

NGUYỄN ĐỨC THẮNG



Tuyển tập những bài

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAY

MỘT THỜI ĐỂ NHỚ

A colorful illustration of various school supplies including rulers, triangles, and pencils. The background is a collage of these items in various colors like green, orange, yellow, and blue.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN – CÀ MAU

LỜI NÓI ĐẦU

Những bài phương trình, hệ phương trình đẹp và hay là niềm đam mê một thời của nhiều học sinh cấp 2 và cấp 3. File này mình tuyển chọn và trình bày lại những bài phương trình, hệ phương trình mà mình cảm thấy hay !

Mình lấy các đề toán và lời giải từ nhiều nguồn:

Về đề bài:

- Các bài toán trong Nhóm Toán, Nhóm LIKE, Nhóm Giao lưu Toán (Diễn đàn Toán học BoxMath), Nhóm Học tập, ...
- Các bài toán trong các file sách của BoxMath, k2pi, VMF, Mathscope, ...
- Các bài toán trong sách *Tư duy sáng tạo tìm tòi lời giải PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÔ TỈ* – tác giả Lê Văn Đoàn; *Những điều cần biết Luyện thi Quốc gia Kỹ thuật giải nhanh HỆ PHƯƠNG TRÌNH* – tác giả Đặng Thành Nam; ...
- Các bài toán trong đề thi thử THPTQG

Về lời giải:

- Các lời giải của thầy Trung Nguyentien, thầy Tran Quoc Thinh, Duong Van Vu, Phùng Quyết Thắng, Phong Hong, Bùi Hùng Vương, Sơn Huỳnh Phú, Chau Thanh Hai, ...
- Các lời giải của bạn Nguyễn Văn Lợi, Hùng Nolan, Ngô Văn Tiệp, Nguyễn Nam, Trần Lương, Dinh De Tai, Peter Thái Học, ...
- Một vài bài là lời giải của mình

Chúc các bạn học tốt !

Bài 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12 \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12 \end{cases}$$

Cách 1:

Thế $\sqrt{x^2 - y^2} = 12 - x - y$ từ phương trình thứ nhất xuống phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$y(12 - x - y) = 12 \text{ hay } x = -y - \frac{12}{y} + 12 = \frac{-y^2 + 12y - 12}{y} \quad (1)$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$y\sqrt{\left(\frac{-y^2 + 12y - 12}{y}\right)^2 - y^2} = 12 \text{ (nhận thấy } y = 0 \text{ không là nghiệm của phương trình)}$$

$$\Rightarrow \frac{144}{y^2} = \left(\frac{-y^2 + 12y - 12}{y}\right)^2 - y^2 \Leftrightarrow (-y^2 + 12y - 12)^2 - y^4 = 144 \Leftrightarrow y(y-4)(y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x; y) = (5; 3); (5; 4)$

**Cách 2:**

Trường hợp 1: $x \geq y > 0$

$$\text{Đặt } \sqrt{x-y} = a \text{ và } \sqrt{x+y} = b \text{ thì ta có hệ } \begin{cases} b^2 + ab = 12 \\ (b^2 - a^2)ab = 24 \end{cases}$$

Nhận thấy phương trình thứ hai có bậc 4 và phương trình thứ nhất có bậc 2 nên ta bình phương hai vế phương trình thứ nhất để thế vào phương trình thứ hai

$$\text{Hệ suy ra } (b^2 + ab)^2 - 6ab(b^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b(b-3a)(b-2a)(b+a) = 0$$

Từ đó dễ dàng suy ra nghiệm $(x; y)$

Trường hợp 2: $y > x$

$$\text{Đặt } \sqrt{y-x} = a \text{ và } \sqrt{-x-y} = b \text{ thì ta có hệ } \begin{cases} ab - b^2 = 12 \\ ab(a^2 - b^2) = 12 \end{cases}$$

Thực hiện tương tự trường hợp 1 đã xét.

**Cách 3:**

Phương trình thứ nhất của hệ suy ra $\sqrt{x^2 - y^2} = 12 - x - y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = (12 - x - y)^2 \Rightarrow x = \frac{-y^2 + 12y - 72}{y - 12}$

(2) (sau khi xét $y = 12$ không thỏa mãn hệ phương trình trên)

Từ (2) có thể kết hợp với (1) để tìm y .



Bài 2: Giải phương trình:

$$\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt[3]{2 - x^3} = \frac{3}{2}(x + 1)$$

Cách 1:

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $\frac{3}{2}(x + 1) - \sqrt[3]{2 - x^3} \geq 1 > \frac{3}{2} - \sqrt[3]{2}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x + (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2 - x^3}) > 0 \Leftrightarrow x \left[\frac{3}{2} + \frac{x^2}{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2 - x^3} + (\sqrt[3]{2 - x^3})^2} \right] > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Phương trình tương đương

$$\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt[3]{2 - x^3} = \frac{3}{2}(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (4\sqrt[3]{2 - x^3} + x - 5) + (4\sqrt{3x^2 + 1} - 7x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 1)(63x^2 + 78x + 3)}{16(\sqrt[3]{2 - x^3})^2 - 4(x - 5)\sqrt[3]{2 - x^3} + (x - 5)^2} + \frac{(x - 1)(x + 15)}{4\sqrt{3x^2 + 1} + 7x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \left[\frac{63x^2 + 78x + 3}{16(\sqrt[3]{2 - x^3})^2 - 4(x - 5)\sqrt[3]{2 - x^3} + (x - 5)^2} + \frac{x + 15}{4\sqrt{3x^2 + 1} + 7x + 1} \right] = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

**Cách 2:**

Xét $x \geq 2$ thì $\sqrt{3x^2 + 1} = \frac{3}{2}(x + 1) - \sqrt[3]{2 - x^3} \geq 2x + \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 6x + \frac{5}{4} \leq 0$ (vô lý)

Xét $x < 2$, ta có các đánh giá $\begin{cases} \sqrt{3x^2+1} \leq \frac{3x^2+5}{4} \\ \sqrt[3]{2-x^3} \leq \frac{4-x^3}{3} \end{cases}$

Suy ra $\frac{3}{2}(x+1) = \sqrt{3x^2+1} + \sqrt[3]{2-x^3} \leq \frac{3x^2+5}{4} + \frac{4-x^3}{3} \Rightarrow x \leq 1$

Do $x \leq 1$ nên suy ra $\sqrt{3x^2+1} = \frac{3}{2}(x+1) + \sqrt[3]{x^3-2} \leq \frac{3x+1}{2} \Rightarrow 3(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$

□

Bài 3: Giải phương trình:

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3} = (x+1)(\sqrt{x+2}-2)$$

Điều kiện xác định: $x \geq -2$

Khi đó phương trình tương đương

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3} = (x+1)(\sqrt{x+2}-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+4)}{x^2-2x+3} = (x+1)(\sqrt{x+2}-2)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-2) \left[\frac{(\sqrt{x+2}+2)(x+4)}{x^2-2x+3} - x - 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-2) \left[(\sqrt{x+2}+2)(x+4) - (x+1)(x^2-2x+3) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-2) \left[(x+4)(\sqrt{x+2}-x-1) + (x+1)(x^2+x-1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-2) \left[(x+4)(\sqrt{x+2}-x-1) - (x+1)(\sqrt{x+2}-x-1)(\sqrt{x+2}+x+1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}-x-1) \left[(x+1)\sqrt{x+2} + x^2 + x + 3 \right] = 0$$

Chú ý: $(x+1)\sqrt{x+2} + x^2 + x + 3 = (\sqrt{x+2})^3 + \sqrt{x+2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \forall x \geq -2$

Vậy phương trình tương đương $\begin{cases} \sqrt{x+2}-2=0 \\ \sqrt{x+2}-x-1=0 \end{cases}$

Đến đây bạn đọc tự giải ...



Bài 4: Giải phương trình:

$$(5x-16)\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x-20}(5+\sqrt{5x+9})$$

Điều kiện xác định: $x \geq 5$

Chú ý: $\sqrt{5x+9}+5 = \frac{5x-16}{\sqrt{5x+9}-5}$ (sau khi đã xét $x = \frac{16}{5}$ không là nghiệm của phương trình)

Phương trình trên suy ra

$$\sqrt{x+1}(\sqrt{5x+9}-5) = \sqrt{x^2-x-20}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(5x+9)} = 5\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x-20}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(5x+9) = \left(5\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x-20}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x+1)(x^2-x-20)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-4x-5} - \sqrt{x+4})(2\sqrt{x^2-4x-5} - 3\sqrt{x+4}) = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...



Bài 5: Giải phương trình:

$$2(x-2)\sqrt{5-x^2} + (x+1)\sqrt{x^2+5} = 7x-5$$

Điều kiện xác định: $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

Phương trình tương đương

$$2(x-2)(\sqrt{5-x^2}-2) + (x+1)(\sqrt{x^2+5}-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)(1-x)(x+1)}{\sqrt{5-x^2}+2} + \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) \left[\frac{2(x-1)}{\sqrt{5-x^2}+2} - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ (x+2)\sqrt{5-x^2} = 2(x-1)\sqrt{x^2+5} + 2(x-5) \end{cases}$$

Xét $(x+2)\sqrt{5-x^2} = 2(x-1)\sqrt{x^2+5} + 2(x-5)$ kết hợp với phương trình ban đầu ta có hệ

$$\begin{cases} (x+2)\sqrt{5-x^2} - 2(x-1)\sqrt{x^2+5} = 2(x-5) \\ 2(x-2)\sqrt{5-x^2} + (x+1)\sqrt{x^2+5} = 7x-5 \end{cases}$$

Xem $\sqrt{5-x^2}$ và $\sqrt{x^2+5}$ là hai ẩn của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 6: Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2+x+1} + \sqrt[3]{2x^2-x+1} = 6x^2+2$$

Để ý thấy $x^2+x+1 > 0$ và $2x^2-x+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM như sau

$$6x^2+2 = \sqrt[3]{x^2+x+1} + \sqrt[3]{2x^2-x+1} \leq \frac{(x^2+x+1)+1+1}{3} + \frac{(2x^2-x+1)+1+1}{3} = x^2+2$$

Từ đó suy ra $6x^2+2 \leq x^2+2$ hay $x=0$

□

Bài 7: Giải phương trình:

$$\sqrt{4x(x^2+x+1)+x^2+5x+1} + \sqrt{(x^2+x+1)^2-2(x-4)} = 4$$

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} 4x(x^2+x+1)+x^2+5x+1 \geq 0 \\ (x^2+x+1)^2-2(x-4) \geq 0 \end{cases}$$

Chú ý: $4x(x^2+x+1)+x^2+5x+1 \geq 0$ suy ra $x > -\frac{1}{2}$

Ta bình phương hai vế của phương trình để được

$$x^4 - 2x^3 - 2x - 9x - 8 + 8\sqrt{4x(x^2+x+1)+x^2+5x+1}$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x^2 - 2x + 7) + \frac{8x(4x^2+x+5)}{\sqrt{4x(x^2+x+1)+x^2+5x+1} + 2x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left[x^3 - 2x^2 - 2x + 7 + \frac{8(4x^2 + x + 5)}{\sqrt{4x(x^2 + x + 1) + x^2 + 5x + 1 + 2x + 1}} \right] = 0$$

Chú ý: $x^3 - 2x^2 - 2x + 7 > 0$; $4x^2 + x + 5 > 0$ và $\sqrt{4x(x^2 + x + 1) + x^2 + 5x + 1 + 2x + 1} > 0$ với mọi $x > -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình có 1 nghiệm là $x = 0$

□

Bài 8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{xy + x + 2} + \sqrt{x^2 + x} - 4\sqrt{x} = 0 \\ xy + x^2 + 2 = x(\sqrt{xy + 2} + 3) \end{cases}$$

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} xy + x + 2 \geq 0 \\ xy + 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên hệ tương đương
$$\begin{cases} \sqrt{y + \frac{2}{x} + 1} + \sqrt{x + 1} = 4 \\ y + \frac{2}{x} + x = \sqrt{x \left(y + \frac{2}{x} \right)} + 3 \end{cases}$$

Đặt $y + \frac{2}{x} = a$ và $x = b$ hệ tương đương s
$$\begin{cases} \sqrt{a + 1} + \sqrt{b + 1} = 4 \\ a + b = \sqrt{ab} + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2\sqrt{(a + 1)(b + 1)} = 14 \quad (*) \\ a + b = \sqrt{ab} + 3 \end{cases}$$

Thế $a + b = \sqrt{ab} + 3$ lên phương trình thứ nhất của (*) suy ra $2\sqrt{ab + \sqrt{ab} + 4} = 11 - \sqrt{ab}$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Câu 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4\sqrt{x} + 12y^2 - 16y^4 = 9 \\ x(y^2 + 1) + y^4(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} + 1)(y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Điều kiện xác định: $x \geq 0$

Đặt: $\sqrt{x} = a$ và $y^2 = b$ thì hệ tương đương $\begin{cases} 4a + 12b - 16b^2 = 9 \\ a^2(b+1) + b^2(a+1) - (a+1)(b+1) = 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được $a = \frac{16b^2 - 12b + 9}{4}$ thế xuống phương trình thứ hai để được

$$256b^5 - 192b^4 + 32b^3 + 148b^2 - 139b + 29 = 0 \quad (*)$$

Chú ý: (*) tương đương $256b^3 \left(b - \frac{3}{8}\right)^2 - 4b^3 + 148b^2 - 139b + 29 > 0 \forall b \geq 0$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm

□

Bài 10: Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 4} + \sqrt{2x^2} + |x - 1| = 3$$

Phương trình tương đương

$$\sqrt{x^2 + (x+2)^2} + \sqrt{x^2 + x^2} + |x - 1| = 3$$

Chú ý: $\sqrt{x^2 + (x+2)^2} + \sqrt{x^2 + x^2} + |x - 1| \geq |x+2| + |1-x| \geq |(x+2) + (1-x)| = 3$

Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình

□

Bài 11: Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 14x + 9} - x = 2(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + 1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^3 + 5x^2 + 14x + 9 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 14x + 9} - x = 2(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x+2 - \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 14x + 9}) + 2\sqrt{x^2 - 2x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{(x+2)^2 + (x+2)\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 14x + 9} + (\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 14x + 9})^2} + 2\sqrt{x^2 - 2x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 1} \left[\frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}{(x+2)^2 + (x+2)\sqrt{x^3 + 5x^2 + 14x + 9} + \left(\sqrt{x^3 + 5x^2 + 14x + 9}\right)^2} + 2 \right] = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 12: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \frac{78y}{x^2 + y^2} = 20 \\ y + \frac{78x}{x^2 + y^2} = 15 \end{cases}$$

Hệ tương đương:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + 78y = 20(x^2 + y^2) \\ y^3 + x^2y + 78x = 15(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Xét $x = 0$ hoặc $y = 0$ đều không thỏa mãn hệ

Nhân phương trình đầu với x và phương trình hai với y để có hệ
$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + 78xy = 20x(x^2 + y^2) \\ y^4 + x^2y^2 + 78xy = 15y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế:

$$x^4 - y^4 = (20 - 15y)(x^2 + y^2) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 20x + 15y)(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x^3 - xy^2 - 20x^2 + 15xy = 0$$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - 20x^2 + 15xy = 0 \\ x^3 + xy^2 + 78y = 20(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ hai trừ vế theo vế với phương trình thứ nhất, ta được

$$2xy^2 - 15xy + 78y = 20y^2$$

Hay

$$2xy - 15x + 78 = 20y$$

Vậy cuối cùng ta có hệ:
$$\begin{cases} 2xy - 15x + 78 - 20y = 0 \\ x^2 - y^2 - 20x + 15y = 0 \end{cases}$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 13: Giải phương trình:

$$(1+\sqrt{x+1})(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)=x\sqrt{x}$$

Phương trình tương đương

$$(1+\sqrt{x+1})(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)=x\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)=x\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=(\sqrt{x+1}-1)$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x(x+1)}] + (x-1+\sqrt{x})=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x(x+1)}} + \frac{x^2-3x+1}{x-1-\sqrt{x}}=0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 14: Giải phương trình:

$$\sqrt{4x+6}+2=x^2+\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^3+7x^2+12x+6 \geq 0 \\ 4x+6 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình tương đương

$$\sqrt{4x+6}+2=x^2+\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)+(\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}-\sqrt{4x+6})=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)+\left[\frac{x^3+7x^2+12x+6-(\sqrt{4x+6})^3}{(\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6})^2+\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}\sqrt{4x+6}+4x+6}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)+\frac{(x^2-2)(x^4+14x^3+75x^2+144x+90)}{\left[(\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6})^2+\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}\sqrt{4x+6}+4x+6\right]\left[x^3+7x^2+12x+6+(\sqrt{4x+6})^3\right]}=0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 15: Giải phương trình:

$$x^2 + 4x + 5 - 5\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 0$$

Điều kiện: $x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0$ hay $x \geq -1$

Phương trình tương đương

$$x^2 + 4x + 5 - 5\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x) + 5(x + 1 - \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x) + \frac{5\sqrt{x+1}(x^2 - x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x) \left[1 + \frac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1}} \right] = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 16: Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{x-4x^3+6} + \sqrt[4]{x-x^3+3} = 2\sqrt[4]{x+2}$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} x-4x^3+6 \geq 0 \\ x-x^3+3 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $\sqrt[4]{x-4x^3+6} = a \geq 0$ và $\sqrt[4]{x-x^3+3} = b \geq 0$

Phương trình tương đương

$$a + b = 2\sqrt[4]{\frac{4b^4 - a^4}{3}} \Leftrightarrow 3(a+b)^4 - 16(4b^4 - a^4)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(19a^3 + 31a^2b + 49ab^2 + 61) = 0$$

Vậy $a = b$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 17: Giải phương trình:

$$3(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}) = 4\sqrt{4x^2-1} + 8x$$

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Đặt $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1} = a \geq \sqrt{2}$ suy ra $2a^2 = 4\sqrt{4x^2-1} + 8x$

Phương trình tương đương $3a = 2a^2$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 18: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2+6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2 \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ x+\sqrt{x-2y} \geq 0 \end{cases}$

Xét $y=0$ không là nghiệm của hệ

Trường hợp 1: $y > 0$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương $\frac{2}{y} + 6 = \frac{x}{y^2} - \sqrt{\frac{x}{y^2} - \frac{2}{y}} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y^2} - \frac{2}{y}\right) - \sqrt{\frac{x}{y^2} - \frac{2}{y}} - 6 = 0$

Trường hợp 2: $y < 0$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương $\frac{2}{y} + 6 = \frac{x}{y^2} + \sqrt{\frac{x}{y^2} - \frac{2}{y}} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y^2} - \frac{2}{y}\right) + \sqrt{\frac{x}{y^2} - \frac{2}{y}} - 6 = 0$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 19: Giải phương trình:

$$\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2\sqrt{2}x(x+3)}{1+x^2} = 2 - \sqrt{2}$$

Phương trình tương đương

$$\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2\sqrt{2}x(x+3)}{1+x^2} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{2})x^4 + (8+6\sqrt{2})x^3 + 4x^2 + (6\sqrt{2}-8)x + 2 - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1+\sqrt{2})\left[x^3 + (3+\sqrt{2})x^2 + (5-4\sqrt{2})x + \sqrt{2}-1\right] = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

π **Bài 20:** Giải phương trình:

$$x-1+\frac{1}{\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}=(2-x)\sqrt[3]{2x-2}$$

Điều kiện: $x > 1$ **Cách 1:**

Phương trình tương đương

$$x-1+\frac{1}{\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}=(2-x)\sqrt[3]{2x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-1)+\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}\right)+(x-2)\sqrt[3]{2x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[3]{2x-2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}+1\right)+\left(\sqrt[3]{2x-2}-1\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}+\frac{2x-3}{\left(\sqrt[3]{2x-2}\right)^2+\sqrt[3]{2x-2}+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2x-2}\right)^2+\sqrt[3]{2x-2}+1}\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

 π **Cách 2:**

Phương trình $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[3]{2x-2}=0$ sau khi liên hợp lần thứ nhất ở cách 1 còn có hướng xử lý sau

Phương trình tương đương

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[3]{2x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-1)+\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt[3]{2x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)-1}{2(x-1)+2\sqrt{x-1}} + \left[1 + \frac{1}{2(x-1)+2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right] + (\sqrt[3]{2x-2}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{2(x-1)+2\sqrt{x-1}} + \frac{(2x-3)\sqrt{x-1}}{[2(x-1)+2\sqrt{x-1}]\sqrt{x-1}} + \frac{2x-3}{(\sqrt[3]{2x-2})^2 + \sqrt[3]{2x-2} + 1} = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□ π

Bài 21: Giải phương trình:

$$(x+3)^2 = \frac{2\sqrt[3]{3(x+3)^2} + 21 - 2x^2}{x^2 + 3}$$

Phương trình tương đương

$$(x+3)^2 = \frac{2\sqrt[3]{3(x+3)^2} + 21 - 2x^2}{x^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2(x^2+3) + 2x^2 - 21 = 2\sqrt[3]{3(x+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^3+3x^2+3x+1+2x+2) = 2\sqrt[3]{3(x+3)^2} + 3$$

Nhận thấy $x = -3$ không là nghiệm nên phương trình tương đương

$$(x+1)^3 + 2(x+1) = \frac{3}{x+3} + 2\sqrt[3]{\frac{3}{x+3}} \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{\frac{3}{x+3}} \Leftrightarrow x[(x+2)^3 + 2] = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□ π

Bài 22: Giải phương trình:

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 9x + 18} = x + \sqrt{x^2 - 14x + 53}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 3 \end{cases}$

Phương trình tương đương

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 9x + 18} = x + \sqrt{x^2 - 14x + 53} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1) + (\sqrt{x^2 - 14x + 53} - 2\sqrt{x^2 - 9x + 18}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[1 + \frac{19-3x}{\sqrt{x^2-14x+53} + 2\sqrt{x^2-9x+18}} \right] = 0$$

Xét $1 + \frac{19-3x}{\sqrt{x^2-14x+53} + 2\sqrt{x^2-9x+18}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-14x+53} + 2\sqrt{x^2-9x+18} + 19-3x = 0$ (2)

Kết hợp (1) và (2) để giải ...

□ π

Bài 23: Giải phương trình:

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}\sqrt{x+3} + \sqrt{x+3}\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2+1}$$

Điều kiện: $x \geq -1$

Chú ý: $\sqrt{x+1}\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}\sqrt{x+3} + \sqrt{x+3}\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+2}\sqrt{x+3} = \sqrt{x^2+1+5(x+1)} \geq \sqrt{x^2+1}$

Vậy, $x = -1$

□ π

Bài 24: Giải phương trình:

$$2x^3 - x^2 + 4x - 1 = x^2\sqrt{3x^2+2x} + \sqrt{15x^2-2x}$$

Điều kiện có nghiệm: $2x^3 - x^2 + 4x - 1 \geq 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$

Phương trình tương đương

$$2x^3 - x^2 + 4x - 1 = x^2\sqrt{3x^2+2x} + \sqrt{15x^2-2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2(\sqrt{3x^2+2x} - x + 1) + (\sqrt{15x^2-2x} - 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 1) \left[\frac{x^2}{\sqrt{3x^2+2x} + x - 1} + \frac{1}{\sqrt{15x^2-2x} + 4x - 1} \right] = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□ π

Bài 25: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{(3x-3)\sqrt{y} + (3-3y)\sqrt{x}}{xy + \sqrt{xy} + 1} = \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \\ (3y+1)\sqrt{2x+1} = \sqrt{1-x} + \sqrt{-2y^2+x+1} + 2x+2 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\frac{(3\sqrt{xy}+3)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{xy+\sqrt{xy}+1} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3xy+3\sqrt{xy}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(xy+\sqrt{xy}+1) \end{cases}$$

Xét $3xy+3\sqrt{xy}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(xy+\sqrt{xy}+1)$ tương đương

$$(xy+\sqrt{xy}+1)(2-\sqrt{x}-\sqrt{y})=(1-xy)(\sqrt{xy}+2)$$

Chú ý $(1-xy)(\sqrt{xy}+2)=(xy+\sqrt{xy}+1)(2-\sqrt{x}-\sqrt{y}) \leq (xy+\sqrt{xy}+1)(2-2\sqrt[4]{xy})$

Suy ra $(1-t^4)(t^2+2) \leq (t^4+t^2+1)(2-2t)$ với $t=\sqrt[4]{xy}$

Hay $t(t-1)^2(2t^2+t+2) \leq 0$ (vô lý) $\Rightarrow t=1$

Điều kiện rút ra từ phương trình thứ hai: $\begin{cases} x \leq 1 \\ x+1-2y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$, nếu $xy=1$ thì $x=y=1$

(không thỏa mãn)

Vậy $x=y$ thế xuống ta được

$$(3x+1)\sqrt{2x+1}=\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)(2x+1)}+2x+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(3x-\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+1})+\sqrt{2x+1}-1-\sqrt{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{2x+1}-1-\sqrt{1-x})+\sqrt{2x+1}-1-\sqrt{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}-1-\sqrt{1-x})\left[2x+2+\sqrt{(1-x)(2x+1)}\right]=0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

$\square$

Bài 26: Giải phương trình:

$$x^2+\sqrt{2x+5}+\sqrt{4-2x}=4x-1$$

Điều kiện: $-\frac{5}{2} \leq x \leq 2$. Điều kiện có nghiệm thì $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

Chú ý: $\sqrt{2x+5}+\sqrt{4-2x} \geq \sqrt{(2x+5)+(4-2x)}=3$

Suy ra $4x-1 \geq x^2+3$ hay $(x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=2$

Bài 27: Giải phương trình:

$$(3x+1)\sqrt{2x+2} + (5x-7)\sqrt{3x-2} + 2(x-4)\sqrt{4x-3} = 0$$

Điều kiện: $x \geq \frac{3}{4}$

Đặt $f(x) = (3x+1)\sqrt{2x+2} + (5x-7)\sqrt{3x-2} + 2(x-4)\sqrt{4x-3}$

Xét $x > 4$ thì $f(x) > 0$

Xét $2 \leq x \leq 4$ thì $f(x) \geq (3x+1)\sqrt{2x+2} + 6 - 2(4-x)\sqrt{4x-3} > 7\sqrt{6} + 6 - 16 > 0$

Xét $\frac{3}{4} \leq x < 2$. Ta có các bất đẳng thức sau

$$\begin{cases} \sqrt{2x+2} \geq \frac{\sqrt{3x-2}+5}{3} \\ \sqrt{4x-3} \leq \frac{4\sqrt{3x-2}-1}{3} \end{cases}$$

Suy ra $f(x) \geq (3x+1)\left(\frac{\sqrt{3x-2}+5}{3}\right) + (5x-7)\sqrt{3x-2} + 2(x-4)\left(\frac{4\sqrt{3x-2}-1}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x=1$

□

Bài 28: Giải phương trình:

$$x^2 + x - 6 = \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt[3]{x+5}$$

Điều kiện: $x \geq -\frac{3}{2}$

Phương trình tương đương

$$x^2 + x - 6 = \sqrt{2x+3} \cdot \sqrt[3]{x+5}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 - (x-1)\sqrt{2x+3} = \sqrt{2x+3}(\sqrt[3]{x+5} - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2x+3}-3)\left[x+5+(x+1)\sqrt{2x+3}\right] + \frac{(x-3)(x^2+2)\sqrt{2x+3}}{(\sqrt[3]{x+5})^2 + (x-1)\sqrt[3]{x+5} + (x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)\left[x+5+(x+1)\sqrt{2x+3}\right]}{2(\sqrt{2x+3}+3)} + \frac{(x-3)(x^2+2)\sqrt{2x+3}}{(\sqrt[3]{x+5})^2 + (x-1)\sqrt[3]{x+5} + (x-1)^2} = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 29: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} - 3\sqrt{x-y} = 1 \\ \frac{5}{\sqrt{x-10y+21}} + \frac{4}{\sqrt{3y+2}} = 3 \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{2x+y} = a$ và $\sqrt{x-y} = b$, hệ tương đương
$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ \frac{5}{\sqrt{-3a^2 + 7b^2 + 21}} + \frac{4}{\sqrt{a^2 - 2b^2 + 2}} = 3 \end{cases}$$

Thế $a = \frac{3b+1}{2}$ xuống phương trình thứ hai của hệ, ta được $\frac{8}{|b+3|} + \frac{10}{|b-9|} = 3$

Đến đây bạn đọc tự giải ...



Bài 30: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - x(y+3) + y^2 + 2 = 0 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{3x-4}{y^2} + \frac{6x-4}{y^4} = 1 \end{cases}$$

Xét $y=0$ không phải là nghiệm của hệ, phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + \frac{2}{y^2} + 1 = \frac{3x}{y^2}$$

Hệ tương đương
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + \frac{2}{y^2} + 1 = \frac{3x}{y^2} \\ \left(\frac{x}{y}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{3x-4}{y^2} + \frac{6x-4}{y^4} = 1 \end{cases}$$

Thế phương trình thứ nhất xuống ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + \frac{6x-4}{y^4} - \frac{2}{y^2} = 0$ (*)

Đặt $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = a$ và $\frac{2}{y^2} + 1 = b$ thì (*) trở thành $a^2 - ab - 2b^2 = 0$

Đến đây bạn đọc tự giải ...



Bài 31: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{9}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 2(y^4 - x^4) \\ 3x - y = 2(x^4 - y^4) \end{cases}$$

Hệ tương đương $\begin{cases} \frac{9}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 2(y^4 - x^4) \\ 3x - y = 2(x^4 - y^4) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 = \frac{x^4}{y^2} + 2x^4(y^4 - x^4) \\ 3x - y = 2(x^4 - y^4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 = \frac{x^4}{y^2} + 2x^4(y^4 - x^4) \\ 9x^2 = y^2 + 4y(x^2 - y^4) + 4(x^4 - y^4)^2 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế để được $\frac{x^4}{y^2} + 2x^4(y^4 - x^4) = y^2 + 4y(x^2 - y^4) + 4(x^4 - y^4)^2$

Hay $(x^4 - y^4)[1 - 32x^4y^2 - 4y^2(x^4 - y^4) - 4y^2] = 0 \Leftrightarrow (x^4 - y^4)[(2y^3 - 1)^2 - 36x^4y^2] = 0$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x^4 - y^4 = 0 \\ 3x - y = 2(x^4 - y^4) \end{cases}$ hay $x = y = 0$ (vô lý)

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2y^3 - 1 + 6x^2y = 0 \\ 3x - y = 2(x^4 - y^4) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 + 6x^2y = 0 \\ 3x - y(2y^3 + 6x^2y) = 2(x^4 - y^4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 + 6x^2y = 0 \\ 3x - 6x^2y^2 = 2x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 + 6x^2y = 1 \\ 2x^3 + 6xy^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{2} + 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 3: $\begin{cases} 2y^3 - 1 - 6x^2y = 0 \\ 3x - y = 2(x^4 - y^4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 6x^2y = 1 \\ 2x^3 - 6xy^2 = 3 \end{cases}$

Đặt $z = x + yi$, ta suy ra $x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = z^3 = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$

Ta có: $3 - i = \sqrt{10} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{i}{\sqrt{10}} \right) = \sqrt{10} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ với $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$

$$\Rightarrow z^3 = \frac{\sqrt{10}}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + k2\pi}{3} \right) \text{ với } k = 0, 1, 2$$

Vậy,
$$\begin{cases} x = \sqrt[6]{\frac{5}{2}} \cos \frac{\varphi + k2\pi}{3} \\ y = \sqrt[6]{\frac{5}{2}} \sin \frac{\varphi + k2\pi}{3} \end{cases} \text{ với } k = 0, 1, 2$$

□ π **Bài 32:** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt[3]{7} \\ x^4 - y^4 = 4x - 3y \end{cases}$$

Ta sử dụng đồng bậc để suy ra $7(x^4 - y^4) = (x + y)^3(4x - 3y)$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□ π **Bài 33:** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} + y^4 = \frac{5}{4} \\ 2\sqrt{x^2 + 1} = y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đặt $x + \sqrt{x^2 + 1} = a$ và $y^2 = b$ suy ra $2\sqrt{x^2 + 1} = a + \frac{1}{a}$

Hệ tương đương
$$\begin{cases} a + b^2 = \frac{5}{4} \\ a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□ π **Bài 34:** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ 4x(x^3 - x^2 + x - 1) = y^2 + 2xy - 2 \end{cases}$$

Hệ tương đương
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ 4x(x^3 - x^2 + x - 1) = y^2 + 2xy - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 + (x - y)^2 = 1 \\ 4x(x - 1)(x^2 + 1) = (x + y)^2 - (x^2 + 1) - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 1 \\ (2x-1)^2 (x^2+1) = (x+y)^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 1 \\ (2x-1)^2 (x^2+1) = (x+y)^2 - [(x+y)^2 + (x-y)^2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 1 \\ (2x-1)^2 (x^2+1) + (x-y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

□

Bài 35: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3x-6y+5} + 2\sqrt{6y-3x-1} = \frac{6}{\sqrt{x-2y+3}} \\ x^3 - 2y + \sqrt{4y^2 - x} + \sqrt{x^2 + 2y + 3} - (x^2 + 2)(1 - 2y - x^2) = 2 \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x-2y+3} = a$ thì phương trình thứ nhất của hệ tương đương $a\sqrt{3a^2-4} + 2a\sqrt{8-3a^2} = 6$

Chú ý: $a\sqrt{3a^2-4} + 2a\sqrt{8-3a^2} \leq \frac{3a^2+a^2-4}{2} + a^2 + 8 - 3a^2 = 6 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2y - 1$

Thế xuống phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$x^3 - x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 4} + (x^2 + 2)(x^2 + x) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 3 + \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) - 3 + \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 4} = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 1} = b$, phương trình tương đương

$$b^4 - b^2 + b - 3 + \sqrt{b^2 + 3} = 0 \Leftrightarrow (b^4 - b^2 + b - 1) + (\sqrt{b^2 + 3} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b^3 + b^2 + 1) + \frac{(b-1)(b+1)}{\sqrt{b^2 + 3} + 2} = 0 \Leftrightarrow (b-1) \left[b^3 + b^2 + 1 + \frac{b+1}{\sqrt{b^2 + 3} + 2} \right] = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 36: Giải phương trình:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}(x+1)} + \sqrt[4]{2x} = 1$$

Điều kiện: $0 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$

Đặt $\sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{2}z$ và $\sqrt{2-\sqrt{2}(x+1)} = \sqrt[4]{2}y \Leftrightarrow y = \sqrt{\sqrt{2}-1-x}$

Ta có hệ
$$\begin{cases} \sqrt[4]{2}(y+z)=1 \\ y^2+z^4=\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 37: Giải phương trình:

$$\frac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5} = \frac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}$$

Điều kiện: $2 \leq x \leq 4$

Phương trình tương đương

$$(-x^2+9x-16)\sqrt{x-2}-2\sqrt{4-x}+(4-2x)\sqrt{(4-x)(x-2)}-3x+11=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}-2)\left[(1-2x)\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}+(x-4)\sqrt{(4-x)(x-2)}-x^2+6x-14\right]=0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 38: Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-3}+1} - \frac{13}{5} = 0$$

Đặt $\sqrt{x}=a$, dễ thấy điều kiện là $a \geq \sqrt{3}$

Phương trình trở thành:
$$\frac{a+1}{\sqrt{a^2+5}+3} + \frac{2a+1}{\sqrt{a^2-3}+1} - \frac{13}{5} = 0$$

Ta có
$$\begin{cases} \frac{a+1}{\sqrt{a^2+5}+3} = \frac{a+1}{\sqrt{a\left(a+\frac{5}{a}\right)}+3} \geq \frac{a+1}{\frac{1}{2}\left(a+a+\frac{1}{a}\right)+3} = \frac{2a(a+1)}{2a^2+6a+5} \\ \frac{2a+1}{\sqrt{a^2-3}+1} \geq \frac{173(2a+1)}{200a} \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^2+5}+3} + \frac{2a+1}{\sqrt{a^2-3}+1} - \frac{13}{5} \geq \frac{2a(a+1)}{2a^2+6a+5} + \frac{173(2a+1)}{200a} - \frac{13}{5} = \frac{1}{200} \cdot \frac{13(2a-7)^2(a-1)+118a^2-833a+1502}{a(2a^2+6a+5)} > 0$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

□

Bài 39: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 - 5\sqrt{x} + 5 = 0 \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{y^2 + 2y + 3} - \frac{y^2}{5} + y \end{cases}$$

Hệ tương đương $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y^2}{5} + 1 \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{y^2 + 2y + 3} - \frac{y^2}{5} + y \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \sqrt{(y+1)^2 + 2} + (y+1)$

Đến đây bạn đọc tự giải ...

□

Bài 40: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + \sqrt{xy} = x - 1 \\ 4x^2\sqrt{y} + 3\sqrt{x} = 3xy\sqrt{xy} + 3 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta suy ra $\begin{cases} x \geq 1 \\ \Delta_{\sqrt{x}} = y - 4(y-1) \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{4}{3} \end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương $x\sqrt{xy} [4(\sqrt{x}-1) + (4-3y)] + 3(\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

□

Bài 41: Giải phương trình:

$$x - 3\sqrt{x}\sqrt[3]{x+4} + x^2 - 8 = 0$$

Điều kiện: $x \geq 0$ **Cách 1:** Đặt $\sqrt{x} = a$, phương trình tương đương

$$a^4 - a^2 - 8 - 3a\sqrt[3]{a^2 + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a+2)(a^2+2) + 3a(a - \sqrt[3]{a^2+4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a+2)(a^2+2) + \frac{3a(a-2)(a^2+a+2)}{(\sqrt[3]{a^2+4})^2 + a\sqrt[3]{a^2+4} + a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2) \left[(a+2)(a^2+2) + \frac{3a(a^2+a+2)}{(\sqrt[3]{a^2+4})^2 + a\sqrt[3]{a^2+4} + a^2} \right] = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải ...



Cách 2: Phương trình tương đương

$$x - 3\sqrt{x}\sqrt[3]{x+4} + x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} \left(\frac{x}{2} - \sqrt[3]{x^2+4} \right) + \left(x^2 + x - 8 - \frac{3}{2}\sqrt{x^3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} \left(\frac{x}{2} - \sqrt[3]{x^2+4} \right) + \frac{3}{2}x \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} \right) + \left(\frac{x^2}{4} + x - 8 \right) = 0$$

Đến đây bạn đọc tự giải bằng cách liên hợp ...

