

A./ ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

CHƯƠNG III. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN.

Bài 1. Xác định số hạng đầu và công sai của mỗi cấp số cộng dưới đây, biết:

a./
$$\begin{cases} U_2 - U_3 + U_5 = 10 \\ U_1 + U_6 = 17 \end{cases}$$

b./
$$\begin{cases} U_7 - U_3 = 8 \\ U_2 \cdot U_7 = 75 \end{cases}$$

Bài 2. Cấp số cộng (U_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$.

a./ Lập công thức số hạng tổng quát U_n .

b./ Tính S_{20} .

Bài 3. Cấp số nhân (u_n) có:
$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$$

a./ Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân

b./ Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên sẽ bằng 3069?

c./ Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Bài 4. Tính tổng:

a./ $S = 9 + 99 + 999 + \dots + 9 \dots 9$ (số hạng cuối có n chữ số 9)

b./ $S = 8 + 88 + 888 + \dots + 8 \dots 8$ (số hạng cuối có n chữ số 8)

Bài 5. Chứng minh rằng: Nếu tam giác ABC có 3 góc A, B, C thỏa mãn: $\cot \frac{A}{2}; \cot \frac{B}{2}; \cot \frac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng thì 3 cạnh theo thứ tự đó cũng lập thành 1 cấp số cộng.

Bài 6. Tìm m để phương trình: $x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành 1 cấp số cộng.

Bài 7. Độ dài các cạnh của một tam giác ABC lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng tam giác ABC có hai góc không quá 60° ?

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN.

Bài 8: Tìm giới hạn của các hàm số sau:

8.a./ Dạng $\frac{\infty}{\infty}$:

1./ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 5x - 1}{2x^3 + 3x^2 + 1}$

2./ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 2}{2x + 1}$

3./ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2 + 1}{3x^2 + x}$

4./ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x}{1 - 3x^2 - x^5}$

5./ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 1}{2x^3 + 3x^2 + 1}$

6./ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2 - 5x}$

8.b. (Giới hạn một bên):

7./ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3}$

8./ $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3}$

9./ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2|x| + x}{x^2 - x}$

8.c. (Dạng $\frac{0}{0}$):

$$10./ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$11./ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$12./ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$13./ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}$$

$$14./ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x + 7} - 3}$$

$$15./ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

8.d. (Dạng $\infty - \infty$):

$$16./ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$17./ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$18./ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x)$$

Bài 9: Tìm điều kiện của số thực a sao cho các hàm số sau liên tục tại x_0 .

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ a & \text{khi } x = -1 \end{cases} \text{ với } x_0 = -1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2ax - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ với } x_0 = 1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a - 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ với } x_0 = 2$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{khi } x < 1 \\ 2a + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ với } x_0 = 1$$

Bài 10: a) CMR phương trình sau có ít nhất hai nghiệm: $2x^3 - 10x - 7 = 0$

b) CMR phương trình sau có ít nhất một nghiệm âm: $x^3 + 1000x + 0,1 = 0$

c) CMR: Phương trình $x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

d) Chứng minh phương trình $m(x - 1)^3(x - 2) + 2x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

e) CMR: Phương trình $m(x - 1)^3(x^2 - 4) + x^4 - 3 = 0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm với mọi m .

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

Bài 11: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$1. y = x^3 - 2x + 1$$

$$2. y = 2x^5 - \frac{x}{2} + 3$$

$$3. y = 10x^4 + \frac{2}{x^2}$$

$$4. y = (x^3 + 2)(x + 1)$$

$$5. y = 5x^2(3x - 1)$$

$$6. y = (x^2 + 5)^3$$

$$7. y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$$

$$8. y = x(2x - 1)(3x + 2)$$

$$9. y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$$

$$10. y = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$11. y = \frac{2x^2 - 6x + 5}{2x + 4}$$

$$12. y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$$

$$13. y = \sqrt{x^2 + 6x + 7}$$

$$14. y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2}$$

$$15. y = (x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$16. y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x + 1}$$

$$17. y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 3}$$

$$18) y = \frac{3x - 2}{x^2 - x + 2}$$

$$19./ y = \frac{(x + 2)^2}{(x + 1)^3(x + 3)^4}$$

$$20./ y = (x^7 + x)^2$$

$$21./ y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$$

$$22./ y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$23./ y = x\sqrt{1 + x^2}$$

$$24./ y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$$

$$25./ y = \sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x} + 1)$$

$$26./ y = (x^2 + 3x - 2)^{20}$$

Bài 12: Tìm đạo hàm các hàm số sau:

$$1) y = 3\sin^2 x \cdot \sin 3x$$

$$2) y = (1 + \cot x)^2$$

$$3) y = \cos x \cdot \sin^2 x$$

$$4) y = \frac{1 + \sin x}{2 - \sin x}$$

$$5) y = \sin^4 \frac{x}{2}$$

$$6) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$7) y = \cot^3(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$8) y = \sqrt{2 + \tan^2 x}$$

$$9) y = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{4}{3} \cot x$$

$$10) y = \sqrt{1 + \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$11) y = \frac{1}{(1 + \sin^2 2x)^2}$$

$$12) y = \sin^4 \sqrt{p - 3x}$$

$$13) y = \cos(x^3)$$

$$14) y = 5\sin x - 3\cos x$$

$$15) y = x \cdot \cot x$$

$$16) y = \cot \sqrt[3]{1 + x^2}$$

$$17) y = \sin(\sin x)$$

$$18) y = \sin^2(\cos 3x)$$

$$19) y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$$

$$20) y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$$

Bài 13: Cho hai hàm số: $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \frac{1}{4} \cos 4x$.

Chứng minh rằng: $f'(x) = g'(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).

Bài 14: Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm x để: a) $y' > 0$

b) $y' < 3$

$$\text{ĐS: a) } \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$$

Bài 15: Giải phương trình: $f'(x) = 0$ biết rằng:

$$\text{a) } f(x) = \cos x + \sin x + x.$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x + x$$

$$\text{c) } f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$$

$$\text{d) } f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 1$$

Bài 16: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính: $f(3) + (x-3)f'(3)$

Bài 17: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$ (C)

a) Tính đạo hàm của hàm số tại $x = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0 = -1$.

Bài 18: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2$ (C)

a) Tìm $f'(x)$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0 = 2$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y = -x + 2$.

Bài 19: Gọi (C) là đồ thị hàm số: $y = x^3 - 5x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C)

a) Tại M(0;2).

b) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -3x + 1$.

c) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{7}x - 4$.

Bài 20: Cho đường cong (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C)

a) Tại điểm có hoành độ bằng 1

b) Tại điểm có tung độ bằng $\frac{1}{3}$

c) Biết tiếp tuyến đó có hệ số góc là -4

B. HÌNH HỌC

Bài 1: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC = a.

Gọi I là trung điểm BC; H, K lần lượt là hình chiếu của O lên trên các đường thẳng AB và AC.

1. CMR: $BC \perp (OAI)$. 2. CMR: $(OAI) \perp (OHK)$.

3. Tính khoảng cách từ điểm O đến mp (ABC).

$$\text{ĐS: } a / \sqrt{3}$$

5. Tính cosin của góc giữa OA và mp (OHK).

$$\text{ĐS: } \cos \alpha = \sqrt{6} / 3$$

6. Tính tang của góc giữa (OBC) và (ABC).

$$\text{ĐS: } \tan \varphi = \sqrt{2}$$

7. Tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng HK và OI. Tính khoảng cách giữa hai đường ấy.

$$\text{ĐS: } a / 2$$

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

1. CMR: Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

2. CMR: $mp(SAC) \perp mp(SBD)$.

3. Tính góc α giữa SC và mp (ABCD), góc β giữa SC và mp (SAB). ĐS: $\alpha=45^\circ, \beta=30^\circ$

4. Tính tang của góc φ giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD). ĐS: $\tan \varphi = 2$

5. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC), khoảng cách từ điểm A đến mp (SCD)

ĐS: $a\sqrt{6}/3$

6. Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng SC và BD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy. ĐS: $a/2$

7. Hãy chỉ ra điểm I cách đều S, A, B, C, D và tính SI. ĐS: $SI = a$

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, $SA = SB = SD = a\sqrt{3}/2$ và $\angle BAD = 60^\circ$. Gọi H là hình chiếu của S trên AC.

1. CMR: $BD \perp (SAC)$ và $SH \perp (ABCD)$.

2. CMR: $AD \perp SB$. 3. CMR: $(SAC) \perp (SBD)$.

4. Tính khoảng cách từ S đến (ABCD) và SC. ĐS: $SH = a\sqrt{15}/6$ và $SC = a\sqrt{7}/2$

5. Tính sin của góc α giữa SD và (SAC), cosin của góc β giữa SC và (SBD).

ĐS: $\sin \alpha = \sqrt{3}/3$ và $\cos \beta = 3/\sqrt{14}$.

6. Tính khoảng cách từ H đến (SBD).

ĐS: $a\sqrt{10}/12$

7. Tính góc giữa (SAD) và (ABCD).

ĐS: $\tan \varphi = \sqrt{5}$

8. Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng SH và BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy. ĐS: $a\sqrt{3}/3$

9. Hãy chỉ ra điểm I cách đều S, A, B, D và tính MI.

ĐS: $3\sqrt{15}a/20$

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A, $AB = BC = a$ và $\angle ADC = 45^\circ$. Hai mặt bên SAB, SAD cùng vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

1. CMR: $BC \perp mp(SAB)$. 2. CMR: $CD \perp SC$.

3. Tính góc α giữa SC và (ABCD), góc β giữa SC và (SAB), góc γ giữa SD và (SAC).

ĐS: $\alpha=45^\circ, \beta=30^\circ, \tan \gamma = \sqrt{2}/2$

4. Tính tang của góc φ giữa mp(SBC) và mp(ABCD).

ĐS: $\tan \varphi = \sqrt{2}$

5. Tính khoảng cách giữa SA và BD.

ĐS: $2a/\sqrt{5}$

6. Tính khoảng cách từ A đến (SBD).

ĐS: $2a/\sqrt{7}$

7. Hãy chỉ ra điểm M cách đều S, A, B, C; điểm N cách đều S, A, C, D.

Từ đó tính MS và NS.

ĐS: $MS = a, NS = a\sqrt{6}/2$

Bài 5: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a. Gọi O là tâm của tứ giác ABCD; và M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD.

1. CMR: $BD \perp (ACC'A')$ và $A'C \perp (BDC')$. 2. CMR: $A'C \perp AB'$.

3. CMR: $(BDC') \perp (ACC'A')$ và $(MNC') \perp (ACC'A')$.

4. Tính khoảng cách từ C đến mp(BDC').

ĐS: $a/\sqrt{3}$

5. Tính tang của góc giữa AC và (MNC').

ĐS: $\tan \alpha = 2\sqrt{2}/3$

6. Tính tang của góc giữa mp(BDC') và mp(ABCD).

ĐS: $\tan \beta = \sqrt{2}$

8. Tính khoảng cách giữa AB' và BC'.

ĐS: $a\sqrt{3}/3$