

Bài 1: (2 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau (không dùng máy tính cầm tay)

a) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

b)
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

Bài 2: (1,0 điểm) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $T(-2; -2)$, parabol (P) có phương trình $y = -8x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = -2x - 6$.

a) Điểm T có thuộc đường thẳng d không?

b) Xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P)

Bài 3: (2,0 điểm) Cho biểu thức $P = \sqrt{4x} - \sqrt{9x} + 2\frac{x}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = 6 + 2\sqrt{5}$ (không dùng máy tính cầm tay).

Bài 4: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn (A) bán kính AH . Từ đỉnh B kẻ tiếp tuyến BI với (A) cắt đường thẳng AC tại D (điểm I là tiếp điểm, I và H không trùng nhau).

a) Chứng minh $AHBI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Cho $AB = 4cm, AC = 3cm$. Tính AI .

c) Gọi HK là đường kính của (A) . Chứng minh rằng $BC = BI + DK$.

Bài 5: (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $2x^2 - 6x + 3m + 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

b) Trung tâm thương mại VC của thành phố NT có 100 gian hàng. Nếu mỗi gian hàng của Trung tâm thương mại VC cho thuê với giá 100.000.000 đồng (một trăm triệu đồng) một năm thì tất cả các gian hàng đều được thuê hết. Biết rằng, cứ mỗi lần tăng giá 5% tiền thuê mỗi gian hàng một năm thì Trung tâm thương mại VC có thêm 2 gian hàng trống. Hỏi người quản lý phải quyết định giá thuê mỗi gian hàng là bao nhiêu một năm để doanh thu của Trung tâm thương mại VC từ tiền cho thuê gian hàng trong năm là lớn nhất?

Đáp án

Bài 1:

a) Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình trở thành $t^2 + 3t - 4 = 0$.

Nhận xét: Phương trình có các hệ số $a=1, b=3, c=-4$ và $a+b+c=1+3+(-4)=0$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$t_1 = 1(tm)$$

$$t_2 = -4(ktm)$$

$$\text{Với } t_1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 1\}$

$$b) \begin{cases} x+2y=5 \\ x-5y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y=14 \\ x=5-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=5-2.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$

Bài 2:

a) Điểm T có thuộc đường thẳng d không?

Thay $x = -2; y = -2$ vào phương trình đường thẳng $d: y = -2x - 6$ ta được

$$-2 = -2.(-2) - 6$$

$$\Leftrightarrow -2 = -2 \text{ (luôn đúng) nên điểm T thuộc đường thẳng d.}$$

b) Xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P).

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P), ta có:

$$-8x^2 = -2x - 6 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 6 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có $a=8; b=-2; c=-6 \Rightarrow a+b+c=8+(-2)+(-6)=0$ nên có hai nghiệm

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$+ \text{Với } x=1 \Rightarrow y = -8.1^2 = -8$$

$$+ \text{Với } x = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = -8.\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{2}$$

Vậy tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) là $(1; -8); \left(-\frac{3}{4}; -\frac{9}{2}\right)$

Bài 3:

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHBI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AB (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°)

b) **Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính AH , suy ra AI .**

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , đường cao AH ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{9} = \frac{25}{144}$$
$$\Rightarrow AH^2 = \frac{144}{25} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

$$\text{Vậy } AI = AH = \frac{12}{5} (= R).$$

c) **Gọi HK là đường kính của (A) . Chứng minh rằng $BC = BI + DK$.**

$$+) \text{ Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: } \begin{cases} BI = BH \text{ (1)} \\ BAI = BAH \end{cases}$$

$$BAI = BAH \Leftrightarrow 90^\circ - BAI = 90^\circ - BAH \Leftrightarrow IAD = HAC.$$

$$\text{Mà } HAC = KAD \Rightarrow IAD = KAD.$$

+) Xét $\triangle ADI$ và $\triangle ADK$ có:

AD chung

$$IAD = KAD \text{ (cmt)}$$

$$AI = AK (= R)$$

$$\text{Suy ra } \triangle ADI = \triangle ADK \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AKD = AID = 90^\circ \text{ (hai góc tương ứng)} \Rightarrow \triangle AKD \text{ vuông tại K.}$$

+) Xét tam giác vuông AKD và tam giác vuông AHC có:

$$AK = AH (= R) ;$$

$$KAD = HAC \text{ (đối đỉnh);}$$

$$\triangle AKD = \triangle AHC \text{ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)}$$

$$\Rightarrow DK = HC \text{ (2) (hai cạnh tương ứng).}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } BC = BH + HC = BI + DK \text{ (dpcm).}$$

Bài 5:

$$\text{a) } 2x^2 - 6x + 3m + 1 = 0$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3^2 - 2 \cdot (3m + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 6m - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7 - 6m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{7}{6}.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$:

$$\text{Theo định lí Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m+1}{2} \end{cases}$$

Ta có :

$$x_1^3 + x_2^3 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9$$

$$\Rightarrow 3^3 - 3 \cdot \frac{3m+1}{2} \cdot 3 = 9 \Leftrightarrow 27 - \frac{9}{2}(3m+1) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{2} - \frac{27}{2}m = 0 \Leftrightarrow m = 1(TM)$$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

b) Gọi giá tiền mỗi gian hàng tăng lên x (triệu đồng) (ĐK: $x > 0$)

Khi đó giá mỗi gian hàng sau khi tăng lên là $100 + x$ (triệu đồng).

Cứ mỗi lần tăng 5% tiền thuê mỗi gian hàng (tăng $5\% \cdot 100 = 5$ triệu đồng) thì có thêm 2 gian hàng trống nên khi tăng x triệu đồng thì có thêm $\frac{2x}{5}$ gian hàng trống.

Khi đó số gian hàng được thuê sau khi tăng giá là $100 - \frac{2x}{5}$ (gian).

Số tiền thu được là: $(100 + x) \left(100 - \frac{2x}{5} \right)$ (triệu đồng).

Yêu cầu bài toán trở thành tìm x để $P = (100 + x) \left(100 - \frac{2x}{5} \right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= (100 + x) \left(100 - \frac{2x}{5} \right) = 10000 - 40x + 100x - \frac{2x^2}{5} \\
 &= -\frac{2}{5}(x^2 - 150x) + 10000 = -\frac{2}{5}(x^2 - 2 \cdot 75x + 75^2) + \frac{2}{5} \cdot 75^2 + 10000 \\
 &= -\frac{2}{5}(x - 75)^2 + 12250
 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (x - 75)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{5}(x - 75)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{5}(x - 75)^2 + 12250 \leq 12250$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 75$.

Vậy người quản lí phải cho thuê mỗi gian hàng với giá $100 + 75 = 175$ triệu đồng thì doanh thu của trung tâm thương mại VC trong năm là lớn nhất.