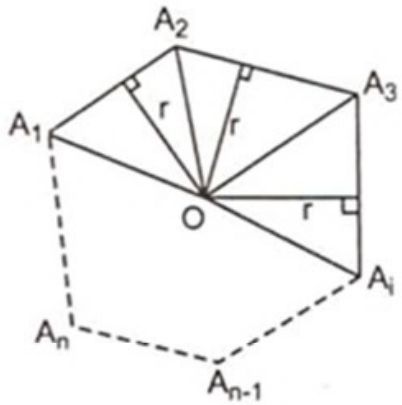
89. (h.158).

Gọi đa giác là $A_1A_2A_3... A_n$,

vì các phân giác đồng quy tại O nên điểm O cách đều tất cả các cạnh một khoảng r.

$S_{A_1A_2A_3...A_n} = S_{A_1OA_2} + S_{A_2OA_3} + ... + S_{A_nOA_1}$

$= \frac{1}{2}.r\left(A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1\right) = p.r.$



Hình 158

90. a) (h.159)

Gọi cạnh bên là b đường cao ứng với cạnh b là h.

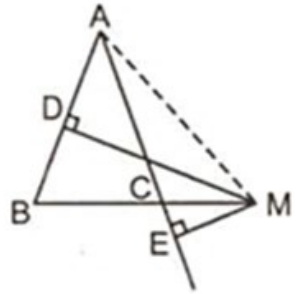
$S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC}$; $\frac{1}{2}b.MD + \frac{1}{2}b.ME = \frac{1}{2}b.h$

$\Rightarrow$ MD + ME = h (không đổi).

Hình 159

b) (h.160). Chứng minh tương tự câu a được :

$|MD - ME| = h$ (không đổi).



Hình 160

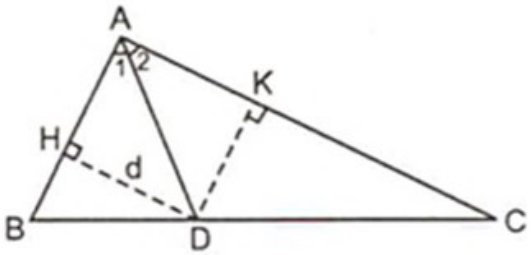
91. (h.161)

Vẽ DK ⊥ AC thì DK = DH = d.

$S_{ADB} + S_{ADC} = S_{ABC}$;

$\frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}bd = \frac{1}{2}bc$; cd + db = bc

chia cả hai vế cho bcd ta được $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$.



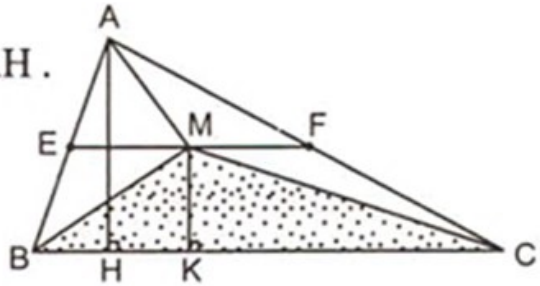
Hình 161

92. (h.162)

Vẽ AH ⊥ BC ; MK ⊥ BC.

$S_{MBC} = S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2}S_{ABC} \Rightarrow MK = \frac{1}{2}AH$.

Vì M không nằm ngoài tam giác nên M nằm trên đoạn thẳng EF // BC và cách BC một khoảng $\frac{1}{2}AH$.



Hình 162

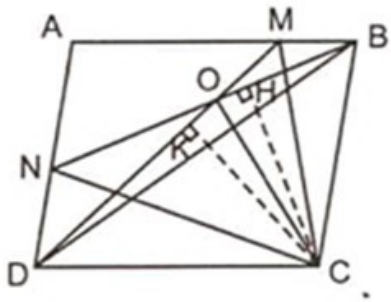
93. (h.163)

Vẽ CH ⊥ BN ; CK ⊥ DM ta được CH = CK.

$S_{NBC} = S_{DBC}$; $S_{MCD} = S_{BCD}$.

Suy ra $S_{NBC} = S_{MCD}$ do đó BN = DM

(vì có hai chiều cao tương ứng bằng nhau).



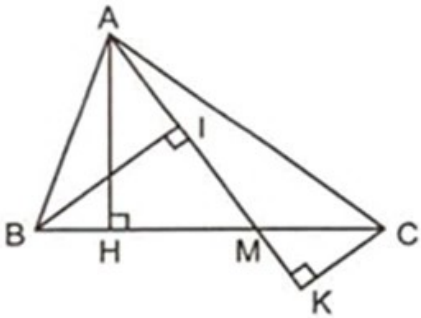
Hình 163

94. (h.164)

Vẽ đường cao AH.

$S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC}$; $\frac{1}{2}AM.BI + \frac{1}{2}AM.CK = S_{ABC}$

$\frac{1}{2}AM.(BI + CK) = S_{ABC}$; $BI + CK = \frac{2S_{ABC}}{AM}$



Hình 164

BI + CK nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM lớn nhất.

Vì AH $\le$ AB < AC nên AM lớn nhất $\Leftrightarrow$ M trùng C.

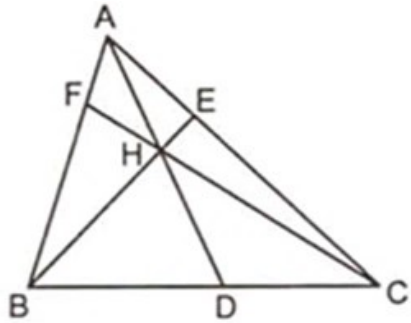
min (BI + CK) = độ dài đường cao kẻ từ B của ΔABC.

95. $b + h_b = c + h_c \Leftrightarrow (b - c) - (h_c - h_b) = 0 \Leftrightarrow (b-c) - \left(\frac{2S}{c} - \frac{2S}{b}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (b-c) - \frac{2S(b-c)}{b.c} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c)\left(1 - \frac{2S}{b.c}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = c \\ S = \frac{b.c}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ cân tại A} \\ \Delta ABC \text{ vuông tại A.} \end{array}\right.$$

96. (h.165)



Hình 165

Ta đặt $S_{HBC} = S_1$; $S_{HCA} = S_2$; $S_{HAB} = S_3$; $S_{ABC} = S$.

a) $\frac{AH}{AD} = \frac{S_2}{S_{ACD}} = \frac{S_3}{S_{ABD}} = \frac{S_2 + S_3}{S}$.

Tương tự $\frac{BH}{BE} = \frac{S_1 + S_3}{S}$; $\frac{CH}{CF} = \frac{S_1 + S_2}{S}$.

Vậy $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = \frac{2(S_1 + S_2 + S_3)}{S} = \frac{2S}{S} = 2$.

b) $\frac{AH}{HD} = \frac{S_2}{S_{CHD}} = \frac{S_3}{S_{BHD}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$; tương tự $\frac{BH}{HE} = \frac{S_3 + S_1}{S_2}$; $\frac{CH}{HF} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$.

Vậy $\frac{AH}{HD} + \frac{BH}{HE} + \frac{CH}{HF} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_3 + S_1}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3}$

$$= \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1}{S_2}\right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3}\right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3}\right) \ge 2 + 2 + 2 = 6 \ ;$$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ H trùng với trọng tâm của ΔABC.

97. (h.166)

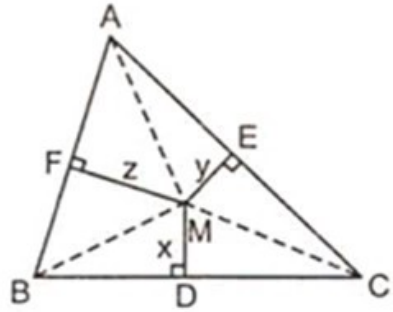
a) $S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB} = S_{ABC}$;

$\frac{1}{2}(ax + by + cz) = S$; ax + by + cz = 2S.

b) $(ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)+$

$+\ ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ca\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$

$\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2.$



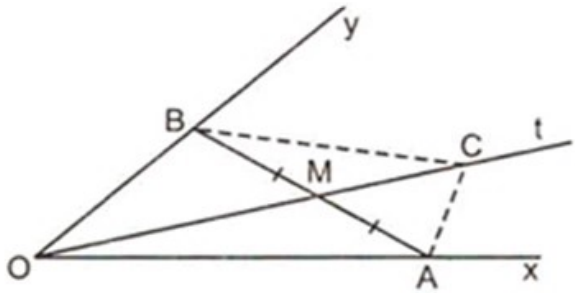
Hình 166

Vậy $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2S}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$)

suy ra $\min\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=\frac{(a+b+c)^2}{2S}$

(khi và chỉ khi M là giao điểm các đường phân giác).

98. (h.167)



Hình 167

a) – Nếu M là trung điểm của AB thì

$S_{AOM}=S_{BOM}$; $S_{CAM}=S_{CBM}$.

Suy ra $S_{AOM}+S_{CAM}=S_{BOM}+S_{CBM}$ hay $S_{AOC}=S_{BOC}$.

– Đảo lại, nếu $S_{AOC}=S_{BOC}$ ta phải chứng minh MA = MB.

Gọi h_1 và h_2 lần lượt là khoảng cách từ O và C tới AB.

Ta có $S_{AOM}+S_{CAM}=S_{BOM}+S_{CBM}$;

$\frac{1}{2}MA(h_1+h_2)=\frac{1}{2}MB(h_1+h_2)$ suy ra MA = MB.

b) (h.168)

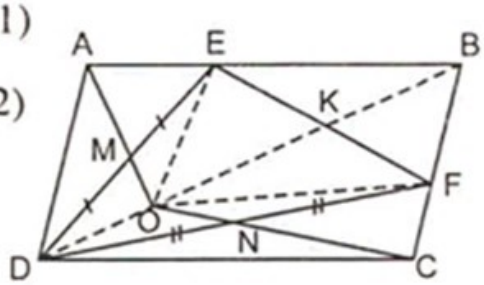
Vì M là trung điểm của DE nên $S_{OAE}=S_{OAD}$. (1)

Vì N là trung điểm của DF nên $S_{OCD}=S_{OCF}$. (2)

Mặt khác theo *bài 82* thì :

$S_{OAB}+S_{OCD}=S_{OAD}+S_{OBC}$;

$(S_{OAE}+S_{OBE})+S_{OCD}=S_{OAD}+(S_{OBF}+S_{OCF})$. (3)

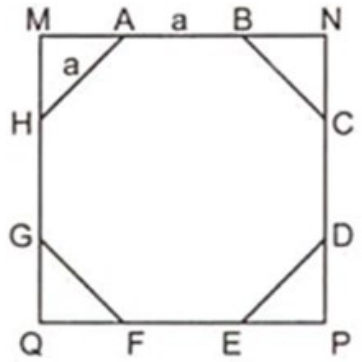


Hình 168

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{OBE} = S_{OBF}$ do đó tia BO đi qua trung điểm K của EF (theo câu a).

Vậy ba điểm O, B, K thẳng hàng.

99. (h.169)



Hình 169

Mỗi góc ngoài của bát giác đều là $360^o : 8 = 45^o$.

Suy ra các tam giác MAH, NBC, PDE, QFG là những tam giác vuông cân bằng nhau.

Do đó $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = \widehat{Q} = 90^o$ và

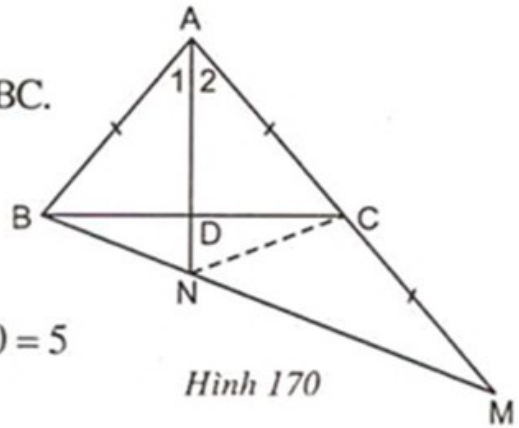
$$MN = NP = PQ = QM.$$

Vậy MNPQ là hình vuông. Vì AH = a nên $AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$MN = a + \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} = a(1+\sqrt{2})$$

$$S_{MNPQ} = [a(1+\sqrt{2})]^2 = a^2(3+2\sqrt{2}).$$

100. (h.170)



Hình 170

Gọi $S_{ABM} = S$. Gọi D là giao điểm của AN và BC.

Vì CM = CA nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}S$.

$S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{4}S$; $S_{NBD} = \frac{1}{2}S_{NBC} = \frac{1}{2}.10 = 5$

$\Rightarrow S_{ABN} = S_{ACN} = S_{CMN} = \frac{1}{3}S$. Ta có $S_{ABD} + S_{NBD} = S_{ABN}$;

$\frac{S}{4} + 5 = \frac{S}{3}$. Giải ra được S = 60 (đvdt).

101. (h.171)

Vẽ $AH \perp CD$; $S_{ACD} = \frac{1}{2}ah \le \frac{1}{2}ab$

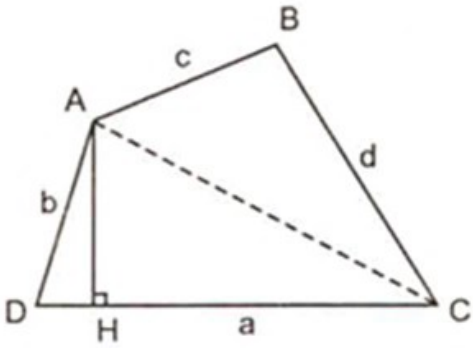
$\Rightarrow 4S_{ACD} \le 2ab \le a^2 + b^2$ (xem *bất đẳng thức Cô-si* phần Đại số).

Tương tự $4S_{ABC} \le c^2 + d^2$.

Vậy $4(S_{ACD} + S_{ABC}) \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2$;

hay $S \le \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$.

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC vuông cân ở B và ΔADC vuông cân ở D $\Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông).



Hình 171

102. (h.172)

a) Nếu $S_{ABC} = S_{ADC}$ thì đường thẳng d chứa đường chéo AC.

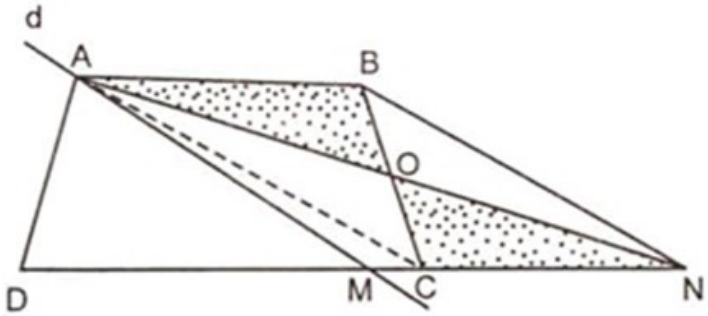
– Giả sử $S_{ABC} < S_{ADC}$ thì đường thẳng d cắt CD tại M nằm giữa C và D.

– Dựng BN // AC (N thuộc đường thẳng CD).

– Dựng trung điểm M của DN.

Đường thẳng AM là đường thẳng d phải dựng.

– Trường hợp $S_{ABC} > S_{ADC}$ thì điểm M nằm giữa B và C.



Hình 172

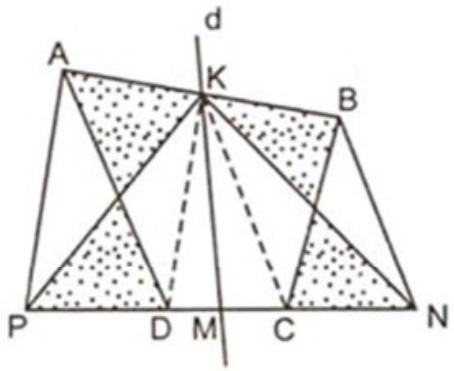
Bạn đọc tự giải tiếp.

b) (h.173)

• Xét trường hợp các tam giác KAD và KBC có diện tích nhỏ hơn nửa diện tích tứ giác.

– Dựng BN // KC, AP // KD (N, P thuộc đường thẳng CD).

– Dựng trung điểm M của NP. Đường thẳng KM là đường thẳng d phải dựng.



Hình 173

• Trường hợp tam giác KAD hoặc tam giác KBC có diện tích không nhỏ hơn nửa diện tích tứ giác, chẳng hạn $S_{KBC} \ge \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$ thì điểm M sẽ thuộc cạnh BC. Cách dựng như sau : (h.174)

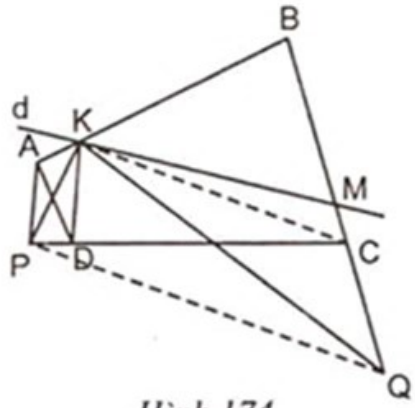
– Dựng AP // KD (P thuộc đường thẳng CD).

– Dựng PQ // KC (Q thuộc đường thẳng BC).

– Dựng trung điểm M của BQ.

– Đường thẳng KM là đường thẳng d phải dựng.

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

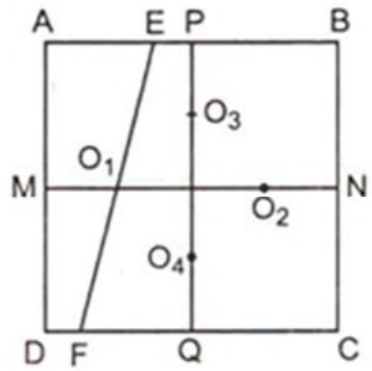


Hình 174

103. (h.175)

Gọi P, N, Q, M lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác phải cắt hai cạnh đối của hình vuông.

Giả sử đường thẳng d như vậy cắt AB ở E, cắt CD ở F và cắt MN ở O_1.



Hình 175

$$\frac{S_{AEFD}}{S_{EBCF}} = \frac{(AE + DF).AD : 2}{(BE + CF).BC : 2} = \frac{MO_1}{O_1N} = \frac{1}{3}.$$

Do đó $\frac{MO_1}{MN} = \frac{1}{4} \Rightarrow O_1$ là điểm cố định.

Vậy đường thẳng d đi qua điểm O_1 cố định.

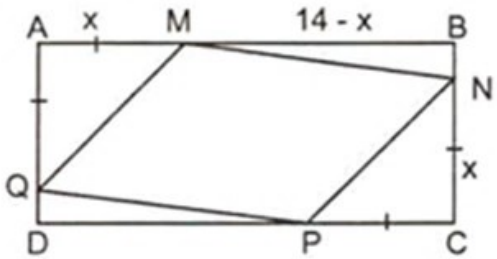
Tương tự ta còn xác định được đường thẳng d có thể đi qua O_2 thuộc MN sao cho $\frac{NO_2}{NM} = \frac{1}{4}$ hoặc đi qua điểm O_3, O_4 thuộc PQ sao cho $\frac{PO_3}{PQ} = \frac{QO_4}{QP} = \frac{1}{4}$.

Có chín đường thẳng đi qua bốn điểm cố định nên theo nguyên lí Đi-rich-lê ít nhất phải có ba đường thẳng cùng đi qua một trong bốn điểm nói trên.

104. a) (h.176) $S_{AMQ} = S_{CNP}$; $S_{BMN} = S_{DPQ}$.

Đặt AM = x thì BM = 14 – x ; BN = 6 – x

$S = S_{MNPQ} = S_{ABCD} - 2(S_{AMQ} + S_{BMN})$



Hình 176

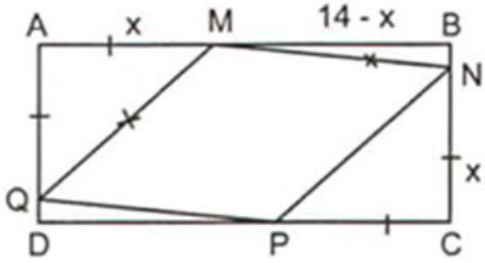
$S = 14.6 - [x^2 + (14 - x)(6 - x)] = -2x^2 + 20x$

$= -2(x^2 - 10x) = -2[(x - 5)^2 - 25] = -2(x - 5)^2 + 50 \leq 50$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 5$).

Vậy max S = 50 (khi và chỉ khi AM = AQ = CN = CP = 5).

b) (h.177)



Hình 177

Tứ giác MNPQ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên là hình bình hành.

Hình bình hành MNPQ là hình thoi

$\Leftrightarrow MQ = MN \Leftrightarrow MQ^2 = MN^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = (14 - x)^2 + (6 - x)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 2x^2 - 40x + 232$

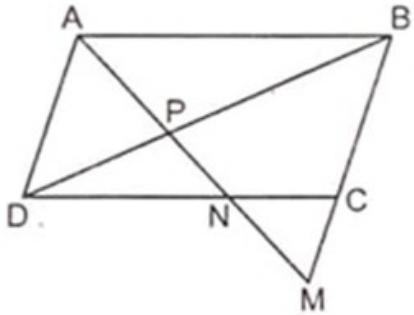
$\Leftrightarrow x = 5,8$(cm).

$S_{MNPQ} = -2x^2 + 20x = -2.\ 5,8^2 + 20\ .\ 5,8 = 48,72(cm^2)$.

Chương III

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

105. (h.178)



Hình 178

a) $CN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{CN}{AB} = \dfrac{CM}{BM}$ (1)

$AD \parallel CM \Rightarrow \dfrac{ND}{NC} = \dfrac{AD}{CM}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{CN}{AB} \cdot \dfrac{ND}{NC} = \dfrac{CM}{BM} \cdot \dfrac{AD}{CM} \Rightarrow \dfrac{ND}{AB} = \dfrac{AD}{BM}$

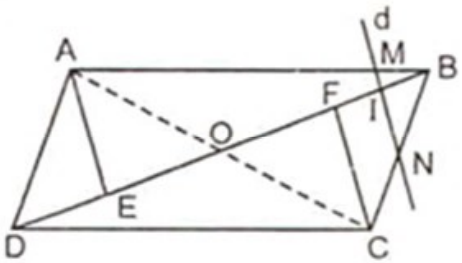
$\Rightarrow BM \,.\, DN = AB \,.\, AD$ (không đổi).

b) $AD \parallel BM \Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{DP}{DB}$ (3) ; $AB \parallel DN \Rightarrow \dfrac{AP}{AN} = \dfrac{BP}{BD}$. (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{AP}{AM} + \dfrac{AP}{AN} = \dfrac{DP + BP}{BD} = 1$.

Chia cả hai vế cho AP ta được $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = \dfrac{1}{AP}$.

106. (h.179)



Hình 179

Vẽ AE // d ; CF // d (E, F $\in$ BD)

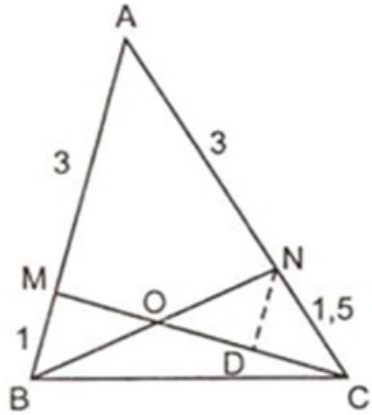
Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta chứng minh được OE = OF.

$MI \parallel AE \Rightarrow \dfrac{BA}{BM} = \dfrac{BE}{BI}$ (1) ; $NI \parallel CF \Rightarrow \dfrac{BC}{BN} = \dfrac{BF}{BI}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{BA}{BM} + \dfrac{BC}{BN} = \dfrac{BE + BF}{BI} = \dfrac{(BO + OE) + (BO - OF)}{BI} = \dfrac{2BO}{BI} = \dfrac{BD}{BI}$.

107. (h.180)



Hình 180

Vẽ ND // AB (D ∈ CM)

$$\frac{ND}{AM} = \frac{CN}{CA} = \frac{1,5}{4,5} = \frac{1}{3} \ (1) \ ; \ \frac{BM}{AM} = \frac{1}{3}. \ (2)$$

Từ (1) và (2) ⇒ ND = BM

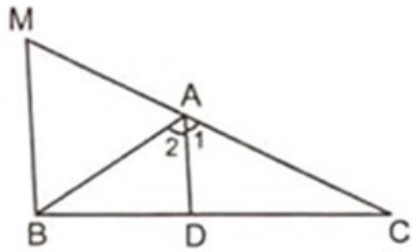
⇒ BMND là hình bình hành ⇒ $\frac{OB}{ON} = 1$.

$$ND \ // \ AM \Rightarrow \frac{MD}{CD} = \frac{AN}{CN} = \frac{3}{1,5} = 2$$

⇒ MD = 2CD ⇒ OM = OD = DC.

Vậy $\frac{OC}{OM} = 2$ do đó $\frac{OB}{ON} + \frac{OC}{OM} = 1 + 2 = 3$.

108. (h.181)

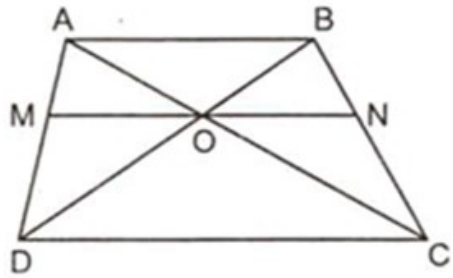


Hình 181

Vẽ BM // AD (M thuộc đường thẳng AC).

Ta chứng minh được ΔABM đều ⇒ $\widehat{BAC} = 120^o$.

109. (h.182)



Hình 182

a) $OM \ // \ CD \Rightarrow \frac{OM}{CD} = \frac{OA}{AC}$; (1)

$ON \ // \ CD \Rightarrow \frac{ON}{CD} = \frac{BN}{BC}$; (2)

$ON \ // \ AB \Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{BN}{BC}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD}$ ⇒ OM = ON.

b) $OM \ // \ AB \Rightarrow \frac{OM}{AB} = \frac{DM}{DA}$; (4) $OM \ // \ CD \Rightarrow \frac{OM}{CD} = \frac{AM}{AD}$. (5)

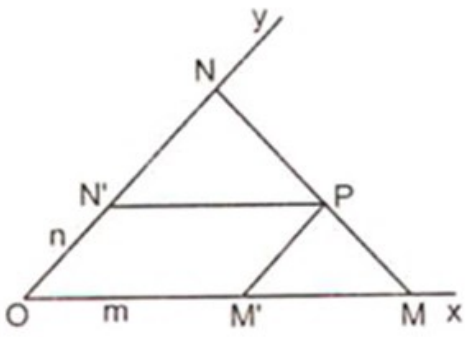
Từ (4) và (5) ⇒ $\frac{OM}{AB} + \frac{OM}{CD} = \frac{DM + AM}{DA} = 1$.

Chia cả hai vế cho OM ta được $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OM}$ hay $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.

110. (h.183)

Trên tia Ox đặt OM' = m.

Đường thẳng qua M' và song song với Oy cắt MN tại P. Vẽ PN' // Ox (N' ∈ Oy).



Hình 183

Ta có M'P // ON $\Rightarrow \dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{NP}{NM}$; (1)

N'P // OM $\Rightarrow \dfrac{ON'}{ON} = \dfrac{MP}{MN}$. (2)

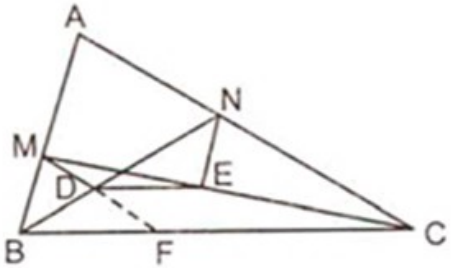
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{OM'}{OM} + \dfrac{ON'}{ON} = \dfrac{NP + MP}{MN} = 1$ mà $\dfrac{m}{OM} + \dfrac{n}{ON} = 1$;

OM' = m nên ON' = n suy ra P là một điểm cố định. Vậy MN luôn đi qua một điểm cố định là điểm P.

111. (h.184)

Đường thẳng MD cắt BC tại F.

Xét ba đường thẳng BA, BC, BN đồng quy tại B cắt hai đường thẳng song song MF và AC, ta được



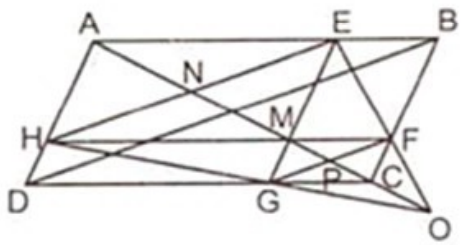
Hình 184

$$\frac{MD}{DF} = \frac{AN}{NC}. \quad (1)$$

Xét ΔAMC có NE // AM $\Rightarrow \dfrac{ME}{EC} = \dfrac{AN}{NC}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{MD}{DF} = \dfrac{ME}{EC} \Rightarrow$ DE // BC (định lí Ta–let đảo).

112. (h.185)



Hình 185

a) ME // BC $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AM}{AC}$; (1)

MH // DC $\Rightarrow \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow$ HE // BD (định lí Ta-let đảo).

Tương tự GF // BD suy ra HE // GF.

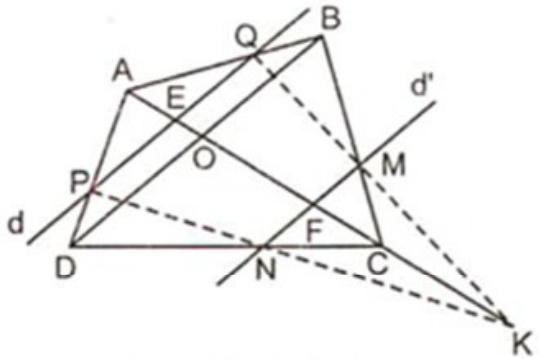
b) Trong hình bình hành AEMH, AM và HE cắt nhau tại trung điểm N của HE. Tương tự, P là trung điểm của GF.

Xét hình thang EFGH, gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên EF và HG.

Theo *bổ đề hình thang* thì bốn điểm M, N, P, O thẳng hàng, suy ra ba đường thẳng EF, GH, AC đồng quy.

113. (h.186)

Xét ba đường thẳng đồng quy AB, AC, AD cắt hai đường thẳng song song PQ và BD ta có : $\frac{PE}{EQ} = \frac{DO}{OB}$. (1)



Hình 186

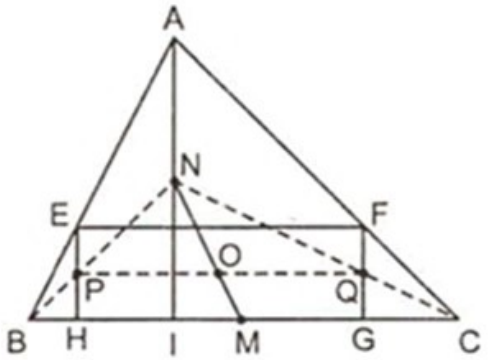
Tương tự, $\frac{NF}{FM} = \frac{DO}{OB}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{NF}{FM}$ $\Rightarrow$ Ba đường thẳng MQ, NP, AC đồng quy do đó đường thẳng AC đi qua K.

114. (h.187)

Xét ba đường thẳng BA, BN, BI đồng quy tại B cắt hai đường thẳng song song EH và AI ta có $\frac{EP}{PH} = \frac{AN}{NI} = 1$

$\Rightarrow$ EP = PH.



Hình 187

Chứng minh tương tự ta được FQ = QG.

Suy ra PQ // HG và O là trung điểm của PQ.

Xét hình thang BPQC có O và M là trung điểm của hai đáy, N là giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên nên ba điểm M, N, O thẳng hàng *(Bổ đề hình thang)*.

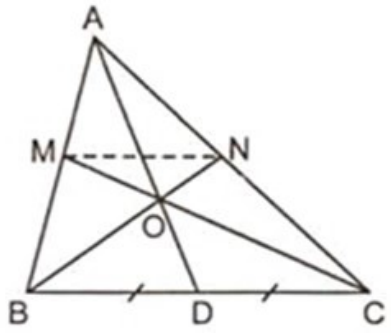
115. (h.188)

Vì AD, BN, CM đồng quy tại O nên $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1$ (định lí Xê-va).

Vì $\frac{DB}{DC} = 1$ nên $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$

(định lí Ta-let đảo)

$\Rightarrow S_{MBC} = S_{NBC} \Rightarrow S_{BOM} = S_{CON}$.



Hình 188

116. (h.189)

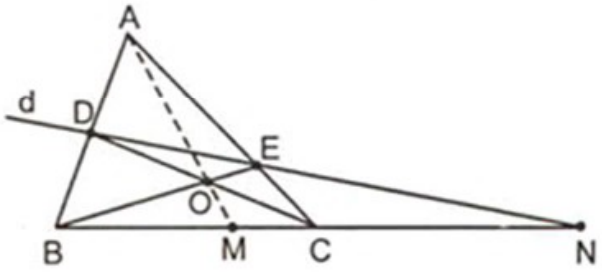
Vì AM, BE, CD đồng quy tại O

nên $\frac{MB}{MC}.\frac{EC}{EA}.\frac{DA}{DB} = 1$ (1) (định lí Xê-va).

Mặt khác D, E, N thẳng hàng nên

$\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{EA}.\frac{DA}{DB} = 1$ (2)

(định lí Mê-nê-la-uyt).



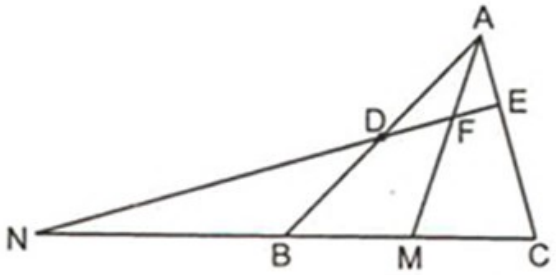
Hình 189

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = k$.

Vậy điểm M chia trong đoạn thẳng BC, điểm N chia ngoài đoạn thẳng BC theo cùng tỉ số k.

117. (h.190)

Gọi giao điểm của hai đường thẳng BC và DE là N. Xét ΔDNB, đường thẳng MA cắt ba đường thẳng chứa ba cạnh NB, BD, DN lần lượt tại M, A, F nên theo định lí Mê-nê-la-uýt



Hình 190

ta có $\frac{MN}{MB}.\frac{AB}{AD}.\frac{FD}{FN} = 1$. (1)

Tương tự, xét ΔENC với ba điểm M, A, F thẳng hàng ta có

$\frac{MN}{MC}.\frac{AC}{AE}.\frac{FE}{FN} = 1$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{MN}{MB}.\frac{AB}{AD}.\frac{FD}{FN} = \frac{MN}{MC}.\frac{AC}{AE}.\frac{FE}{FN}$.

Thay AB = 4 ; AC = 3 ; FD = 1,5FE và AD = 2AE ta được

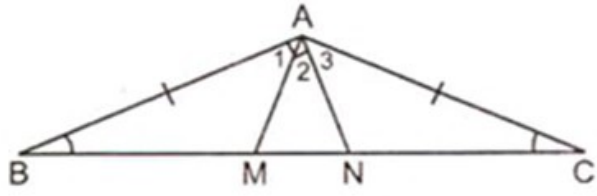
$$\frac{MN}{MB}.\frac{4}{2AE}.\frac{1,5.FE}{FN}=\frac{MN}{MC}.\frac{3}{AE}.\frac{FE}{FN}$$

Thu gọn hai vế, được MB = MC.

118. (h.191)

$\widehat{BAC} = 135^o$; $AM \perp AC$; $AN \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = 45^o$.



Hình 191

Vì AB = AC nên ta chứng minh được BM = CN.

Xét ΔAMC có AN và AB lần lượt là các đường phân giác trong và ngoài của góc A, do đó $\frac{NM}{NC}=\frac{BM}{BC}$ hay $\frac{NM}{BM}=\frac{BM}{BC}$ suy ra $BM^2 = BC.MN$.

119. (h.192)

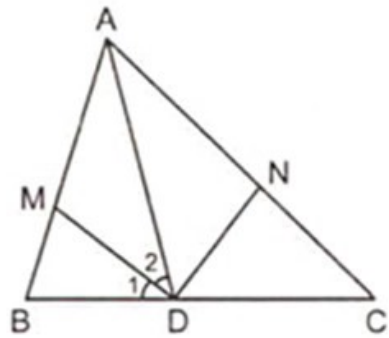
$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{DA}{DB} \Leftrightarrow MA . DB = MB . DA.$ (1)

Mặt khác AM . BD. CN = AN . CD . BM. (2)

Chia từng vế của các đẳng thức (1) và (2) ta được

$$\frac{MA.DB}{AM.BD.CN}=\frac{MB.DA}{AN.CD.BM}.$$

Rút gọn được $\frac{1}{CN}=\frac{DA}{AN.CD}$ hay $\frac{AN}{CN}=\frac{DA}{CD}$



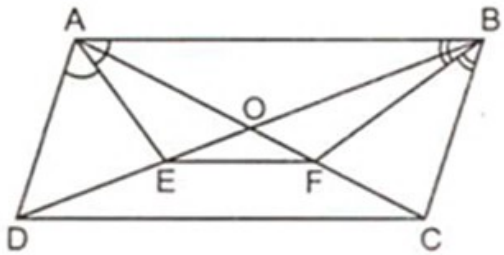
Hình 192

$\Rightarrow$ DN là tia phân giác của góc ADC.

120. (h.193)

a) $\widehat{DAE} = \widehat{BAE} \Rightarrow \frac{BE}{ED}=\frac{AB}{AD}$; (1)

$\widehat{ABF} = \widehat{CBF} \Rightarrow \frac{AF}{FC}=\frac{AB}{BC}$; (2)



Hình 193

Vì AD = BC nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BE}{ED}=\frac{AF}{FC}$. (3)

b) Từ (3) $\Rightarrow \dfrac{BE+ED}{ED} = \dfrac{AF+FC}{FC}$ hay $\dfrac{2OD}{ED} = \dfrac{2OC}{FC}$ suy ra $\dfrac{OD}{ED} = \dfrac{OC}{FC}$

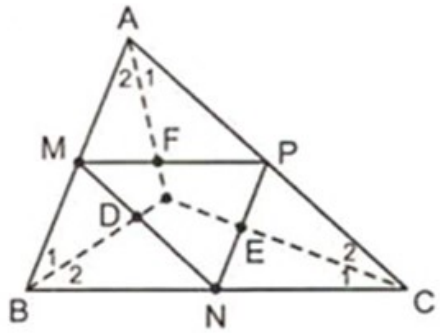
$\Rightarrow EF \,//\, CD \Rightarrow EF \,//\, AB$.

121. (h.194)

$\dfrac{FP}{FM} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{AP}{AM} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

Chứng minh tương tự được $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ và $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.

Vậy AF, BD, CE là ba đường phân giác của ΔABC nên chúng đồng quy.



Hình 194

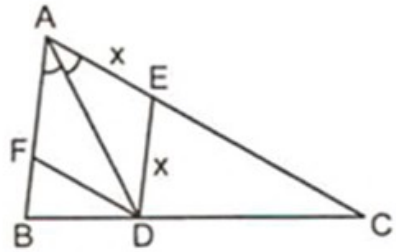
122. (h.195)

Tứ giác AEDF là hình thoi.

Đặt AE = ED = x thì EC = 6 – x.

Vì DE // AB nên $\Delta CDE \backsim \Delta CBA$

$\Rightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{6-x}{6} \Rightarrow x = 2$.



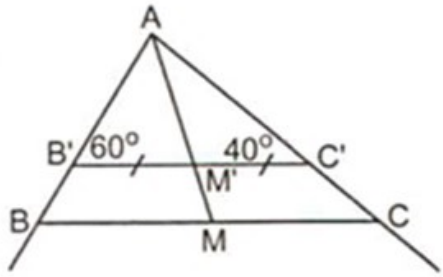
Hình 195

123. (h.196)

– Dựng tam giác AB'C' sao cho $\widehat{B'} = 60^o$; $\widehat{C'} = 40^o$.

– Dựng trung điểm M' của B'C'.

– Dựng đường tròn (A ; 3cm) cắt tia AM' tại M.



Hình 196

– Từ M dựng một đường thẳng song song với B'C' cắt AB' tại B, cắt AC' tại C. ΔABC là tam giác phải dựng.

Bạn đọc tự chứng minh và biện luận.

124. (h.197)

– Dựng tạm hình vuông E'F'G'H' sao cho E' $\in$ AB ; G' và H' $\in$ BC.

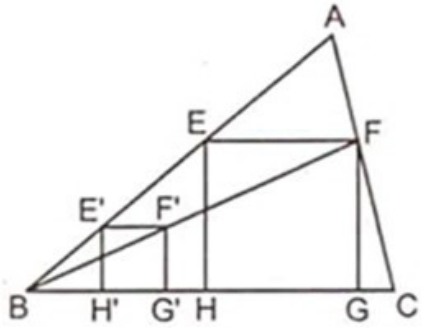
– Dựng giao điểm F của tia BF' với AC.

– Dựng FE // BC (E ∈ AB).

– Dựng EH ⊥ BC ; FG ⊥ BC (H, G ∈ BC).

Tứ giác EFGH là hình vuông phải dựng.

Bạn đọc tự chứng minh và biện luận.



Hình 197

125. (h.198)

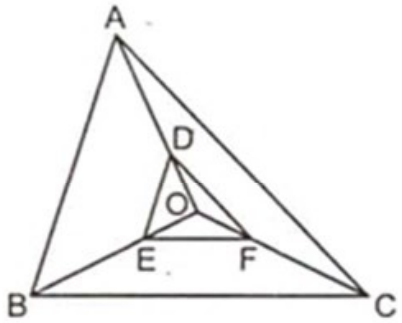
$DE // AB \Rightarrow \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{1}{3}.$ (1)

Tương tự, $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{OF}{OC} = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{1}{3}.$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OF}{OC} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow DF // AC$ và $\dfrac{DF}{AC} = \dfrac{1}{3}.$

$\Delta DEF \backsim \Delta ABC$ (c.c.c) ; $k = \dfrac{1}{3}.$



Hình 198

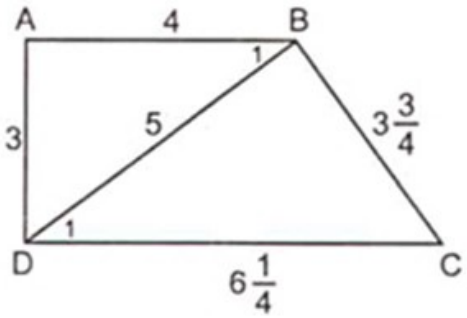
126. (h.199)

$\Delta ABD \backsim \Delta BDC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow AB // CD.$

ΔABD có ba cạnh là 3, 4, 5 nên là tam giác vuông tại A.

Do đó tứ giác ABCD là hình thang vuông.



Hình 199

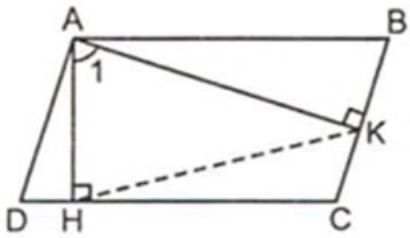
127. $a \,.\, h_a = b \,.\, h_b = c.h_c \ (= 2S) \Rightarrow \dfrac{a.h_a}{bc} = \dfrac{b.h_b}{bc} = \dfrac{c.h_c}{bc} \Rightarrow \dfrac{a.h_a}{a^2} = \dfrac{h_b}{c} = \dfrac{h_c}{b}$

hay $\dfrac{h_a}{a} = \dfrac{h_b}{c} = \dfrac{h_c}{b}$

Vậy tam giác có ba cạnh h_a, h_b, h_c đồng dạng với tam giác ABC.

128. $\Delta BAD \backsim \Delta DBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{DBC} = 90^o \Rightarrow BC \perp BD.$

129. (h.200)



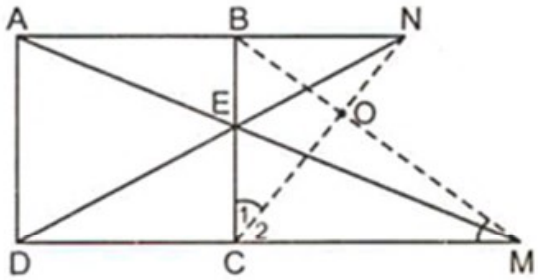
Hình 200

$AH \,.\, AB = AK \,.\, BC \; (= S_{ABCD}) \Rightarrow \dfrac{AH}{BC} = \dfrac{AK}{BA}$.

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta KAH \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

130. (h.201)



Hình 201

$AB \,//\, CM \Rightarrow \dfrac{AB}{CM} = \dfrac{EB}{EC}$; (1)

$BN \,//\, CD \Rightarrow \dfrac{BN}{CD} = \dfrac{EB}{EC}$; (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AB}{CM} = \dfrac{BN}{CD}$. (3)

Mặt khác AB = BC = CD nên từ (3) suy ra $\dfrac{BC}{CM} = \dfrac{BN}{CB}$.

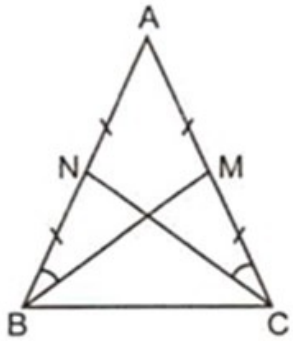
ΔNBC và ΔBCM có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^o$; $\dfrac{BC}{CM} = \dfrac{BN}{CB}$

nên $\Delta NBC \backsim \Delta BCM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{M}$.

Gọi O là giao điểm của BM với CN.

Xét ΔOCM có $\widehat{M} + \widehat{C}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^o \Rightarrow \widehat{O} = 90^o \Rightarrow BM \perp CN$.

131. (h.202)



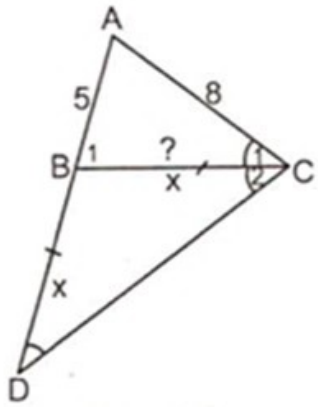
Hình 202

$\Delta ABM \backsim \Delta ACN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AM}{AN}$ (1)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}AB} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BM = CN.

132. (h.203)



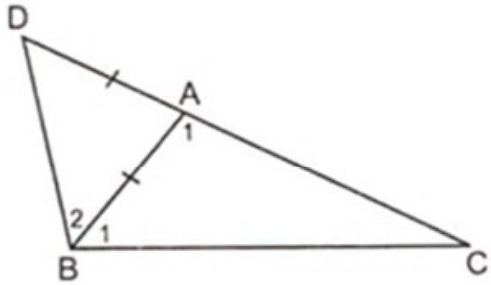
Hình 203

Kéo dài AB một đoạn thẳng BD = BC = x.

$\Delta ABC \backsim \Delta ACD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow \dfrac{5}{8} = \dfrac{8}{5+x} \Rightarrow x = 7,8.$

133. (h.204)



Hình 204

a) Trên tia đối của tia AC lấy điểm D

sao cho AD = AB $\Rightarrow \widehat{A}_1 = 2\widehat{B}_2$.

Mặt khác $\widehat{A}_1 = 2\widehat{B}_1$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{DBC}$.

$\Delta BAC \backsim \Delta DBC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$;

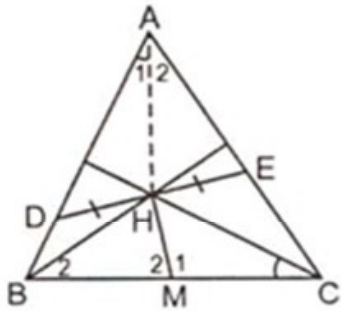
$BC^2 = AC.CD$ hay $a^2 = b(b + c) = b^2 + bc$. (1)

b) Từ $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, chứng minh tương tự ta được $b^2 = c^2 + ca$. (2)

Thay $b^2 = c^2 + ca$ vào (1) ta được :

$a^2 = c^2 + ca + bc = c(a + b + c) \Rightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{a+b+c}{a^2} = \dfrac{a}{a^2} + \dfrac{b+c}{b(b+c)} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}.$

134. (h.205)



Hình 205

Ta có $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$; $\widehat{AHE} = \widehat{M}_2$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta AHE \backsim \Delta BMH$ (g.g)

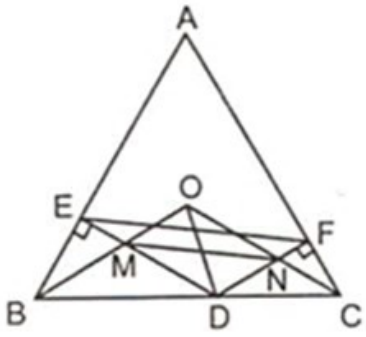
$\Rightarrow \dfrac{AH}{BM} = \dfrac{HE}{HM}$ (1)

Tương tự, $\Delta AHD \backsim \Delta CMH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{CM} = \dfrac{DH}{HM}$ (2)

Vì HD = HE nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AH}{BM} = \dfrac{AH}{CM} \Rightarrow BM = CM.$

135. (h.206)



Hình 206

a) $\Delta MBD \backsim \Delta NCD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DM}{DN} = \dfrac{DB}{DC}$. (1)

$\Delta EBD \backsim \Delta FCD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{DB}{DC}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{DM}{DN} = \dfrac{DE}{DF}$. (3)

b) Từ (3) $\Rightarrow \dfrac{DM}{DE} = \dfrac{DN}{DF} \Rightarrow MN \,//\, EF$.

Tứ giác OMDN là hình bình hành, đường chéo OD chia đôi MN.

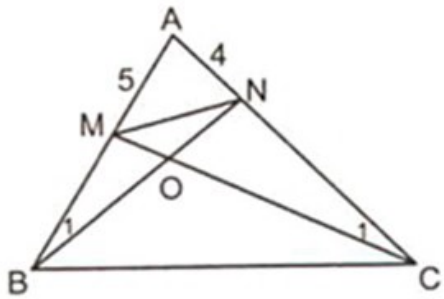
Ba đường thẳng DE, DF, DO đồng quy tại D cắt hai đường thẳng song song MN và EF thành những cặp đoạn thẳng tỉ lệ. OD chia đôi MN nên OD chia đôi EF.

136. (h.207)

a) $\Delta AMN \backsim \Delta ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ACB}$.

Vì $\widehat{AMN} + \widehat{BMN} = 180^o$ nên $\widehat{ACB} + \widehat{BMN} = 180^o$.

Suy ra $\widehat{MBC} + \widehat{MNC} = 180^o$.



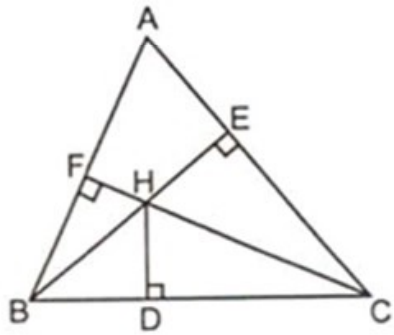
Hình 207

b) $\Delta ABN \backsim \Delta ACM$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$;

$\Delta BOM \backsim \Delta CON$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OM}{ON}$;

$\Rightarrow OB \,.\, ON = OC \,.\, OM$.

137. (h.208)



Hình 208

a) $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF}$

$\Rightarrow AB \,.\, AF = AC \,.\, AE$.

b) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF} \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$; ΔAEF và ΔABC

có $\hat{A}$ chung và $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$

suy ra $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

c) Vẽ HD ⊥ BC.

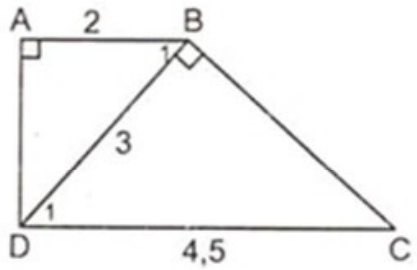
$$\Delta BHD \backsim \Delta BCE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BH \,.\, BE = BC \,.\, BD. \quad (1)$$

$$\Delta CHD \backsim \Delta CBF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{CD}{CF} \Rightarrow CH \,.\, CF = BC \,.\, CD. \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được

$$BH \,.\, BE + CH \,.\, CF = BC\,(BD + CD) = BC^2.$$

138. (h.209)



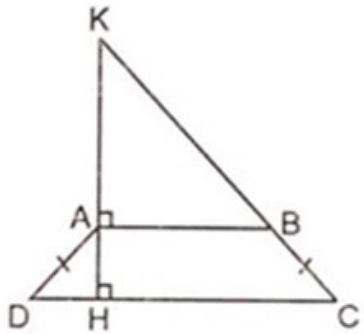
Hình 209

$\Delta ABD \backsim \Delta BDC$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \Rightarrow AB \,//\, CD.$

Vậy tứ giác ABCD là hình thang vuông.

139. (h.210)



Hình 210

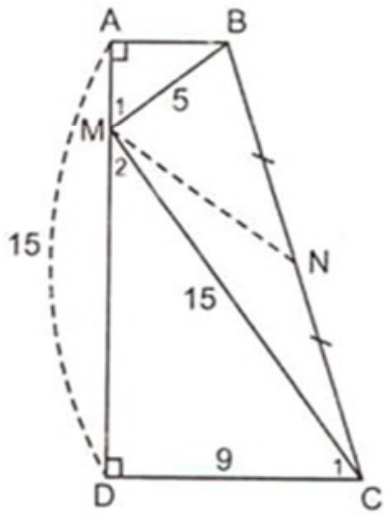
$AB \,//\, HC \Rightarrow \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{BK}{AD}.$

ΔABK và ΔHDA có $\widehat{A} = \widehat{H} = 90^o$

và $\dfrac{AK}{AH} = \dfrac{BK}{AD}$ nên $\Delta ABK \backsim \Delta HDA$

(cạnh huyền, cạnh góc vuông).

140. (h.211)



Hình 211

a) Áp dụng định lí Py-ta-go ta tính được

MD = 12cm ⇒ AM = 3cm.

$\Delta ABM \backsim \Delta DMC$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{C}_1.$

b) Ta có $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{M}_2 = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{BMC} = 90^o.$

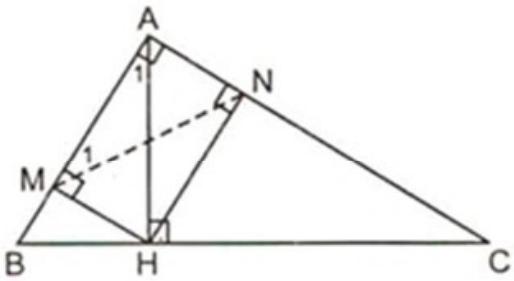
$BC^2 = MB^2 + MC^2 = 5^2 + 15^2 = 250$;

$BC = \sqrt{250}$. Vậy $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{250}$ (cm) (tính chất đường trung tuyến thuộc cạnh huyền).

141. Vì MN // BC nên $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4} \ ; \ \left(\frac{MN}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = 3(cm).$$

142. (h.212)



Hình 212

a) $\Delta AMN \backsim \Delta ACB$ (g.g)

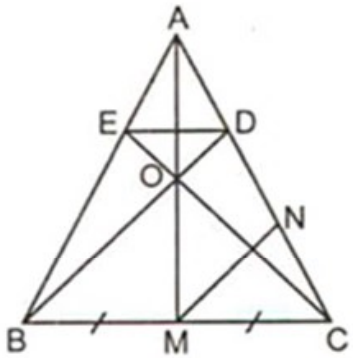
$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow AM \,.\, AB = AN \,.\, AC.$$

b) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \,.\, BC = 5\ (cm^2)$.

Vì $\Delta AMN \backsim \Delta ACB$ nên $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AH}{BC}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{4}{25}.5 = \frac{4}{5}(cm^2) \Rightarrow S_{AMHN} = \frac{8}{5}(cm^2).$$

143. (h.213)



Hình 213

Vẽ MN // BD ($N \in AC$). Vì OA = OM nên AD = DN.

Vì MB = MC nên DN = NC.

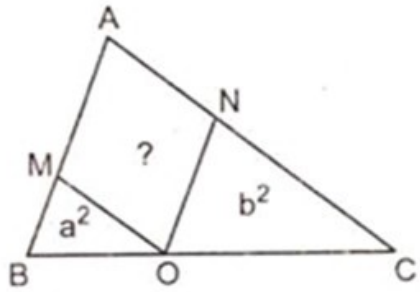
Vậy $AD = DN = NC = \frac{1}{3}AC$.

Chứng minh tương tự được $AE = \frac{1}{3}AB$;

suy ra ED // BC $\Rightarrow \Delta AED \backsim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{ABC} = 9a^2.$$

144. (h.214)



Hình 214

Ta đặt $S_{ABC} = c^2$

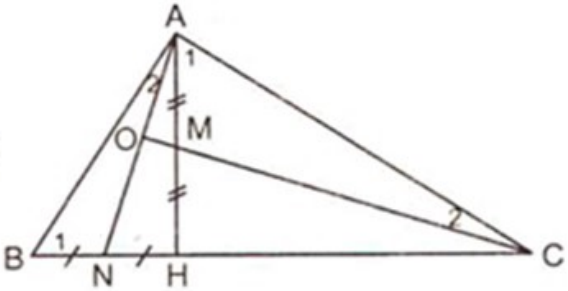
$\Delta MBO \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{a^2}{c^2} = \left(\dfrac{BO}{BC}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{BO}{BC}$. (1)

$\Delta NOC \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{CO}{CB} \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{CO}{CB}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{BO+CO}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1$

$\Rightarrow (a + b)^2 = c^2$ hay $S_{ABC} = (a + b)^2$, do đó diện tích hình bình hành AMON là $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$.

145. (h.215)



Hình 215

a) $\Delta ABH \backsim \Delta CAH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{2BN}{2AM}$ hay $\dfrac{AB}{CA} = \dfrac{BN}{AM}$. (1)

Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta ABN \backsim \Delta CAM$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$.

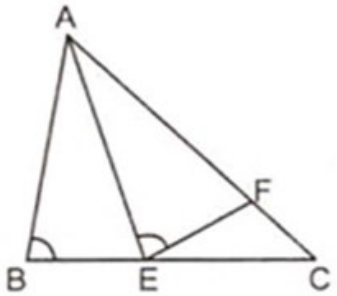
Xét tam giác CAO có $\widehat{CAO} + \widehat{C}_2 = \widehat{CAO} + \widehat{A}_2 = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{O} = 90^o$. Vậy $AN \perp CM$.

b) $\Delta AOM \backsim \Delta CHM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{MO}{MH}$

$\Rightarrow AM.MH = MC.MO \Rightarrow \dfrac{AH}{2}.\dfrac{AH}{2} = MC.MO$ hay $AH^2 = 4.MC.MO$.

146. (h.216)



Hình 216

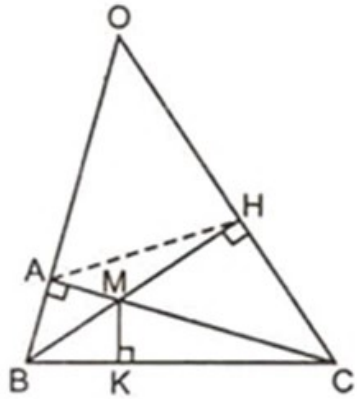
$\widehat{AEC} > \widehat{B}$ (tính chất góc ngoài của tam giác ABE).

Trên AC ta lấy điểm F sao cho $\widehat{AEF} = \widehat{B}$

$\Rightarrow AF < AC$.

$\Delta AEF \backsim \Delta ABE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AE} \Rightarrow AB.AF = AE^2 \Rightarrow AB.AC > AE^2$.

147. (h.217)



Hình 217

a) $\Delta BOH \backsim \Delta COA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OH}{OA} \Rightarrow OA.OB = OC.OH$.

b) $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OH}{OA} \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OH}{OB}$ (1)

ΔOHA và ΔOBC có $\widehat{O}$ chung (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta OHA \backsim \Delta OBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{OBC}$ (không đổi).

c) Vẽ $MK \perp BC$.

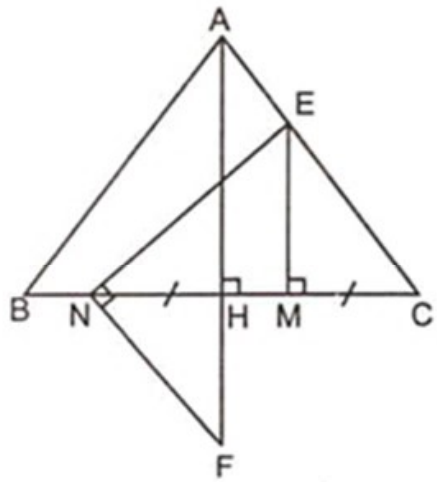
$\Delta BKM \backsim \Delta BHC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BK}{BH} \Rightarrow BM \,.\, BH = BC \,.\, BK$ (3)

$\Delta CKM \backsim \Delta CAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CK}{CA} \Rightarrow CM \,.\, CA = BC \,.\, CK$ (4)

Cộng từng vế của (3) và (4) được

$BM.BH + CM.CA = BC.BK + BC.CK = BC(BK + CK) = BC^2$ (không đổi).

148. (h.218)



Hình 218

Dễ thấy $CH = MN = \dfrac{1}{2}BC$.

$\Delta HFN \backsim \Delta MNE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HF}{MN} = \dfrac{HN}{ME} = \dfrac{CM}{ME}$. (1)

$\Delta AHC \backsim \Delta EMC$ (g.g)

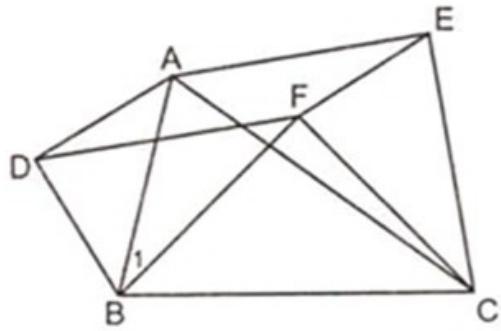
$\Rightarrow \dfrac{AH}{EM} = \dfrac{CH}{CM} \Rightarrow \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{CM}{ME}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{HF}{MN} = \dfrac{CH}{AH}$.

Do đó $HF = \dfrac{MN.CH}{AH} = \dfrac{\frac{1}{2}BC.\frac{1}{2}BC}{AH} = \dfrac{BC^2}{4AH}$ (không đổi).

Vì H cố định nên F cố định.

149. (h.219)



Hình 219

• Nếu $\widehat{BAC} \neq 90^o$; $\Delta BAD \backsim \Delta BCF$

(hai tam giác vuông cân đồng dạng với nhau)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BF} = \dfrac{BA}{BC} \Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BF}{BC}$.

Mặt khác $\widehat{DBF} = \widehat{ABC}$ $(= 45^o + \hat{B}_1)$

$\Rightarrow \Delta BDF \backsim \Delta BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BAC}$

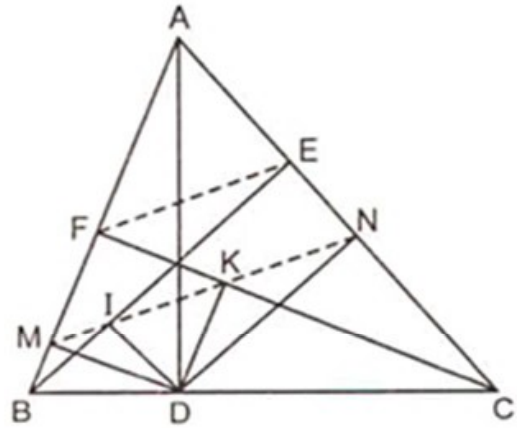
Chứng minh tương tự, $\Delta FEC \backsim \Delta BAC \Rightarrow \widehat{FEC} = \widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{DAE} + \widehat{ADF} = (90^o + \widehat{BAC}) + (90^o - \widehat{BDF}) = 180^o \Rightarrow AE \,//\, DF$.

Chứng minh tương tự ta được AD // EF. Vậy AEFD là hình bình hành.

• Bạn đọc hãy chứng minh nếu $\widehat{BAC} = 90^o$ thì 4 điểm A, E, F, D thẳng hàng.

150. (h.220)



Hình 220

Vì DM // CF và DI // CA

nên $\dfrac{BM}{BF} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BI}{BE} \Rightarrow MI \,//\, FE.$ (1)

Vì DN // BE và DK // AB

nên $\dfrac{CN}{CE} = \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{CK}{CF} \Rightarrow NK \,//\, FE.$ (2)

$\Delta AMD \backsim \Delta ADB \Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AD}{AB}$. (3)

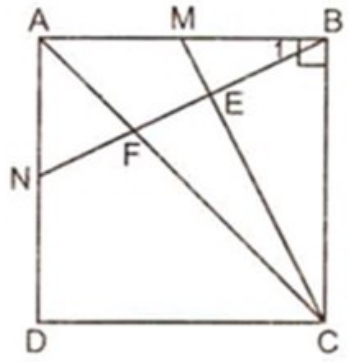
$\Delta AND \backsim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AD}{AC}$. (4)

Chia từng vế của (3) cho (4) ta được $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AC}{AB}$.

$\Delta ACF \backsim \Delta ABE \Rightarrow \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$ do đó $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AF}{AE}$ suy ra MN // FE. (5)

Từ (1), (2), (5) suy ra bốn điểm M, N, I, K thẳng hàng.

151. (h.221)



Hình 221

$\Delta ABN = \Delta BCM$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$ dẫn tới $BN \perp CM$.

ΔABN vuông tại A, AB = 30 ; AN = 15

$\Rightarrow BN^2 = 1125$.

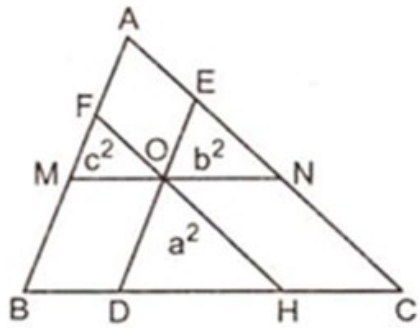
$\Delta BEM \backsim \Delta BAN \Rightarrow \dfrac{S_{BEM}}{S_{BAN}} = \left(\dfrac{BM}{BN}\right)^2 = \dfrac{225}{1125} = \dfrac{1}{5}$.

$S_{BAN} = \dfrac{1}{2}.30.15 = 225 \Rightarrow S_{BEM} = 225.\ \dfrac{1}{5} = 45\ (cm^2)$.

$\Delta AFN \backsim \Delta CFB \Rightarrow \dfrac{FN}{FB} = \dfrac{AN}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow FN = \dfrac{1}{2}BF = \dfrac{1}{3}BN$

do đó $S_{AFN} = \dfrac{1}{3}S_{ABN} = \dfrac{1}{3}.225 = 75\ (cm^2)$.

152. (h.222)



Hình 222

a) Đặt tên các tam giác nhỏ và kí hiệu diện tích của chúng như trong hình 222. Dễ thấy các tam giác ODH, EON, FMO đồng dạng với ΔABC. Đặt $S_{ABC} = d^2$.

Ta có $\dfrac{a^2}{d^2} = \left(\dfrac{DH}{BC}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{a}{d} = \dfrac{DH}{BC}$; (1)

$\dfrac{b^2}{d^2} = \left(\dfrac{ON}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{HC}{BC}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{b}{d} = \dfrac{HC}{BC}$; (2)

$\dfrac{c^2}{d^2} = \left(\dfrac{MO}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{BD}{BC}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{c}{d} = \dfrac{BD}{BC}$; (3)

Cộng từng vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{DH+HC+BD}{BC} = 1 \Rightarrow a + b + c = d. \text{ Vậy } S = d^2 = (a + b + c)^2.$$

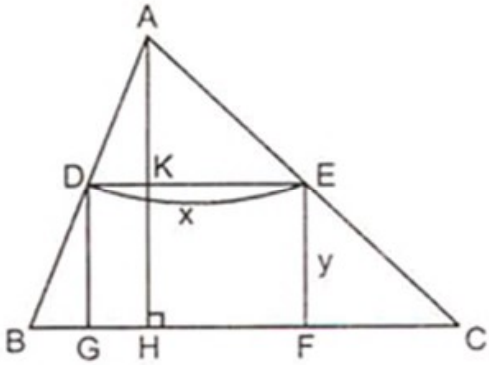
b) $S = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$$\leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ O trùng với trọng tâm G của ΔABC).

153. (h.223)

Hình chữ nhật DEFG được xác định nếu ta biết vị trí của một trong bốn đỉnh, chẳng hạn đỉnh D.



Hình 223

Giả sử DE cắt đường cao AH tại K.

Đặt DE = x ; EF = y ; AH = h thì AK = h – y.

$$\Delta ADE \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{x}{BC} = \frac{h-y}{h}$$

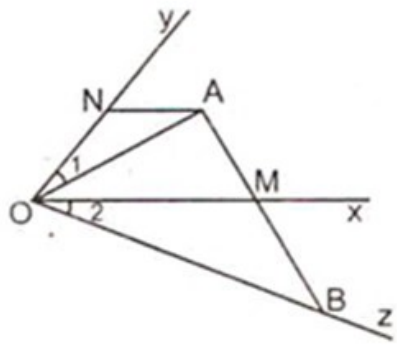
$$\Rightarrow x = BC \,.\, \frac{h-y}{h}.$$

$S_{DEFG} = x \,.\, y = \left(BC.\frac{h-y}{h}\right).y$; vì BC và h không đổi nên S_{DEFG} lớn nhất $\Leftrightarrow (h - y).y$ lớn nhất.

Hai số h – y và y có tổng bằng h (không đổi) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau, tức là h – y = y hay $y = \frac{h}{2}$. Lúc đó DE là đường trung bình của ΔABC.

154. (h.224)

Vẽ tia Oz sao cho Oz và Oy thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia Ox và $\widehat{xOz} = \widehat{AOy}$.



Hình 224

Trên tia Oz lấy điểm B sao cho OB = 2OA.

Vậy B là một điểm cố định.

$\Delta AON \backsim \Delta BOM$ (vì $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ và $\frac{OA}{OB} = \frac{ON}{OM} = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{1}{2} \Rightarrow BM = 2AN.$

Ta có $AM + 2AN = AM + BM \geq AB$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ A, M, B thẳng hàng), lúc đó min $(AM + 2AN) = AB$.

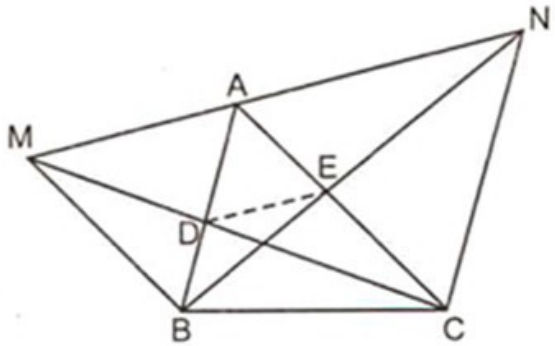
Cách dựng :

– Dựng tia Oz trên đó lấy điểm B như trên.

– AB cắt Ox tại M.

– Trên tia Oy lấy điểm N sao cho $ON = \frac{1}{2}OM$; M và N là các điểm cần dựng.

155. (h.225)



Hình 225

a) $BM \,//\, AC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{MB}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{AC}{AC + MB}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AC + AB}.$ (1)

$CN \,//\, AB \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CN} \Rightarrow \frac{AE}{AE + EC} = \frac{AB}{AB + CN}$

$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AC + AB}.$ (2)

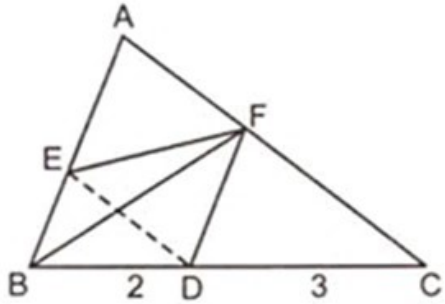
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AD = AE.$

Vì $\widehat{BAC} = 60^o$ nên ΔADE là tam giác đều.

b) Theo chứng minh trên, $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{MB} = \frac{AC}{AB}$ (3) ; $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CN} = \frac{AB}{AC}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow AD^2 = DB \,.\, EC = 4.9$; $AD = 6 \Rightarrow DE = 6.$

156. (h.226)



Hình 226

$S_{FBC} = S_{CDEF} \Rightarrow S_{BFD} + S_{CFD} = S_{EFD} + S_{CFD}$

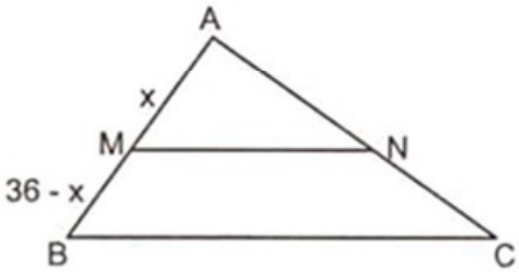
$\Rightarrow S_{BFD} = S_{EFD}$

$\Rightarrow$ B và E cách đều đường thẳng FD $\Rightarrow$ BE // DF

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CF} = \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{5}{3}$ (định lí Ta-let)

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{5}{3}S_{FBC} = \dfrac{5}{3}.9 = 15\ (cm^2)$.

157. (h.227)



Hình 227

Áp dụng định lí Py-ta-go ta tính được BC = 60.

Đặt AM = x thì BM = 36 – x.

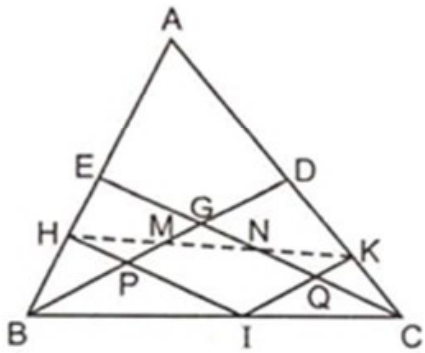
$MN // BC \Rightarrow \dfrac{MN}{60} = \dfrac{x}{36} \Rightarrow MN = \dfrac{60x}{36}$;

$\dfrac{CN}{CA} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow CN = \dfrac{CA.BM}{BA} = \dfrac{48.(36-x)}{36}$.

Ta có phương trình $\dfrac{60x}{36} = (36-x) + \dfrac{48(36-x)}{36}$.

Giải ra được x = 21 $\Rightarrow$ MN = 35.

158. (h.228)



Hình 228

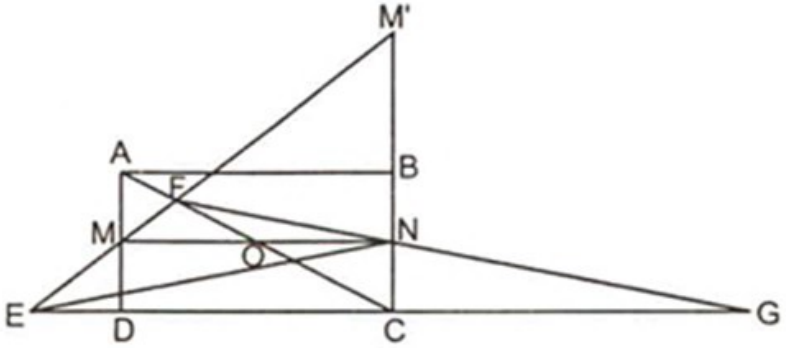
Gọi M và N là giao điểm của HK với BD và CE ; P là giao điểm của IH với BD ; Q là giao điểm của IK với CE.

Xét MP // IK và IH // CE ta có

$\dfrac{HM}{HK} = \dfrac{HP}{HI} = \dfrac{EG}{EC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HM = \dfrac{1}{3}HK$.

Chứng minh tương tự ta được $KN = \dfrac{1}{3}HK$ suy ra $HM = KN = MN = \dfrac{1}{3}HK$.

159. (h.229)



Hình 229

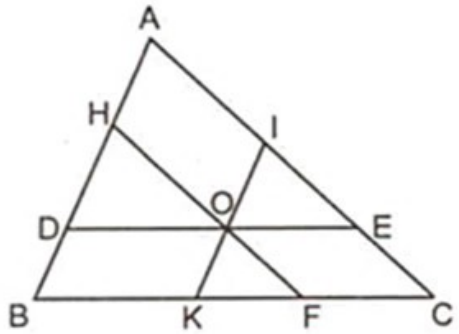
a) Gọi O là giao điểm của MN với AC.

Dễ thấy MN // CD và OM = ON.

Ba đường thẳng FE, FC, FG đồng quy tại F, cắt hai đường thẳng MN // EG thành những cặp đoạn thẳng tỉ lệ từ đó suy ra CE = CG.

b) Dễ thấy ΔNEG cân, đường thẳng NM' là đường phân giác của góc ENG. Mặt khác NM ⊥ NM' nên NM là đường phân giác của góc ENF. Xét ΔNEF có NM và NM' là các đường phân giác trong và ngoài tại đỉnh N nên $\frac{ME}{MF} = \frac{M'E}{M'F} = \frac{NE}{NF}$.

160. (h.230)



Hình 230

a) Dễ thấy các tam giác HDO ; IOE, OKF đồng dạng với nhau suy ra

$$\frac{OD}{OE} = \frac{DH}{OI}; \qquad (1)$$

$$\frac{OF}{OH} = \frac{OK}{HD}; \qquad (2)$$

Mặt khác ta luôn có $\frac{OI}{OK} = \frac{OI}{OK}$. (3)

Nhân từng vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\frac{OD}{OE}.\frac{OF}{OH}.\frac{OI}{OK} = \frac{DH}{OI}.\frac{OK}{HD}.\frac{OI}{OK} = 1.$$

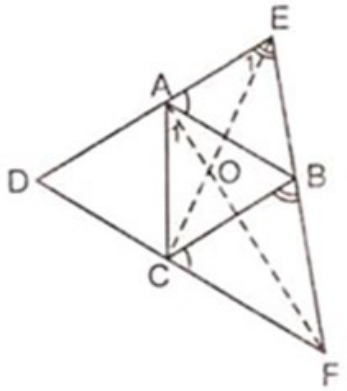
b) $\Delta IOE \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{IO}{AB} = \frac{IE}{AC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{IE}{AC}$ (1)

$IK // AB \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{AI}{AC}$ (2) ; $\frac{CE}{CA} = \frac{CE}{CA}$ (3)

Cộng từng vế các đẳng thức (1), (2), (3)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB}+\frac{BK}{BC}+\frac{CE}{CA}=\frac{IE+AI+CE}{AC}=\frac{AC}{AC}=1.$$

161. (h.231)



Hình 231

a) $\Delta AEB \backsim \Delta CBF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{CB}=\frac{AB}{CF}$

$\Rightarrow AE \,.\, CF = AB^2$ (1) (không đổi).

b) ΔABC là tam giác đều.

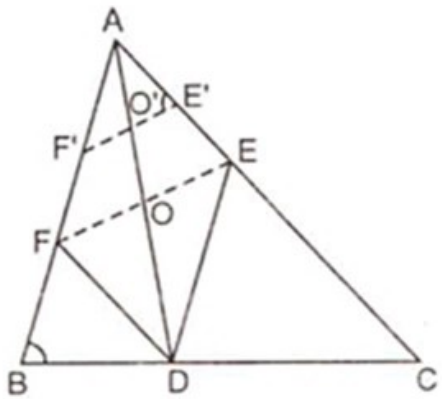
Từ (1) $\Rightarrow AE \,.\, CF = AC^2 \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AC}{CF}$.

Mặt khác $\widehat{EAC} = \widehat{ACF}$ (= 120°) nên $\Delta AEC \backsim \Delta CAF$ (c.g.c).

c) Ta có $\hat{E}_1 = \hat{A}_1$ (cặp góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng).

Xét ΔEOF có $\widehat{EOF} = \hat{E}_1 + \widehat{OAE} = \hat{A}_1 + \widehat{OAE} = \widehat{EAC} = 120^o$ (không đổi).

162. (h.232)



Hình 232

– Dựng tạm $\Delta AE'F'$ sao cho $E' \in AC$; $F' \in AB$; $\hat{E}' = \hat{B}$.

– Dựng trung điểm O' của đoạn thẳng E'F'. Tia AO' cắt BC tại D.

– Dựng DE // AB ($E \in AC$) và DF // AC ($F \in AB$).

Tứ giác AEDF là hình bình hành phải dựng.

Bạn đọc tự giải nốt các bước còn lại.

Chương IV

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU

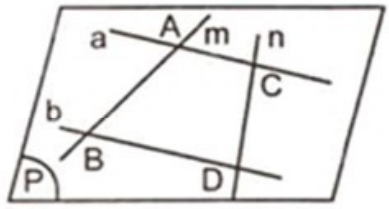
163. (h.233)

Vì a // b nên a và b cùng nằm trong mặt phẳng, chẳng hạn mp(P).

A ∈ a ; C ∈ a mà a ⊂ mp(P) nên A, C ∈ mp(P).

B ∈ b ; D ∈ b mà b ⊂ mp(P) nên B, D ∈ mp(P).

Cả bốn điểm A, B, C, D đều thuộc mp (P) nên mp (A,B,C) đi qua D.

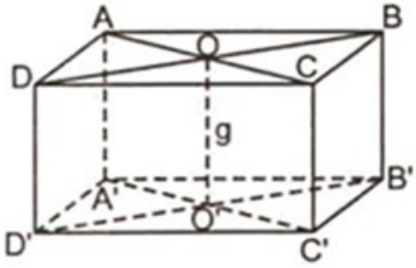


Hình 233

164. (h.234)

a) mp(ABCD) và mp (ACC'A') có hai điểm chung là A và C nên chúng cắt nhau theo giao tuyến AC.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD ; gọi O' là giao điểm của A'C' và B'D' ; mp(BDD'B') và mp(ACC'A') có hai điểm chung là O và O' nên chúng cắt nhau theo giao tuyến OO'.



Hình 234

c) g song song với AA', BB', CC', DD'.

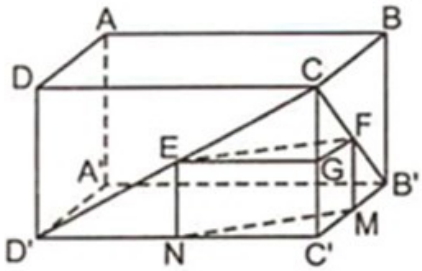
g // mp(ABB'A') ; g // mp(CDD'C') ; g // (BCC'B') ; g // mp(ADD'A').

165. (h.235)

a) EN // FM và EN = FM (vì cùng song song với CC' và bằng nửa CC') suy ra EFMN là hình bình hành.

b) CC' không nằm trong mp (EFMN) ; CC'// EN nên CC'// mp (EFMN) ; EG//C'D' ; FG // B'C' ⇒ mp(EFG) // mp(A'B'C'D').

c) Ta có EG // C'D' mà CC'⊥ C'D' nên CC'⊥ EG.



Hình 235

Tương tự, $CC' \perp FG$. Vậy $CC' \perp$ mp (EFG).

$CC' \subset$ mp(CC'D') mà $CC' \perp$ mp(EFG) nên mp(CC'D') $\perp$ mp(EFG).

166. Gọi cạnh của hình lập phương là a.

Ta có $3a^2 = 5^2 = 25$ (cm^2). $S_{tp} = 6a^2 = 25.2 = 50$ (cm^2).

167. (h.236)

$AA' \perp A'C'$ mà $\widehat{AC'A'} = 30^o$ nên $AA' = \frac{1}{2}AC' = 5$.

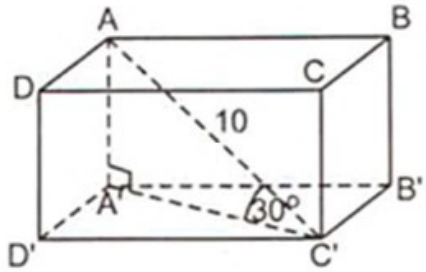
Ta có $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$

$10^2 = 7^2 + 5^2 + AD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{26}$.

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2(7 + \sqrt{26}).5 + 7.\sqrt{26}.2$

$\approx 192,4$ (đvdt).

$V = abc = 7.5.\sqrt{26} \approx 178,5$ (đvtt).



Hình 236

168. Gọi ba kích thước là a, b, c ; độ dài đường chéo là d.

Ta có $a + b + c = 19$ (1) và $2ab + 2bc + 2ca = 192$.

Bình phương hai vế của (1) ta được $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 361$.

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 192 = 361$; $a^2 + b^2 + c^2 = 169$ do đó $d^2 = 169$; $d = 13$.

169. a) Vì $512 = 8^3$ nên có thể xếp 512 hình lập phương đơn vị thành hình lập phương cạnh dài 8 đơn vị.

b) Cần phải thêm $10^3 - 8^3 = 488$ hình lập phương đơn vị.

c) Có 8 hình lập phương đơn vị được sơn ba mặt (ở 8 đỉnh).

Có $8 . 12 = 96$ hình lập phương được sơn đúng hai mặt (nằm dọc theo các cạnh, không kể các hình lập phương ở 8 đỉnh).

Có $6 . 8 = 48$ hình lập phương được sơn chỉ một mặt.

170. Những khối lập phương không có mặt nào được sơn thì tạo thành một hình lập phương cạnh $n - 2$ đơn vị (hình lập phương này có được bằng cách loại bỏ hết các khối lập phương đơn vị ở lớp ngoài cùng). Do đó có tất cả $(n - 2)^3$ khối lập phương nhỏ không được sơn mặt nào.

Các khối lập phương được sơn chỉ một mặt là các khối lập phương đơn vị thuộc lớp ngoài cùng nhưng không nằm dọc theo các cạnh của khối lập phương ban đầu, có tất cả $6(n-2)^2$ khối lập phương nhỏ như thế. Ta có phương trình: $(n-2)^3 = \frac{2}{3}.6(n-2)^2$

$$\Leftrightarrow (n-2)^2.(n-6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \text{ (thoả mãn)} \\ n = 2 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

171. (h.69)

a) Mỗi hình vuông đơn vị ở mặt ngoài bị đục đi thì làm xuất hiện bốn hình vuông đơn vị ở mặt trong. Do đó tổng diện tích ở mặt ngoài và mặt trong là : $6.3^2 - 6 + 6.4 = 72(dm^2)$.

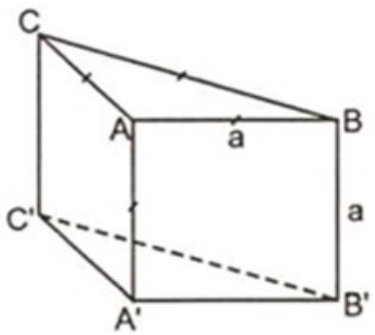
b) 7 : 20 = 35%.

172. a) (h.237)

$S_{xq} = 2ph = 3a.\ a = 3a^2$.

$$S_{tp} = 3a^2 + \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}.2 = 3a^2 + \frac{a^2.\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2(6+\sqrt{3})}{2}.$$

$$V = S.\ h = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3.\sqrt{3}}{4}.$$



Hình 237

b) Có thể vẽ như hình 238.

173. Gọi số cạnh đáy của lăng trụ đó là n thì số mặt là n + 2 ; số đỉnh là 2n, số cạnh là 3n. Theo đề bài ta có (n + 2) + 2n + 3n = 20 ; n = 3 ; đáy là một tam giác đều.

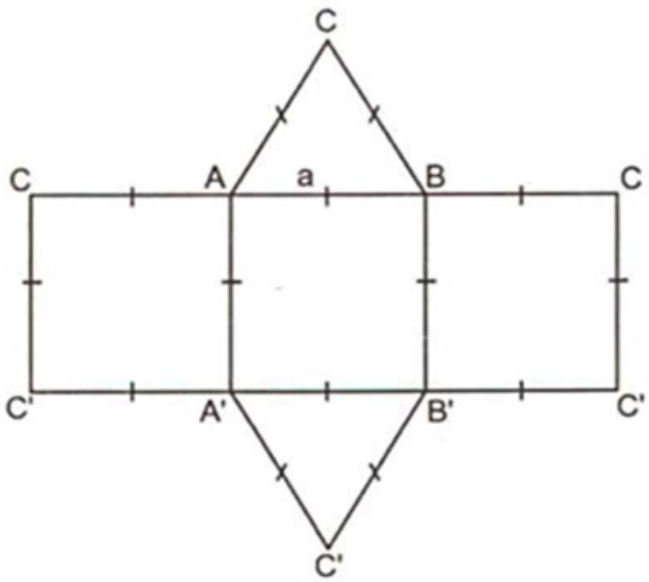
$S_{xq} = 2p.h$

$$\Rightarrow 2p = \frac{S_{xq}}{h} = \frac{360}{12} = 30(cm).$$

Độ dài mỗi cạnh đáy là

30 : 3 = 10(cm).

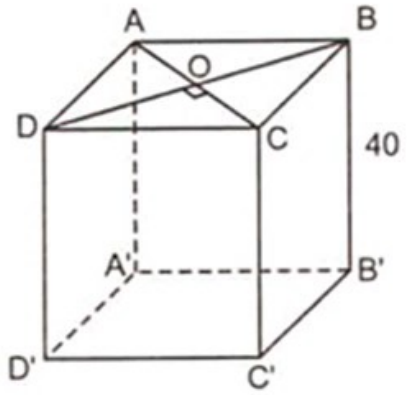
$$V = S.h = \frac{10^2.\sqrt{3}}{4}.12 = 300\sqrt{3}\ (cm^2).$$



Hình 238

174. (h.239).

Hình 72 là hình khai triển của lăng trụ đứng ở hình 239 trong đó đáy ABCD là hình thoi.



Hình 239

Áp dụng định lí Py-ta-go tính được

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 8^2 + 15^2 = 289$;

$AB = 17$(cm).

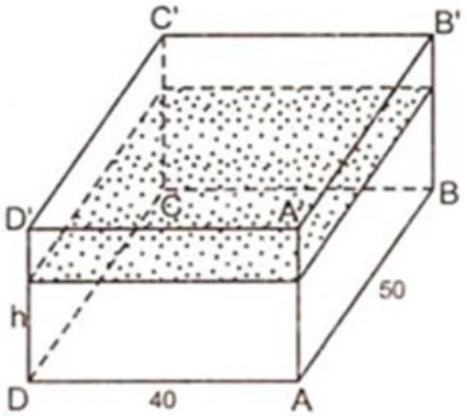
$S_{xq} = 2p.h = 4.17.40 = 2720$ (cm^2).

$V = S.h = \frac{1}{2}.16.30.40 = 9600$ (cm^3).

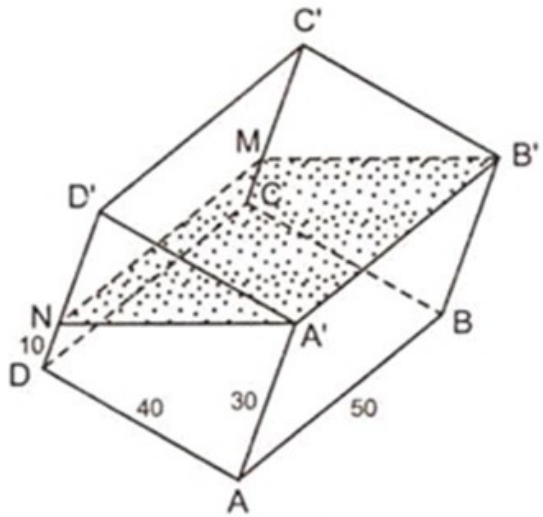
175. (h.240a, b)

Gọi h là độ sâu của nước khi đáy bể nằm ngang.

Thể tích của nước trong bể là thể tích của một hình hộp chữ nhật có thể tích là V = 40.50.h



Hình 240a



Hình 240b

Khi bể cá bị nghiêng đi, thể tích nước là thể tích của một hình lăng trụ đứng, có chiều cao là 50 cm và đáy là một hình thang vuông. Thể tích đó là $V = \frac{1}{2}\cdot(30 + 10).40.50$.

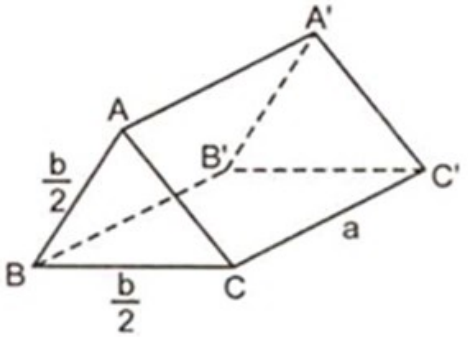
Vì thể tích nước không đổi nên ta có phương trình

$$40.50.h = \frac{1}{2}\cdot(30 + 10).40.50 \Rightarrow h = 20.$$

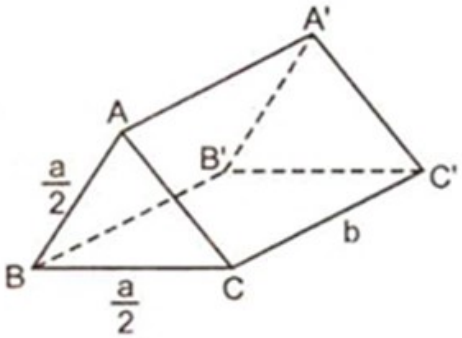
Vậy thể tích nước trong bể cá là $V = 40.50.20 = 40000$ (cm^3) $= 40$ (dm^3).

176. Xét hai trường hợp :

Trường hợp cạnh tấm bạt có độ dài a áp sát đất (h.241a) và trường hợp cạnh tấm bạt có độ dài b áp sát đất (h.241b).



Hình 241a



Hình 241b

Diện tích BCC'B' trong trường hợp thứ nhất là $S_1 = a.\frac{b}{2} = \frac{ab}{2}$

trong trường hợp thứ hai là $S_2 = b.\frac{a}{2} = \frac{ab}{2}$. Vậy $S_1 = S_2$.

Thể tích ABC.A'B'C' trong trường hợp thứ nhất

$$V_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.a = \frac{b.(ab\sqrt{3})}{16}. \qquad (1)$$

trong trường hợp thứ hai $\quad V_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.b = \frac{a.(ab\sqrt{3})}{16}. \qquad (2)$

Vì a > b nên từ (1) và (2) $\Rightarrow V_2 > V_1$.

177. (h.242)

a) $AB \perp CM$; $AB \perp SM \Rightarrow AB \perp mp\ (SCM)$

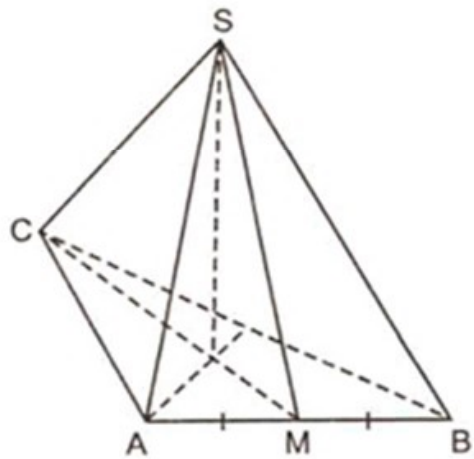
$AB \subset mp\ (SAB) \Rightarrow mp(SAB) \perp mp\ (SMC)$.

b) $AM^2 = SA^2 - SM^2 = 29 - 25 = 4$

$AM = 2 \Rightarrow AB = 4$ (cm).

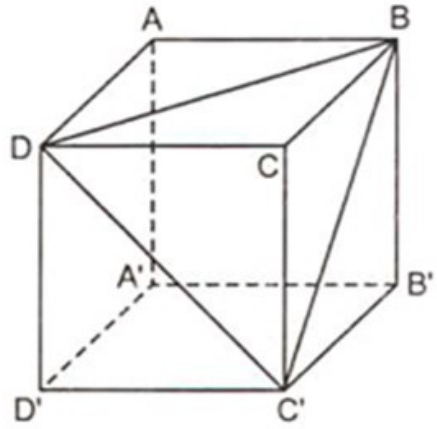
$S_{xq} = pd = \frac{1}{2}.3.4.5 = 30\ (cm^2)$.

$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 30 + \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 30 + 4\sqrt{3}\ (cm^2)$.



Hình 242

178. (h.243)



Hình 243

a) Gọi cạnh của hình lập phương là a, suy ra $BD = BC' = C'D = a\sqrt{2}$. Vậy $\Delta BC'D$ là tam giác đều.

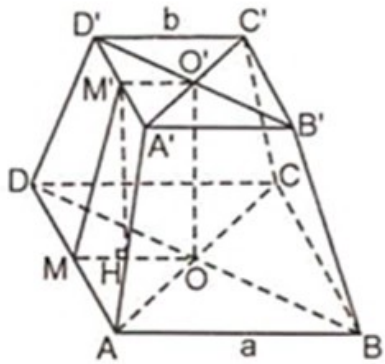
Hình chóp C.C'BD có đáy là đa giác đều và tất cả các cạnh bên bằng nhau (bằng a) nên hình chóp đó là hình chóp đều.

b) Diện tích xung quanh của hình chóp C.C'BD là $(\frac{1}{2}.a.a).3 = \frac{3}{2}a^2$.

Diện tích đáy của hình chóp đó là $\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Tỉ số cần tìm là $\frac{3}{2}a^2 : \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

179. (h.244).



Hình 244

Gọi h là chiều cao của hình chóp cụt, d là trung đoạn,

ta có $d^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{4(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)}.$$

$S_{xq} = (p+p')d = 2(a+b).\frac{a^2+b^2}{2(a+b)} = a^2 + b^2$ = tổng diện tích hai đáy.

180. (h.245)

a) $V = \frac{1}{3}S.h \Rightarrow S = \frac{3V}{h} = \frac{3.1280}{15} = 256\ (cm^2)$.

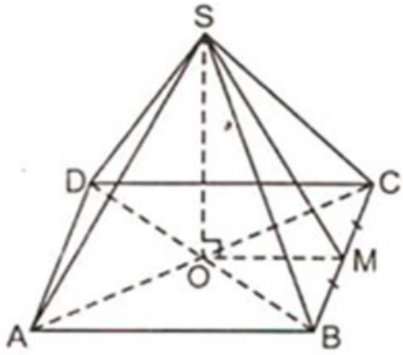
Độ dài cạnh đáy là $a = \sqrt{256} = 16\ (cm)$.

b) Gọi M là trung điểm của BC ; SM là trung đoạn của hình chóp.

$SM^2 = SO^2 + OM^2 = 15^2 + 8^2 = 289$

$SM = 17$ (cm).

$S_{xq} = p.d = 16.2.17 = 544$ (cm^2).



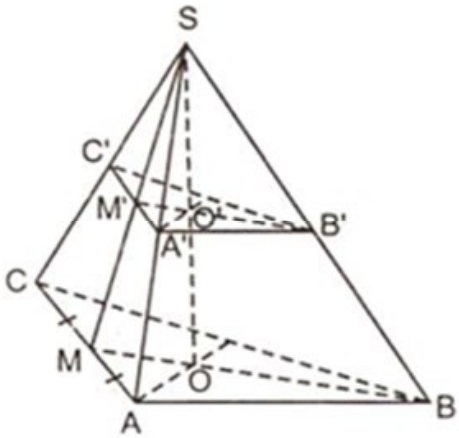
Hình 245

181. (h.246)

a) Ta có A'B' // AB ; A'C' // AC (đường trung bình của tam giác). Suy ra mp(A'B'C') // mp(ABC). Vì S.ABC là hình chóp đều nên A'B'C'.ABC là hình chóp cụt đều.

b) $AB = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.\sqrt{3} = 12$ (cm).

Vẽ đường cao SO của hình chóp S.ABC. Gọi M là trung điểm của AC.



Hình 246

Ta có $OA = OB = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\left(12.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}$ (cm).

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 8^2 - (4\sqrt{3})^2 = 16 ;\ SO = 4 \text{ (cm)}.$$

Đoạn thẳng SM cắt A'C' tại M'. Ta chứng minh được M' là trung điểm của SM và của A'C'.

Xét ΔSMB có B'M' // BM $\Rightarrow \frac{SO'}{SO} = \frac{SB'}{SB} = \frac{1}{2}$. Vì SO = 4 cm nên SO' = 2 (cm).

Thể tích của hình chóp S.ABC là $V_1 = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.\left(12^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\right).4 = 48\sqrt{3}$ (cm^3).

Thể tích hình chóp S.A'B'C' là $V_2 = \frac{1}{3}S'h' = \frac{1}{3}\left(6^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\right).2 = 6\sqrt{3}$ (cm^3).

Thể tích hình chóp cụt đó là $V = V_1 - V_2 = 48\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 42\sqrt{3}$ (cm^3).

182. Mỗi một hình lập phương đơn vị ở đỉnh bị đục bỏ đi thì làm mất đi ba hình vuông đơn vị ở ba mặt nhưng lại xuất hiện thêm ba hình vuông đơn vị do đó diện tích toàn phần của khối gỗ không đổi.

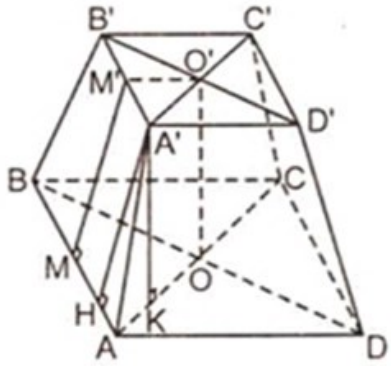
$$S_{tp} = 6n^2 ; \qquad V = n^3 - 8.$$

183. Có thể coi thể tích của khối bê tông là tổng thể tích của hai hình lăng trụ đứng, mỗi lăng trụ có đáy là một hình thang, chiều cao bằng 0,15 m (h.78).

$$V = \left[\frac{(219+218).2,4}{2} + \frac{(213+210).2,4}{2}\right].0,15 = 154,8\ (m^3).$$

Thể tích sỏi là $154,8.\frac{50}{100} = 77,4\ (m^3)$.

184. (h.247)



Hình 247

a) $S_{xq} = (p + p')\,d \Rightarrow d = \frac{S_{xq}}{p+p'} = \frac{6a^2}{6a} = a$.

Cạnh bên của hình chóp cụt là

$$AA' = \sqrt{A'H^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

b) Chiều cao của hình chóp cụt là

$$OO' = A'K = \sqrt{AA'^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c) Thể tích hình chóp cụt là $V = \frac{1}{3}\left(S + S' + \sqrt{S.S'}\right).h$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\left(4a^2 + a^2 + 2a^2\right) = \frac{7a^3\sqrt{3}}{6}.$$

185. (h.248)

a) Dùng định lí đường trung bình của tam giác, của hình thang và tiên đề Ơ-clit ta chứng minh được bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

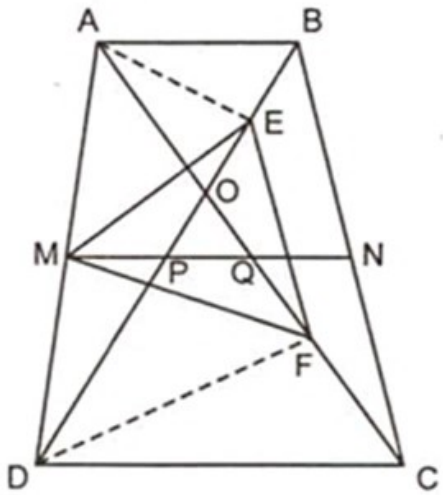
b) Dễ thấy các tam giác OCD và OAB là những tam giác đều ; MN // CD nên ΔOPQ đều.

$AE \perp OB$; $DF \perp OC \Rightarrow EM = FM = \frac{1}{2}AD$

(đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông).

$EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD \Rightarrow EM = FM = EF$

$\Rightarrow \Delta EFM$ đều.



Hình 248

c) ΔOCD đều $\Rightarrow$ đường cao $OH = \frac{CD\sqrt{3}}{2}$;

ΔOAB đều $\Rightarrow$ đường cao $OK = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Do đó hình thang ABCD có đường cao là

$$HK = \frac{(AB+CD)\sqrt{3}}{2} = MN.\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)} ;$$

$$S_{ABCD} = MN.HK = 4.4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}. \quad S_{xq} = 16\sqrt{3}.5 = 80\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

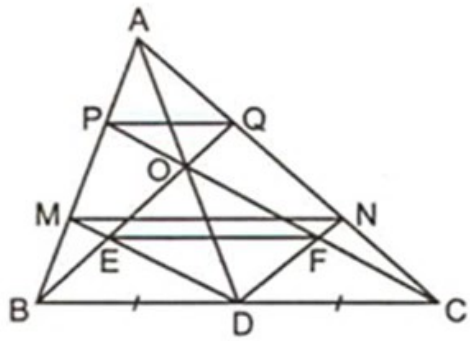
186. (h.249)

a) DE là đường trung bình của ΔBCO

$\Rightarrow DE \,//\, CO$. Tương tự, $DF \,//\, BO$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MP} = \frac{NA}{NQ} \left(= \frac{DA}{DO}\right) \qquad (1)$$

$\Rightarrow PQ \,//\, MN.$ (2)



Hình 249

b) Dễ thấy $MP = MB$; $NQ = NC$.

Thay vào (1) ta được $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} \Rightarrow MN \,//\, BC.$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow PQ \,//\, BC \Rightarrow$ PQCB là hình thang và MN là đường trung bình, từ đó suy ra đpcm.

187. (h.250)

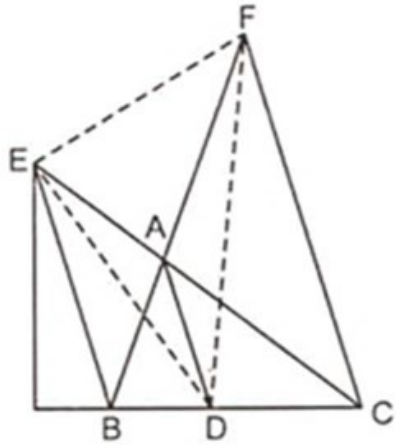
a) Theo hệ quả định lí Ta-let ta có $\frac{AD}{BE} = \frac{CD}{CB}$; $\frac{AD}{CF} = \frac{BD}{BC}$.

Cộng từng vế ta được

$$\frac{AD}{BE}+\frac{AD}{CF}=\frac{CD}{CB}+\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{BC}=1.$$

Chia hai vế cho AD ta được

$$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{1}{AD}.$$



Hình 250

b) Vì AD // BE // CF nên $S_{ADE} = S_{ADB}$;

$S_{ADF} = S_{ADC}$ và $S_{AEF} = S_{ABC}$.

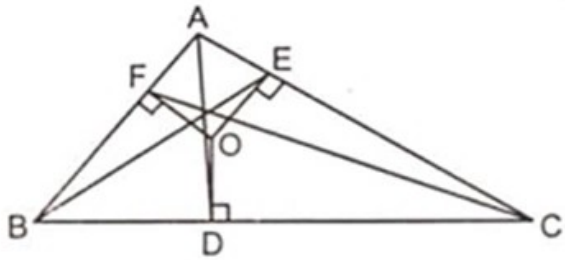
Vậy $S_{ADE} + S_{ADF} + S_{AEF} = S_{ADB} + S_{ADC} + S_{ABC}$ hay $S_{DEF} = 2S_{ABC}$.

188. (h.251)

Ta chứng minh được AE = AF ; BF = BD ; CD = CE.

Ta có $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{BF}{DC}.\frac{CD}{EA}.\frac{AE}{FB}=1.$

Suy ra AD, BE, CF đồng quy (định lí Xê-va).



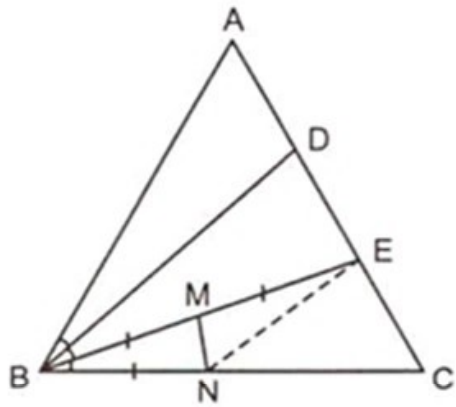
Hình 251

189. (h.252)

a) $\Delta BEC = \Delta BDA$ (g.c.g) $\Rightarrow$ BE = BD và $S_{BEC} = S_{BDA}$.

$\Delta BMN \backsim \Delta BDE$ (c.g.c), với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.

b) $S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{BDE} \Rightarrow S_{BDE} = 4S_{BMN} = 2S_{BEN}$.



Hình 252

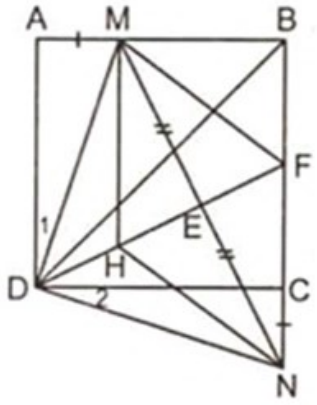
Ta có $S_{BEC} + S_{BDA} + S_{BDE} = S_{ABC}$

$$2S_{BEC} + 2S_{BEN} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ ;\quad S_{BEC} + S_{BEN} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

190. (h.253)

a) $\Delta AMD = \Delta CND$ (c.g.c) $\Rightarrow$ DM = DN và $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ dẫn tới $\widehat{MDN} = 90^o$ và ΔDMN vuông cân.

$\Delta EMH = \Delta ENF$ (g.c.g) $\Rightarrow EH = EF$ dẫn tới MFNH là hình thoi.



Hình 253

b) ΔFDN và ΔDBN có $\widehat{FDN} = \widehat{DBN} = 45^o$; $\widehat{N}$ chung.

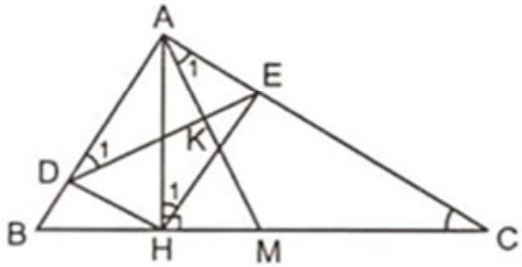
Vậy $\Delta FDN \backsim \Delta DBN$ (g.g) $\Rightarrow ND^2 = NB.\ NF$.

c) Chu vi $\Delta BMF = BM + BF + MF$

$= BM + BF + FN = BM + BF + FC + CN$

$= (BM + AM) + (BF + FC) = 2AB$ (không đổi).

191. (h.254)



Hình 254

a) AEHD là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{H}_1 = \widehat{C}$.

$\Delta ADE \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow AD.AB = AE.AC$.

b) Ta có $\widehat{D}_1 = \widehat{A}_1 \quad (= \widehat{C})$;

$\widehat{D}_1 + \widehat{DAK} = \widehat{A}_1 + \widehat{DAK} = 90^o \Rightarrow \widehat{AKD} = 90^o \Rightarrow AM \perp DE$.

c) $S_{AEHD} = \dfrac{1}{2} S_{ABC}$

$\Leftrightarrow S_{ADE} = \dfrac{1}{4} S_{ACB}$ (vì $S_{ADE} = \dfrac{1}{2} S_{AEHD}$)

$\Leftrightarrow \dfrac{S_{ADE}}{S_{ACB}} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ (vì $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$)

$\Leftrightarrow \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow DE = AM$ (vì $AM = \dfrac{1}{2} BC$)

$\Leftrightarrow AH = AM$ (vì $DE = AH$) $\Leftrightarrow$ AH, AM trùng nhau

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

MỤC LỤC

Trang

PHẦN ĐẠI SỐ

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập lần đầu :

TRẦN HỮU NAM

Biên tập tái bản :

DƯƠNG VŨ KHÁNH THUẬN

Trình bày bìa :

BÙI QUANG TUẤN

Biên tập kĩ thuật :

HOÀNG ANH TUẤN

Sửa bản in :

DƯƠNG VŨ KHÁNH THUẬN

Chế bản :

PHÒNG CHẾ BẢN (CÔNG TY CPDV XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI)

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN 8

Mã số : T8T27h3 - CPD

Số đăng kí KHXB: 14-2013/CXB/116-1961/GD

In 5.000 cuốn (QĐ số 26), khổ 17x24 cm, tại Công ty CP In - PHS và TBTH Quảng Nam, 260 Hùng Vương, TP. Tam Kỳ.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2013.