

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (3,5 điểm)

a) Tính giá trị của các biểu thức sau

$$A = \sqrt{16} - \sqrt{4}$$

$$B = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3) + 3\sqrt{5}$$

$$C = \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} + \sqrt{2}$$

b) Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

$$1) x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$2) x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$3) \begin{cases} 2x - y = -7 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$$

Câu 2 (1,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} + 1$ với $a \geq 0, a \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $a = 3$

Câu 3 (1,5 điểm)

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

b) Tìm giao điểm của đồ thị hàm số (P) với đường thẳng (d): $y = x$

c) Cho phương trình: $x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$ (1) (m là tham số)

Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m . Khi đó tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4 (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$), Từ H kẻ HM vuông góc với AB ($M \in AB$) và kẻ HN vuông góc với AC ($N \in AC$). Vẽ đường kính AE của đường tròn (O) cắt MN tại I , Tia MN cắt đường tròn (O) tại K

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b) Chứng minh $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

c) Chứng minh tứ giác $CEIN$ nội tiếp và tam giác AHK cân

Câu 5 (0,5 điểm)

Cho ba số thực không âm a, b, c và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:
 $a + 2b + c \geq 4(1-a)(1-b)(1-c)$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) **Tính giá trị của các biểu thức sau**

$$A = \sqrt{16} - \sqrt{4} = 4 - 2 = 2$$

$$B = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3) + 3\sqrt{5} = 5 - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5$$

$$C = \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} + \sqrt{2} = |\sqrt{2} - 5| + \sqrt{2} = -(\sqrt{2} - 5) + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 5 + \sqrt{2} = 5$$

c) **Giải các phương trình, hệ phương trình sau:**

$$1) x^2 - 7x + 10 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4.1.10 = 9 \geq 0$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{9}}{2.1} = 5 \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{9}}{2.1} = 2$$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm là $S = \{2; 5\}$

$$2) x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \quad (2)$$

Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$) khi đó phương trình (2) tương đương với

$$t^2 - 5t - 36 = 0 \quad (3)$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.(-36) = 169 \geq 0$$

Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt

$$t_1 = \frac{5 + \sqrt{169}}{2.1} = 9 \quad (\text{Thỏa mãn})$$

$$t_2 = \frac{5 - \sqrt{169}}{2.1} = -4 \quad (\text{Không thỏa mãn})$$

$$\text{Với } t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Vậy phương trình (2) có tập nghiệm là $S = \{-3; 3\}$

$$3) \begin{cases} 2x - y = -7 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 8 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x - 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (-3; 1)$

Câu 2

a) **Rút gọn P**

$$P = \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} + 1 = \frac{\sqrt{a}+1}{a-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{a-1} + \frac{a-1}{a-1} = \frac{\sqrt{a}+1 - \sqrt{a}+1 + a-1}{a-1} = \frac{a+1}{a-1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{a+1}{a-1} \text{ với } a \geq 0, a \neq 1$$

b) **Tính giá trị của P khi a=3**

$$\text{Thay } a=3 \text{ vào } P = \frac{a+1}{a-1} \text{ ta có } P = \frac{3+1}{3-1} = 2$$

Vậy $P=2$ với $a=3$

Câu 3

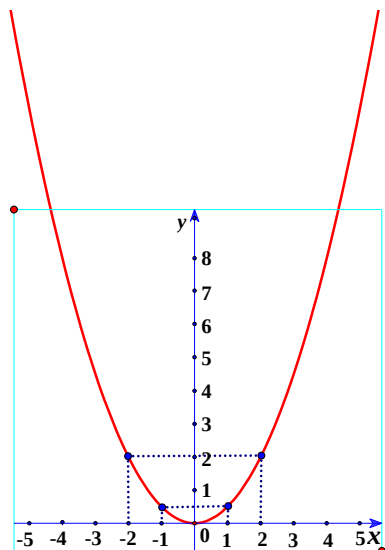
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

Ta có bảng giá trị sau

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-2;2); (-1; \frac{1}{2}); (0;0);$

$(1; \frac{1}{2}); (2;2)$ và nhận trục Oy làm trục đối xứng.



b) Tìm giao điểm của đồ thị hàm số (P) với đường thẳng (d): $y=x$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (P) và đường

thẳng (d): $\frac{1}{2}x^2 = x \Leftrightarrow x = 0; x = 2$

Với $x=0 \Rightarrow y=0$ ta có giao điểm $O(0;0)$

Với $x=2 \Rightarrow y=2$ ta có giao điểm $A(2;2)$

Vậy giao điểm của đồ thị hàm số (P) và đường thẳng (d) là $O(0;0);$

$A(2;2)$

c) Cho phương trình: $x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$ (1) (m là tham số)

Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m . Khi đó tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\Delta = (m+2)^2 - 4.1(m-1) = m^2 + 4m + 4 - 4m + 4 = m^2 + 8 \geq 0 \quad \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lý vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+2) \\ x_1 \cdot x_2 = m-1 \end{cases}$

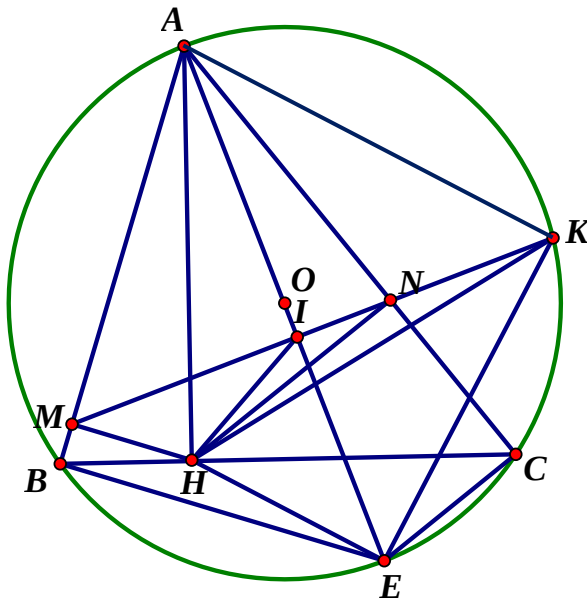
Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} A &= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 \\ &= (-(m+2))^2 - 5(m-1) = m^2 + 4m + 4 - 5m + 5 = m^2 - m + 9 \\ &= m^2 - 2m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{35}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{35}{4} \geq \frac{35}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{35}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{35}{4}$ khi $m - \frac{1}{2} = 0$ hay $m = \frac{1}{2}$

Câu 4



a) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp

Ta có $HM \perp AB$ (gt) $\Rightarrow \angle AMH = 90^\circ$

$HN \perp AC$ (gt) $\Rightarrow \angle ANH = 90^\circ$

Xét tứ giác AMHN có

$$\angle AMH + \angle ANH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà $\angle AMH$ và $\angle ANH$ là 2 góc đối

$\Rightarrow$ Tứ giác AMHN nội tiếp

b) Chứng minh $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

Do Tứ giác AMHN nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \angle AMN = \angle AHN$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Mà $\angle AHN + \angle HAN = 90^\circ$ ($\triangle ANH$ vuông tại N)

$\angle ACB + \angle HAN = 90^\circ$ ($\triangle ANH$ vuông tại N)

$$\Rightarrow AMN = ACB$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ANM$ có

BAC là góc chung

$$AMN = ACB \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ đồng dạng } \triangle ANM \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} \Rightarrow AB \cdot AM = AC \cdot AN$$

d) Chứng minh tứ giác $CEIN$ nội tiếp và tam giác AHK cân

Xét (0) ta có

$$EAC = EBC \text{ (2 góc nội tiếp chắn cung EC) (1)}$$

Ta có $ABE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (0))

$$\Rightarrow ABH + CBE = 90^\circ$$

Mà $ABH + HAM = 90^\circ$ ($\triangle ABH$ vuông tại H)

$$\Rightarrow ECB = HAM \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow HAM = EAC \text{ (3)}$$

Do Tứ giác $AMHN$ nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow AHM = ANM \text{ (2 góc nội tiếp chắn cung AM) (4)}$$

Mà $MHA + HAM = 90^\circ$ ($\triangle AHM$ vuông tại M) (5)

$$\text{Từ (3);(4);(5)} \Rightarrow CAE + ANM = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ANI \text{ vuông tại I}$$

$$\Rightarrow AIN = 90^\circ \Rightarrow NIE = 90^\circ$$

Xét (0) $\Rightarrow ACE = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $CEIN$ có

$$NIE + NCE = NIE + ACE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà NIE và NCE là 2 góc đối

$$\Rightarrow \text{Tứ giác } CEIN \text{ nội tiếp}$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H

Áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và đường cao

$$\Rightarrow AH^2 = AN \cdot AC \text{ (6)}$$

Nối A với K $\Rightarrow AKE = 90^\circ \Rightarrow \triangle AKE$ vuông tại K

Áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và đường cao

$$\Rightarrow AK^2 = AI \cdot AE \text{ (7)}$$

Xét $\triangle AIN$ và $\triangle ACE$ có

$$AIN = ACE = 90^\circ$$

CAE chung

$$\Rightarrow \triangle AIN \text{ đồng dạng } \triangle ACE$$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AN}{AE} \Rightarrow AI \cdot AE = AC \cdot AN \text{ (8)}$$

Từ (6)(7)(8) $\Rightarrow AH^2 = AK^2 \Rightarrow AH = AK \Rightarrow \Delta HAK$ cân tại A

Câu 5 Cho ba số thực không âm a, b, c và thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:
 $a+2b+c \geq 4(1-a)(1-b)(1-c)$

Ta có $a+2b+c \geq 4(1-a)(1-b)(1-c) \Rightarrow a+2b+c \geq 4(b+c)(a+c)(a+b)$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$a+b+b+c \geq 2\sqrt{(a+b)(b+c)} \Rightarrow (a+2b+c)^2 \geq 4(a+b)(b+c) \Rightarrow (a+2b+c)^2(a+c) \geq 4(a+b)(b+c)(a+c)$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si

$$\frac{a+2b+c+a+c}{2} \geq \sqrt{(a+2b+c)(a+c)} \Rightarrow \frac{2(a+b+c)}{2} \geq \sqrt{(a+2b+c)(a+c)} \Rightarrow 1 \geq \sqrt{(a+2b+c)(a+c)}$$

$$\Rightarrow 1 \geq (a+2b+c)(a+c) \Rightarrow a+2b+c \geq (a+2b+c)^2(a+c)$$

$$\Rightarrow a+2b+c \geq 4(a+b)(a+c)(b+c)$$