

Bài 1. (1,0 điểm)

- a) Cho biểu thức $A = \sqrt{16} - \sqrt{25} + \sqrt{4}$. So sánh A với $\sqrt{2}$
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

Bài 2. (2,5 điểm)

1. Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 2$
- a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và tiếp xúc với (P) .
2. Cho phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ (m là tham số)
- a) Biết phương trình có một nghiệm bằng -1 . Tính nghiệm còn lại.
- b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(3x_1 + 1)(3x_2 + 1) = 4$

Bài 3. (2,0 điểm)

Một đội công nhân đặt kế hoạch sản xuất 250 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu, họ thực hiện đúng kế hoạch. Mỗi ngày sau đó, họ đều vượt mức 5 sản phẩm nên đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày so với dự định. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày đội công nhân đó làm được bao nhiêu sản phẩm? Biết rằng năng suất làm việc của mỗi công nhân là như nhau.

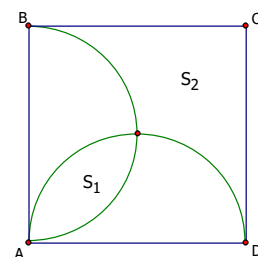
Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), đường cao AH , nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D và E thứ tự là hình chiếu vuông góc của H lên AB và AC .

- a) Chứng minh các tứ giác $AEHD$ và $BDEC$ nội tiếp được đường tròn.
- b) Vẽ đường kính AF của đường tròn (O) . Chứng minh $BC = \sqrt{AB \cdot BD} + \sqrt{AC \cdot CE}$ và AF vuông góc với DE .
- c) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE . Chứng minh O' là trung điểm của HF .
- d) Tính bán kính đường tròn (O') biết $BC = 8cm$, $DE = 6cm$, $AF = 10cm$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S_1 là diện tích phần giao của hai nửa đường tròn đường kính AB và AD . S_2 là diện tích phần còn lại của hình vuông nằm ngoài hai nửa đường tròn nói trên (như hình vẽ bên). Tính $\frac{S_1}{S_2}$



----- HẾT -----

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. (1,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \sqrt{16} - \sqrt{25} + \sqrt{4}$. So sánh A với $\sqrt{2}$

$$A = \sqrt{16} - \sqrt{25} + \sqrt{4} = 4 - 5 + 2 = 1 < \sqrt{2}. \text{ Vậy } A < \sqrt{2}$$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$$

Bài 2. (2,5 điểm)

1. Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 2$

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và tiếp xúc với (P) .

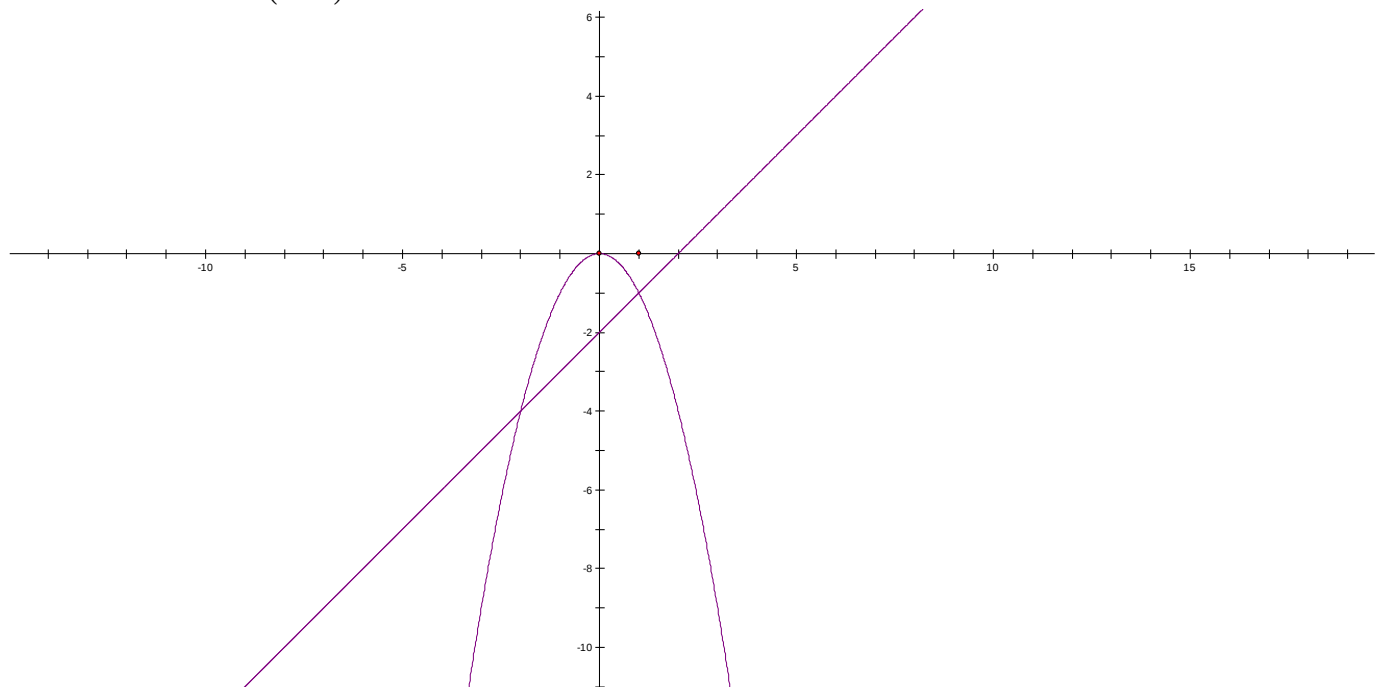
a) $(P): y = -x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

$(d): y = x - 2$

$$x = 0 \Rightarrow y = -2: (0; -2)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 2: (2; 0)$$



b) Phương trình đường thẳng (d') có dạng $y = ax + b$

$$(d') \parallel (d): y = x - 2 \Rightarrow a = 1; b \neq -2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d') là $-x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 + x + b = 0 (*)$

PT $(*)$ có $\Delta = 1 - 4b$.

(P) và (d') tiếp xúc nhau khi PT $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$

(nhận).

Vậy PT đường thẳng (d') là: $y = x + \frac{1}{4}$

2. Cho phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ (m là tham số)

a) Biết phương trình có một nghiệm bằng -1 . Tính nghiệm còn lại.

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(3x_1 + 1)(3x_2 + 1) = 4$

a) PT $x^2 - 4x + m = 0$ có một nghiệm bằng $-1 \Rightarrow a - b + c = 0 \Rightarrow 1 + 4 + m = 0 \Rightarrow m = -5$.

Nghiem còn lại của PT là $-\frac{c}{a} = -\frac{m}{1} = -\frac{-5}{1} = 5$

b) ĐK $\Delta' = (-2)^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$

Áp dụng định lí Vi et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$

$(3x_1 + 1)(3x_2 + 1) = 4 \Rightarrow 9x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 1 = 4$

$\Rightarrow 9m + 3 \cdot 4 + 1 = 4 \Rightarrow m = -1 (tm)$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3. (2,0 điểm)

Một đội công nhân đặt kế hoạch sản xuất 250 sản phẩm. Trong 4 ngày đầu, họ thực hiện đúng kế hoạch. Mỗi ngày sau đó, họ đều vượt mức 5 sản phẩm nên đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày so với dự định. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày đội công nhân đó làm được bao nhiêu sản phẩm? Biết rằng năng suất làm việc của mỗi công nhân là như nhau.

Gọi số sản phẩm mỗi ngày đội công nhân đó làm theo kế hoạch là $x(sp)$. ĐK

$x > 0; x \in \mathbb{Z}$

Khi đó, số sản phẩm mỗi ngày đội công nhân đó làm trong thực tế là $x + 5(sp)$

Thời gian hoàn thành công việc theo kế hoạch là $\frac{250}{x}$ (ngày)

Số sản phẩm làm được trong 4 ngày đầu là: $4x(sp)$

Số sản phẩm còn lại phải làm là $250 - 4x(sp)$

Thời gian làm $250 - 4x(sp)$ còn lại là $\frac{250 - 4x}{x + 5}$ (ngày).

Theo bài toán ta có PT: $\frac{250}{x} = 4 + \frac{250 - 4x}{x + 5} + 1$

Giải PT này ta được: $x_1 = 25$ (nhận)

$x_2 = -50$ (loại)

Vậy số sản phẩm mỗi ngày đội công nhân đó làm theo kế hoạch là 25 sản phẩm.

Gợi ý hai bài hình

Bài 4. (3,5 điểm)

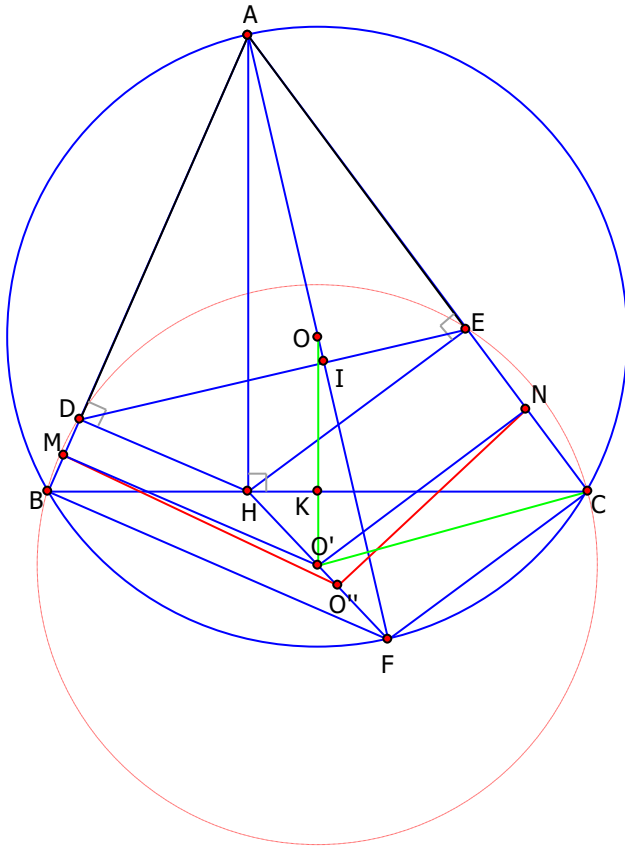
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), đường cao AH , nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D và E thứ tự là hình chiếu vuông góc của H lên AB và AC .

a) Chứng minh các tứ giác $AEHD$ và $BDEC$ nội tiếp được đường tròn.

b) Vẽ đường kính AF của đường tròn (O) . Chứng minh $BC = \sqrt{AB \cdot BD} + \sqrt{AC \cdot CE}$ và AF vuông góc với DE .

c) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE . Chứng minh O' là trung điểm của HF .

d) Tính bán kính đường tròn (O') biết $BC = 8cm, DE = 6cm, AF = 10cm$.



a) Tứ giác $AEHD$ có $\angle ADH + \angle AEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AEHD$ nội tiếp được đường tròn đường kính AH .

Tứ giác $AEHD$ (cmt) $\angle ADE = \angle AHE$ (1) (cùng chắn AE). Dễ thấy $\angle ACH = \angle AHE$ (2) (cùng phụ $\angle HAE$).

Từ (1) và (2) suy ra $\angle ADE = \angle ACH$ nên tứ giác $BDEC$ nội tiếp được đường tròn.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AHB và AHC ta có:

$$BH^2 = AB \cdot BD \Rightarrow BH = \sqrt{AB \cdot BD}$$

$$HB^2 = AC \cdot CE \Rightarrow HB = \sqrt{AC \cdot CE} \quad \text{Do đó } BC = BH + HC = \sqrt{AB \cdot BD} + \sqrt{AC \cdot CE}$$

$$HB^2 = AC \cdot CE \Rightarrow HB = \sqrt{AC \cdot CE}$$

Nối FB, FC . Gọi I là giao điểm của AF và DE .

Ta có $ADE = ACH$ (cmt) và $AFB = ACH$ (cùng chắn AB) suy ra $ADE = AFB$ nên tứ giác BDIF nội tiếp được đường

tròn $\Rightarrow DIF + DBF = 180^\circ \Rightarrow DIF = 180^\circ - DBF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Vậy $AF \perp DE$

c) Gọi M, N, O'' lần lượt là trung điểm của BD, EC, HF.

- Ta chứng minh được MO'' và NO'' lần lượt là đường trung bình của các hình thang BDHF và CEHF $\Rightarrow MO'' \parallel DH$ (3) và $\Rightarrow NO'' \parallel EH$ (4)

- Vì tứ giác BDEC nội tiếp mà O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE suy ra O' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BDEC $\Rightarrow O'$ thuộc đường trung trực của BD. Suy ra MO' là trung trực của BD do đó

$MO' \perp BD$ lại có $DH \perp BD \Rightarrow MO' \parallel DH$ (5).

Tương tự ta có $NO' \parallel EH$ (6)

- Từ (3) và (5) suy ra MO'' và MO' là hai tia trùng nhau

- Từ (4) và (6) suy ra NO'' và NO' là hai tia trùng nhau

Do đó O' trùng O''. Mà O'' là trung điểm của HF nên O' cũng là trung điểm của HF.

d) - Trong $\triangle ABC$ ta có $\frac{BC}{\sin A} = AF \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{AF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

- Trong $\triangle ADE$ ta có $\frac{DE}{\sin A} = AH \Rightarrow AH = \frac{6}{\frac{4}{5}} = 7,5 (cm)$

- Vì O' và O lần lượt là trung điểm của HF và AF nên OO' là đường trung bình của tam giác AHF $\Rightarrow OO' = \frac{AH}{2} = \frac{7,5}{2} = 3,75 (cm)$

- Gọi K là giao điểm của OO' và BC dễ thấy $OO' \perp BC$ tại trung điểm K của BC. Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông OKC ta tính được

$$OK = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 (cm)$$

- Ta có $KO' = OO' - OK = 3,75 - 3 = 0,75 (cm)$

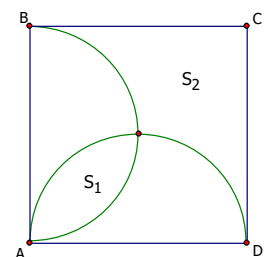
- Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông O'KC ta tính được

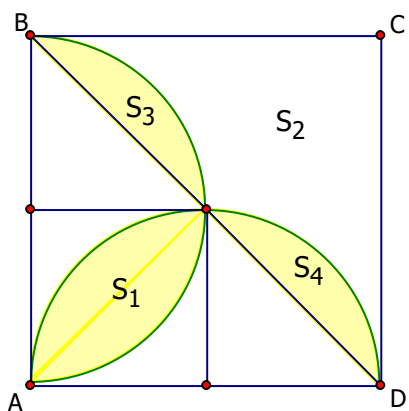
$$O'C = \sqrt{O'K^2 + KC^2} = \sqrt{0,75^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{265}}{4} (cm)$$

Vậy bán kính đường tròn (O') là $\frac{\sqrt{265}}{4} (cm)$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi S_1 là diện tích phần giao của hai nửa đường tròn đường kính AB và AD. S_2 là diện tích phần còn lại của hình vuông nằm ngoài hai nửa đường tròn nói trên (như hình vẽ bên). Tính $\frac{S_1}{S_2}$





Gọi a là cạnh hình vuông ABCD. Ta cm được:

$$S_3 = S_4 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 90}{360} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$S_1 = S_3 + S_4 = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Do đó } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi - 2}{6 - \pi}$$