

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho $A = \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 2$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm x sao cho $C = -A.B$ nhận giá trị là số nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

a). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

b). Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 150 m^2 . Biết rằng, chiều dài mảnh vườn hơn chiều rộng mảnh vườn là 5 m . Tính chiều rộng mảnh vườn.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = (m-4)x + m + 4$ (m là tham số)

- Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số đã cho luôn cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm, tìm m sao cho $x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1) = 18$.
- Gọi đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng (d) . Chứng minh khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) không lớn hơn $\sqrt{65}$.

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Kẻ dây cung CD vuông góc với AB tại H (H nằm giữa A và O , H khác A và O). Lấy điểm G thuộc CH (G khác C và H), tia AG cắt đường tròn tại E khác A .

- Chứng minh tứ giác $BEGH$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BE và CD . Chứng minh: $KC.KD = KE.KB$.
- Đoạn thẳng AK cắt đường tròn O tại F khác A . Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HEF .

d). Gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên đường thẳng EF . Chứng minh $HE + HF = MN$.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + ab + bc + ac = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 3.$$

Hướng dẫn giải

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a). Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 2$.

b). Rút gọn biểu thức B .

c). Tìm x sao cho $C = -AB$ nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

Cho $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a). Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 2$.

$$\text{Có } A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^3} - 1}{x - 1}$$

Khi $x = 2 \Rightarrow A = 2\sqrt{2} - 1$.

b). Rút gọn biểu thức B .

c). Tìm x sao cho $C = -AB$ nhận giá trị là số nguyên.

$$\text{Có } B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$B = \frac{x + \sqrt{x} + 1 - (x + 2) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$\text{Có } C = -AB = -\frac{\sqrt{x^3} - 1}{x - 1} \cdot \left(\frac{-\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

Có $\sqrt{x} + 1 \geq 1, x \geq 0, x \neq 1$.

C nhận giá trị là số nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận).

Câu 2. (2,0 điểm)

a).Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

b).Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 150m^2 . Biết rằng, chiều dài mảnh vườn hơn chiều rộng mảnh vườn là 5m . Tính chiều rộng mảnh vườn.

Lời giải

a).Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

$$\text{Có } \begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

b).Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 150m^2 . Biết rằng, chiều dài mảnh vườn hơn chiều rộng mảnh vườn là 5m . Tính chiều rộng mảnh vườn.

Gọi x, y lần lượt là chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn, điều kiện $x > 0, y > 0, x > y$.

$$\text{Có } \begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 5 \\ y(y + 5) = 150 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow y^2 + 5y - 150 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 \text{ (nhận)} \\ y = -15 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vậy chiều rộng mảnh vườn là $10(\text{m})$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = (m - 4)x + m + 4$ (m là tham số)

a).Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b).Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số đã cho luôn cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm, tìm m sao cho $x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1) = 18$.

c).Gọi đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng (d) . Chứng minh khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) không lớn hơn $\sqrt{65}$.

Lời giải

a).Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$y = (m-4)x + m + 4 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow m-4 > 0 \Leftrightarrow m > 4.$$

Vậy $m > 4$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số đã cho luôn cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm, tìm m sao cho $x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1) = 18$.

$$(d): y = (m-4)x + m + 4, (P): y = x^2.$$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } (d), (P): x^2 = (m-4)x + m + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m-4)x - (m+4) = 0 \quad (1), \text{ Có } a = 1 \neq 0$$

$$\text{Có } \Delta = (m-4)^2 + 4(m+4) = m^2 - 4m + 32 = (m-2)^2 + 28 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\text{Do có } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0, \forall m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Suy ra (d) cắt luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Có } x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1) = 18 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2) - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) - 18 = 0, \text{ mà } \begin{cases} x_1 + x_2 = m-4 \\ x_1x_2 = -(m+4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (m-4)^2 + 2(m+4) - (m-4) - 18 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 10 = 0 \Leftrightarrow (m-5)(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Vậy $m = 5, m = 2$ thỏa yêu cầu bài

c). Gọi đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng (d) . Chứng minh khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) không lớn hơn $\sqrt{65}$.

$$(d): y = (m-4)x + m + 4 \text{ cắt trục } Ox, Oy \text{ lần lượt ở } A\left(-\frac{m+4}{m-4}; 0\right) \text{ và } B(0; m+4).$$

*Trường hợp 1: Xét $m-4=0 \Leftrightarrow m=4$, thì $(d): y=8$, (d) song song trục Ox , (d) cắt trục Oy tại $B(0;8)$

Có khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) là $OB=8$

Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng (d) .

ΔOAB vuông tại O có $OH \perp AB$, Có $OH \cdot AB = OA \cdot OB$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{(m-4)^2}{(m+4)^2} + \frac{1}{(m+4)^2} = \frac{(m-4)^2 + 1}{(m+4)^2}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{(m+4)^2}{(m-4)^2 + 1}$$

$$\text{Giả sử } OH > \sqrt{65} \Leftrightarrow OH^2 > 65 \Leftrightarrow \frac{(m+4)^2}{(m-4)^2 + 1} > 65 \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 > 65(m^2 - 8m + 17)$$

$$\Leftrightarrow 64m^2 - 528m + 1089 < 0 \Leftrightarrow (8m)^2 - 2.16.8m + 33^2 < 0 \Leftrightarrow (8m - 33)^2 < 0 \text{ (sai)}$$

$$\text{Vậy } OH \leq \sqrt{65}.$$

Câu 4. (3,5 điểm)

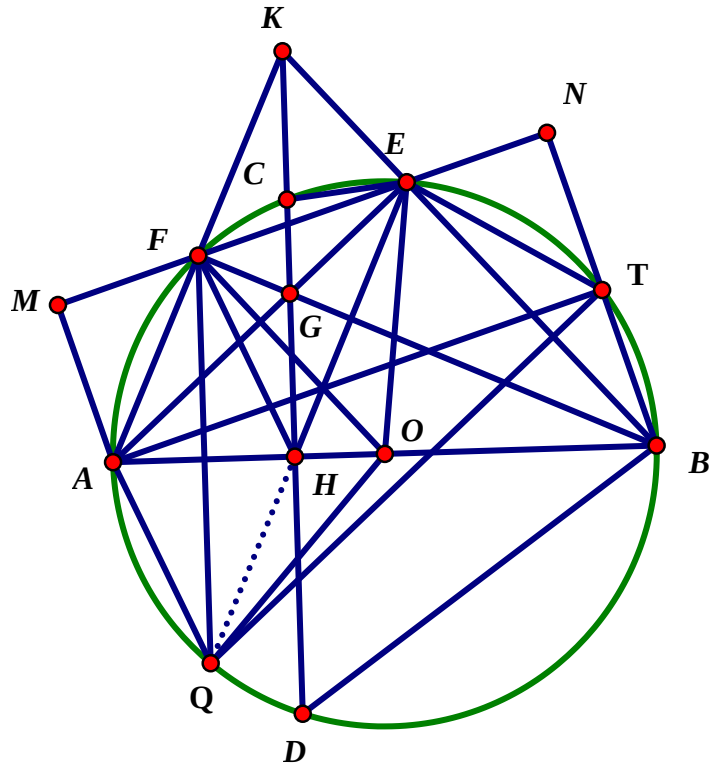
Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Kẻ dây cung CD vuông góc với AB tại H (H nằm giữa A và O , H khác A và O). Lấy điểm G thuộc CH (G khác C và H), tia AG cắt đường tròn tại E khác A .

a). Chứng minh tứ giác $BEGH$ là tứ giác nội tiếp.

b). Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BE và CD . Chứng minh: $KC.KD = KE.KB$.

c). Đoạn thẳng AK cắt đường tròn O tại F khác A . Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HEF .

d). Gọi M , N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên đường thẳng EF . Chứng minh $HE + HF = MN$.



Lời giải

a). Chứng minh tứ giác BEGH là tứ giác nội tiếp.

Có $BHG = BEG = 90^\circ \Rightarrow BHG + BEG = 180^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác BEGH nội tiếp đường tròn đường kính BG.

b). Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BE và CD. Chứng minh: $KC.KD = KE.KB$.

Có $KEC = KDB$, $EKC = DKB$ (góc chung) $\Rightarrow \triangle KEC \sim \triangle KDB \Rightarrow \frac{KE}{KD} = \frac{KC}{KB} \Rightarrow KC.KD = KE.KB$

c). Đoạn thẳng AK cắt đường tròn O tại F khác A. Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HEF.

$\triangle KAB$ có ba đường cao AE, BF, KH đồng qui tại G. Suy ra G là trực tâm của $\triangle KAB$.

Có $GHE = GBE = \frac{1}{2} sđGE$ (trong đường tròn BEGH)

Có $GBE = GAF = \frac{1}{2} sđEF$ (trong đường tròn (O))

Có $GAF = GHF = \frac{1}{2} sđEG$ (tứ giác AFGH nội tiếp đường tròn đường kính AG)

Suy ra $GHE = GHF \Rightarrow HG$ là tia phân giác của $\angle EHF$.

Tương tự EG là tia phân giác của $\angle FEG$.

$\triangle EHF$ có hai tia phân giác HG và EG cắt nhau tại G . Suy ra G là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle EHF$.

d).Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên đường thẳng EF . Chứng minh $HE + HF = MN$.

Gọi Q là giao điểm của tia EH và đường tròn (O) .

Có $\angle EOB = 2\angle EFB = \widehat{SEB}$, $2\angle EFB = \angle EFO$ (do FG là tia phân giác của $\angle EFH$)

$\Rightarrow \angle EOB = \angle EFH \Rightarrow$ Tứ giác $EFHO$ nội tiếp đường tròn.

$$\Rightarrow \angle FOH = \angle FEH = \frac{1}{2} \widehat{SEQ} = \frac{1}{2} \angle FOQ \Rightarrow \angle FOH = \frac{1}{2} \angle FOQ.$$

$\Rightarrow OH$ là tia phân giác của $\angle FOQ$

$\triangle OFH, \triangle OQH$ có OH chung, $OF = OQ$, $\angle FOH = \angle QOH$

$$\Rightarrow \triangle OFH = \triangle OQH \Rightarrow HF = HQ$$

Do đó $HE + HF = HE + HQ = EQ$.

Có $\angle AMN = \angle MNT = \angle NTA = 90^\circ$. Suy ra $AMNT$ là hình chữ nhật, nên $AT = MN$.

Suy ra $AQ = FA = ET \Rightarrow AE \parallel QT$, mà $AETQ$ nội tiếp đường tròn (O) .

$$\Rightarrow AETQ \text{ là hình thang cân} \Rightarrow EQ = AT = MN$$

Vậy $HE + HF = MN$.

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + ab + bc + ac = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 3.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } P = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}.$$

Có a, b, c là các số thực dương, theo bất đẳng thức AM-GM có:

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} + ab \geq 2a^2 \\ \frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2 \\ \frac{c^3}{a} + ac \geq 2c^2 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ac), \text{ mà}$$

$$a + b + c + ab + bc + ac = 6.$$

$$\Rightarrow P \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) - 6.$$

$$\begin{aligned} \text{Có } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0 &\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \\ &\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{2}{3}(a+b+c)^2 + (a+b+c) - 6.$$

$$\text{Có } ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 3(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2.$$

$$\text{Do đó } 6 = a + b + c + ab + bc + ca \leq a + b + c + \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)^2 + (a+b+c) - 6 \geq 0.$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \geq 3, (a+b+c)^2 \geq 9.$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{2}{3} \cdot 9 + 3 - 6 = 3. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } a = b = c.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 3.$$