

QUẢNG NAM (Đề chung)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{12} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) Cho biểu thức $B = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$. Rút gọn biểu thức B và tìm x để $B = 8$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ parabol (P) .

b) Hai điểm A, B thuộc (P) . có hoành độ lần lượt là $2; -1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B .

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$.

b) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $P = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị nguyên.

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $6cm$. Điểm N nằm trên cạnh CD sao cho $DN = 2cm$, P là điểm nằm trên tia đối của tia BC sao cho $BP = DN$.

a) Chứng minh $\triangle ABP = \triangle ADN$ và tứ giác $ANCP$ nội tiếp đường tròn.

b) Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$.

c) Trên cạnh BC , lấy điểm M sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Chứng minh $MP = MN$ và tính diện tích tam giác AMN .

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 3; y \geq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 21\left(x + \frac{1}{y}\right) + 3\left(y + \frac{1}{x}\right)$

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{12} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) Cho biểu thức $B = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$. Rút gọn biểu thức B và tìm x để $B = 8$.

Lời giải

$$A = \sqrt{12} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$A = 2\sqrt{3} + |\sqrt{2}-1| - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= 2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3} - 1$$

$$B = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-1+2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{2x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$B = 8 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \text{ (TMĐK)}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$.

c) Vẽ parabol (P) .

d) Hai điểm A, B thuộc (P) . có hoành độ lần lượt là $2; -1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B .

Lời giải

$$A(2; 2); B(-1; \frac{1}{2})$$

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = ax + b$

Vì $A(2; 2); B(-1; \frac{1}{2})$ thuộc đường thẳng $y = ax + b$ nên:

$$\begin{cases} 2a+b=2 \\ \frac{1}{2}a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=2 \\ a+2b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=2 \\ 2a+4b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm là: $y = 2x - 2$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$.

b) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $P = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Đặt $x^2 = t \geq 0$, phương trình trở thành $t^2 + 2t - 8 = 0$ (1)

$$\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-8) = 9 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{9} = 3$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-1+3}{1} = 2(TM); t_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-1-3}{1} = -4(KTM)$$

Với $t = 2$, ta có: $x = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

b) $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$

$$\Delta = (2m+1)^2 - (m^2 + 1) = 4m^2 + 4m + 4 - m^2 - 1 = 3m^2 + 4m + 3 = 3(> 0 \forall m)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

$$\text{Theo hệ thức Vi et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m+1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{Theo đề ta có } P = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m + 1}$$

Để P có giá trị nguyên thì

$$m^2 + 1 : 2m + 1 \Rightarrow 4m^2 + 1 : 2m + 1 \Rightarrow (2m-1)(2m+1) + 2 : 2m + 1$$

$$\Rightarrow 2 : 2m + 1 \Rightarrow 2m + 1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

$$+ 2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0 \in \mathbb{Z}$$

$$+ 2m + 1 = -1 \Rightarrow m = -1 \in \mathbb{Z}$$

$$+ 2m+1=2 \Rightarrow m=\frac{1}{2} \notin Z$$

$$+ 2m+1=-2 \Rightarrow m=-\frac{3}{2} \notin Z$$

Vậy $m \in \{0; -1\}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức

$$P = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} \text{ có giá trị nguyên.}$$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $6cm$. Điểm N nằm trên cạnh CD sao cho $DN = 2cm$, P là điểm nằm trên tia đối của tia BC sao cho $BP = DN$.

a) Chứng minh $\triangle ABP = \triangle ADN$ và tứ giác $ANCP$ nội tiếp đường tròn.

b) Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$.

c) Trên cạnh BC , lấy điểm M sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Chứng minh $MP = MN$ và tính diện tích tam giác AMN .

Lời giải

a) Xét $\triangle ABP$ và $\triangle ADN$, có:

$$AB = AD(gt); \angle ABP = \angle ADN (= 90^\circ); BP = DN (= 2cm)$$

$$\Rightarrow \triangle ABP = \triangle ADN (c.g.c)$$

$$\triangle ABP = \triangle ADN \Rightarrow \angle APB = \angle AND$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ANCP$ nội tiếp đường tròn.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$

Tứ giác $ANCP$ nội tiếp, có $\angle NCP = 90^\circ$

$\Rightarrow NP$ là đường kính của đường tròn (O) và $\angle NAP = 90^\circ$

$$\Rightarrow NP = \sqrt{AN^2 + AP^2} = \sqrt{2}AN \quad (1)$$

$$\triangle ADN \text{ vuông tại } D, \text{ nên: } AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } NP = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{10} = 4\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$ là $2\sqrt{5} \text{ (cm)}$.

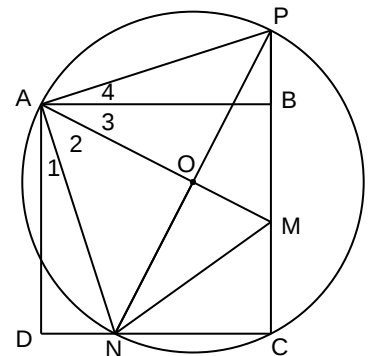
Độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANCP$ là: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}\pi \text{ (cm)}$

$$c) \text{ Ta có } \angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = 90^\circ \Rightarrow \angle A_1 + \angle A_3 = 45^\circ$$

$$\text{Mà } \angle A_1 = \angle A_4 \text{ nên } \angle A_4 + \angle A_3 = 45^\circ \Rightarrow \angle MAP = 45^\circ$$

Xét $\triangle MAN$ và $\triangle MAP$, có:

AM : cạnh chung; $\angle MAN = \angle MAP (= 45^\circ)$; $AN = AP$



Do đó $\Delta MAN = \Delta MAP$ (c.g,c) $\Rightarrow MN = MP$

Ta có $AN = AP; MN = MP; ON = OP \Rightarrow AM \perp NP$ tại O.

$$\Delta POM \cong \Delta PCN (g.g) \Rightarrow PM.PC = PO.PN \Rightarrow PM = \frac{PO.PN}{PC} = \frac{2\sqrt{5}.4\sqrt{5}}{8} = 5(cm)$$

$$\Rightarrow BM = 3(cm)$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}(cm)$$

$$S_{ANM} = \frac{1}{2}.AM.NO = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.2\sqrt{5} = 15(cm^2)$$

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 3; y \geq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 21\left(x + \frac{1}{y}\right) + 3\left(y + \frac{1}{x}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} T &= 21x + \frac{21}{y} + 3y + \frac{3}{x} = \frac{x}{3} + \frac{62}{3}x + \frac{3}{x} + \frac{21}{y} + \frac{7}{3}y + \frac{2}{3}y \\ &= \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right) + \left(\frac{21}{y} + \frac{7}{3}y\right) + \frac{62}{3}x + \frac{2}{3}y \geq 2 + 14 + 62 + 2 = 80 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 80 khi $x = 3; y = 3$.