

ĐỀ SỐ 41: TUYỂN SINH VÀO 10 NINH BÌNH NĂM HỌC 2019-2020

- Câu 1:**
- Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{2} + \sqrt{18}$.
 - Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$
 - Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): y = x - 3$ và $(d_2): y = -2x + 3$.

- Câu 2:**
- Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}}{x-9}$ (với $x \geq 0, x \neq 9$).
 - Cho phương trình $x^2 + 5x + m - 2 = 0$ (1) với m là tham số.
 - Giải phương trình (1) khi $m = 6$.
 - Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $S = (x_1 - x_2)^2 + 8x_1x_2$ đạt giá trị NINH lớn nhất.

- Câu 3:** Bác Bình gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng A, kì hạn một năm. Cùng ngày, bác gửi tiết kiệm 150 triệu đồng vào ngân hàng B, kì hạn một năm, với lãi suất cao hơn lãi suất của ngân hàng A là 1% / năm. Biết sau đúng 1 năm kể từ ngày gửi tiền. Bác Bình nhận được tổng số tiền lãi là 16.5 triệu đồng từ hai khoản tiền gửi tiết kiệm nêu trên. Hỏi lãi suất tiền gửi tiết kiệm kì hạn một năm của ngân hàng A là bao nhiêu phần trăm?

- Câu 4:**
- Cho đường tròn tâm O một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ đường thẳng đi qua tâm O , cắt đường tròn tại hai điểm A, B (A nằm giữa M và B). Kẻ đường thẳng thứ hai đi qua M , cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt C, D (C nằm giữa M và D , C khác A). Đường thẳng vuông góc với MA tại M cắt đường thẳng BC tại N , đường thẳng NA cắt đường tròn tại điểm thứ hai là E .
 - Chứng minh tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp.
 - Chứng minh DE vuông góc với MB .
 - Trên một khúc sông với 2 bờ song song với nhau, có một chiếc đò dự định chèo qua sông từ vị trí A ở bờ bên này sang vị trí B ở bờ bên kia, đường thẳng AB vuông góc với các bờ sông. Do bị dòng nước đẩy xiên nên chiếc đò đã cập bờ bên kia tại vị trí C cách B một khoảng bằng 30 m. Biết khúc sông rộng 150 m, hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc có số đo bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến giây).

- Câu 5:**
- Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tổng các ước nguyên dương của p^2 là một số chính phương.
 - Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \geq 2019$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}}$.

LỜI GIẢI

Câu 1

a) $A = \sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 \cdot 1 - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $x; y = 1; -1$

c) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): y = x - 3$ và $(d_2): y = -2x + 3$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x - 3 = -2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): y = x - 3$ và $(d_2): y = -2x + 3$ là $x; y = 2; -1$

Câu 2

$$\begin{aligned} 1. \quad P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}}{x-9} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{3(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}-3\sqrt{x}-9+6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $P = 1$

2. Cho phương trình $x^2 + 5x + m - 2 = 0$ (1)

a) Khi $m = 6$ phương trình (1) trở thành $x^2 + 5x + 4 = 0$ có $a - b + c = 1 - 5 + 4 = 0$ nên có hai nghiệm là $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = -4$

Vậy, khi $m = 6$ thì tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = (-4; -1)$

b) $x^2 + 5x + m - 2 = 0$ (1)

Ta có $\Delta = 5^2 - 4(m - 2) = 33 - 4m$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 33 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{33}{4}$

Áp dụng định lý Vi ét cho phương trình (1) ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$

Theo đề ra ta có $S = (x_1 - x_2)^2 + 8x_1x_2$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 8x_1x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2$$

$$= (-5)^2 + 4(m - 2)$$

$$= 17 + 4m$$

$$\text{Ta có } m \leq \frac{33}{4} \Rightarrow 4m \leq 33 \Rightarrow 17 + 4m \leq 17 + 33 = 50$$

Vậy giá trị lớn nhất của $S = 50$. Dấu “=” xảy ra khi $m = \frac{33}{4}$

Câu 3

Gọi lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn một năm của ngân hàng A là $x\%$ / năm. ($x > 0$)

Thì lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn một năm của ngân hàng B là $(x+1)\%$ / năm.

Tiền lãi bác Bình nhận được sau 1 năm gửi vào ngân hàng A là : $100x\%$ (triệu đồng)

Tiền lãi bác Bình nhận được sau 1 năm gửi vào ngân hàng B là : $150(x+1)\%$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lãi bác Bình nhận được từ hai khoản tiết kiệm trên là 16,5 triệu đồng nên ta có phương trình : $100x\% + 150(x+1)\% = 16,5$

$$\Leftrightarrow 100x + 150x + 150 = 1650$$

$$\Leftrightarrow 250x = 1500$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy lãi suất tiền gửi tiết kiệm kì hạn một năm của ngân hàng A là 6%

Câu 4

1.

a. Chứng minh tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp.

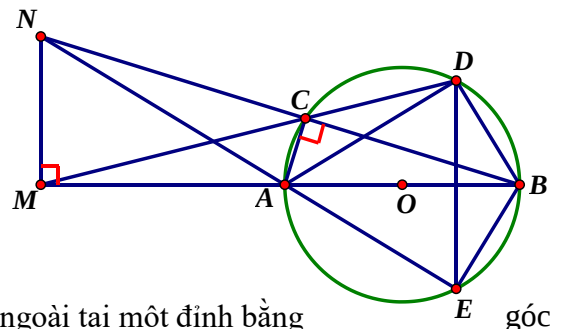
Ta có $MN \perp AB \Rightarrow NMA = 90^\circ$

ACB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên

$$ACB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow ACB = NMA (= 90^\circ)$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng trong tại đỉnh đối diện)



b. Chứng minh DE vuông góc với MB .

Ta có tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp (chứng minh trên)

$$\Rightarrow CNA = CMA \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AC)$$

$$\text{Hay } BNE = BMD \quad (1)$$

Xét đường tròn (O) ta có :

BNE là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn chắn cung AC và BE

$$\Rightarrow BNE = \frac{1}{2}(\text{sđ } BE - \text{sđ } AC) \quad (2)$$

DMB là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn chắn cung AC và BD

$$\Rightarrow DMB = \frac{1}{2}(\text{sđ } BD - \text{sđ } AC) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\text{sđ } BE = \text{sđ } BD$

$$\Rightarrow BD = BE \text{ (hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau)}$$

$$\Rightarrow B \text{ nằm trên đường trung trực của } DE \quad (4)$$

Lại có $ADB = AEB = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle AEB$ ta có :

$$ADB = AEB = 90^\circ \text{ (chứng minh trên)}$$

AB chung

$$BD = BE \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle ADB = \triangle AEB$ (ch-cgv)

$$\Rightarrow AD = AE \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow A \text{ nằm trên đường trung trực của } DE \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra AB là đường trung trực của DE

$$\Rightarrow AB \perp DE \text{ hay } MB \perp DE \text{ (đpcm)}$$

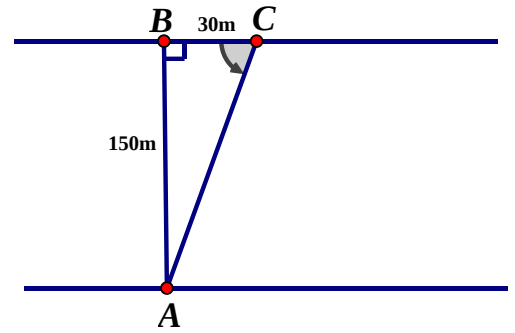
2.

Ta có hình vẽ :

Ta có $AB \perp BC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại B

$$\text{Do đó } \tan ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{150}{30} = 5 \Rightarrow ACB = 78^{\circ}41'24''$$

Vậy dòng nước đã đẩy chiếc đò đi lệch một góc có số đo bằng $90^{\circ} - 78^{\circ}41'24'' = 11^{\circ}18'36''$



Câu 5

1.

Ta có p là số nguyên tố ($p \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow p^2$ là số có các ước dương là $1; p; p^2$

Theo đề bài ta có tổng các ước nguyên dương của p là một số chính phương

$$\Rightarrow 1 + p + p^2 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 4 + 4p + 4p^2$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 = (2p+1)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 - (2p+1)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (2k-2p-1)(2k+2p+1) = 3 \quad (*)$$

Ta có $k, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2k+2p+1 > 0; 2k-2p-1 < 2k+2p+1$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2k-2p-1=1 \\ 2k+2p+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k-2p=2 \\ 2k+2p=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ p=0 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy không có số nguyên tố p nào thỏa mãn đề bài

2.

Ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $a, b, c, x, y, z > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki cho ba bộ số $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}; \sqrt{x}\right), \left(\frac{b}{\sqrt{y}}; \sqrt{y}\right), \left(\frac{c}{\sqrt{z}}; \sqrt{z}\right)$

$$\text{ta có } \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right)(x+y+z) = \left[\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{z}}\right)^2\right] \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\right]$$

$$\geq \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{c}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z}\right)^2 = (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}; \sqrt{zx} \leq \frac{z+x}{2}; \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T &\geq \frac{x^2}{x + \frac{y+z}{2}} + \frac{y^2}{y + \frac{z+x}{2}} + \frac{z^2}{z + \frac{x+y}{2}} \\ &= \frac{2x^2}{2x+y+z} + \frac{2y^2}{x+2y+z} + \frac{2z^2}{x+y+2z} \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\frac{x^2}{2x+y+z} + \frac{y^2}{x+2y+z} + \frac{z^2}{x+y+2z} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$T \geq 2 \frac{(x+y+z)^2}{4(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{2019}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 673$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{2019}{2}$ khi $x = y = z = 673$

LỜI GIẢI ĐỀ SỐ 6: TUYỂN SINH VÀO 10 BẮC NINH NĂM HỌC 2019-2020
I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm) Chọn phương án trả lời đúng trong các câu sau:

Câu 1: Khi $x = 7$ biểu thức $\frac{4}{\sqrt{x+2}-1}$ có giá trị là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{4}{\sqrt{8}}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 2.

Lời giải

Chọn: D

Thay $x = 7$ (thỏa mãn) vào biểu thức $\frac{4}{\sqrt{x+2}-1}$ ta tính được biểu thức có giá trị bằng

$$\frac{4}{\sqrt{7+2}-1} = \frac{4}{3-1} = 2.$$

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 1 - x$. B. $y = 2x - 3$. C. $y = 1 - \sqrt{2}x$. D. $y = -2x + 6$.

Lời giải

Chọn: B

Hàm số $y = 2x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn: D

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$. Khi đó phương trình tương đương $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Ta thấy $1 - 3 + 2 = 0$. Nên phương trình có hai nghiệm $t = 1$ (thỏa mãn); $t = 2$ (thỏa mãn).

$$\text{Khi đó } \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^2$ $a \neq 0$. Điểm $M(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số khi

- A. $a = 2$. B. $a = \frac{1}{2}$. C. $a = -2$. D. $a = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $M(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ nên ta có

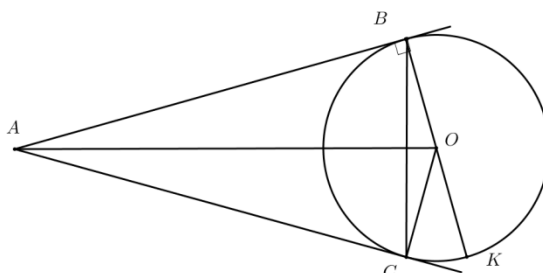
$$2 = a.1^2 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 5: Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn O kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BK . Biết $BAC = 30^\circ$, số đo của cung nhỏ CK là

- A. 30° . B. 60° . C. 120° . D. 150° .

Lời giải

Chọn: A.



Từ giả thiết ta suy ra tứ giác $ABOC$ nội tiếp nên $BAC = COK = 30^\circ$, mà $COK = \text{sđ } CK$ nên Số đo cung nhỏ CK là 30° .

Câu 6: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

Biết $AH = \sqrt{12} \text{ cm}$, $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{3}$. Độ dài đoạn BC là

- A. 6 cm. B. 8 cm. C. $4\sqrt{3}$ cm. D. 12 cm.

Lời giải

Chọn: B

Theo đề bài ta có: $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{3} \Rightarrow HC = 3HB$. Áp

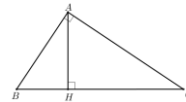
dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ta có

$$AH^2 = BH \cdot HC \Leftrightarrow 12 = BH \cdot 3BH$$

$$\Leftrightarrow BH^2 = 4 \Leftrightarrow BH = 2$$

$$\Rightarrow HC = 3 \cdot HB = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\Rightarrow BC = HB + HC = 2 + 6 = 8 \text{ (cm)}$$



II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu 7: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}^2 + \sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x-1} \sqrt{x+1}} - \frac{3\sqrt{x+1}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x là số chính phương để $2019A$ là số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{x+1}^2 + \sqrt{x-1}^2 - 3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \sqrt{x+1}} = \frac{x + 2\sqrt{x+1} + x - 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2x - 3\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x-1} \sqrt{x+1}} = \frac{2x - 2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x-1} \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} \sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

$$2019A = \frac{2019 \cdot 2\sqrt{x-1} - 2019}{\sqrt{x+1}} = 4038 - \frac{2019}{\sqrt{x+1}}.$$

b)

$2019A$ là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x+1}$ là ước nguyên dương của 2019 gồm: 1; 3; 9; 673; 2019; 6057.

$$+) \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0, \text{ thỏa mãn.}$$

$$+) \sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x = 4, \text{ thỏa mãn.}$$

$$+) \sqrt{x+1} = 9 \Leftrightarrow x = 64, \text{ thỏa mãn.}$$

$$+) \sqrt{x+1} = 673 \Leftrightarrow x = 451584, \text{ thỏa mãn.}$$

$$+) \sqrt{x+1} = 2019 \Leftrightarrow x = 4072324, \text{ thỏa mãn.}$$

$$+) \sqrt{x+1} = 6057 \Leftrightarrow x = 36675136, \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 8: An đếm số bài kiểm tra một tiết đạt điểm 9 và điểm 10 của mình thấy nhiều hơn 16 bài. Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đạt điểm 9 và điểm 10 đó là 160. Hỏi An được bao nhiêu bài điểm 9 và bao nhiêu bài điểm 10?

Lời giải

Gọi số bài điểm 9 và điểm 10 của An đạt được lần lượt là x, y (bài) $x, y \in \mathbb{N}$.

Theo giả thiết $x + y > 16$.

Vì tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đó là 160 nên $9x + 10y = 160$.

Ta có $160 = 9x + 10y \geq 9(x + y) \Rightarrow x + y \leq \frac{160}{9}$.

Do $x + y \in \mathbb{N}$ và $16 < x + y \leq \frac{160}{9}$ nên $x + y = 17$.

Ta có hệ $\begin{cases} x + y = 17 \\ 9x + 10y = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ 9(17 - y) + 10y = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy An được 10 bài điểm 9 và 7 bài điểm 10.

Câu 9: Cho đường tròn O , hai điểm A, B nằm trên O sao cho $\angle AOB = 90^\circ$. Điểm C nằm trên cung lớn AB sao cho $AC > BC$ và tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AI, BK của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . BK cắt O tại điểm N (khác điểm B); AI cắt O tại điểm M (khác điểm A); NA cắt MB tại điểm D . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $CIHK$ nội tiếp một đường tròn.
- MN là đường kính của đường tròn O .
- OC song song với DH .

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{cases} HK \perp KC \\ HI \perp IC \end{cases} \Rightarrow \angle HKC + \angle HIC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Do đó, $CIHK$ là tứ giác nội tiếp.

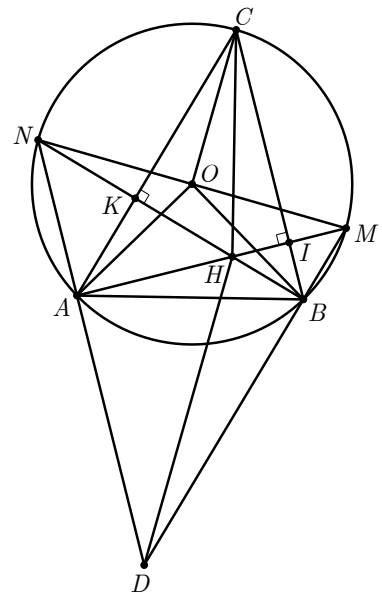
b) Do tứ giác $CIHK$ nội tiếp nên

$$45^\circ = \angle ICK = \angle BHI = \frac{1}{2} \text{sđ} BM + \frac{1}{2} \text{sđ} AN.$$

$$\Rightarrow \text{sđ} BM + \text{sđ} AN = 90^\circ.$$

$$\text{Suy ra, } \text{sđ} MN = \text{sđ} AB + (\text{sđ} BM + \text{sđ} AN) \text{ hay} \\ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

MN là đường kính của O .



c) Do MN là đường kính của O nên $MA \perp DN, NB \perp DM$. Do đó, H là trực tâm tam giác DMN hay $DH \perp MN$.

Do I, K cùng nhìn AB dưới góc 90° nên tứ giác $ABIK$ nội tiếp.

Suy ra, $\angle CAI = \angle CBK \Rightarrow \text{sđ} CM = \text{sđ} CN \Rightarrow C$ là điểm chính giữa của cung $MN \Rightarrow CO \perp MN$.

Vì $AC > BC$ nên $\triangle ABC$ không cân tại C do đó C, O, H không thẳng hàng. Từ đó suy ra $CO \parallel DH$.

- Câu 10:** a) Cho phương trình $x^2 - 2mx - 2m - 1 = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{3 + x_1 x_2} = 2m + 1$.
- b) Cho hai số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{a^3 + b^3 + 4}{ab + 1}$.

Lời giải

a) $\Delta' = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Áp dụng ĐL Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = -2m - 1$.

Ta có $\sqrt{2m} + \sqrt{2 - 2m} = 2m + 1$ (ĐK $0 \leq m \leq 1$ (*))

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m} - 1 + \sqrt{2 - 2m} - 1 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2m - 1}{\sqrt{2m} + 1} - \frac{2m - 1}{\sqrt{2 - 2m} + 1} - 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 \left(\frac{1}{\sqrt{2m} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2 - 2m} + 1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} & t / m^* \\ \frac{1}{\sqrt{2m} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2 - 2m} + 1} - 1 = 0 & 2 \end{cases}$$

Vì $\sqrt{2m} + 1 \geq 1, \forall m$ thỏa mãn $0 \leq m \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m} + 1} \leq 1$. Do đó, VT $< 0 = VP$ hay

2 vô nghiệm.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{1}{2}$.

b) Ta có $a^3 + b^3 + 4 = a^3 + b^3 + 1 + 3 \geq 3ab + 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Vì $ab + 1 > 0$ nên $M = \frac{a^3 + b^3 + 4}{ab + 1} \geq \frac{3ab + 3}{ab + 1} = 3$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 3 đạt được khi $a = b = 1$.

+) Vì $a^2 + b^2 = 2$ nên $a \leq \sqrt{2}; b \leq \sqrt{2}$. Suy ra $a^3 + b^3 + 4 \leq \sqrt{2}(a^2 + b^2) + 4 = 2\sqrt{2} + 4$.

Mặt khác $\frac{1}{ab + 1} \leq 1$ do $ab + 1 \geq 1$. Suy ra $M = \frac{a^3 + b^3 + 4}{ab + 1} \leq 2\sqrt{2} + 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a; b = 0; \sqrt{2} \vee a; b = \sqrt{2}; 0$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức M là $4 + 2\sqrt{2}$ đạt được khi $a; b = 0; \sqrt{2} \vee a; b = \sqrt{2}; 0$

-----Hết-----