

Môn thi: Toán

Ngày thi: 06/06/2019

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1:

1. Giải phương trình: $3(x-1) = 5x + 2$.
2. Cho biểu thức: $A = \sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1}$ với $x \geq 1$
 - a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 5$.
 - b) Rút gọn biểu thức A khi $1 \leq x \leq 2$.

Câu 2:

1. Cho phương trình: $x^2 - (m-1)x - m = 0$. Tìm m để phương trình trên có một nghiệm bằng 2. Tính nghiệm còn lại.
2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng

$$d_1: y = 2x - 1; d_2: y = x; d_3: y = -3x + 2.$$

Tìm hàm số có đồ thị là đường thẳng d song song với đường thẳng d_3 đồng thời đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Câu 3:

Hai đội công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì hoàn thành được $\frac{2}{3}$ công việc. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của mỗi đội là bao nhiêu?

Câu 4:

Cho đường tròn tâm O , bán kính R và một đường thẳng d không cắt đường tròn (O). Dựng đường thẳng OH vuông góc với đường thẳng d tại điểm H . Trên đường thẳng d lấy điểm K (khác điểm H), qua K vẽ hai tiếp tuyến KA và KB với đường tròn (O), (A và B là các tiếp điểm) sao cho A và H nằm về hai phía của đường thẳng OK .

- a) Chứng minh tứ giác $KAOH$ nội tiếp được trong đường tròn.
- b) Đường thẳng AB cắt đường thẳng OH tại điểm I . Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IH \cdot IO$ và I là điểm cố định khi điểm K chạy trên đường thẳng d cố định.
- c) Khi $OK = 2R, OH = R\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác KAI theo R .

Câu 5:

Cho x, y là hai số thực thỏa $\begin{cases} x > y \\ xy = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$.

LỜI GIẢI ĐỀ TUYỂN SINH VÀO 10 BÌNH ĐỊNH NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1.

- Giải phương trình: $3(x-1) = 5x + 2$.
- Cho biểu thức: $A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$
 - Tính giá trị biểu thức A khi $x = 5$.
 - Rút gọn biểu thức A khi $1 \leq x \leq 2$.

Lời giải

1. Ta có

$$3(x-1) = 5x + 2 \Leftrightarrow 3x - 3 = 5x + 2 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{5}{2}$.

2.

a) Khi $x = 5$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{5+2\sqrt{5-1}} + \sqrt{5-2\sqrt{5-1}} \\ &= \sqrt{5+2\sqrt{4}} + \sqrt{5-2\sqrt{4}} = \sqrt{5+2 \cdot 2} + \sqrt{5-2 \cdot 2} = \sqrt{9} + \sqrt{1} = 3+1=4. \end{aligned}$$

Vậy khi $x = 5$ thì $A = 4$.

b) Với $1 \leq x \leq 2$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \\ &= |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \\ &= \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1} \quad (1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x-1}-1 \leq 0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Vậy khi $1 \leq x \leq 2$ thì $A = 2$.

Câu 2.

- Cho phương trình: $x^2 - (m-1)x - m = 0$. Tìm m để phương trình trên có một nghiệm bằng 2. Tính nghiệm còn lại.
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng

$$d_1: y = 2x - 1; \quad d_2: y = x; \quad d_3: y = -3x + 2.$$

Tìm hàm số có đồ thị là đường thẳng d song song với đường thẳng d_3 đồng thời đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Lời giải

1.

$$x^2 - (m-1)x - m = 0. \quad (1)$$

Thay $x = 2$ vào phương trình (1) ta được

$$2^2 - (m-1) \cdot 2 - m = 0 \Leftrightarrow 4 - 2m + 2 - m = 0 \Leftrightarrow 3m = 6 \Leftrightarrow m = 2.$$

Thay $m = 2$ vào phương trình (1) ta được

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Ta có các hệ số: $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2.$$

Vậy với $m = 2$ phương trình đã cho có một nghiệm bằng 2, nghiệm còn lại là -1 .

2.

Phương trình đường thẳng $d: ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$d \parallel d_3 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b \neq 2 \end{cases} \Rightarrow d: y = -3x + b, \quad (b \neq 2).$$

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$$

$$A(1; 1) \in d: y = -3x + b \Rightarrow 1 = -3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 4 \quad (\text{TM}).$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $d: y = -3x + 4$.

Câu 3. Hai đội công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì hoàn thành được $\frac{2}{3}$ công việc. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của mỗi đội là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi thời gian đội thứ nhất làm riêng hoàn thành công việc là x (giờ, $x > 5$).

Thời gian đội thứ hai làm riêng hoàn thành công việc là y (giờ, $y > 0$).

Mỗi giờ đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Trong 4 giờ đội thứ nhất làm được $\frac{4}{x}$ công việc, đội thứ hai làm được $\frac{4}{y}$ công

việc.

Theo đề ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2}{3} & (1) \\ x - y = 5 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow x = y + 5$ thế vào (1) ta được

$$\frac{4}{y+5} + \frac{4}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 6y + 6(y+5) = y(y+5)$$

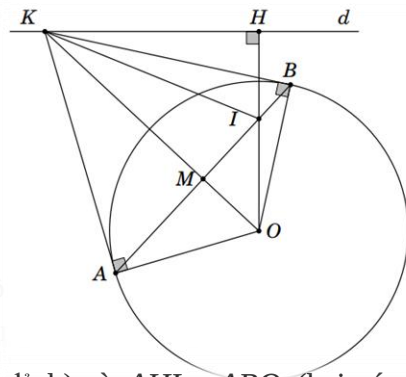
$$\Leftrightarrow y^2 - 7y - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 & (\text{ktm}) \\ y = 10 \Rightarrow x = 15 \end{cases}$$

Vậy nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ nhất là 15 giờ, đội thứ hai là 10 giờ.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và một đường thẳng d không cắt đường tròn (O) .
Dựng đường thẳng OH vuông góc với đường thẳng d tại điểm H . Trên đường thẳng d lấy điểm K (khác điểm H), qua K vẽ hai tiếp tuyến KA và KB với đường tròn (O) , (A và B là các tiếp điểm) sao cho A và H nằm về hai phía của đường thẳng OK .

- Chứng minh tứ giác $KAOH$ nội tiếp được trong đường tròn.
- Đường thẳng AB cắt đường thẳng OH tại điểm I . Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IH \cdot IO$ và I là điểm cố định khi điểm K chạy trên đường thẳng d cố định.
- Khi $OK = 2R, OH = R\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác KAI theo R .

Lời giải



a) Ta có $KAO = 90^\circ$ ($KA \perp AO$),

$KHO = 90^\circ$ ($OH \perp KH$)

Xét tứ giác $KAOH$ có $KAO + KHO = 180^\circ$
nên là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $KBO + KAO = 180^\circ$ nên $KAOB$ là tứ giác nội tiếp.
Đường thẳng OK dưới một góc vuông nên năm điểm K, A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
Xét tam giác IAH và tam giác IOB có $HIA = BIO$ (đối đỉnh) và $AHI = ABO$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AO). Do đó $\triangle IAH \sim \triangle IOB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IA}{IH} = \frac{IO}{IB} \Rightarrow IA \cdot IB = IH \cdot IO$.

Xét tứ giác $AOBH$ có OHB là góc nội tiếp chắn cung OB , OBA là góc nội tiếp chắn cung OA ;
Mà $OA = OB = R$ nên $OHB = OBA$.

Xét $\triangle OIB$ và $\triangle OBH$ có BOH góc chung và $OHB = OBA$ (cmt).

Do đó $\triangle OIB \sim \triangle OBH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OI}{OB} = \frac{OB}{OH} \Rightarrow OI = \frac{OB^2}{OH} = \frac{R^2}{OH}$.

Ta lại có đường thẳng d cố định nên OH không đổi ($OH \perp d$).

Vậy điểm I cố định khi K chạy trên đường thẳng d cố định.

c) Gọi M là giao điểm của OK và AB

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $KA = KB$;

Lại có $OA = OB = R$ nên OK là đường trung trực của AB , suy ra $AB \perp OK$ tại M và $MA = MB$.

Theo câu b) ta có $OI = \frac{R^2}{OH} = \frac{R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle OAK$ vuông tại A , có

$$OA^2 = OM \cdot OK \Leftrightarrow OM = \frac{OA^2}{OK} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

$$\text{Suy ra } KM = OK - OM = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$AM^2 = OM \cdot KM = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Xét $\triangle OMI$ vuông tại M , có

$$MI = \sqrt{OI^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Suy ra } AI = AM + MI = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{6} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Diện tích } \triangle AKI \text{ là } S = \frac{1}{2} AI \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 5. Cho x, y là hai số thực thỏa $\begin{cases} x > y \\ xy = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$.

Lời giải

Với $x > y, xy = 1$, ta có

$$P = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2xy}{x - y} = x - y + \frac{2}{x - y}$$

Vì $x > y \Rightarrow x - y > 0; \frac{2}{x - y} > 0$ và $xy = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $x - y; \frac{2}{x - y}$, ta có

$$x - y + \frac{2}{x - y} \geq 2\sqrt{\frac{2(x - y)}{x - y}} = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Suy ra $\min P = 2\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x - y = \frac{2}{x - y} \Leftrightarrow (x - y)^2 = 2 \Leftrightarrow x - y = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y + \sqrt{2}$.

$$\text{Mà } xy = 1 \Rightarrow (y + \sqrt{2})y = 1 \Leftrightarrow y^2 + \sqrt{2}y = 1 \Leftrightarrow y^2 + \sqrt{2}y - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min P = 2\sqrt{2} \text{ tại } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$