

LƯ' SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

TOÁN 11



CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

0355334679 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 11.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

Nội dung gồm 4 phần

Phần 1. Kiến thức cần nắm

Phần 2. Dạng bài tập có hướng dẫn giải và bài tập đề nghị

Phần 3. Phần trắc nghiệm có đáp án.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh.

Mọi góp ý xin gọi về số 0355334679 – 0916.620.899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

Gv_Trường THPT Tuy Phong

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

ÔN TẬP CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	1 – 2
§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	3 – 11
§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	11 – 17
§3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN THƯỜNG GẶP	18 – 27
ÔN TẬP CHƯƠNG I	28 – 41
TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I	41 – 58
ĐÁP ÁN	59 – 60

CHƯƠNG I

---0o0---

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC & PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

---000---

ÔN TẬP CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1; \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Các công thức lượng giác2.1. Công thức cộng

- ✎ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- ✎ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- ✎ $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$, với mọi α, β làm cho các biểu thức có nghĩa.

2.2. Công thức nhân đôi

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}; \alpha, 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.3. Công thức nhân ba

- $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
- $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

2.4. Công thức hạ bậc

- ✎ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
- ✎ $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
- ✎ $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, với α làm cho biểu thức có nghĩa.

2.6. Công thức biến đổi tổng thành tích

- ① $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
 - ② $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
 - ③ $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
 - ④ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- , với mọi α, β làm cho các biểu thức có nghĩa.

2.7. Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- $\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$
- $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

2.8. Công thức rút gọn

$$\diamond \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\diamond \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\diamond \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \text{ với } \alpha \text{ làm cho biểu thức có nghĩa}$$

3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt

3.1. Hai góc đối nhau (cung đối) (α làm cho các biểu thức có nghĩa)

$$\diamond \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\diamond \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\diamond \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\diamond \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

3.2. Hai góc bù nhau (cung bù) (α làm cho các biểu thức có nghĩa)

$$\diamond \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\diamond \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\diamond \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\diamond \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

3.3. Hai góc phụ nhau (cung phụ) (α làm cho các biểu thức có nghĩa)

$$\diamond \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\diamond \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$\diamond \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha$$

$$\diamond \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \tan \alpha$$

3.4. Hai góc hơn kém π (cung hơn kém π) (α làm cho các biểu thức có nghĩa)

$$\diamond \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\diamond \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\diamond \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\diamond \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

3.5. Hai góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$) (α làm cho các biểu thức có nghĩa)

$$\diamond \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\diamond \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\diamond \tan \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\cot \alpha$$

$$\diamond \cot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\tan \alpha$$

3.6. Cung bội. ($k \in \mathbb{Z}$, α làm cho các biểu thức có nghĩa)

$$\diamond \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$$

$$\diamond \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$$

$$\diamond \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$$

$$\diamond \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$$

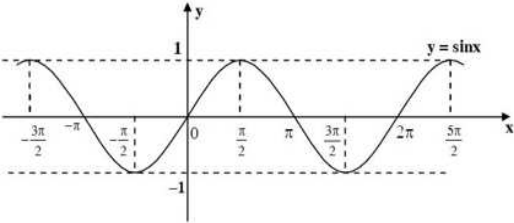
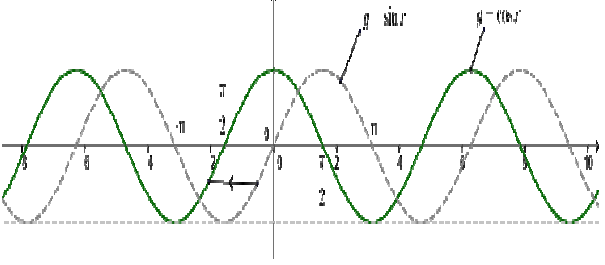
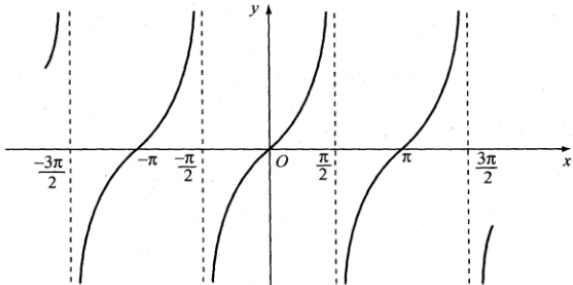
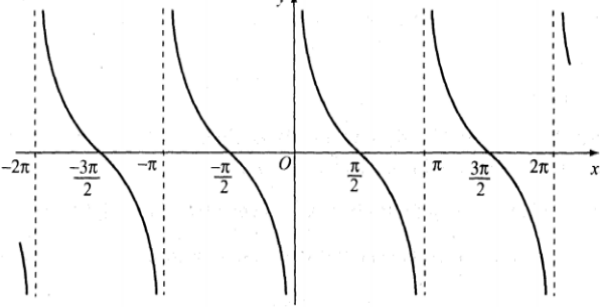
4. Bảng giá trị lượng giác các góc (cung) đặc biệt

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
HSLG	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

|| : Không xác định

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ - Có tập giá trị là $[-1; 1]$ - Là hàm số lẻ - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ - Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ - Có đồ thị là một đường hình sin 	- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ - Có tập giá trị là $[-1; 1]$ - Là hàm số chẵn - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ - Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ - Có đồ thị là một đường hình sin 
Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
- Có tập xác định là $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$ - Là hàm số lẻ - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π - Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$ - Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận 	- Có tập xác định là $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$ - Là hàm số lẻ - Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ là π - Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi); k \in \mathbb{Z}$ - Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận 

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Tập xác định của hàm số

- Hàm số xác định với một điều kiện
- Hàm số xác định bởi hai hay nhiều điều kiện
- Hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$
- Hàm số $y = \tan x$ xác định khi và chỉ khi $\cos x \neq 0$; Hàm số $y = \cot x$ xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0$

Lưu ý:

1	$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$
2	$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$	$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$	$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$
3	$\tan u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4} + k\pi$	$\tan u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	$\tan u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$
4	$\cot u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4} + k\pi$	$\cot u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	$\cot u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- Hàm số $y = \frac{1}{A}$ xác định khi và chỉ khi $A \neq 0$

- Hàm số $y = \sqrt{A}$ xác định khi và chỉ khi $A \geq 0$

- Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{A}}$ xác định khi và chỉ khi $A > 0$

Bài 1.1. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$

b) $y = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

c) $y = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

d) $y = \sqrt{3-\sin x}$

HD & Giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \geq 0$. Vì $1+\cos x \geq 0$ nên điều kiện là $1-\cos x > 0$ hay

$1-\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

d) Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $3-\sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $D = \mathbb{R}$

Bài 1.2. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

d) $y = \tan x + \cot x$

HD & Giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Bài 1.3. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \cos \frac{2x}{x-1}$

b) $y = \tan \frac{x}{3}$

c) $y = \cot 2x$

d) $y = \sin \frac{1}{x^2-1}$

e) $y = \sqrt{\cos x + 1}$

f) $y = \frac{2}{\cos x - \cos 3x}$

g) $y = \frac{3}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

h) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$

i) $y = \sqrt{\frac{3\sin x - 7}{2\cos x - 5}}$

HD&Giải

a) Ta có $y = \cos \frac{2x}{x-1}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\frac{2x}{x-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \cos \frac{2x}{x-1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Hàm số $y = \tan \frac{x}{3}$ xác định khi và chỉ khi $\cos \frac{x}{3} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

e) Ta có $\cos x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$

f) Ta có $\cos x - \cos 3x = -2\sin 2x \sin(-x) = 4\sin^2 x \cos x$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

g) Ta có $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$. Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

h) Ta có $1 - \sin x \geq 0, 1 + \cos x \geq 0$. Do đó hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ khi $\cos x \neq -1$. Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

i) Ta có $3\sin x - 7 < 0, 2\cos x - 5 < 0$ nên $\frac{3\sin x - 7}{2\cos x - 5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$

Bài 1.4. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \cos \sqrt{x}$

b) $y = \sin \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

c) $y = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos^2 2x}}$

d) $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$

e) $y = \frac{2 - \cos x}{1 + \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$

f) $y = \frac{\tan x + \cot x}{1 - \sin 2x}$

HD&Giải

a) Ta có $y = \cos \sqrt{x}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \geq 0$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = [0; +\infty)$

b) Ta có $y = \sin \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = [-1; 1)$

c) Ta có $1 - \cos 2x \geq 0, 1 + \cos^2 2x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$

d) Hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

e) Hàm số $y = \frac{2 - \cos x}{1 + \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left[\left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \right\}; k \in \mathbb{Z} \right]$

f) Hàm số $y = \frac{\tan x + \cot x}{1 - \sin 2x}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left[\left\{ \frac{k\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}; k \in \mathbb{Z} \right]$

Dạng 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

Nhắc lại kiến thức: Về tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

Tìm tập xác định D của hàm số, kiểm chứng D là tập đối xứng hay không, tức là $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1)

Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$:

• Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn (2)

• Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ (3)

Do vậy

• Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên D

• Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên D

Để kết luận $f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên D , ta chỉ cần tìm một điểm x_0 sao

cho $f(-x_0) \neq f(x_0)$ và $f(-x_0) \neq -f(x_0)$

Lưu ý: vận dụng hai góc (cung) đối nhau của HSLG

Bài 1.5. Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\cos x}{x}$

b) $y = x - \sin x$

c) $y = \sqrt{1 - \cos x}$

d) $y = 1 + \cos x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$

e) $y = \sin x \cdot \cos^2 x + \tan x$

f) $y = \sin x - \cos x$

g) $y = \sin^3 x - \tan x$

h) $y = \frac{\tan x + \cot x}{\sin x}$

HD & Giải

a) Hàm số $y = f(x) = \frac{\cos x}{x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)} = -\frac{\cos x}{x} = -f(x). \text{ Vậy hàm số } y = f(x) = \frac{\cos x}{x} \text{ là hàm số lẻ.}$$

b) Hàm số lẻ

c) Là hàm số chẵn

d) Là hàm số chẵn

e) Là hàm số lẻ

f) Hàm số $y = f(x) = \sin x - \cos x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Lấy $x = \frac{\pi}{6}$ ta có: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $f\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Vậy hàm số $y = f(x) = \sin x - \cos x$ là hàm số không chẵn, không lẻ

g) Là hàm số lẻ

h) Là hàm số lẻ

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D và hai hằng số M và m .

➤ Nếu $\forall x \in D, f(x) \leq M$ và $\exists x_0$ sao cho $f(x_0) = M$ thì M gọi là GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên D và kí hiệu $\max_D y = M$

➤ Nếu $\forall x \in D, f(x) \geq m$ và $\exists x_0$ sao cho $f(x_0) = m$ thì m gọi là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên D và kí hiệu $\min_D y = m$

➤ **Chú ý:**

♦ $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

♦ $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

♦ $0 \leq |\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

♦ $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

♦ $0 \leq \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

♦ $0 \leq |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 1.6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi hàm số sau

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$

b) $y = 3 - 2\sin x$

c) $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$

d) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

HD & Giải

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{\cos x} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2\sqrt{\cos x} + 1 \leq 3$ hay $1 \leq y \leq 3$

Vậy: $\max_{\mathbb{R}} y = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\min_{\mathbb{R}} y = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $y = 3 - 2\sin x$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq -2\sin x \geq -2 \Leftrightarrow 2 + 3 \geq 3 - 2\sin x \geq -2 + 3 \Leftrightarrow 5 \geq 3 - 2\sin x \geq 1$ hay $5 \geq y \geq 1$

Vậy: $\max_{\mathbb{R}} y = 5 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\min_{\mathbb{R}} y = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2(1 + \cos x) \leq 4$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2(1 + \cos x)} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1 \leq 3$

Vậy: $\max_{\mathbb{R}} y = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\min_{\mathbb{R}} y = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 1.7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi hàm số sau

a) $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3$

b) $y = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = 3 - 2|\sin x|$

d) $y = \cos^2 x + 2\cos 2x$

e) $y = \sqrt{5 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$

f) $2\sin^2 x - \cos 2x$

HD & Giải

a) Hàm số $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \leq 2 \Leftrightarrow -1 + 3 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3 \leq 2 + 3 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3 \leq 5 \text{ hay } 1 \leq y \leq 5 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \underset{\mathbb{R}}{\text{Max}} y = 5 \text{ khi } \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\underset{\mathbb{R}}{\text{Min}} y = -1 \text{ khi } \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Hàm số $y = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ ta luôn có: } -\sqrt{3} \leq \sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3} \text{ hay } -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy: GTLN của } y \text{ là } \sqrt{3}, \text{ đạt được khi } \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{GTNN của } y \text{ là } -\sqrt{3}, \text{ đạt được khi } \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) Hàm số $y = 3 - 2|\sin x|$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } 0 \leq |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2|\sin x| \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 3 - 2|\sin x| \leq 3 \text{ hay } 1 \leq y \leq 3$$

$$\text{Vậy: GTLN của } y \text{ là } 3, \text{ đạt được khi } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{GTNN của } y \text{ là } 1, \text{ đạt được khi } \sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) Hàm số $y = \cos^2 x + 2 \cos 2x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \cos^2 x + 2 \cos 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} + 2 \cos 2x = \frac{1 + 5 \cos 2x}{2}.$$

$$\text{Với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ ta luôn có: } -2 \leq \frac{1 + 5 \cos 2x}{2} \leq 3.$$

$$\text{Vậy: GTLN của } y \text{ là } 3, \text{ đạt được khi } \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{GTNN của } y \text{ là } -2, \text{ đạt được khi } \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e) Hàm số $y = \sqrt{5 - 2 \cos^2 x \cdot \sin^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{5 - 2 \cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \sqrt{5 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}.$$

$$\text{Vì } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \text{ nên } -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq 5 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 5 \text{ hay } \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy: GTLN của } y \text{ là } \sqrt{5}, \text{ đạt được khi } \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{GTNN của } y \text{ là } \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ đạt được khi } \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

f) Hàm số $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x = 1 - 2 \cos 2x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có $-1 \leq 1 - 2 \cos 2x \leq 3$

Vậy: GTLN của y là 3, đạt được khi $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là -1, đạt được khi $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 1.8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3 + \sin x \cos x$

b) $y = 4 - 2 \cos^2 x$

c) $y = \frac{2}{3 + \cos x}$

d) $y = \frac{3}{5 - \sin^2 x}$

e) $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$

f) $y = 4 \sin \sqrt{x}$

HD & Giải

a) GTLN của y là $\frac{7}{2}$, đạt được khi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{5}{2}$, đạt được khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) GTLN của y là 4, đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là 2, đạt được khi $x = k2\pi \vee x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Hàm số $y = \frac{2}{3 + \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 + \cos x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 + \cos x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3 + \cos x} \leq 1$

GTLN của y là 1, đạt được khi $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) GTLN của y là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{3}{5}$, đạt được khi $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) Hàm số $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có: $-1 \leq \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1 \leq \sqrt{2} - 1$. Vậy

GTLN của y là $\sqrt{2} - 1$, đạt được khi $x^2 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \geq 1$

GTNN của y là -1, đạt được khi $x^2 = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k > 0$

f) Hàm số $y = 4 \sin \sqrt{x}$ có tập xác định là $D = [0; +\infty)$. Trên D ta có: $-4 \leq 4 \sin \sqrt{x} \leq 4$.

Vậy: GTLN của y là 4, đạt được khi $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \geq 0$

GTNN của y là -4, đạt được khi $\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \geq 1$

Bài 1.9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$

b) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

c) $y = \sin^2 x + 2 \sin x + 6$

d) $y = \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 5$

HD & Giải

$$a) y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x.$$

Mặt khác: $-1 \leq \cos 2x \leq 1$

GTLN của y là 1, đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là -1 , đạt được khi $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$b) y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Mặt khác $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1$

GTLN của y là 1, đạt được khi $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$c) \text{ Ta có } y = \sin^2 x + 2\sin x + 6 = (\sin x + 1)^2 + 5. \text{ Mặt khác: } 5 \leq (\sin x + 1)^2 + 5 \leq 9$$

GTLN của y là 9, đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là 5, đạt được khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$d) \text{ Ta có } y = \cos^4 x + 4\cos^2 x + 5 = (\cos^2 x + 2)^2 + 1. \text{ Mặt khác: } 5 \leq (\cos^2 x + 2)^2 + 1 \leq 10$$

GTLN của y là 10, đạt được khi $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

GTNN của y là 5, đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Dạng 4. Chu kỳ tuần hoàn của hàm số

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

i) $x - T \in D$ và $x + T \in D$

ii) $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn đó.

Định lý:

1. Hai hàm số $y = \sin(ax + b)$ và $y = \cos(ax + b)$ với $a \neq 0$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

2. Hai hàm số $y = \tan(ax + b)$ và $y = \cot(ax + b)$ với $a \neq 0$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$.

3. Hàm số $y = y_1 + y_2$ với T_1, T_2 lần lượt là chu kỳ tuần hoàn của hàm số y_1, y_2 . Chu kỳ tuần hoàn của hàm số y là $T = BCNN(T_1, T_2)$.

MTCT:

① Nhập hàm số đã cho

② Calc cho $x = 1$ và ghi nhớ kết quả nhận được.

③ Calc cho $x + T$ so sánh với kết quả nhận được ở trên, đưa ra đáp án đúng. T là chu kỳ ở bốn đáp án mà câu trắc nghiệm cho.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.10. Tìm tập xác định của các hàm số sau

$$a) y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$$

$$b) y = \frac{1}{\sqrt{3} \cot 2x + 1}$$

$$c) y = \frac{3\sin x + 1}{3 - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$d) y = \frac{\sin x}{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

e) $y = \frac{1+\cos 9x}{\sqrt{1+\cos 9x}} + \cot 9x$	f) $y = \frac{\sin x}{2\cos x + 2}$	g) $y = \frac{\tan 2x - 1}{\sqrt{1+\sin x} + 1}$	h) $y = \frac{2 - \cot 3x}{1 - \sqrt{1+\sin 3x}}$
---	-------------------------------------	--	---

Bài 1.11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{1+\cos 2x} - 5$	b) $y = 4 + 5\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$	c) $y = 2 - \sqrt{4 + 2\sin 5x}$	d) $y = \frac{3}{\cot^2 x + 1} + 1$
e) $y = 1 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	f) $y = 1 - 8\sin^2 2x$	g) $y = \sqrt{9 - 9 \sin 9x }$	h) $y = \sin 2x - 5 $

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Nếu $|m| > 1$: phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $|m| \leq 1$: Nếu α là một nghiệm của phương trình (1), nghĩa là $\sin \alpha = m$

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

- Nếu số đo của α được cho bằng độ thì: $\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha + k360^\circ \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

Nhận thấy, *trong một công thức nghiệm của phương trình lượng giác không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.*

Chú ý:

- i) Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$.

Khi đó: $\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

ii) Các trường hợp đặc biệt

- $m = -1$, phương trình $\sin x = -1$ có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $m = 0$, phương trình $\sin x = 0$ có nghiệm là $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- $m = 1$, phương trình $\sin x = 1$ có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

iii) Tổng quát: $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

2. Phương trình $\cos x = m$ (2)

- Nếu $|m| > 1$: phương trình (2) vô nghiệm
- Nếu $|m| \leq 1$: Nếu α là một nghiệm của phương trình (2), nghĩa là $\cos \alpha = m$

$$\cos x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- Nếu số đo của α được cho bằng độ thì: $\cos x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k360^\circ \\ x = -\alpha + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý:

i) Nếu α thỏa điều kiện $0 \leq \alpha \leq \pi$ và $\cos \alpha = m$ thì ta viết $\alpha = \arccos m$.

Khi đó pt (2) có nghiệm là: $x = \pm \arccos m + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

ii) Các trường hợp đặc biệt khi $m \in \{0; \pm 1\}$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

iii) Tổng quát: $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

3. Phương trình $\tan x = m$ (3) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (3), nghĩa là $\tan \alpha = m$ thì $\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- Nếu số đo của α được cho bằng độ thì $\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k180^\circ; k \in \mathbb{Z}$
- Nếu α thỏa mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\tan \alpha = m$ thì ta viết $\alpha = \arctan m$. Lúc đó nghiệm của phương trình (3) là: $x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Các trường hợp đặc biệt khi $m \in \{0; \pm 1\}$
 - $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 - $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 - $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Tổng quát: $\tan u = \tan v$ có nghiệm: $u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. Phương trình $\cot x = m$ (4) Điều kiện: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (4), nghĩa là $\cot \alpha = m$ thì $\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Nếu số đo của α được cho bằng độ thì $\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k180^\circ; k \in \mathbb{Z}$
- Nếu α thỏa mãn điều kiện $0 < \alpha < \pi$ và $\cot \alpha = m$ thì ta viết $\alpha = \text{arc cot } m$. Lúc đó nghiệm của phương trình (4) là: $x = \text{arc cot } m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Tổng quát: $\cot u = \cot v$ có nghiệm: $u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý: Kể từ đây, ta qui ước rằng nếu trong một biểu thức nghiệm của phương trình lượng giác có chứa k mà không giải thích gì thêm thì ta hiểu rằng k nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{Z}$

Ghi nhớ công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản

Với $u = u(x), v = v(x)$ và u, v làm cho biểu thức có nghĩa, $k \in \mathbb{Z}$

$$1 / \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}$$

$$2 / \cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}$$

$$3 / \tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

$$4 / \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Giải phương trình lượng giác cơ bản

- Các công thức nghiệm của bốn phương trình lượng giác cơ bản

- Cung đối và cung bù

Bài 2.1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \frac{2}{3}$

d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right)$

$$\text{e) } \sin\left(\frac{x}{2} + 10^\circ\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{f) } \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{g) } \sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{h) } \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

HD & Giải

a) Ta có: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Ta có: $-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin \frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (áp dụng cung đối đưa dấu trừ vào trong $-\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$)

Phương trình đã cho tương đương: $\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

c) Vì $\frac{2}{3} < 1$ nên có số α để $\sin \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{2}{3}$. Do đó:

$$\sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{5} = \pi - \left(\frac{\pi}{5} + x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } x = -80^\circ + k720^\circ \text{ và } x = 400^\circ + k720^\circ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ và } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{g) } x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{h) } x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9}; x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 2.2. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } \cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{c) } \cos x = \frac{4}{5} \quad \text{d) } \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\text{e) } \cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{f) } \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{g) } \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \quad \text{h) } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

HD & Giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}. \text{ Phương trình đã cho tương đương với: } \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Ta có: $-\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3}$ (Áp dụng cung bù $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$)

Phương trình đã cho tương đương với: $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Vì $\frac{4}{5} < 1$ nên có số α để $\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{4}{5}$. Do đó:

$$\cos x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \arccos \frac{4}{5} + k2\pi \\ x = -\arccos \frac{4}{5} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -\left(\frac{\pi}{3} + x \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$e) \cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(3x - 45^\circ) = \cos 30^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 45^\circ = 30^\circ + k360^\circ \\ 3x - 45^\circ = -30^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25^\circ + k120^\circ \\ x = 5^\circ + k120^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$f) \cos \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$g) \cos \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = -1 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{9} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$$

h) Vì $\frac{3}{2} > 1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 2.3. Giải các phương trình sau:

$$a) \tan x = \sqrt{3} \quad b) \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad c) \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \tan 2x \quad d) \tan(x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad e) \tan 2x = \frac{1}{2}$$

HD & Giải

$$a) \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \tan 2x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \tan(x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(x - 15^\circ) = \tan 30^\circ \Leftrightarrow x - 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$e) \tan 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 2.4. Giải các phương trình sau:

$$a) \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad b) \cot x = -\sqrt{3} \quad c) \cot \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \cot 2x \quad d) \cot(x - 15^\circ) = \sqrt{3} \quad e) \cot 3x = \frac{3}{5}$$

HD & Giải

- a) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- b) $\cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- c) $\cot \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot 2x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- d) $\cot(x - 15^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(x - 15^\circ) = \cot 30^\circ \Leftrightarrow x - 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- e) $\cot 3x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 3x = \arccot \frac{3}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \arccot \frac{3}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 2.5. Giải các phương trình sau:

- a) $\frac{\sin 3x}{\cos 3x - 1} = 0$ b) $\cot 3x = \tan \frac{2\pi}{5}$ c) $(\sin x + 1)(2 \cos 2x - \sqrt{2}) = 0$
- d) $\tan \left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3}$ e) $\sin \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 3x$ f) $\tan(2x + 45^\circ) \tan \left(180^\circ - \frac{x}{2}\right) = 1$

HD & Giải

a) Điều kiện : $\cos 3x \neq 1$. Ta có $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi$.

Do điều kiện, các giá trị $k = 2m, m \in \mathbb{Z}$ bị loại, nên $3x = (2m+1)\pi \Leftrightarrow x = (2m+1)\frac{\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = (2m+1)\frac{\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$

b) Nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = \pm \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{5\pi}{144} + \frac{k\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\sin \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$. Vậy nghiệm của phương trình:

$$x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

f) Với ĐKXĐ của phương trình, ta có $\tan(2x + 45^\circ) = \cot(45^\circ - x)$ và $\tan \left(180^\circ - \frac{x}{2}\right) = \tan \left(-\frac{x}{2}\right)$ nên

$$\tan(2x + 45^\circ) \tan \left(180^\circ - \frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \cot(45^\circ - 2x) \cdot \tan \left(-\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan \left(-\frac{x}{2}\right) = \tan(45^\circ - 2x) \Leftrightarrow x = 30^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Dạng 2. Tìm nghiệm của phương trình trên một khoảng, đoạn.

- Giải phương trình và tìm nghiệm thỏa khoảng đề bài cho.

Bài 2.6. Giải các phương trình sau trong khoảng đã cho:

- a) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$ b) $\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$
- c) $\tan(2x - 15^\circ) = 1$ với $-180^\circ < x < 90^\circ$ d) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

HD & Giải

$$a) \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Xét điều kiện $0 < x < \pi$, ta có

- $0 < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{1}{12} + 1 \Rightarrow k = 1$ (Do $k \in \mathbb{Z}$). Vì vậy: $x = \frac{11\pi}{12}$
- $0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \Rightarrow k = 0$. Vì vậy: $x = \frac{7\pi}{12}$

Vậy: $x = \frac{11\pi}{12}$ và $x = \frac{7\pi}{12}$

$$b) \cos(x-5) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x-5 = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 5 + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 5 + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Xét điều kiện $-\pi < x < \pi$, ta có:

- $-\pi < \frac{\pi}{6} + 5 + k2\pi < \pi \Rightarrow k = -1$. Do vậy, có $x = 5 - \frac{11\pi}{6}$
- $-\pi < -\frac{\pi}{6} + 5 + k2\pi < \pi \Rightarrow k = -1$. Do vậy, có $x = 5 - \frac{13\pi}{6}$

Vậy: $x = 5 - \frac{11\pi}{6}$ và $x = 5 - \frac{13\pi}{6}$

$$c) \tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x = 15^\circ + 45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Xét điều kiện $-180^\circ < x < 90^\circ$, ta có

- $-180^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{3} + k < 1 \Leftrightarrow k \in \{-2, -1, 0\}$

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x = -150^\circ, x = -60^\circ$ và $x = 30^\circ$

$$d) \cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Xét điều kiện } -\frac{\pi}{2} < x < 0, \text{ ta có:}$$

- $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow k \in \{-1; 0\}$

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{4\pi}{9}$ và $x = -\frac{\pi}{9}$

Bài 2.7. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong một ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số: $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t < 365$.

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

HD & Giải

a) Ta phải giải phương trình: $3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12 = 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t < 365$.

Phương trình dẫn đến $\sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi \Leftrightarrow t = 182k + 80, (k \in \mathbb{Z})$

Mặt khác $0 < 182k + 80 < 365 \Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 (ứng với $k = 0$) và ngày thứ 262 (ứng với $k = 1$) trong năm.

b) Do $\sin x \geq -1$ với mọi x , nên thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t < 365. \text{ Từ đó suy ra } t = 364k - 11, k \in \mathbb{Z}$$

Mặt khác: $0 < 364k - 11 < 365 \Leftrightarrow k = 1$

Vậy: Thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất (9 giờ) vào ngày thứ 353 trong năm.

a) Tương tự, ta giải phương trình $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t < 365$.

Vậy: Thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất (15 giờ) vào ngày thứ 171 trong năm.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.7. Giải các phương trình sau:

1. $\sin(2x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	2. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$	3. $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
4. $\sin 3x = \frac{2}{3}$	5. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)$	6. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\cos(60^\circ - 3x) = -\frac{1}{2}$	8. $\cos\left(\frac{x}{2} + 10^\circ\right) = -\frac{1}{2}$	9. $\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$
10. $\cos(2x - 5) = \frac{3}{4}$	11. $\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	12. $\cos(4x + 125^\circ) = -1$
13. $\tan(2x + 60^\circ) = -\sqrt{3}$	14. $\cot\left(5x - \frac{\pi}{9}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	15. $\cos(3x - 135^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
16. $\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -2$	17. $\sin(9^\circ - 9x) = 0$	18. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 2.8. Giải các phương trình sau:

1. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $0 \leq x \leq 2\pi$	2. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $0 \leq x \leq 2\pi$	3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
4. $-2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$ với $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	5. $2\cos(45^\circ - x) + \sqrt{2} = 0$ với $x \in [180^\circ; 340^\circ]$	6. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ với $-\pi \leq x \leq \pi$
7. $3 + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, x \in \left[\frac{37\pi}{4}; 30\right)$	8. $\sqrt{3}\sin 5x + \sqrt{3} = 0$ với $x \in (-90^\circ; 180^\circ]$	9. $\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$ trên đoạn $[-2\pi; \pi]$

Bài 2.9. Giải các phương trình sau:

1. $\sin 3x - \cos 5x = 0$	2. $\tan 3x \cdot \tan x = 1$	3. $\frac{\cos 3x}{\sin 3x - 1} = 0$
4. $\sin 3x + \sin 5x = 0$	5. $\cot 2x \cdot \cot 3x = 1$	6. $\sin 2x \cdot \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
7. $\cot 9x = -\tan\left(\frac{\pi}{9} + 9x\right)$	8. $\cos(50^\circ + 4x) + \sin 3x = 0$	9. $\sin 5x + \cos x = 0$

§3. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN THƯỜNG GẶP

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Phương trình	Cách giải
1. Phương trình bậc nhất, bậc hai đối với một hàm số lượng giác, trong đó $f(x)$ là một biểu thức lượng giác nào đó.	Đặt ẩn phụ $t = f(x)$ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này và từ đó suy ngược lại nghiệm x . Khi đặt $t = \sin x$ hay $t = \cos x$, điều kiện là $ t \leq 1$ Khi đặt $t = \tan x$, $t = \cot x$, cần lưu ý điều kiện xác định của $\tan x$ và $\cot x$.
2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ có dạng: $a \sin x + b \cos x = c, (a^2 + b^2 \neq 0)$ (2)	Thực hiện các bước sau: B1: Kiểm tra - Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ thì phương trình (2) vô nghiệm - Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, ta thực hiện tiếp B2 B2. Chia hai vế phương trình (2) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$. Từ đó áp dụng công thức cộng đưa phương trình (2) về phương trình lượng giác cơ bản dạng: $\sin u = \sin v$ hay $\cos u = \cos v$.
3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$, có dạng: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ (3) ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)	<u>Cách 1.</u> Thực hiện các bước sau B1. Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (nghĩa là $\sin x = \pm 1$) có phải là nghiệm của phương trình (3) hay không? B2. Xét $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta sẽ có được phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác $\tan x$ <u>Cách 2.</u> Áp dụng công thức hạ bậc, ta đưa phương trình (3) về dạng phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$.
Phương trình dạng $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ (4) ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)	Viết $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ rồi đưa về dạng phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ (đưa về dạng phương trình (3))

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Giải phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

- Phương trình dạng $at + b = 0, a \neq 0$
- Một số phương trình biến đổi đưa về phương trình bậc nhất
- Từ phương trình đã cho đưa về phương trình lượng giác cơ bản và giải

Bài 3.1. Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| a) $2 \cos(3x - 60^\circ) + 1 = 0$ | b) $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ |
| c) $\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) + 1 = 0$ | d) $\sqrt{3} \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$ |

HD & Giải

a) $2 \cos(3x - 60^\circ) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(3x - 60^\circ) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x - 60^\circ) = \cos 120^\circ$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 60^\circ = 120^\circ + k360^\circ \\ 3x - 60^\circ = -120^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k120^\circ \\ x = 20^\circ + k120^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

b) $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) = \tan(-30^\circ)$
 $\Leftrightarrow \frac{x}{4} + 20^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = -200^\circ + k720^\circ, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sqrt{3} \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
 $\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3} \tan 2x + 3 = 0$

b) $\cos(x + 30^\circ) + 2 \cos^2 15^\circ = 1$

c) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$

d) $8 \cos 2x \sin 2x \cos 4x = \sqrt{2}$

HD & Giải

a) $\sqrt{3} \tan 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

(lưu ý ĐK: $\cos 2x \neq 0$). Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos(x + 30^\circ) + 2 \cos^2 15^\circ = 1 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = 1 - 2 \cos^2 15^\circ \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$
 $\Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = \cos 150^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = 120^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = -180^\circ + k360^\circ \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = 120^\circ + k360^\circ$ và $x = -180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

c) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$

d) $8 \cos 2x \sin 2x \cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 8x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 8x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$ và $x = \frac{3\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.3. Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$

b) $\cos x \cdot \cos 2x = 1 + \sin 2x \cdot \sin x$

c) $4 \sin x \cos x \cos 2x = -1$

d) $\tan x = 3 \cot x$

HD & Giải

a) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Vậy, phương trình có các nghiệm là $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x \cos 2x = 1 + \sin x \sin 2x \Leftrightarrow \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) $4 \sin x \cos x \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\tan x = 3 \cot x$. Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Ta có $\tan x = \frac{3}{\tan x} \Leftrightarrow \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

So với điều kiện, phương trình có nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Dạng 2. Giải phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

- Phương trình dạng $at^2 + bt + c = 0, a \neq 0$
- Một số phương trình biến đổi đưa về phương trình bậc hai
- Từ phương trình đã cho đưa về phương trình lượng giác cơ bản và giải
- Lưu ý điều kiện của bài toán (nếu có)

Bài 3.4. Giải các phương trình sau:

a) $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$

b) $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$

c) $4 \cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} = 0$

d) $5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$

HD\&Giải

a) Đặt $\sin x = t$ (với $|t| \leq 1 (*)$), ta được phương trình $2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -3$ (không thỏa $(*)$)

Với: $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Điều kiện: $\sin 3x \neq 0 (*)$ Đặt $t = \cot 3x$, ta được phương trình $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1, t = 2$

Với $t = -1 \Rightarrow \cot 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Với $t = 2 \Rightarrow \cot 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \arccot 2 + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$

So với $(*)$, vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{1}{3} \arccot 2 + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Đặt $t = \cos x$, (với $|t| \leq 1$), ta được phương trình $4t^2 - 2(1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Do đó: } 4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Điều kiện $\sin 2x \neq 0$, khi đó ta có $\tan x \neq 0$

$$5\tan x - 2\cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5\tan x - 2\frac{1}{\tan x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 5\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{2}{5}\right) + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

So với ĐK, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{2}{5}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.5. Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

b) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

c) $\sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$

d) $\cos(4x + 60^\circ) - 5\cos(2x + 30^\circ) + 4 = 0$

HD\&Giải

a) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = k2\pi$ và $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\cos(4x + 60^\circ) - 5\cos(2x + 30^\circ) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2(2x + 30^\circ) - 5\cos(2x + 30^\circ) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x + 30^\circ) = 1 \\ \cos(2x + 30^\circ) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 30^\circ = k360^\circ \Leftrightarrow x = -15^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Dạng 3. Phương trình bậc nhất đối với sin và cos

- Phương trình có dạng $a\sin x + b\cos x = c, (a^2 + b^2 \neq 0)$

- B1: Kiểm tra

- Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ thì phương trình vô nghiệm
- Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, ta thực hiện tiếp B2

- B2. Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$. Từ đó áp dụng công thức cộng đưa phương trình về phương trình lượng giác cơ bản dạng: $\sin u = \sin v$ hay $\cos u = \cos v$.

Bài 3.6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$

b) $2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = -3$

c) $3\cos x + 4\sin x = -5$

d) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$

e) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$

f) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

HD\&Giải

a) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- b) $2 \sin 3x + \sqrt{5} \cos 3x = -3 \Leftrightarrow 3 \left(\frac{2}{3} \sin 3x + \frac{\sqrt{5}}{3} \cos 3x \right) = -3 \Leftrightarrow 3(\sin \alpha \sin 3x + \cos \alpha \cos 3x) = -3$. Trong đó $\sin \alpha = \frac{2}{3}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Đó đó: $\cos(3x - \alpha) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha + \pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- c) $x = \pi + \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ trong đó α là số thoả mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$
- d) $5 \sin 2x - 6 \cos^2 x = 13 \Leftrightarrow 5 \sin 2x - 3 \cos 2x = 16$, phương trình vô nghiệm.
- e) $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$ và $x = \frac{13\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- f) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \sin 2x - \cos 2x = 0$, với $\cos 2x \neq 0$, ta có $\tan 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.7. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \sqrt{2} \sin 5x - \cos x$

b) $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$

c) $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$

d) $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \cos 3x + \sin 5x = 0$

HD & Giải

a) $\sin x = \sqrt{2} \sin 5x - \cos x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 5x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

b) ĐKXĐ: $\sin 4x \neq 0$,

ta có: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x} \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Cả hai nghiệm đều không thoả điều kiện bài toán. Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

c) $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x \Leftrightarrow \sin \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin 7x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

d) $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \cos 3x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 2 \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \cos \left(5x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 3.8. Giải các phương trình sau:

a) $4 \sin x - 3 \cos x = 5$

b) $3 \cos x + 2\sqrt{3} \sin x = \frac{9}{2}$

c) $3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3$

d) $2 \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{13} \sin 14x$

HD & Giải

a) $x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ với α thoả mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}; \cos \alpha = \frac{4}{5}$

b) $x = \alpha \pm \beta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ trong đó $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$ và $\cos \beta = \frac{9}{2\sqrt{21}}$

c) $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ trong đó $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$

d) $x = \frac{\alpha}{12} + \frac{k\pi}{6}, x = \frac{\pi - \alpha}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$ trong đó $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Bài 3.9. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x$

b) $\cos x \sin 5x = \cos 2x \cos 4x$

c) $\cos 5x \sin 4x = \cos 3x \sin 2x$

d) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$

HD & Giải

a) $\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x)$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x \sin 5x = \cos 2x \cos 4x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos x = 2 \sin 3x \cos 3x$

$\Leftrightarrow \sin 3x(\cos x - \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x = \cos 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.10. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$

b) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$

c) $\cos x \cos 3x - \sin 2x \sin 6x - \sin 4x \sin 6x = 0$

d) $\sin 4x \sin 5 + \sin 4x \sin 3x - \sin 2x \sin x = 0$

HD & Giải

a) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) \Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 16x + \sin 2x) \Leftrightarrow \sin 8x = \sin 16x$

Vậy, nghiệm phương trình đã cho là $x = \frac{k\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x \cos 3x - \sin 2x \sin 6x - \sin 4x \sin 6x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x - \cos 4x + \cos 8x - \cos 2x + \cos 10x) = 0$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin 4x \sin 5 + \sin 4x \sin 3x - \sin 2x \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x \sin 5 + \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \sin 5x + \sin 5x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x(\sin 4x + \sin 2x) = 0$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{k\pi}{5}$ và $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.11. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$

b) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

d) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$

e) $8\cos^4 x = 1 + \cos 4x$

f) $3\cos^2 2x - 3\sin^2 x + \cos^2 x = 0$

HD\&Giải

a) Ta có $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$. Do đó phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x + 2\cos 4x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(1 + 2\cos 2x) = 0$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ và $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Dùng công thức hạ bậc, rút gọn ta được:

$$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x \Leftrightarrow 2\cos 7x \cos x = 2\cos 11x \cos x$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

d) Phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}$ và $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) Sử dụng công thức $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ và $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$ để biến đổi đưa về phương trình bậc hai đối $\cos 2x$. Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) Phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \pm \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong đó $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$

Bài 3.12. Giải các phương trình sau:

a) $1 + \sin x - \cos x - \sin 2x + 2\cos 2x = 0$

b) $\cos x \tan 3x = \sin 5x$

c) $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 8\sin x$

HD\&Giải

a) Ta có: $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2; 2\cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = -2(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$

$$1 + \sin x - \cos x - \sin 2x + 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 - \sin x - 3\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ 3\cos x + \sin x = 1 \end{cases}$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Trong đó $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

b) Điều kiện $\cos 3x \neq 0$

$$\cos x \tan 3x = \sin 5x \Leftrightarrow \cos x \sin 3x = \cos 3x \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) \Leftrightarrow \sin 8x = \sin 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình đã cho: $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

c) Điều kiện $\sin x \neq 0$

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow (\sin x - \sin^2 x) + \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 - \sin x) + \frac{1 - \sin x}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin^3 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình đã cho: $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Điều kiện $\sin 2x \neq 0$

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 8 \sin x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 8 \sin^2 x \cos x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 8 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 4 \cos x - 4 \cos 2x \cos x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x = -2(\cos x + \cos 3x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện } \sin 2x \neq 0)$$

Dạng 4. Phương trình bậc nhất bậc hai đối với sin và cos

- Nắm phương pháp giải
- Kiểm tra điều kiện của phương trình.

Bài 3.13. Giải các phương trình sau:

a) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$

b) $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1$

c) $2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 4$

d) $3 \sin^2 x + 4 \sin 2x + (8\sqrt{3} - 9) \cos^2 x = 0$

HD & Giải

a) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$. Khi $\cos x = 0$ thì $\sin x = \pm 1$, vế trái bằng 4, còn vế phải bằng 0. Nên $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho

$$\cos^2 x, \text{ ta được: } 4 \tan^2 x - 5 \tan x - 6 = 0 \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan 2 + k\pi \\ x = \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x (-\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Phương trình vô nghiệm

d) Phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{8}{3} + \sqrt{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Bài 3.14. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin^2 x + \sin 2x - 2 \cos^2 x = \frac{1}{2}$ b) $2 \sin^2 x + (3 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x = -1$
 c) $3 \sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 4 \cos^2 2x = 2$ d) $3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$

HD & Giải

- a) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-5) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 b) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 c) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{1}{2} \arctan(-2) + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{1}{2} \arctan 3 + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
 d) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 3.13. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{3} \cot 2x + 3 = 0$	2. $\tan\left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) + \sqrt{3} = 0$	3. $2 \sin 3x + \sqrt{2} \sin 6x = 0$
4. $2 \sin(3x - 120^\circ) + \sqrt{3} = 0$	5. $\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$	6. $\sqrt{3} \tan(3x - 45^\circ) + 1 = 0$

Bài 3.14. Giải các phương trình sau

1. $2 \cos^2 x - 3 \cos x = -1$	2. $4 \sin^2 4x + 3 \sin 4x - 1 = 0$	3. $6 \sin^2 2x - (8 + 3\sqrt{3}) \sin 2x + 4\sqrt{3} = 0$
4. $2 \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0$	5. $2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$	6. $2 \cos^2 4x - 7 \cos 4x - 4 = 0$
7. $2 \sin^2 4x + 9 \sin 4x - 5 = 0$	8. $\tan^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 4 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$	9. $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + 1 = 0$
10. $4 \cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} = 0$	11. $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$	12. $3 \cos^2 2x - 7 \cos 2x + 4 = 0$

Bài 3.15. Giải các phương trình sau

1. $\cos 2x + \sqrt{2} \sin x - 1 = 0$	2. $\cos x = \sqrt{2} \sin 7x - \sin x$	3. $\sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 2 \cos 3x$
4. $2 \sin(x + 10^\circ) - \sqrt{12} \cos(x + 10^\circ) = 3$	5. $\sqrt{3} \cos 8x - 2 \sin 4x \cos 4x = -\sin^2 x - \cos^2 x$	6. $3 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$
7. $4 \cos^3 x + 3\sqrt{2} \sin 2x = 8 \cos x$	8. $3\sqrt{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3\sqrt{2}$	9. $\sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x = -\sqrt{2}$
10. $\sqrt{3} \cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2}$	11. $3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sqrt{6}$	12. $\sqrt{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -2$
13. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$	14. $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$	15. $\sqrt{3} \sin 4x - \cos 4x = -\sqrt{3}$

Bài 3.16. Giải các phương trình sau

1. $\frac{\sin x + \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x - 4 \sin^3 x}{2 \sin x - 1} = 0$	2. $\frac{(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x}{1 + 2 \sin x \cos x} = 1$	3. $\cos 3x + 2 \cos 2x = \cos x + 2$
--	--	---------------------------------------

4. $\frac{(2\cos x - 1)\sin 4x}{\cos x - \sin x} = 2\sin 2x$	5. $\frac{1}{2}\sin 4x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$	6. $\frac{\cos x(\cos x + \sin x) - 1}{\cos x - \cos^2 x} = 0$
7. $2\sin 2x + 2\cos x = 0$	8. $\frac{\sin 2x + 4\sin^2 x + 2\sin x(1 - \cos x)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$	9. $5\sin 8x - 2\sin x \cdot \sin 3x - 2\sin^2 x + 1 = 0$
10. $\frac{\cos 3x + 2\sin 2x \cos x - 8\sin 2x - \cos x + \sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{3x}{2}} = 1$	11. $\frac{\cos^2 2x + 6\sin^2 x - \cos^2 x - \frac{9}{2}}{\cos 3x + 1} = 0$	12. $4\sin 6x - 8\sin 5x \cdot \cos x - 2\cos^2 x + 1 = 0$
13. $\cos^2 3x + \cos^2 5x = \sin^2 4x + \sin^2 6x$	14. $\frac{(\cos x - \sin x)(1 + \sin 2x) - \cos x - \sin x}{\tan x + 1} = 0$	15. $\frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin 2x) + \cos x + \sin x}{\cot x + 1} = 0$

GV. Lư Sĩ Pháp

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. Hàm số lượng giác: Cần nắm các dạng toán cơ bản

1. Tập xác định của hàm số lượng giác
2. Tập giá trị: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số
3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số
4. Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số
5. Chu kỳ tuần hoàn

II. Phương trình lượng giác

1. Phương trình lượng giác cơ bản

- Nắm được cách giải từng phương trình cụ thể

Với $u = u(x), v = v(x)$ và u, v làm cho biểu thức có nghĩa, $k \in \mathbb{Z}$

$$1/ \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} \quad 2/ \cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}$$

$$3/ \tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad 4/ \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

2. Một số phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản

a/ Phương trình bậc nhất, bậc hai đối với một hàm số lượng giác:

Phương trình có dạng: $at + b = 0; at^2 + bt + c = 0$, $t = \{\sin u, \cos u, \tan u, \cot u\}$.

Lưu ý: Khi đặt $t = \{\sin u, \cos u\}$ điều kiện là $|t| \leq 1$. Phương trình bậc 2 cùng một góc u .

b/ Phương trình bậc nhất đối với $\sin u, \cos u$

Phương trình có dạng: $a \sin u + b \cos u = c$ hay $a \sin u + b \cos u = c \sin v$ (hay $= c \cos v$)

Lưu ý: - Kiểm tra phương trình cùng một góc u

- Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

c/ Phương trình không mẫu mực

Lưu ý: - Nắm vững các công thức lượng giác

- Biến đổi đưa về các dạng phương trình đã biết cách giải

- Phương trình tích: $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3} - 2 \sin 2x = 0$

b) $2 \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{3} = 0$

c) $2 \tan \left(\frac{2x}{3} - 20^\circ \right) + \sqrt{3} = 0$

d) $4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 1$

e) $2 \sin x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$

f) $\tan 2x \cdot \sin x + \sqrt{3} (\sin x - \sqrt{3} \tan 2x) - 3\sqrt{3} = 0$

g) $(2 \sin x + 1)^2 - (2 \sin x + 1) \left(\sin x - \frac{3}{2} \right) = 0$

h) $8 \cos^3 x - 1 = 0$

HD & Giải

a) $\sqrt{3} - 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

b) $2 \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k6\pi \\ x = -\frac{5\pi}{4} + k6\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

c) Điều kiện: $x \neq 135^\circ + k270^\circ$

$$2 \tan\left(\frac{2x}{3} - 20^\circ\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{2x}{3} - 20^\circ\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \tan(-30^\circ) \Leftrightarrow x = -15^\circ + k270^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) 4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$e) 2 \sin x - \sqrt{2} \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$f) \text{ Điều kiện } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$\tan 2x \cdot \sin x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3} \tan 2x) - 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 3)(\tan 2x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$g) (2 \sin x + 1)^2 - (2 \sin x + 1)\left(\sin x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x + 1 = 0 \\ \sin x + \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$h) 8 \cos^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - 1 = 0 \\ \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau

$$a) \cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$$

$$b) \sin 3x \cdot \cos 7x = \sin 13x \cdot \cos 17x$$

$$c) \cos 2x \cdot \cos 5x = \cos 7x$$

$$d) \sin 4x \cdot \sin 3x = \cos x$$

$$e) \sin 3x \sin 5x = \sin 11x \cdot \sin 13x$$

$$f) \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

HD & Giải

Dùng công thức biến đổi tích thành tổng và tìm ra nghiệm của phương trình.

$$a) \cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 12x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{8} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \sin 3x \cdot \cos 7x = \sin 13x \cdot \cos 17x \Leftrightarrow \sin 10x = \sin 30x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{10} \\ x = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{20} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \cos 2x \cdot \cos 5x = \cos 7x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos 7x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \sin 4x \cdot \sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \cos(\pi - 7x) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \sin 3x \sin 5x &= \sin 11x \cdot \sin 13x \Leftrightarrow \cos 8x = \cos 24x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{k\pi}{16} \end{cases} \\ \text{f) } \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x &= \frac{1}{4} \sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x \cdot \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

- a) $1 + 2 \cos x + \cos 2x = 0$ b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$
 c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$
 e) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$ f) $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$

HD & Giải

$$\text{a) } 1 + 2 \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x (\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{b) } \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos 3x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \cdot \cos \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos \frac{5x}{2} = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{c) } \text{Phương trình có nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{d) } \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x (2 \cos x + 1) (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\text{Vậy, nghiệm của phương trình } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$$

$$\text{Vậy, nghiệm của phương trình } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } 1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(\sin x - \sin 2x) = 0$$

$$\text{Vậy, nghiệm của phương trình } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, x = k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$ b) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \sin^3 4x$
 c) $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$ d) $2 \cos^3 x + \sin x \cos x + 1 = 2(\sin x + \cos x)$
 e) $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$ f) $(2 \sin x + 1)(3 \cos 4x + 2 \sin x - 4) + 4 \cos^2 x = 3$

HD & Giải

$$\text{a) } \sin^3 x + \cos^3 x = \cos x \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos x (\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x - \sin^2 x \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta cần chú ý: $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \Rightarrow \sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3\sin \alpha - \sin 3\alpha)$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \Rightarrow \cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha - 3\cos \alpha)$$

Từ đó $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \sin^3 4x \Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin 4x = \sin^3 4x$

$$\Leftrightarrow 3\sin 4x - 4\sin^3 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 12x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{12}$$

c) $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

d) $2\cos^3 x + \sin x \cos x + 1 = 2(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow 2\cos^3 x - 2\cos x + \sin x \cos x + 1 - 2\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos^2 x - 1) + \sin x \cos x + 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow -2\cos x \sin^2 x + \sin x \cos x + 1 - 2\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x(1 - 2\sin x) + 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sin x)(\sin x \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin x = 0 \\ \sin x \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \text{ (vì } \sin x \cos x + 1 = 0 \text{ vô nghiệm)}$$

e) $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin 2x + 2\right)(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (Vì $\frac{1}{2}\sin 2x + 2 = 0$ vô nghiệm)

f) $(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 1 - 4\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)[3\cos 4x + 2\sin x - 4 + 1 - 2\sin x] = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$

b) $\tan^2 x(1 - \sin^3 x) + \cos^3 x - 1 = 0$

c) $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$

d) $6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x \cos x}{2\cos 2x}$

e) $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$

f) $2\tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$

HD & Giải

a) Với điều kiện $\sin x \neq 0$, ta có $2 \sin x + \cot x = 2 \sin 2x + 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \cos x = 4 \sin^2 x \cos x + \sin x$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

Giải (2): $\sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x = 0$, đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow -2 \sin x \cos x = t^2 - 1$ với $|t| \leq \sqrt{2}$

$$\sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa điều kiện } |t| \leq \sqrt{2} \text{)}$$

Suy ra: $\sin x - \cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Với điều kiện $\cos x \neq 0$, ta có

$$\tan^2 x (1 - \sin^3 x) + \cos^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x (1 - \sin^3 x) + \cos^2 x (\cos^3 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 - \sin^3 x) - (1 - \sin^2 x)(1 - \cos^3 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos x) \left[(1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2 x) - (1 + \sin x)(1 + \cos x + \cos^2 x) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos x) \left[(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) + \sin x \cos x (\sin x - \cos x) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos x)(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin x = 0 & (1) \\ 1 - \cos x = 0 & (2) \\ \sin x - \cos x = 0 & (3) \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 & (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) không thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$

Giải phương trình (4), ta đặt $t = \sin x + \cos x$ với $|t| \leq \sqrt{2}$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = k2\pi, x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + m2\pi; k, m \in \mathbb{Z}$ với $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$

c) Với điều kiện $\sin 2x \neq 0$, ta có $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x = 1 - \cos 2x$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x - \cos 2x - \sin 2x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x - \sin 2x \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (\cos 2x - \sin 2x - 1) = 0$$

Vậy, nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{4} + l\pi; k, l \in \mathbb{Z}$ (Chú ý loại nghiệm không thỏa điều kiện)

d) Với điều kiện $\cos 2x \neq 0$, ta có $6 \sin x - 2 \cos^3 x = \frac{5 \sin 4x \cos x}{2 \cos 2x} \Leftrightarrow 6 \sin x - 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cos x$

$$\Leftrightarrow 6 \sin x - 2 \cos^3 x = 10 \sin x \cos^2 x \Leftrightarrow 3 \sin x - \cos^3 x - 5 \sin x \cos^2 x = 0$$

Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được một phương trình đối với $\tan x$. Nhưng các nghiệm của phương trình này đều không thỏa điều kiện $\cos 2x \neq 0$.

Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm

e) Các nghiệm của phương trình $x = \pi + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ (viết $\tan^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$)

f) Với điều kiện $\cos x \neq 0$, đặt $t = \frac{1}{\cos x}$, ta có $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Vậy, nghiệm của phương trình

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$

b) $\frac{1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}}{\cos x} = 8 \sin x$

c) $\tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$

d) $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x$

e) $2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

f) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

HD & Giải

a) $3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x \Leftrightarrow (3 \sin 3x - 4 \sin^3 3x) - \sqrt{3} \cos 9x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 9x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện $\sin 2x \neq 0$, ta có $\frac{1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}}{\cos x} = 8 \sin x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 8 \sin^2 x \cos x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 8 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = 4 \cos x - 4 \cos 2x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x = -2(\cos x + \cos 3x) \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

c) Điều kiện $\sin 2x \neq 0$,

$$\tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \Leftrightarrow \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 4 \sin x \cos x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3} \cos x)(\sin x - \sqrt{3} \cos x - 2 \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 & (1) \\ \sin x - \sqrt{3} \cos x - 2 \sin 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) và (2), các nghiệm của phương trình đã cho $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$

d) $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin 2x + (\sqrt{2} - 1) \cos 2x = 3 - 2\sqrt{2}$

Phương trình này vô nghiệm vì $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 < (3 - 2\sqrt{2})^2$

e) Điều kiện $\sin 2x \neq 0$, ta có $2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) \sin x \cos x = \sin x + \cos x$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \sin x \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 2 \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

f) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x \Leftrightarrow \sin x(1 - \sin^2 x) - \cos x - \cos^3 x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x \cos x - 1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & (1) \\ \sin x \cos x - 1 - \cos^2 x = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) và (2), phương trình (2) vô nghiệm. Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 7. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2006 - 2007)

a) $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

b) $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

c) $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$

d) $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$

e) $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

f) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

HD & Giải

a) Phương trình đã cho tương đương với: $1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho tương đương với $\sin 7x - \sin x + 2 \sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x (2 \sin 3x - 1) = 0$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Điều kiện: $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*) phương trình đã cho tương đương với:

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x\right) - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Do điều kiện (*) nên nghiệm của phương trình: $x = \frac{5\pi}{4} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$

e) Điều kiện: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0$ (*) phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

So với (*), nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) Phương trình đã cho tương đương với

$$-2 \sin 2x \sin x - 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sin 2x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x (2 \cos x + 1) = 0$$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 8. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2008)

$$a) \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$$

$$b) \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$$

$$c) 2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$$

$$d) \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$$

HD & Giải

a) Điều kiện $\sin x \neq 0$ và $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left(\frac{1}{\sin x \cos x} + 2\sqrt{2} \right) = 0$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$ và $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{3} \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Phương trình đã cho tương đương với:

$$4 \sin x \cos^2 x + \sin 2x = 1 + 2 \cos x \Leftrightarrow (2 \cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0$$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Phương trình đã cho tương đương với: $\frac{1}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 9. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2009)

$$a) \frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$$

$$b) \sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$$

$$c) (1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$$

$$d) \sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$$

HD & Giải

a) Điều kiện $\sin x \neq 1, \sin x \neq -\frac{1}{2}$ (*)

$$\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (1 - 2 \sin x) \cos x = \sqrt{3}(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

So với (*), nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$(1 - 2\sin^2 x)\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Phương trình tương đương với $(\sin x + 1)(2 \sin 2x - 1) = 0$

$$\text{Vậy, nghiệm của phương trình: } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3} \cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \sin 5x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 10. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2010)

$$\text{a) } \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

$$\text{b) } (\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\text{c) } \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{d) } 4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$$

HD & Giải

a) Điều kiện $\cos x \neq 0$ và $1 + \tan x \neq 0$

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) (1 + \sin x + \cos 2x) = (1 + \tan x) \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) (1 + \sin x + \cos 2x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} \cos x \Leftrightarrow \sin x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \text{ (loại) hoặc } \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } (\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos^2 x - \sin x + \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \sin x + (\cos x + 2) \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ (vì } \sin x + \cos x + 2 = 0 \text{ vô nghiệm)}$$

$$\text{c) } \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) + 3 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 \\ \cos x + \sin x + 2 = 0 \end{cases}$$

♦ Phương trình: $\sin x + \cos x + 2 = 0$ vô nghiệm

$$\text{♦ Phương trình: } 2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) 4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 4x + 8 \sin 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^2 2x - 8 \sin 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{3}{2} \text{ (vô nghiệm) hoặc } \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Bài 11. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2011)

$$a) \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$$

$$b) \sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

$$c) \frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$$

$$d) \cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$$

HD & Giải

a) Điều kiện $\sin x \neq 0$ (*). Phương trình đã cho tương đương với:

$$(1 + \sin 2x + \cos 2x) \sin^2 x = 2\sqrt{2} \sin^2 x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x (\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & (1) \\ \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn (*))

Giải (2): $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn (*))

Vậy, phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$b) \sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x (1 + \cos 2x) + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (\sin x - 1) + \cos x (\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(\cos 2x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 1 = 0 & (1) \\ \cos 2x + \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Giải (2): $\cos 2x = -\cos x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy, phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Điều kiện $\cos x \neq 0, \tan x \neq \sqrt{3}$ (*).

$$\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

So với (*). Vậy, nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$d) \cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 1 + 6(1 - \cos 2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - 3 \cos 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 2 \text{ (vô nghiệm) hoặc } \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, nghiệm của phương trình: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 12. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2012)

$$a) \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$$

$$b) 2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$$

$$c) \sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$d) 2 \cos 2x + \sin x = \sin 3x$$

HD & Giải

$$a) \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3} \sin x + \cos x - 1) \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$b) 2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ và $x = k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

$$c) \sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x \Leftrightarrow (2 \sin x + 2 \cos x - \sqrt{2}) \cos 2x = 0$$

$$\checkmark \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\checkmark 2 \sin x + 2 \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$ và $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$d) 2 \cos 2x + \sin x = \sin 3x \Leftrightarrow 2 \cos 2x + \sin x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x - 2 \cos 2x \cdot \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 2x (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Bài 13. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2013)

$$a) 1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b) \sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$$

$$c) \sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$$

$$d) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$$

HD&Giải

a) Điều kiện $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x - 1 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\blacksquare 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

So với điều kiện, vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$b) \sin 5x + 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin 5x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \frac{\pi}{2} = 2x + k2\pi \\ 5x + \frac{\pi}{2} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$.

$$c) \sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2\sin x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\blacksquare 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$d) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\sin x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{k2\pi}{3}$ và $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 14. Giải các phương trình sau: (Đại học – cao đẳng năm 2014)

a) $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$

b) $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$

HD&Giải

$$a) \sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x \Leftrightarrow \sin x + 4\cos x = 2 + 2\sin x \cos x \Leftrightarrow (\sin x - 2)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\blacksquare \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 2 : \text{Phương trình vô nghiệm}$$

$$\blacksquare 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$b) \sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - 2\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x - 2 = 0 = (\sin x - \sqrt{2})(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$$

- $\sin x - \sqrt{2} = 0$: Phương trình vô nghiệm
- $2 \cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 15. Giải các phương trình sau: (THPTQG 2015, 2016)

- a) Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$
- b) Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 3 \cos 2\alpha)(2 + 3 \cos 2\alpha)$, biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$
- c) Giải phương trình: $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$

HD & Giải

a) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

Khi đó suy ra: $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$. Vậy: $A = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{-\frac{3}{4}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{12}{25}$

b) Ta có: $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Vậy: $P = (1 - 3 \cos 2\alpha)(2 + 3 \cos 2\alpha) = \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{9}\right) \left(2 + 3 \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{14}{9}$

c) $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -4 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

♦ Với $\sin x = -4 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

♦ Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Giải các phương trình

Bài	Giải phương trình	Bài	Giải phương trình
1	$\cos 3x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$	2	$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sin x + \sqrt{3} \cos x$
3	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$	4	$1 + \sin 2x = 2 \cos^2 x$
5	$2(2 - \cos x) \cos x = \sqrt{3} \sin 2x$	6	$\sin 3x \cdot \cos 3x = \sin 2x$
7	$1 - \sin 3x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$	8	$\sin 3x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
9	$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x - \sin x = 0$	10	$2 \sin x - \sin 2x = 2 \sin 2x \cdot \cos x$
11	$\sin 2x + \cos(\pi - x) = 0$	12	$\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x$

13	$\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3x = 0$	14	$2\cos 4x \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = \sin 5x$
15	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \sin 2x = 0$	16	$\sin 7x \cos 3x - \cos 2x = \cos 7x \sin 3x$
17	$\sin x + 2\sin^2 2x = \sin 7x + 1$	18	$2\cos 4x \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = \sin 5x$
19	$\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$	20	$\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$
21	$\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$	22	$\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$
23	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$	24	$1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
25	$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$	26	$2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$
27	$\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$	28	$2\cos 2x + \sin x = \sin 3x$
29	$\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$	30	$(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$
31	$4\cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8\sin x - 1)\cos x = 5$	32	$\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$
33	$\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$	34	$\sqrt{3} \cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$
35	$(1 + 2\sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$	36	$\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2\sin 2x$
37	$2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$	38	$\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$
39	$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$	40	$2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$
41	$\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$	42	$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$
43	$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$	44	$3\sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$
45	$2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x$	46	$\frac{1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}}{\cos x} = 8\sin x$
47	$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$	48	$\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$
49	$2\sin x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$	50	$1 + 2\cos x + \cos 2x = 0$
51	$\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$	52	$2\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin x = \cos 8x$
53	$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$	54	$\cos x + \sin x = 1 + \sin 2x + \cos 2x$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y = \cos^4 x + 4\cos^2 x + 5$ có giá trị lớn nhất bằng 10.

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: Tìm hàm số lẻ trong các hàm số dưới đây.

A. $f(x) = \sin 3x \cdot \sin 4x$.

B. $f(x) = \frac{|\sin x|}{3 + \cot^2 x}$.

C. $f(x) = \frac{\tan^4 x}{2 + \cos 2x}$.

D. $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - 2x)$.

Câu 4: Giải phương trình $\sqrt{3}\cos 5x - 2\cos 3x + \sin 5x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5: Giải phương trình $\tan x = \sqrt{3}$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 7: Cho phương trình: $3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \cdot \sin 2x$. Gọi α là nghiệm lớn nhất thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình. Giá trị của $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 0.

D. 1.

Câu 8: Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.

A. $T = \frac{\pi}{3}$.

B. $T = \frac{1}{3}$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \pi$.

Câu 9: Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$.

A. $T = 12\pi$.

B. $T = 8\pi$.

C. $T = 4\pi$.

D. $T = 6\pi$.

Câu 10: Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \cos^2 x - \sin x$. Tìm M .

A. $M = \frac{3}{4}$.

B. $M = \frac{1}{4}$.

C. $M = \frac{5}{4}$.

D. $M = \frac{4}{5}$.

Câu 11: Giải phương trình $\sin 3x = \sin x$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12: Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ hoặc $x = -\frac{\pi}{7} + \frac{k2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$ hoặc $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{3\sin x - 7}{2\cos x - 5}}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 14: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ thuộc đoạn $[0; \pi]$.

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 15: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.

D. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Câu 16: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $S = \left\{ \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 17: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y = \sqrt{3 + \cos^2 x}$ có giá trị lớn nhất bằng 2.

A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thỏa mãn $\pi \leq x \leq 3\pi$ là :

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Câu 19: Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ có số nghiệm thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$.

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Câu 20: Gọi m và M là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x + 2\sin x + 6$. Tính $S = m + M$.

A. $S = 14$.

B. $S = -3$.

C. $S = 9$.

D. $S = 5$.

Câu 21: Giải phương trình $2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$.

A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 22: Giải phương trình $2 \tan\left(\frac{2x}{3} - 20^\circ\right) + \sqrt{3} = 0$.

A. $x = -35^\circ + k270^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -15^\circ + k270^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -45^\circ + k270^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = 15^\circ + k270^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 23: Tìm tập xác định D của hàm số $y = 6 \tan 3x - 4 \cot 3x$.

A. $D = (0; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 24: Giải phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.

A. $x = \frac{k\pi}{3}$ hoặc $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{k\pi}{3}$ hoặc $x = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25: Ký hiệu m là giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$. Tìm m .

A. $m = -\sqrt{3}$.

B. $m = 1$.

C. $m = -2$.

D. $m = -\sqrt{2}$.

Câu 26: Phương trình $3 \sin x + m \cos x = 5$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < -4$.

B. $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$.

C. $m > 4$.

D. $-4 < m < 4$.

Câu 27: Cho các hàm số $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$, $g(x) = \frac{x^3 - \sin x}{\cos 2x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số lẻ.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số chẵn.

D. $f(x)$ là hàm số chẵn và $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 28: Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \cos x + \cos 3x$.

A. $T = 2\pi$.

B. $T = \frac{2\pi}{3}$.

C. $T = 4\pi$.

D. $T = \pi$.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{2 + \tan 2x}{\sin 2x}$. Tìm điều kiện xác định của hàm số đã cho.

A. $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$.

B. $\sin 2x \neq 0$.

C. $\sin 4x \neq 0$.

D. $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Câu 30: Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right)$.

A. $T = 8\pi$

B. $T = 6\pi$

C. $T = 2\pi$

D. $T = 4\pi$

Câu 31: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

A. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 1 + \sqrt{2}, m = 1 - \sqrt{2}$.

D. $M = 1 - \sqrt{2}, m = -1 - \sqrt{2}$.

Câu 32: Giải phương trình $\sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$.

A. $x = \pm \frac{4\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{4\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 33: Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

B. Hàm số đã cho vừa chẵn, vừa lẻ.

C. Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

D. Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 34: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\tan x + \cot x}{1 - \sin 2x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left[\left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \right\}; k \in \mathbb{Z} \right]$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left[\left\{ \frac{k\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}; k \in \mathbb{Z} \right]$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 35: Giải phương trình $8 \cos 2x \sin 2x \cos 4x = \sqrt{2}$.

A. $x = -\frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{3\pi}{32} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{3\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{32} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{32} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{3\pi}{32} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 36: Giải phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 37: Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 2x$.

A. $x = \frac{\pi}{3} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{6} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 38: Giải phương trình $\sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos 3x$.

A. $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 39: Cho phương trình $\cos 5x = 3m - 5$. Gọi đoạn $[a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Giá trị $3a + b$ bằng

- A. 6. B. -2. C. $\frac{19}{3}$. D. 5.

Câu 40: Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. Tìm M .

- A. $M = 2$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 0$.

Câu 41: Giải phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 42: Giải phương trình $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$.

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 43: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin 2x - \cos 3x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}; -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + k2\pi; -\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k2\pi}{5}; -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 44: Giải phương trình $2\cos 2x + \sin x = \sin 3x$.

- A. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 45: Cho hai hàm số $f(x) = \sin^3 x - \tan x$ và $g(x) = \frac{\cos x + \cot^2 x}{\sin x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn. B. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ. D. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 46: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y = \cos^4 x + 4\cos^2 x + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng 5.

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 47: Giải phương trình $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 48: Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$.

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 49: Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$.

A. $x = -\frac{3\pi}{4}$.

B. $x = -\frac{\pi}{3}$.

C. $x = -\frac{5\pi}{6}$.

D. $x = -\frac{\pi}{4}$.

Câu 50: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin x = \cos x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$.

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 51: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2}{\cos x - \cos 3x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 52: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.

A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $S = \left\{ \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 53: Gọi m và M là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3}{5 - \sin^2 x}$. Tính $P = m.M$.

A. $P = 20$.

B. $P = \frac{9}{20}$.

C. $P = \frac{3}{4}$.

D. $P = 4$.

Câu 54: Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \sin 3x \cdot \cos 4x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = 3\pi$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = 4\pi$.

Câu 55: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$.

A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $S = \left\{ \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 56: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$.

A. $\min_{\mathbb{R}} y = 1$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = -1$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 1$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = -5$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 1$.

D. $\min_{\mathbb{R}} y = -5$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 2$.

Câu 57: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{2 + \cos x}{1 + \sin x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $D = (0; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 58: Giải phương trình $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$.

A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 59: Giải phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$.

A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 60: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{7\pi}{4}; 3\pi\right)$.

D. $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

Câu 61: Phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

B. $m < -1$.

C. $-1 \leq m \leq 1$.

D. $m > 1$.

Câu 62: Biết phương trình $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$ có nghiệm $x = \frac{k\pi}{4}; x = \alpha + k2\pi; x = \beta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tính $S = \alpha + \beta$.

A. $S = \frac{2\pi}{3}$.

B. $S = \pi$.

C. $S = -1$.

D. $S = 0$.

Câu 63: Giải phương trình $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 64: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3+4\cot 2x}{\cos 2x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 65: Kí hiệu m là giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Tìm m .

A. $m = -\sqrt{2}$.

B. $m = 3\sqrt{2}$.

C. $m = -2$.

D. $m = -4$.

Câu 66: Giải phương trình $\sin 3x = \cos x$.

A. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 67: Giải phương trình $\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\sin x - \cos \frac{\pi}{4}} = 0$.

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 68: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

A. $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 69: Cho hai hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \cot x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $g(x)$ là hàm số lẻ và là $f(x)$ hàm số chẵn. B. $f(x) - g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn. D. $f(x).g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 70: Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Câu 71: Cặp hàm số nào sau đây có cùng tập xác định ?

A. $y = \cos x$ và $y = \cot x$.

B. $y = \tan x$ và $y = \sin x$.

C. $y = \tan x$ và $y = \cot x$.

D. $y = \tan x$ và $y = \frac{2 + \sin x}{\cos x}$.

Câu 72: Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Phương trình $2 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 73: Cho hàm số $f(x) = \tan x + \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ xác định khi và chỉ khi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $f(x)$ là hàm số lẻ.

C. $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

D. $f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 74: Tìm số nghiệm của phương trình $2 \cos(3x + 15^\circ) = \sqrt{3}$ thuộc khoảng $(90^\circ; 360^\circ)$.

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 5.

Câu 75: Giải phương trình $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin 3x$.

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = \frac{4\pi}{15} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{4\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{6} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi$ hoặc $x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 76: Giải phương trình $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 77: Giải phương trình $8 \cos^3 x - 1 = 0$.

A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 78: Giải phương trình $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 79: Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số $y = 2\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số $y = \cos x + x \sin x$ có đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

C. Hàm số $y = 2\sin x + \tan x$ là hàm số lẻ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số $y = \frac{\cos x}{4 + \cos 2x}$ có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Câu 80: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 + \sin x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = [-1; 1]$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 81: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sin \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

B. $D = [-1; 1]$.

C. $D = [-1; 1)$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 82: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3\sin x - 5}{\cos x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 83: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \cot |x|$.

B. $y = |\tan x|$.

C. $y = \tan 2x$.

D. $y = \cot^2 x$.

Câu 84: Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$.

A. $x = k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 85: Giải phương trình $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi, x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 86: Hàm số nào sau đây là hàm số không chẵn, không lẻ ?

A. $y = \sin x + 2$.

B. $y = 2\cos x + 1$.

C. $y = 2\cos x - 2x^2$.

D. $y = 2\sin x + x$.

Câu 87: Phương trình $m \cos x = m - 1$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 0$.

B. $m \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $m < 0$.

D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 88: Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 89: Giải phương trình $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{4\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 90: Cho hai hàm số $f(x) = \tan 4x$ và $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

D. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 91: Giải phương trình $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 92: Cho hai hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \cos 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

B. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

C. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 93: Giải phương trình $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 94: Phương trình $5 \cos x - m \sin x = m + 1$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \leq 24$.

B. $m \leq 12$.

C. $m \geq 24$.

D. $m \leq -13$.

Câu 95: Nếu xét trên khoảng $(0; 2\pi)$. Trên những khoảng nào thì hàm $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cùng đồng biến ?

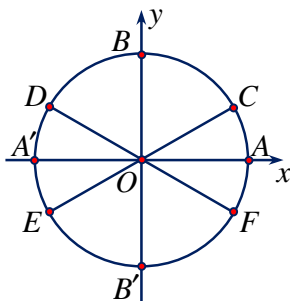
A. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

B. $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

C. $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$.

D. $(\pi; 2\pi)$.

Câu 96: Nghiệm của phương trình $2 \sin x + 1 = 0$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?



A. Điểm E, điểm D.

B. Điểm D, điểm C.

C. Điểm C, điểm F.

D. Điểm E, điểm F.

Câu 97: Kí hiệu m là giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sin^4 x - \cos^4 x$. Tìm m .

- A. $m = -2$. B. $m = -1$. C. $m = -3$. D. $m = 4$.

Câu 98: Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \sin(ax + b)$.

- A. $T = \frac{\pi}{|a|}$. B. $T = 2\pi$. C. $T = \frac{2\pi}{|a|}$. D. $T = \frac{2\pi}{a}$.

Câu 99: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - 3$ có giá trị nhỏ nhất bằng -5 .

- A. $x = -\frac{13\pi}{5} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{5} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{13\pi}{5} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{13\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 100: Với giá trị nào của hằng số A và của hằng số α thì hàm số $y = A\sin(x + \alpha)$ là 1 hàm số lẻ.

- A. $A \neq 0, \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $A > 0, \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $A \neq 0, \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $A \neq 0, \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 101: Kí hiệu m là giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$. Tìm m .

- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $m = 0$.

Câu 102: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$.

- A. $x = \frac{\pi}{4}$. B. $x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 103: Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $4\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2m - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 104: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 105: Cho phương trình: $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ (*). Bằng cách đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$) thì phương trình (*) trở thành phương trình nào sau đây?

- A. $-2t^2 + t = 0$. B. $t^2 + t - 2 = 0$. C. $-2t^2 + t - 2 = 0$. D. $-t^2 + t = 0$.

Câu 106: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3\tan x - 2}{1 + \sin x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 107: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$.

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

Câu 108: Tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 109: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số $y = \sin x$ và $y = \tan x$ là các hàm số lẻ.B. Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ có cùng chu kỳ là π .C. Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ có cùng tập xác định.D. Hàm số $y = \cos x$ và $y = \cot x$ là các hàm số chẵn.

Câu 110: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(7\pi; \frac{15\pi}{2}\right)$.B. $\left(-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right)$.C. $\left(\frac{19\pi}{2}; 10\pi\right)$.D. $(-6\pi; -5\pi)$.

Câu 111: Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(-\frac{11\pi}{2}; -5\pi\right)$.B. $\left(\frac{19\pi}{2}; 10\pi\right)$.C. $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.D. $\left(\frac{11\pi}{2}; 7\pi\right)$.

Câu 112: Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 113: Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $T = \frac{\pi}{5}$.B. $T = 5\pi$.C. $T = \frac{2\pi}{5}$.D. $T = 10\pi$.

Câu 114: Nếu xét trên khoảng $(0; 2\pi)$. Trên những khoảng nào thì hàm $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cùng nghịch biến ?

A. $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$.B. $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.C. $(\pi; 2\pi)$.D. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Câu 115: Giải phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$.

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.B. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 116: Số nghiệm nằm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ của phương trình $\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x$ là

A. 9.

B. 7.

C. 5.

D. 3.

Câu 117: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.B. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.C. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.

D. Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 118: Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \cos^2 \frac{x}{2}$.

A. $T = 8\pi$.

B. $T = 4\pi$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{2}$.

Câu 119: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sin 3x}{\cot x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 120: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\tan x}{1 - \cos 2x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 121: Chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \sin 3x \cdot \cos 3x$.

A. $T = 6\pi$.

B. $T = 3\pi$.

C. $T = \frac{\pi}{3}$.

D. $T = 2\pi$.

Câu 122: Xét trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số nào dưới đây đồng biến ?

A. $y = 3 - 2\sin x$.

B. $y = \sin x + 3$.

C. $y = 2 - \sin^2 x$.

D. $y = \tan x + 2$.

Câu 123: Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$. Tính $P = M \cdot m$.

A. $P = -1$.

B. $P = 2$.

C. $P = -2$.

D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 124: Giải phương trình $4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$.

A. $x = \frac{5\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 125: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\tan x + \cot x}{1 - \sin 2x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left[\left\{\frac{k\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}; k \in \mathbb{Z}\right]$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 126: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin x} + \cot x$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 127: Số nghiệm của phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 128: Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$. Tìm $S = M + m$.

A. $S = -4$.

B. $S = -5$.

C. $S = 1$.

D. $S = 6$.

Câu 129: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 130: Giải phương trình $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + 1 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 131: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Câu 132: Số nghiệm của phương trình $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ thuộc khoảng $(0; 2018\pi)$ là

A. 4035.

B. 2018.

C. 4036.

D. 4034.

Câu 133: Giải phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 134: Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \sin^4 x - \cos^4 x$. Tìm M .

A. $M = \sqrt{2}.$

B. $M = 2.$

C. $M = -1.$

D. $M = 1.$

Câu 135: Số nghiệm của phương trình $\tan x = -\sqrt{3}$ thuộc khoảng $(-2017\pi; 2017\pi)$ là

A. 4034.

B. 2017.

C. 4033.

D. 4035.

Câu 136: Phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \leq 0.$

B. $-2 \leq m \leq 0.$

C. $m \geq 1.$

D. $0 \leq m \leq 1.$

Câu 137: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$.

A. $\min_{\mathbb{R}} y = 2$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 3.$

B. $\min_{\mathbb{R}} y = 1$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 3.$

C. $\min_{\mathbb{R}} y = -3$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 1.$

D. $\min_{\mathbb{R}} y = -1$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 3.$

Câu 138: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. B. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn. D. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 139: Cho phương trình $\sin^2 x = m^2 - 4$. Gọi $[a; b] \cup [c; d]$ ($a < b < c < d$) là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Giá trị $a^2 + b + c + d^2$ bằng

- A. 12. B. 10. C. 8. D. 14.

Câu 140: Gọi $(a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $m \sin 2x - 4 \cos 2x = -6$ vô nghiệm. Giá trị $a.b$ bằng

- A. $\sqrt{52}$. B. -20. C. $\sqrt{20}$. D. 52.

Câu 141: Gọi $[a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $m \sin 4x - 2 \cos 4x = 2m - 1$ có nghiệm. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

- A. $\frac{34}{9}$. B. $\frac{43}{18}$. C. $\frac{22}{9}$. D. $\frac{14}{9}$.

Câu 142: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2 - \cos x}{1 + \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left[\left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \right\}; k \in \mathbb{Z} \right]$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 143: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $2(m+1 - \sin^2 x) - (4m+1) \cos x = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- A. $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 144: Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2m - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. 6. B. 8. C. 9. D. 7.

Câu 145: Hàm số nào dưới đây có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $y = \sin x + \frac{1}{x}$. B. $y = \cot x + 2x$. C. $y = \tan x + \cot x$. D. $y = \sqrt{\frac{2 \cos x - 5}{3 \sin x - 4}}$.

Câu 146: Kí hiệu M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tìm M .

- A. $M = 2\sqrt{2}$. B. $M = 1$. C. $M = -\sqrt{2}$. D. $M = \sqrt{2}$.

Câu 147: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

- A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 148: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. B. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. C. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. D. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 149: Giá trị nhỏ nhất của hàm số của hàm số $y = 1 + 2 \sin x \cos x - \cos^2 2x$ là:

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $-\frac{5}{4}$. C. -1 . D. 0 .

Câu 150: Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì giá trị của $P = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)$ là

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 151: Giải phương trình $\cos(3x - 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- A. $x = 35^\circ + k180^\circ$ hoặc $x = 5^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = 35^\circ + k360^\circ$ hoặc $x = 5^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = 35^\circ + k120^\circ$ hoặc $x = 5^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = 35^\circ + k60^\circ$ hoặc $x = 5^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 152: Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$.

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 153: Giải phương trình $\tan\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

- A. $x = 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = 180^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = 45^\circ + k45^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = 60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 154: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$.

- A. $\min y = 1$ và $\max y = 3$. B. $\min y = -1$ và $\max y = 3$.
C. $\min y = -3$ và $\max y = 1$. D. $\min y = -3$ và $\max y = 3$.

Câu 155: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $4\sin x + (m-4)\cos x - 2m + 5 = 0$ có nghiệm là

- A. 10 . B. 5 . C. 6 . D. 3 .

Câu 156: Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $220^\circ \in X$. B. $200^\circ \in X$. C. $240^\circ \in X$. D. $290^\circ \in X$.

Câu 157: Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$.

- A. $x = \pm \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 158: Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -2$.

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 159: Tìm tất cả giá trị của x để hàm số $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 3$ có giá trị lớn nhất bằng 5.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 160: Cho hai hàm số $f(x) = x - \sin x$ và $g(x) = 1 + \cos x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 161: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 - 2 \sin x$.

A. $\min_{\mathbb{R}} y = -5$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 1$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = -1$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = -5$ và $\max_{\mathbb{R}} y = -1$.

D. $\min_{\mathbb{R}} y = 1$ và $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

Câu 162: Trong bốn hàm số: (1) $y = \cos 2x$, (2) $y = \sin x$; (3) $y = \tan 2x$; (4) $y = \cot 4x$ có mấy hàm số tuần hoàn với chu kỳ π ?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 163: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right)$?

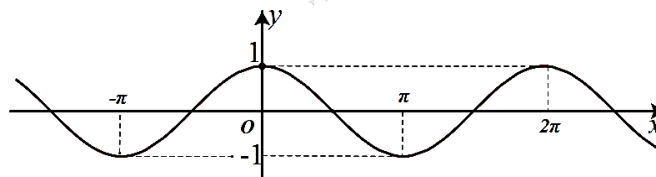
A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 164: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số nào dưới đây?



A. $y = \cos x$.

B. $y = 1 - \sin x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = 1 + \cos x$.

Câu 165: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{2 \cos x - 5}{3 \sin x - 4}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

Câu 166: Trên khoảng $(\pi; 8\pi)$. Phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

ĐÁP ÁN

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	1 0 1	1 0 2	1 0 3	1 0 4	1 0 5	1 0 6	1 0 7	1 0 8	1 0 9	1 1 0	112	113	114	115	116	117	118	119	120
A																			
B																			
C																			
D																			

	1 2 1	1 2 2	1 2 3	1 2 4	1 2 5	1 2 6	1 2 7	1 2 8	1 2 9	1 3 0	132	133	134	135	136	137	138	139	140
A																			
B																			
C																			
D																			

	1 4 1	1 4 2	1 4 3	1 4 4	1 4 5	1 4 6	1 4 7	1 4 8	1 4 9	1 5 0	1 5 1	152	153	154	155	156	157	158	159	160
A																				
B																				
C																				
D																				

	161	162	163	164	165	166
A						
B						
C						
D						

GV. Lư Sĩ Pháp