

**Câu 1. (2,0 điểm)**

1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = 3\sqrt{49} - \sqrt{25}$$

$$B = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} - \sqrt{20}$$

2) Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$  với  $x > 0; x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm giá trị của  $x$  để  $P = 1$ .

**Câu 2. (2,0 điểm)**

1) Cho parabol  $(P): y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng  $(d): y = x + 2$ .

a) Vẽ parabol  $(P)$  và đường thẳng  $(d)$  trên cùng hệ trục tọa độ  $Oxy$ .

b) Viết phương trình đường thẳng  $(d_1): y = ax + b$  song song với  $(d)$  và cắt  $(P)$  tại điểm  $A$  có hoành độ bằng  $-2$ .

2) Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

**Câu 3. (2,5 điểm)**

1) Cho phương trình  $x^2 - (m+2)x + m + 8 = 0$  (1) với  $m$  là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi  $m = -8$ .

b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt  $x_1; x_2$  thỏa  $x_1^3 - x_2 = 0$ .

2) Nông trường cao su Minh Hưng phải khai thác 260 tấn mủ trong một thời gian nhất định. Trên thực tế, mỗi ngày nông trường đều khai thác vượt định mức 3 tấn. Do đó, nông trường đã khai thác được 261 tấn và song trước thời hạn 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nông trường khai thác được bao nhiêu tấn mủ cao su.

**Câu 4. (1,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$  và đường trung tuyến  $AM$ . Biết  $AH = 3\text{cm}$ ;  $HB = 4\text{cm}$ . Hãy tính  $AB, AC, AM$  và diện tích tam giác  $ABC$ .

**Câu 5. (2,5 điểm)**

Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $C$  là trung điểm của  $OA$ , qua  $C$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $OA$  cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm phân biệt  $M$  và  $N$ . Trên cung nhỏ  $BM$  lấy điểm  $K$  ( $K$  khác  $B$  và  $M$ ). Gọi  $H$  là giao điểm của  $AK$  và  $MN$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $BCHK$  nội tiếp đường tròn.
- b) Chứng minh  $AK.AH = R^2$ .
- c) Trên tia  $KN$  lấy điểm  $I$  sao cho  $KI = KM$ . Chứng minh  $NI = BK$ .

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = 3\sqrt{49} - \sqrt{25}$$

$$A = 3\sqrt{7^2} - \sqrt{5^2}$$

$$A = 3.7 - 5$$

$$A = 21 - 5$$

$$A = 16$$

$$B = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} - \sqrt{20}$$

$$B = |3 - 2\sqrt{5}| - \sqrt{2^2 \cdot 5}$$

$$B = -(3 - 2\sqrt{5}) - 2\sqrt{5}$$

$$B = -3 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$B = -3$$

2) Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$  với  $x > 0; x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm giá trị của  $x$  để  $P = 1$ .

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P = \left( \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \cdot 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{3}{\sqrt{x}-1}$$

b) Tìm giá trị của  $x$  để  $P = 1$ .

$$P = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 16$$

Vậy  $x = 16$  thì  $P = 1$ .

**Câu 2. (2,0 điểm)**

1) Cho parabol  $(P): y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng  $(d): y = x + 2$ .

a) Vẽ parabol  $(P)$  và đường thẳng  $(d)$  trên cùng hệ trục tọa độ  $Oxy$ .

b) Viết phương trình đường thẳng  $(d_1): y = ax + b$  song song với  $(d)$  và cắt  $(P)$  tại điểm  $A$  có hoành độ bằng  $-2$ .

**Lời giải**

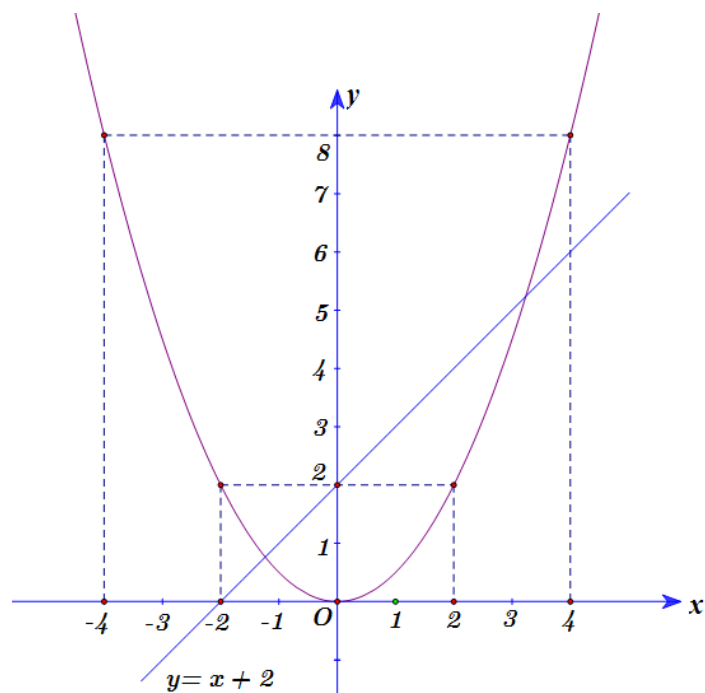
a) Vẽ parabol  $(P)$  và đường thẳng  $(d)$  trên cùng hệ trục tọa độ  $Oxy$ .

Bảng giá trị:

| $x$                  | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ |
|----------------------|------|------|-----|-----|-----|
| $y = \frac{1}{2}x^2$ | $8$  | $2$  | $0$ | $2$ | $8$ |

Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$  là đường Parabol đi qua các điểm  $(-4;8); (-2;2); (0;0); (2;2); (4;8)$  và nhận  $Oy$  làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số  $y = x + 2$  là đường thẳng đi qua điểm  $(0;2)$  và điểm  $(-2;0)$



b) Viết phương trình đường thẳng  $(d_1): y = ax + b$  song song với  $(d)$  và cắt  $(P)$  tại điểm  $A$  có hoành độ bằng  $-2$ .

Lời giải

Vì đường thẳng  $(d_1): y = ax + b$  song song với  $(d)$  nên ta có phương trình của đường thẳng  $(d_1): y = x + b$  ( $b \neq 2$ )

Gọi  $A(-2; y_A)$  là giao điểm của parabol  $(P)$  và đường thẳng  $(d_1)$ .

$$\Rightarrow A \in (P)$$

$$\Rightarrow y_A = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$$

$$\Rightarrow A(-2; 2)$$

Mặt khác,  $A \in (d_1)$ , thay tọa độ của điểm  $A$  vào phương trình đường thẳng  $(d_1)$ , ta được:

$$2 = -2 + b \Leftrightarrow b = 4 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình đường thẳng  $(d_1): y = x + 4$

2) Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất:  $(x; y) = (2; 1)$

### Câu 3. (2,5 điểm)

1) Cho phương trình  $x^2 - (m+2)x + m+8 = 0$  (1) với  $m$  là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi  $m = -8$ .

b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt  $x_1; x_2$  thỏa  $x_1^3 - x_2 = 0$ .

#### Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi  $m = -8$ .

Thay  $m = -8$  vào phương trình (1), ta được:  $x^2 - (-8+2)x - 8+8 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy  $m = -8$  thì phương trình (1) có 2 nghiệm:  $x = -6; x = 0$

b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt  $x_1; x_2$  thỏa  $x_1^3 - x_2 = 0$ .

#### Lời giải

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+8) = m^2 + 4m + 4 - 4m - 32 = m^2 - 28$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt khi  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 28 > 0 \\ m+2 > 0 \\ m+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2\sqrt{7} \text{ hoặc } m > 2\sqrt{7} \\ m > -2 \\ m > -8 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt{7}$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} x_1^3 - x_2 = 0 &\Leftrightarrow x_1^3 = x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 = x_1^4 = m+8 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[4]{m+8} \Rightarrow x_2 = \sqrt[4]{(m+8)^3} \\ \Rightarrow x_1 + x_2 = m+2 &\Leftrightarrow \sqrt[4]{m+8} + \sqrt[4]{(m+8)^3} = m+8-6 \end{aligned}$$

Đặt  $\sqrt[4]{m+8} = t$  ( $t \geq 0$ ), ta có:  $t + t^3 = t^4 - 6$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^3 - t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 16 - (t^3 + t - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 4)(t^2 + 4) - (t^3 - 8 + t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t^2+4) - [(t-2)(t^2+2t+4) + (t-2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t^2+4) - (t-2)(t^2+2t+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+4t+8-t^2-2t-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^3+t^2+2t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow t=2 \text{ (vì } t \geq 0 \Rightarrow t^3+t^2+2t+3 > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{m+8}=2 \Leftrightarrow m+8=2^4=16 \Leftrightarrow m=8 \text{ (nhận)}$$

2) Nông trường cao su Minh Hưng phải khai thác 260 tấn mủ trong một thời gian nhất định. Trên thực tế, mỗi ngày nông trường đều khai thác vượt định mức 3 tấn. Do đó, nông trường đã khai thác được 261 tấn và song trước thời hạn 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nông trường khai thác được bao nhiêu tấn mủ cao su.

### Lời giải

Gọi số tấn mủ cao su mỗi ngày nông trường khai thác được là  $x$  (tấn)

(Điều kiện:  $0 < x < 260$ )

Thời gian dự định khai thác mủ cao su của nông trường là:  $\frac{260}{x}$  (ngày)

Trên thực tế, mỗi ngày nông trường khai thác được:  $x+3$  (tấn)

Thời gian thực tế khai thác mủ cao su của nông trường là:  $\frac{261}{x+3}$  (ngày)

Theo đề bài, ta có phương trình:  $\frac{261}{x+3}+1=\frac{260}{x}$

$$\Rightarrow \frac{261x}{x(x+3)} + \frac{x(x+3)}{x(x+3)} = \frac{260(x+3)}{x(x+3)}$$

$$\Rightarrow 261x + x(x+3) = 260(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 261x + x^2 + 3x = 260x + 780$$

$$\Leftrightarrow 261x + x^2 + 3x - 260x - 780 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 780 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = 4 + 780 = 784 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{784} = 28$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

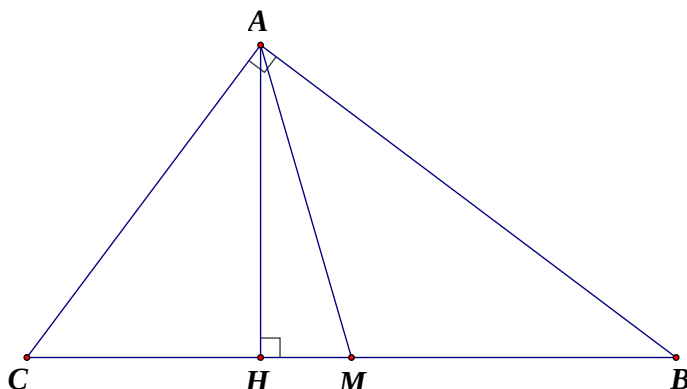
$$x_1 = \frac{-2+28}{1} = 26 \text{ (nhận) hoặc } x_2 = \frac{-2-28}{1} = -30 \text{ (loại)}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày nông trường cao su khai thác 26 tấn.

**Câu 4. (1,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$  và đường trung tuyến  $AM$ . Biết  $AH = 3\text{cm}$ ;  $HB = 4\text{cm}$ . Hãy tính  $AB, AC, AM$  và diện tích tam giác  $ABC$ .

Lời giải



Xét  $\triangle AHB$  vuông tại  $H$ , theo định lí Pitago, ta có:  $AB^2 = AH^2 + HB^2$

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}$$

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ .

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AC^2} = \frac{16}{225} \Rightarrow AC^2 = \frac{225}{16}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4} \text{ (cm)}$$

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , theo định lí Pitago, ta có:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$BC^2 = 5^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = 25 + \frac{225}{16} = \frac{625}{16}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} \text{ (cm)}$$

$\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AM$  là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền  $BC$

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{8} \text{ (cm)}$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{8} \text{ (cm}^2\text{)}$$

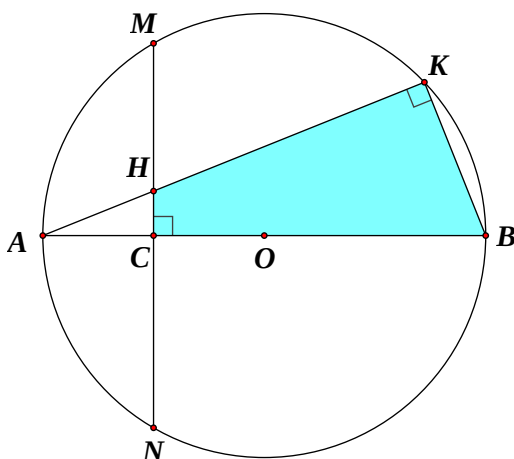
**Câu 5. (2,5 điểm)**

Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $C$  là trung điểm của  $OA$ , qua  $C$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $OA$  cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm phân biệt  $M$  và  $N$ . Trên cung nhỏ  $BM$  lấy điểm  $K$  ( $K$  khác  $B$  và  $M$ ). Gọi  $H$  là giao điểm của  $AK$  và  $MN$ .

- Chứng minh tứ giác  $BCHK$  nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh  $AK \cdot AH = R^2$ .
- Trên tia  $KN$  lấy điểm  $I$  sao cho  $KI = KM$ . Chứng minh  $NI = BK$ .

**Lời giải**

- Chứng minh tứ giác  $BCHK$  nội tiếp đường tròn.



Vì  $AB \perp HC$  tại  $C$  nên  $BCH = 90^\circ$ ;

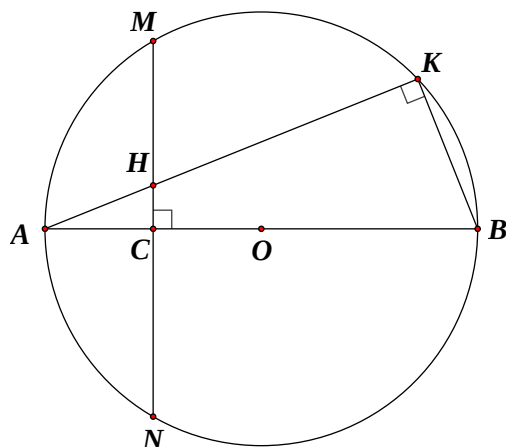
Ta có:  $AKB = 90^\circ$  (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  $\Rightarrow BKH = 90^\circ$

Xét tứ giác  $BCHK$  có:  $BCH + BKH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà  $BCH; BKH$  là hai góc đối nhau.

Suy ra: Tứ giác  $BCHK$  là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh  $AK.AH = R^2$ .



Xét  $\triangle ACH$  và  $\triangle AKB$  có:

$$\angle ACH = \angle AKB = 90^\circ;$$

$\angle BAK$  là góc chung;

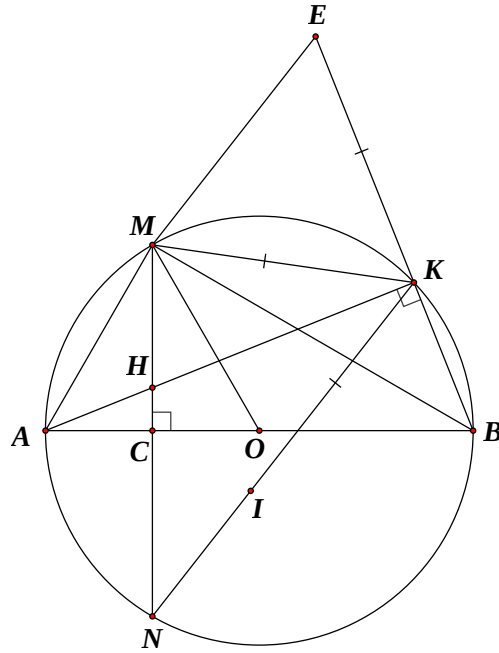
Do đó:  $\triangle ACH \sim \triangle AKB$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AK}$$

$$\Rightarrow AH.AK = AB.AC = 2R \cdot \frac{R}{2} = R^2$$

Vậy  $AK.AH = R^2$

c) Trên tia  $KN$  lấy điểm  $I$  sao cho  $KI = KM$ . Chứng minh  $NI = BK$ .



Trên tia đối của tia  $KB$  lấy điểm  $E$  sao cho  $KE = KM = KI$

Xét  $\triangle OAM$  có  $MC$  là đường cao đồng thời là đường trung tuyến (vì  $C$  là trung điểm của  $OA$ )

$\Rightarrow \triangle OAM$  cân tại  $M \Rightarrow AM = OM$ .

Mà  $OA = OM = R \Rightarrow OA = OM = AM$

$\Rightarrow \triangle OAM$  là tam giác đều  $\Rightarrow \angle OAM = 60^\circ$

Ta có:  $\angle AMB = 90^\circ$  (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \triangle AMB$  vuông tại  $M$ .

$\Rightarrow \angle ABM = 30^\circ$

Xét  $\triangle BMC$  vuông tại  $C$  có:  $\angle BMC + \angle MBC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ - \angle MBC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle BMN = 60^\circ$  (1)

Vì tứ giác  $ABKM$  là tứ giác nội tiếp nên  $\angle EKM = \angle MAB = 60^\circ$

Mặt khác:  $KM = KE$  (cách dựng)  $\Rightarrow \triangle EKM$  cân tại  $K$

Và  $\angle EKM = 60^\circ \Rightarrow \triangle EKM$  là tam giác đều.  $\Rightarrow \angle KME = 60^\circ$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $\angle BMN = \angle KME = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle BMN + \angle BMK = \angle KME + \angle BMK$

$\Rightarrow \angle NMK = \angle BME$

Xét  $\triangle BCM$  vuông tại  $C$  có:  $\sin \angle CBM = \sin 30^\circ$

$\Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BM = 2CM$

Mà  $OA \perp MN$  tại  $C$

$\Rightarrow C$  là trung điểm của  $MN$  (đường kính vuông góc với dây cung thì đi qua trung điểm của dây cung).

$$\Rightarrow MN = 2CM$$

$$\Rightarrow MN = BM \text{ (vì } = 2CM \text{)}$$

Xét  $\triangle MNK$  và  $\triangle MBE$  có:

$$\angle MNK = \angle MBE \text{ (Hai góc nội tiếp cùng chắn } MK \text{)}$$

$$MN = BM \text{ (cmt)}$$

$$\angle NMK = \angle BME \text{ (cmt)}$$

Do đó:  $\triangle MNK = \triangle MBE$  (g.c.g)

$$\Rightarrow NK = BE \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow IN + IK = BK + KE$$

Mà  $IK = KE$  (vẽ hình)

Suy ra:  $IN = BK$