

Bài 1 (2 điểm)

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

$$1) x^2 - 7x + 10 = 0 \quad 2) (x^2 + 2x)^2 - 6x^2 - 12x + 9 = 0 \quad 3) \begin{cases} 4x - y = 7 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$$

Bài 2 (1,5 điểm) Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m - 1$ (m là tham số)

1) Vẽ đồ thị (P) .

2) Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là hai giao điểm phân biệt của (d) và (P) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $x_A > 0$ và $x_B > 0$.

Bài 3 (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2 + ax + b + 2 = 0$ (a, b là tham số).

Tìm các giá trị của tham số a, b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

thoả điều kiện:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1^3 - x_2^3 = 28 \end{cases}$$

Bài 4 (1,5 điểm)

Một tổ công nhân theo kế hoạch phải làm 140 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện năng suất của tổ đã vượt năng suất dự định là 4 sản phẩm mỗi ngày. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 4 ngày. Hỏi thực tế mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm.

Bài 5. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn $(O; R)$ sao cho $OM = 2R$, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Lấy một điểm N tùy ý trên cung nhỏ AB . Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên AB, AM, BM .

1) Tính diện tích tứ giác $MAOB$ theo R .

2) Chứng minh: $NIH = NBA$.

3) Gọi E là giao điểm của AN và IH , F là giao điểm của BN và IK . Chứng minh tứ giác $IENF$ nội tiếp được trong đường tròn.

4) Giả sử O, N, M thẳng hàng. Chứng minh: $NA^2 + NB^2 = 2R^2$

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1.

1) $x^2 - 7x + 10 = 0$

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4.10 = 9 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{9}}{2.1} = 5 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{9}}{2.1} = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 5; x_2 = 2$

2)

$$(x^2 + 2x)^2 - 6x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 - 6(x^2 + 2x) + 9 = 0 \quad (*)$$

Đặt $x^2 + 2x = t$. Khi đó ta có phương trình

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 3) - (x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-3; 1\}$.

3) Ta có:
$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 5x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 9 \\ y = 4x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4.1 - 7 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -3)$.

Bài 2.

1) Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = \frac{1}{2}x^2$

Ta có bảng giá trị

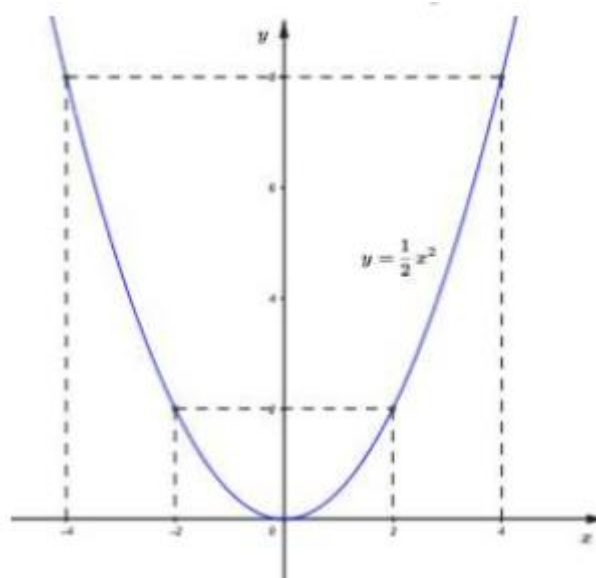
x	-4	-2	0	2	4
-----	----	----	---	---	---

$(P): y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8
---------------------------	---	---	---	---	---

Vậy đồ thị hàm số $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ là đường cong đi qua các điểm

$(-4;8), (-2;2), (0;0), (2;2), (4;8)$

Đồ thị hàm số $(P): y = \frac{1}{2}x^2$



2) Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là hai giao điểm phân biệt của (d) và (P) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $x_A > 0$ và $x_B > 0$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số (d) và (P) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = x + m - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2m + 2 = 0 \quad (*)$$

Theo đề bài ta có: (d) cắt (P) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ phân biệt

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 1 - (-2m + 2) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2m - 2 > 0 \Leftrightarrow 2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$$

Vậy với $m > \frac{1}{2}$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_A, x_B phân biệt.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A \cdot x_B = -2m + 2 \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} x_A > 0 \\ x_B > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B > 0 \\ x_A x_B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \forall m \\ -2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2m > -2 \Leftrightarrow m < 1$$

Kết hợp các điều kiện của m ta được $\frac{1}{2} < m < 1$.

Vậy $\frac{1}{2} < m < 1$ thỏa mãn bài toán.

Bài 3.

Phương pháp:

+ Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$)

+ Áp dụng định lí Vi-ét.

+ Sử dụng các biến đổi $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2)$ và $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.

Cách giải:

$$x^2 + ax + b + 2 = 0.$$

Ta có $\Delta = a^2 - 4(b + 2) = a^2 - 4b - 8$.

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b - 8 > 0$ (*).

Khi đó, áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = b + 2 \end{cases}$.

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1^3 - x_2^3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2) = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 4^3 + 12x_1x_2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Mà } x_1x_2 = b + 2 \Rightarrow b + 2 = -3 \Leftrightarrow b = -3 - 2 = -5.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 4 - a \\ 2x_2 = -a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4 - a}{2} \\ x_2 = \frac{-a - 4}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1x_2 = -3 \Leftrightarrow \frac{4 - a}{2} \left(\frac{-a - 4}{2} \right) = -3$$

$$\Leftrightarrow (4 - a)(a + 4) = 12$$

$$\Leftrightarrow 16 - a^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Với $a^2 = 4, b = -5 \Rightarrow a^2 - 4b - 8 = 4 - 4(-5) - 8 = 16 > 0 \Rightarrow$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy có 2 cặp số $(a; b)$ thoả mãn yêu cầu bài toán là $(a; b) = (2; -5)$ hoặc $(a; b) = (-2; -5)$.

Chú ý: Khi tìm được cặp số $(a; b)$ phải đối chiếu lại với điều kiện.

Bài 4

Phương pháp:

Gọi số sản phẩm thực tế mỗi ngày tổ công nhân sản xuất được là x (sản phẩm) ($x \in \mathbb{N}^*, x > 4$)

Dựa vào các giả thiết bài cho để biểu diễn số sản phẩm tổ công nhân sản xuất theo kế hoạch và thời gian tổ hoàn thành sản phẩm theo kế hoạch và theo thực tế.

Lập phương trình và giải phương trình.

Đối chiếu với điều kiện của ẩn rồi kết luận.

Cách giải:

Gọi số sản phẩm thực tế mỗi ngày tổ công nhân sản xuất được là x (sản phẩm) ($x \in \mathbb{N}^*, x > 4$)

$\Rightarrow$ Thời gian thực tế mà tổ công nhân hoàn thành xong 140 sản phẩm là: $\frac{140}{x}$ (ngày).

Theo kế hoạch mỗi ngày tổ công nhân đó sản xuất được số sản phẩm là: $x - 4$ (sản phẩm)

$\Rightarrow$ Thời gian theo kế hoạch mà tổ công nhân hoàn thành xong 140 sản phẩm là: $\frac{140}{x-4}$ ngày.

Theo đề bài ta có thời gian thực tế hoàn thành xong sớm hơn so với thời gian dự định là 4 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{140}{x-4} - \frac{140}{x} = 4$$

$$\Leftrightarrow 140x - 140(x-4) = 4x(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 35x - 35(x-4) = x(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 35x - 35x + 140 = x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 140 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 10x - 140 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-14)+10(x-14)=0$$

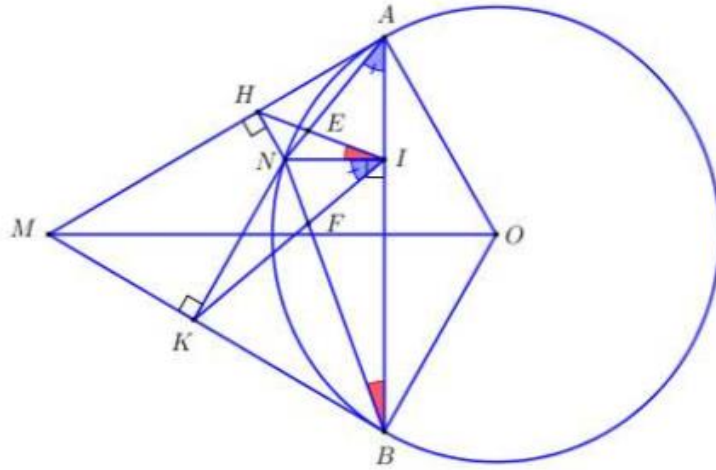
$$\Leftrightarrow (x+10)(x-14)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+10=0 \\ x-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \text{ (ktm)} \\ x=14 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy thực tế mỗi ngày tổ công nhân đã làm được 14 sản phẩm.

Chú ý: Nếu bạn học sinh nào gọi số sản phẩm tổ công nhân dự định làm trong 1 ngày thì sau khi giải phương trình, ta cần tìm số sản phẩm tổ công nhân làm được theo kế hoạch rồi mới kết luận.

Bài 5



Cách giải

1. Tính diện tích tứ giác $MAOB$ theo R .

Xét tam giác OAM và tam giác OBM ta có:

$$OA = OB (= R);$$

OM chung;

$MA = MB$ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau);

$$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta OBM \text{ (c.c.c)} \Rightarrow S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBM}$$

$$\Rightarrow S_{MAOB} = S_{\Delta OAM} + S_{\Delta OBM} = 2S_{\Delta OBM}$$

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông OAM ta có:

$$AM^2 = OM^2 - OA^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AM = R\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow S_{MAOB} = 2S_{\Delta OAM} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AM = R \cdot R \sqrt{3} = R^2 \sqrt{3} \text{ (đvdt).}$$

2) Chứng minh $NIH = NBA$

Xét tứ giác $AINH$ có: $AIN + AHN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AINH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

$\Rightarrow \widehat{NIH} = \widehat{NAH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HN).

Mà $NAH = NBA$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AN của (O))

$$\Rightarrow NIH = NBA (= NAH) \text{ (đpcm)}.$$

3. Gọi E là giao điểm của AN và IH , F là giao điểm của BN và IK . Chứng minh tứ giác $IENF$ nội tiếp được trong đường tròn.

Xét tứ giác $NIBK$ ta có $NIB + NKB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này là hai góc đối diện

$\Rightarrow NIBK$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow KBN = NIK$

Xét đường tròn (O) ta có: $KBN = NAB$

$\Rightarrow NIK = NAB (= KBN)$

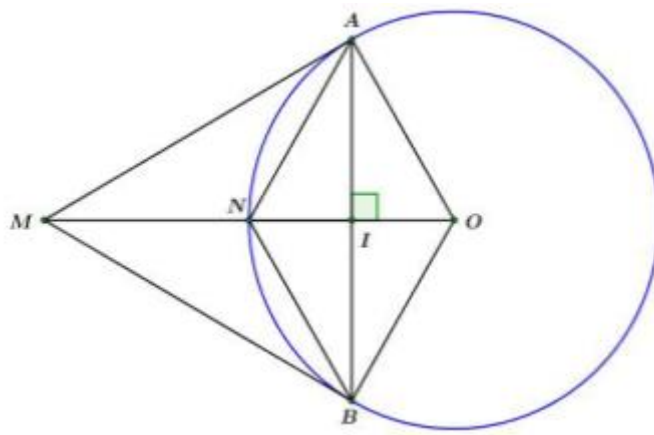
Xét $\triangle ANB$ ta có: $ANB + NAB + NBA = 180^\circ$

Lại có: $NIH = NAB = NIE$; $NIK = NAB = NIF$; $ANB = ENF$

$\Rightarrow ENF + EIN + NIF = ENF + EIF = 180^\circ$

Mà ENF, EIF là hai góc đối diện $\Rightarrow$ Tứ giác $NEIF$ là tứ giác nội tiếp.

4) Giả sử O, N, M thẳng hàng. Chứng minh: $NA^2 + NB^2 = 2R^2$



Theo đề bài ta có: O, N, M thẳng hàng $\Rightarrow ON = R = \frac{1}{2}OM \Rightarrow N$ là trung điểm của OM .

Ta có: $ON \perp AB = \{I\} \Rightarrow I$ là trung điểm của AB .

Lại có: $OA = OB = R \Rightarrow ON$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow NA = NB$

Xét $\triangle MAO$ ta có: $\cos AOM = \frac{OA}{OM} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow AOM = 60^\circ = AON$

Xét $\triangle AON$ có: $\begin{cases} OA = ON = R \\ AON = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AON$ là tam giác đều.

$\Rightarrow NA = ON = OA = R = NB$

$$\Rightarrow NA^2 + NB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \text{ (đpcm)}$$