

ĐỀ CHÍNH THỨC

NĂM HỌC 2019 2020

Môn thi: Toán

(Đề thi có 1 trang gồm 9 câu)

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề).

Câu 1 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2+x+2}$ C .

Tìm tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị C của hàm số và có tung độ nguyên.

Câu 2 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{3}{2}$ C .

Tìm tọa độ tất cả các điểm M thuộc đồ thị C sao cho tiếp tuyến của đồ thị C tại M cắt C tại hai điểm phân biệt P, Q khác M thỏa mãn $MP = 3MQ$ với P nằm giữa Q và M .

Câu 3 (2,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1 - m} + x + 2m + 6 = 0.$$

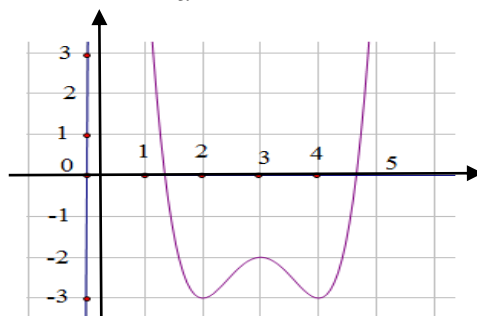
Câu 4 (2,0 điểm). Gọi S là tập nghiệm của phương trình $x - 2\log_2 x \sqrt{9^x - m - 1} \cdot 3^x - m = 0$ (với m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để tập hợp S có hai phần tử?

Câu 5 (2,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{5}, AC = BD = \sqrt{10}, AD = BC = \sqrt{13}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) .

Câu 6 (3,0 điểm). Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo x và tìm x để thể tích đó lớn nhất.

Câu 7 (2,0 điểm).

Cho hàm số $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = g(g(x))$.



Câu 8 (2,0 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số chọn được chia hết cho 15.

Câu 9 (2,0 điểm). Cho hàm số $f(x) = 9 \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{2^x + 2^{-x} + 2} + 3p \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + q$. Tìm tất cả các giá trị của p, q để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$ là nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

.....HẾT.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI (THAM KHẢO)

Câu 1 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2+x+2}$ C .

Tìm tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị C của hàm số và có tung độ nguyên.

Hướng dẫn.

+ Để thấy hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xem y là tham số, xét phương trình ẩn x sau:

$yx^2 + y - 1x + 2y + 3 = 0$ (*). Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Xét $y \neq 0$ thì phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi: $y - 1^2 - 4y(2y + 3) \geq 0 \Leftrightarrow -7y^2 - 14y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-7 - 2\sqrt{14}}{7} \leq y \leq \frac{-7 + 2\sqrt{14}}{7}$.

+ Yêu cầu $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0\}$. Khi đó tọa độ các điểm cần tìm là $\{-1; -2\}, \left\{-\frac{1}{2}; -2\right\},$

$-1 - \sqrt{2}; -1, -1 + \sqrt{2}; -1, 3; 0$.

Câu 2 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{3}{2}$ C .

Tìm tọa độ tất cả các điểm M thuộc đồ thị C sao cho tiếp tuyến của đồ thị C tại M cắt C tại hai điểm phân biệt P, Q khác M thỏa mãn $MP = 3MQ$ với P nằm giữa Q và M .

Hướng dẫn.

+ Giả sử tồn tại điểm $M\left(m; \frac{m^4}{2} - 3m^2 + \frac{3}{2}\right)$ thuộc đồ thị C thỏa mãn bài toán. Tiếp tuyến của đồ thị C tại M là $y = 2m^3 - 6m x - m + \frac{m^4}{2} - 3m^2 + \frac{3}{2}$ cắt C tại P, Q khác M thỏa mãn $MP = 3MQ$ với P nằm giữa Q và M .

+ Từ đó suy ra $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OQ} = -2\overrightarrow{OM} \Rightarrow x_1 - 3x_2 = -2m$ *.

+ Mặt khác x_1, x_2 khác m là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{3}{2} = 2m^3 - 6m x - m + \frac{m^4}{2} - 3m^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^4 - 4m^3x + 3m^4 = 6x - m^2$$

$\Rightarrow x + m^2 = 6 - 2m^2, |m| \leq \sqrt{3} \Rightarrow x_{1,2} = -m \pm \sqrt{6 - 2m^2}$. Thay vào (*) ta được $m = \pm\sqrt{2}$ (thỏa mãn). Vậy ta có hai điểm M cần tìm là $M\left(-\sqrt{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và $M\left(\sqrt{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

Lời bình:

Bài này giải tương tự đề thi học sinh giỏi tỉnh Khánh Hòa ngày 31/10 năm 2019.

Câu 3 (2,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1 - m} + x + 2m + 6 = 0.$$

Hướng dẫn.

+ Dễ thấy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biế đổi để cô lập m , ta có:

$$m \left[2 - \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right] + \left(x^2 + 1 - \sqrt{x^2 - x + 1} \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + 6 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ đây hàm lẻ đối với x và

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = -1 \text{ như thế ta có}$$

$$t \in [-1; 1].$$

+ Từ đó ta có phương trình ẩn t là: $m \left(2 - t + \frac{t^2}{2} \right) + 6 = 0, t \in [-1; 1]$

$$\Rightarrow 2m = \frac{t^2 + 12}{t - 2} = t + 2 + \frac{16}{t - 2} = f(t), t \in [-1; 1] \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{16}{(t - 2)^2} < 0, \forall t \in [-1; 1].$$

$$\text{Suy ra } -13 < 2m < -\frac{13}{3} \Rightarrow -\frac{13}{2} < m < -\frac{13}{6}.$$

+ **Kết luận:** Để phương trình đã cho có nghiệm thì $-\frac{13}{2} < m < -\frac{13}{6}$.

Câu 4 (2,0 điểm). Gọi S là tập nghiệm của phương trình $x - 2 \log_2 x \sqrt{9^x - m - 1} \cdot 3^x - m = 0$ (với m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để tập hợp S có hai phần tử?

Hướng dẫn.

+ Xét phương trình $f(x) = x - 2 \log_2 x = 0, x \in (0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = 1 - \frac{2}{x \ln 2} = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\ln 2} \text{ là điểm cực tiểu của } f(x) \text{ và } \min_{0; +\infty} f(x) = \frac{2}{\ln 2} - 2 \log_2 \left(\frac{2}{\ln 2} \right) < 0 \text{ như thế phương trình}$$

$f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = 2, x = 4$.

+ Bây giờ ta xét $\sqrt{9^x - m - 1} \cdot 3^x - m = 0$. Đặt $3^x = t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2 - m - 1} \cdot t - m = 0$.

$$\text{Ta phải có điều kiện } t^2 - m - 1 \geq 0, t > 0 \Leftrightarrow t + 1 \geq t - m \geq 0.$$

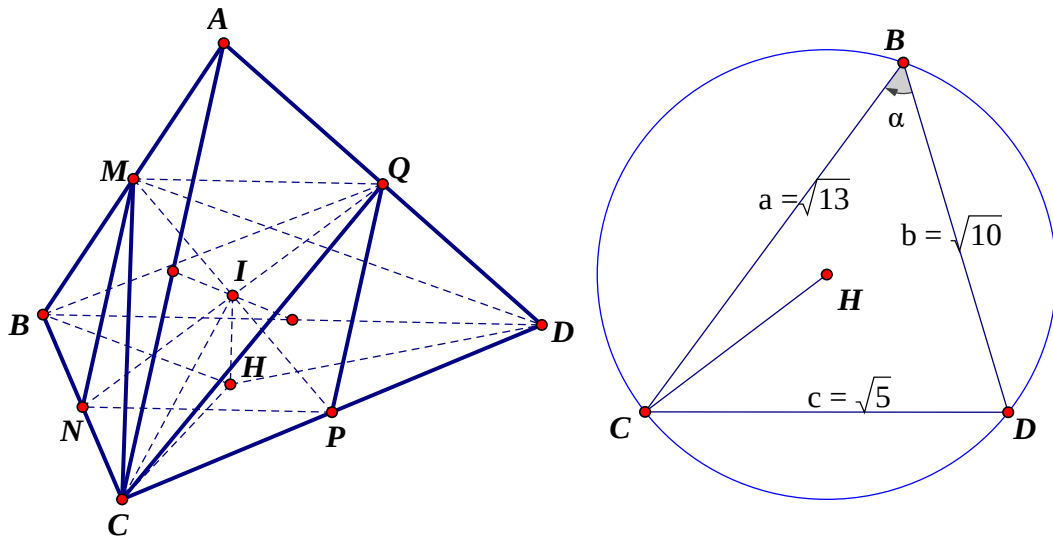
• Trường hợp 1: $t^2 - m - 1 > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow t > m, \forall t > 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. Mà $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \emptyset$

• Trường hợp 2: $t^2 - m - 1 \geq 0, t > 0 \Leftrightarrow t = m > 0$. Để S có hai phần tử thì cả hai nghiệm $x = 2, x = 4$ đều là nghiệm của phương trình này $\Rightarrow m = 9 \cup m = 81$.

+ **Kết luận:** Có hai giá trị nguyên dương của m để S có hai phân tử.

Câu 5 (2,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{5}$, $AC = BD = \sqrt{10}$, $AD = BC = \sqrt{13}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) .

Hướng dẫn.



Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Dễ thấy các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau (c.c.c) nên các trung tuyến tương ứng bằng nhau: $CM = DM$ hay ta có tam giác CMD cân. Suy ra (trong mặt phẳng (MCD)) thì MP là đường trung tuyến cũng là trung trực của CD . Cũng như thế MP là trung trực của AB .

Tương tự có NQ là trung trực của BC và AD . Mặt khác dễ dàng chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành tâm I . Suy ra $IA = IB = IC = ID = R$ và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Hơn nữa bốn mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau nên các bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau, suy ra I cách đều 4 mặt của tứ diện.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên mp (BCD) thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp BCD . Đặt $AB = CD = c = \sqrt{5}$, $AC = BD = b = \sqrt{10}$, $AD = BC = a = \sqrt{13}$, $IH = h$, $HC = r$. Ta có:

$$\cos B = \cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{9}{\sqrt{130}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{130}} \text{ nên diện tích mỗi mặt là:}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{7}{2}. \text{ Do đó } r = CH = \frac{abc}{4S} = \frac{5\sqrt{26}}{14}. \text{ Mà } MP^2 = MC^2 - CP^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$

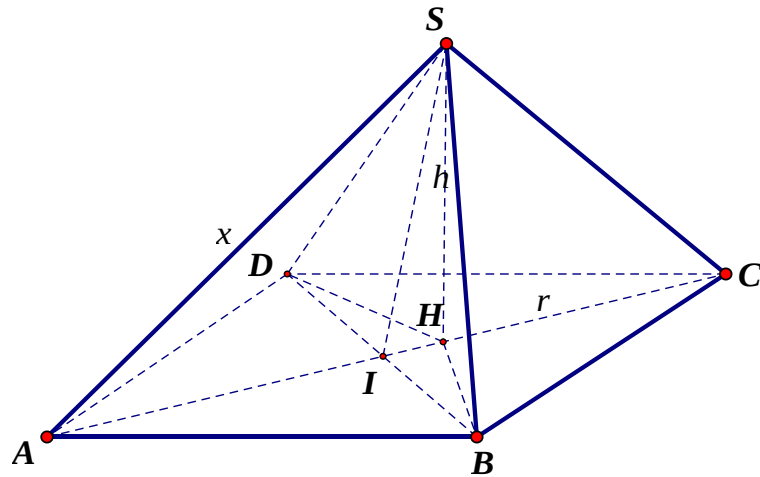
$$\Rightarrow MP = 3 \Rightarrow IP = \frac{3}{2}. \text{ Nên } R^2 = IC^2 = CP^2 + IP^2 = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7}{2} \Rightarrow h = IH = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{25 \cdot 26}{196}} = \frac{3}{7}.$$

Từ đó thể tích tứ diện là $V = 4V_{I,BCD} = \frac{4}{3} \cdot h \cdot S = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} = 2$. Gọi d là khoảng cách từ A đến (BCD) :

$$\text{Ta có } d = \frac{3V}{S} = \frac{12}{7}.$$

Câu 6 (3,0 điểm). Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo x và tìm x để thể tích đó lớn nhất.

Hướng dẫn.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên đáy ABCD. Từ giả thiết ta có ABCD là hình thoi. Ta có các tam giác vuông bằng nhau $SHB = SHC = SHD$ (cạnh chung SH và cạnh huyền bằng nhau và bằng 1), suy ra $HB = HC = HD = r$ và H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, do đó H thuộc AC. Gọi I là tâm hình thoi. Không giảm tổng quát ta giả sử H thuộc đoạn IC.

Đặt $SH = h, IH = y$. Ta có $IB^2 = r^2 - y^2$ và $AC^2 + BD^2 = 2 AB^2 + BC^2 = 4$ nên:

$$2r + 2y^2 + 4r^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow 2r^2 + 2ry = 1 \Rightarrow y = \frac{1-2r^2}{2r}, AH = r + 2y = \frac{1-r^2}{r}.$$

$$\text{Mà } h^2 = 1 - r^2 = x^2 - \left(\frac{1-r^2}{r}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{x^2} - 1 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \text{ Từ đó } r + y = \frac{1}{2r} = \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}},$$

$$r^2 - y^2 = 1 - (r + y)^2 = \frac{4-5x^2}{4(1-x^2)}, h^2 = 2 - 1 + r^2 = 2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}. \text{ Ta có}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} (2r + 2y) \cdot 2\sqrt{r^2 - y^2} = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4-5x^2}{4(1-x^2)}} = \frac{x\sqrt{4-5x^2}}{2(1-x^2)}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{\sqrt{2x^2-1}\sqrt{4-5x^2}}{6(1-x^2)} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2x^2-1}{1-x^2} \cdot \frac{4-5x^2}{1-x^2}}.$$

$$\text{Đặt } x^2 = t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right) \text{ xét } f(t) = \frac{2t-1}{1-t^2} \cdot \frac{4-5t}{t^2-2t+1} = \frac{-10t^2+13t-4}{t^2-2t+1};$$

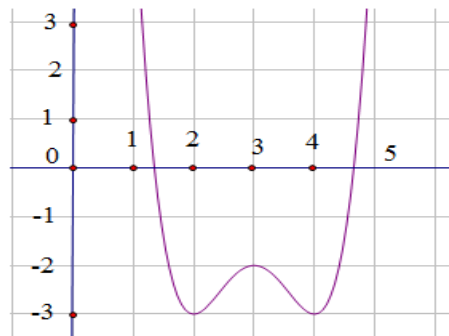
$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-10t^2+13t-4}{t^2-2t+1} = \frac{-20t+13}{2t-2} \Leftrightarrow t = \frac{5}{7} \in \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right). \text{ Do đó } \max f(t) = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$



Câu 7 (2,0 điểm).

Cho hàm số $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = g(g(x))$.

**Hướng dẫn.**

Ta có $f'(x) = g'(x) \cdot g'(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) = 0 \\ g'(g(x)) = 0 \end{cases}$.

+ Xét $g'(x) = 0$ có các nghiệm $x = 2, x = 3, x = 4$.

+ Xét $g'(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2 \\ g(x) = 3 \\ g(x) = 4 \end{cases}$ có 6 nghiệm khác nhau và khác $x = 2, x = 3, x = 4$.

Do đó $f'(x)$ có 9 nghiệm đơn khác nhau và đổi dấu 9 lần nên có 9 cực trị. Bây giờ ta thấy $a > 0$ nên $f(x)$ đạt cực tiểu trước tiên và cực tiểu cuối cùng vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Vậy số điểm cực tiểu của $f(x)$ bằng 5.

Câu 8 (2,0 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số chọn được chia hết cho 15.

Hướng dẫn.

Số phần tử không gian mẫu là $n(S) = 9 \cdot A_9^3$.

+ **Trường hợp 1:** Số có dạng $\overline{abc0}$. Như thế ta chỉ cần a, b, c khác nhau đôi một và có tổng chia hết cho 3 từ các tập hợp $A = \{3; 6; 9\}$, $B = \{1; 4; 7\}$, $C = \{2; 5; 8\}$.

- Nếu chọn cả ba số a, b, c từ A thì có C_3^3 cách, và có $C_3^3 \cdot 3!$ số được lập. Tương tự cả ba số a, b, c từ B hay cả ba số a, b, c từ C thì đều có $C_3^3 \cdot 3!$ số được lập.

Và ta có $3 \cdot C_3^3 \cdot 3! = 18$ số.

- Nếu chọn a, b, c mỗi tập hợp A, B, C một số thì có $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1$ cách và có $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot 3!$ số được lập, hay có 162 số.

Không có hai trong ba chữ số a, b, c thuộc một tập hợp và chữ số còn lại thuộc tập khác.

Như thế trong trường hợp 1 ta có: $18 + 162 = 180$ số.

+ **Trường hợp 2:** Số có dạng $\overline{abc5}$. Như thế ta chỉ cần a, b, c khác nhau đôi một và có tổng $a + b + c + 1$ chia hết cho 3 (a khác 0) từ các tập hợp $M = \{0; 3; 6; 9\}$, $N = \{1; 4; 7\}$, $P = \{2; 8\}$.

- Nếu chọn a từ M thì có C_3^1 cách, bộ b, c sao cho một chữ số từ M và một chữ số từ P thì có

$C_3^1 \cdot C_2^1$ cách. Và có $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 2!$ số được lập, hay có 36 số.

- Nếu chọn a từ M thì có C_3^1 cách, và bộ b, c đều từ N thì có C_3^2 cách, và có $C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot 2!$ số được lập, hay có 18 số.

- Nếu chọn a, b, c sao cho hai chữ số từ P thì có C_2^2 cách, một chữ số từ N thì có C_3^1 cách, và có $C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot 3!$ số lập được, hay có 18 số.

Như thế trong trường hợp 2 ta có $36 + 18 + 18 = 72$ số.

Cả hai trường hợp ta có $180 + 72 = 252$ số.

Xác suất cần tìm là $p = \frac{252}{9 \cdot A_9^3} = \frac{1}{18}$.

Câu 9 (2,0 điểm). Cho hàm số $f(x) = 9 \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{2^x + 2^{-x} + 2} + 3p \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + q$. Tìm tất cả các giá trị của p, q để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$ là nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn.

Đặt $\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = t \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ và ta có $g(t) = 9t^2 + 3pt + q$, ta tính:

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 + q - p; g\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + q + p; g\left(-\frac{p}{6}\right) = -\frac{p^2}{4} + q.$$

+ **Trường hợp 1:** $-\frac{p}{6} < -\frac{1}{3} \cup -\frac{p}{6} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow p > 2 \cup p < -2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $y = |f(x)|$

thuộc $|1 + p + q|; |1 + p - q|$. Chú ý rằng với $\max_{a,b} \geq \frac{a+b}{2} \geq \min_{a,b}$ thì ta ta cho dấu bằng

xảy ra $\Leftrightarrow a = b$, và có: $|1 + p + q| = |1 + p - q| \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ 1 + p + q = q - 1 - p \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ p = -1 \end{cases}$. So sánh với điều kiện thì ta được $\left(\max_{[-1;1]} |f(x)|\right)_{\min} = 1 + p > 3, p > 2, q = 0$.

+ **Trường hợp 2:** $p \in [-2; 2]$. Khi đó $\left|-\frac{p^2}{4} + q\right| = \left|\frac{p^2}{4} - q\right| \leq |1 - q|$ và $|1 + p + q| \leq |3 + q|$,

$|1 + p - q| \leq |3 - q|$ nên $\max_{[-1;1]} |f(x)| = |3 + q| \Rightarrow \left(\max_{[-1;1]} |f(x)|\right)_{\min} = 3 \Leftrightarrow p = 2, q = 0$

Hoặc $\max_{[-1;1]} |f(x)| = |3 - q| = 3 - q > 3, p = 2, q < 0$.

Kết luận: Với $p = 2, q = 0$ thì $\left(\max_{[-1;1]} \left|f(x)\right|\right)_{\min} = 3$.