

Contents

✧ DẠNG 1: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định số nghiệm của phương trình $f(t(x)) = k$ 4

✧ DẠNG 2: Cho bảng biến thiên $f'(x)$ tìm tham số m để bất phương trình $g(x, m) \geq 0$ có nghiệm thuộc D 6

✧ DẠNG 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f(x)$ xác định tham số m để $g(x, m) \geq 0$ 13

✧ DẠNG 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ xác định tham số m để $g(x, m) \geq 0$ 36

✧ DẠNG 5: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định tham số để phương trình có nghiệm 41

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky 48

✧ DẠNG 6: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xác định số nghiệm của hàm số $g(x) = f(x) + g(x)$ 51

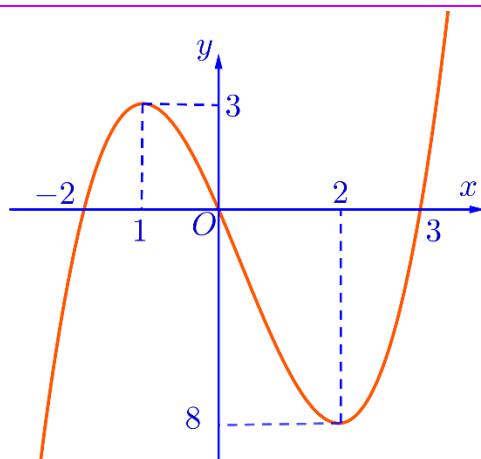
✧ DẠNG 7 : Biện luận tham số m của bất phương trình hoặc phương trình bằng cách đưa về hàm số đặc trưng 53

★ **DẠNG 1:** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = k$

Ví dụ 1.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f[f(x)]$ xác định số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$

- A. 8. B. 7.
C. 6. D. 5.



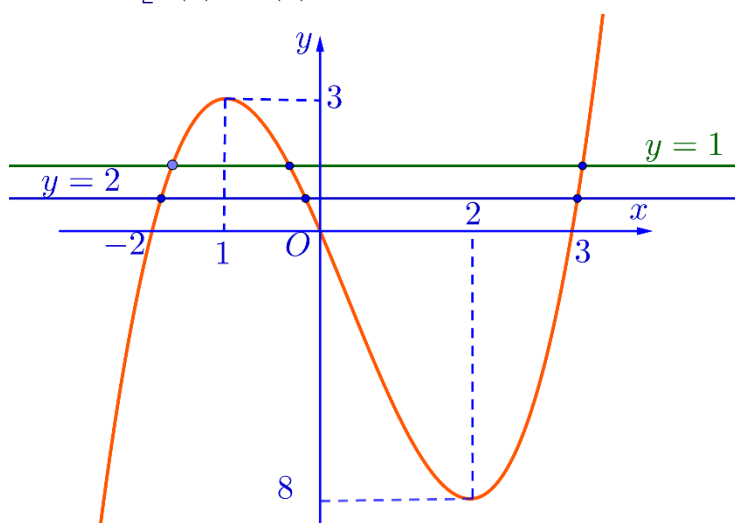
★ **Lời giải**

☛ **Chọn đáp án A**

Ta có

$$g'(x) = [f(f(x))]' = f'(x)f'[f(x)]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ f(x) = 1 \text{ (1)} \\ f(x) = 2 \text{ (2)} \end{cases}$$



Phương trình (1) có 3 nghiệm vì đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

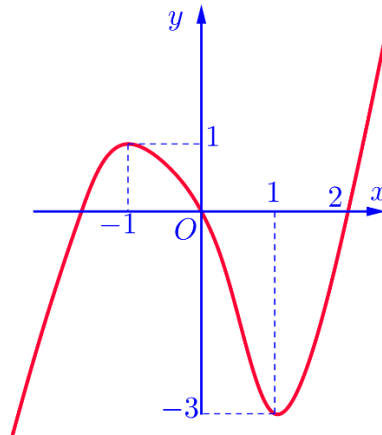
Phương trình (2) có 3 nghiệm vì đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm.

Ví dụ 2.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là

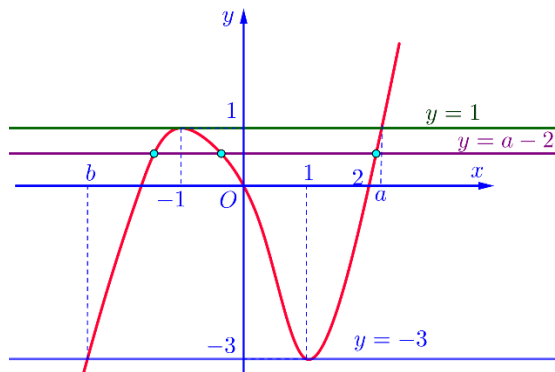
- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.



★ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Ta có



Theo đồ thị

$$f(2 + f(e^x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + f(e^x) = -1 \\ 2 + f(e^x) = a, (2 < a < 3) \end{cases}$$

$$2 + f(e^x) = -1 \Leftrightarrow f(e^x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = b < -1 (\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

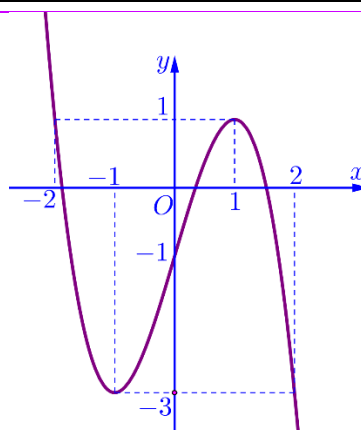
$$2 + f(e^x) = a \Leftrightarrow f(e^x) = a - 2, (0 < a - 2 < 1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = c < -1 (\text{loại}) \\ e^x = d < 0 (\text{loại}) \\ e^x = t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Ví dụ 3.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f(x)$ như hình bên. Phương trình $f(2 - f(x)) = 0$ có bao tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.

- A. 4. B. 5.
C. 6. D. 7.



Thi Thử THPT Quốc Gia Trường Yên Lạc Vĩnh Phúc Lần 4

✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Theo đồ thị

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a & (-2 < a < -1) \\ x = b & (0 < b < 1) \\ x = c & (1 < c < 2) \end{cases} \Rightarrow f(2 - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - f(x) = a \\ 2 - f(x) = b \\ 2 - f(x) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 - a & (1) \\ f(x) = 2 - b & (2) \\ f(x) = 2 - c & (3) \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình (1); (2); (3) là giao điểm của đường thẳng $y = 2 - a$; $y = 2 - b$; $y = 2 - c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.

- $a \in (-2; -1) \Rightarrow 2 - a \in (3; 4)$ suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm phân biệt.
- $b \in (0; 1) \Rightarrow 2 - b \in (1; 2)$ suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm phân biệt.
- $c \in (1; 2) \Rightarrow 2 - c \in (0; 1)$ suy ra nên phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Có tất cả 5 nghiệm phân biệt.

✪ DẠNG 2: Cho bảng biến thiên $f'(x)$ tìm tham số m để bất phương trình $g(x, m) \geq 0$ có nghiệm thuộc D .

Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới

x	-1	1	3
$f'(x)$	1	3	2

Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

★ Lời giải

☞ Chọn đáp án A

Ta có $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Đặt $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x = f'(x) - (-x^2 + 2x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 2x$.

Theo bảng biến thiên $f'(x) > 1 \forall x \in (0; 3)$ và $-x^2 + 2x = 1 - (x - 1)^2 \leq 1, \forall x \in (0; 3)$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in (0; 3)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0	3
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$g(0)$	$g(3)$

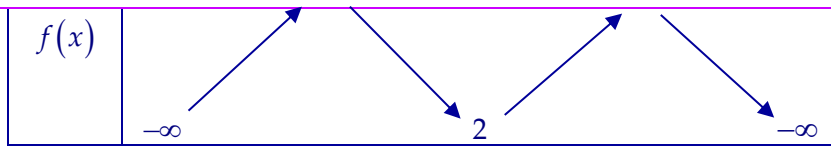
Bất phương trình $m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$

$\Leftrightarrow m \leq g(0) \Leftrightarrow m \leq f(0)$.

Ví dụ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
		4		3	



Bất phương trình $(x^2 + 1)f(x) \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 2)$ khi và chỉ khi

A. $m < 10$.

B. $m \leq 15$.

C. $m < 27$.

D. $m < 15$.

Đề thi Duyên Hải Bắc Bộ năm 2019

✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq \max_{[-1; 2]} g(x)$

Với $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$.

Ta có: $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$.

$$\text{Với } x \in (-1; 0) \text{ thì } \begin{cases} x < 0 \\ 2 < f(x) < 4 \\ f'(x) < 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (-1; 0).$$

Tại $x = 0, g'(0) = 0$.

$$\text{Với } x \in (0; 2) \text{ thì } \begin{cases} x > 0 \\ 2 < f(x) < 3 \\ f'(x) > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0; 2).$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ trên khoảng $(-1; 2)$ như sau

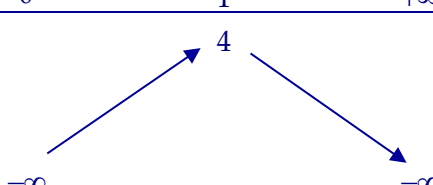
x	-1	0	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	8	3	15

Suy ra $\max_{[-1; 2]} g(x) = 15$.

Kết luận: $m \leq 15$.

Ví dụ 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$			

Tìm m để bất phương trình $m + 2\sin x \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$.

A. $m \geq f(0)$.

B. $m \leq f(1) - 2\sin 1$.

C. $m \leq f(0)$.

D. $m \geq f(1) - 2\sin 1$.

✪ Lời giải

☛ Chọn đáp án C

BPT $m + 2\sin x \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq f(x) - 2\sin x$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq \min g(x); g(x) = f(x) - 2\sin x$

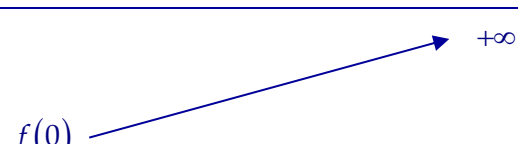
Ta có $g'(x) = f'(x) - 2\cos x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2\cos x$.

Mà $f'(x) \geq 2, \forall x \in (0; +\infty)$ và $2\cos x \leq 2, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ 2\cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Với $g(0) = f(0) - 2\sin 0 = f(0)$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

Bất phương trình $m \leq f(0)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$

Ví dụ 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(-2) = m + 1$, $f(1) = m - 2$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên

x	0	0	2	$+\infty$
$f'(x)$				

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} \leq m$ có nghiệm trên $x \in [-2; 1]$ là

- A. $\left(-5; -\frac{7}{2}\right)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-2; 7)$. D. $\left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

🔴 **Lời giải**

🔴 **Chọn đáp án D**

Yêu cầu bài toán $g(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} \leq m, \forall x \in [-2; 1] \Leftrightarrow \min_{[-2; 1]} g(x) \leq m$

Ta có $g'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{5}{(x+3)^2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; 1)$

và $-\frac{5}{(x+3)^2} < 0, \forall x \in (-2; 1)$. Do đó $g'(x) < 0, \forall x \in (-2; 1)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ trên khoảng $[-2; 1]$.

x	-2	1
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$g(-2)$	$g(1)$

$\Rightarrow \min_{[-2; 1]} g(x) = g(1)$

Suy ra $g(1) \leq m \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(1) - \frac{3}{4} \leq m \Leftrightarrow \frac{m-2}{2} - \frac{3}{4} \leq m \Leftrightarrow \frac{2m-7}{4} \leq m \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq m$.

Ví dụ 4.

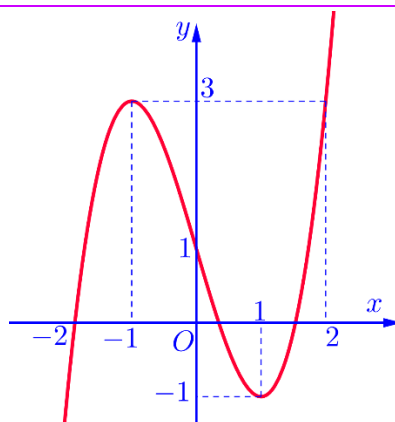
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$f(\sqrt{4-x^2}) = m \text{ có nghiệm thuộc nửa}$$

khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ là

A. $[-1; \sqrt{3}]$. B. $[-1; f(\sqrt{2})]$.

C. $(-1; f(\sqrt{2})]$. D. $(-1; 3]$.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Phan Bội Châu Nghệ An Lần 2 năm 2019

✪ **Lời giải**

☛ **Chọn đáp án D**

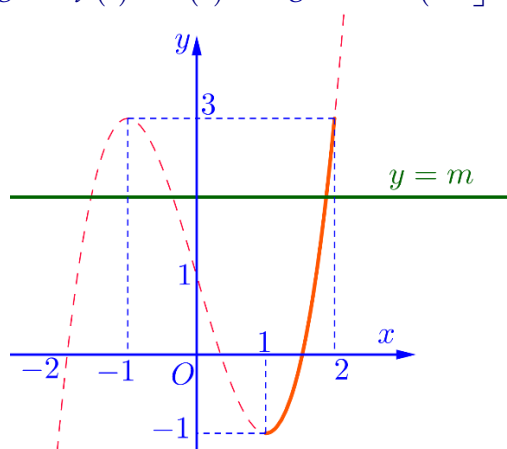
Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$, $t' = \frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $t=0 \Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{3}$
$t'(x)$			
t	$\sqrt{2}$	2	1

Suy ra $t \in (1; 2]$.

Phương trình tương đương với $f(t) = m$ (1) có nghiệm $t \in (1; 2]$



Nghiệm của phương trình (1) là giao của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \in (1; 2]$.

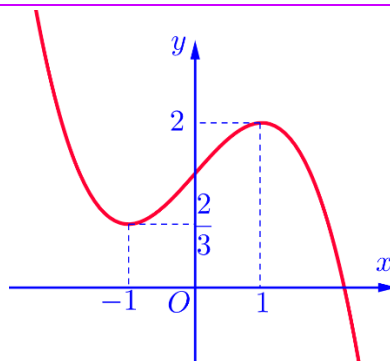
Theo đồ thị ta suy ra $-1 < m \leq 3$. Chọn D.

Ví dụ 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên dương của m để phương trình

$$f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m \text{ có nghiệm là}$$

- A. 0. B. 3.
C. 4. D. Vô số.



8 Trường chuyên đồng bằng Sông Hồng Lần 1 năm 2019

✪ Lời giải

☛ Chọn đáp án B

$$f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m \Leftrightarrow f(x^2 - 4x + 5) = m - 1 \Leftrightarrow f(t) = m - 1$$

$$\text{Với } t = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow t \in [1; +\infty) \xrightarrow{\text{đồ thị}} f(t) \in [2; +\infty)$$

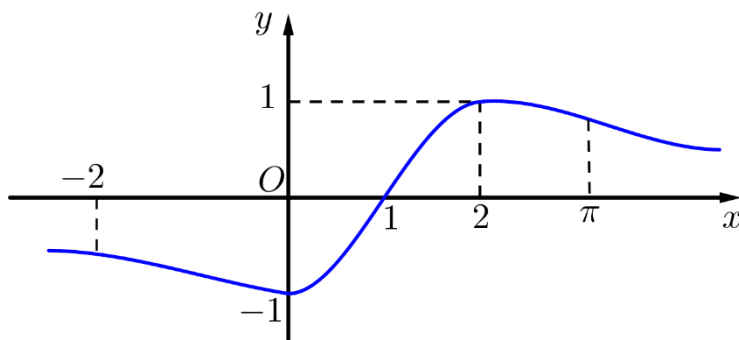
$$\text{Nên để phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow m - 1 \in [2; +\infty) \Rightarrow m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3$$

$$\text{Và } m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}. \text{ Chọn đáp án B.}$$

🔴 DẠNG 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f(x)$ xác định tham số m để $g(x, m) \geq 0$

Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(0)$. B. $m < f(1) - 1$. C. $m < f(-1) + 1$. D. $m < f(2)$.

🔴 Lời giải

🔴 Chọn đáp án B

$$f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m \Leftrightarrow m < f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}$$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ thì

$$m < \min_{[-1; 3]} \left(f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}, g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$$

Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x=1$ gợi ý cho ta xét dấu của hàm $g'(x)$ trên 2 khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$

- Với $x \in (-1; 1)$

$\forall x \in (-1; 1) \Rightarrow f'(x) < 0$ (đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới trục hoành)

$$x \in (-1; 1) \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) < 0, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\text{Vậy } g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) < 0, \forall x \in (-1; 1)$$

- Với $x = 1$

$$g'(1) = f'(1) - \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi \cdot 1}{2} \right) = 0$$

- Với $x \in (1; 3)$

$\forall x \in (1; 3) \Rightarrow f'(x) > 0$ (đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành)

$$x \in (1; 3) \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0, \forall x \in (1; 3)$$

$$\text{Vậy } g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0, \forall x \in (1; 3)$$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$f(-1)+1$	3	$f(3)+1$

$\swarrow$ $\searrow$
 $f(1)-1$

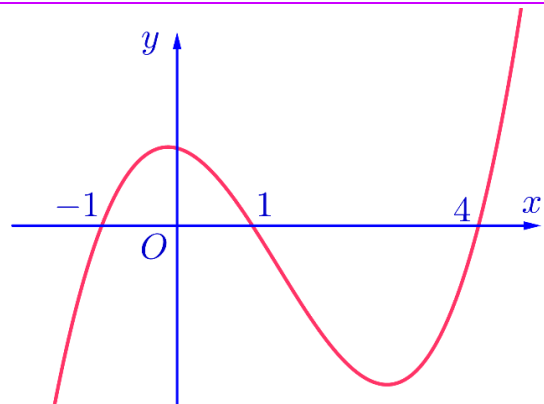
Suy ra $\min_{[-1;3]} g(x) = f(1) - 1$

Vậy $m < f(1) - 1$.

Ví dụ 2.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $\log_5[f(x) + m + 2] + f(x) > 4 - m$ đúng với mọi $x \in (-1; 4)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq 4 - f(-1)$. B. $m \geq 3 - f(1)$.
 C. $m < 4 - f(-1)$. D. $m \geq 3 - f(4)$.



Thi Thử THPT Quốc Gia Chuyên Hạ Long năm tháng 5 năm 2019

❖ Lời giải

☞ Chọn đáp án D

$$\log_5[f(x) + m + 2] + f(x) > 4 - m \quad (1) \Leftrightarrow \log_5[f(x) + m + 2] + [f(x) + m + 2] > \log_5^5 + 5 \quad (2)$$

Xét hàm số đặc trưng cho 2 vế của BPT (2)

$$g(t) = \log_5^t + t \text{ với } t > 0$$

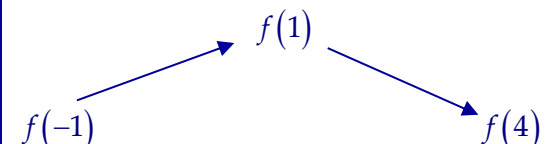
$$g'(t) = \frac{1}{5 \ln t} + 1 > 0 \text{ suy ra } g(t) \text{ đồng biến với } t > 0$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow f(x) + m + 2 > 5 \Leftrightarrow m > 3 - f(x)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max(3 - f(x)) = \max h(x) \quad (2) \quad \forall x \in (-1; 4)$ với $h(x) = 3 - f(x)$ khi đó

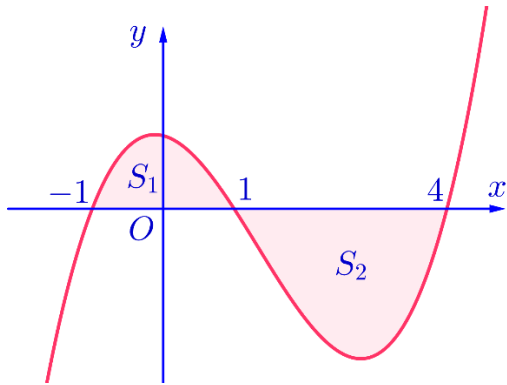
$$h(x)_{\max} \Leftrightarrow f(x)_{\min}$$

Từ đồ thị suy ra bảng biến thiên

x	-1		1		4
$f'(x)$	0	+	0	-	0
					

$$f(x)_{\min} = \begin{cases} f(-1) \\ f(4) \end{cases}$$

So sánh $f(-1)$ và $f(4)$



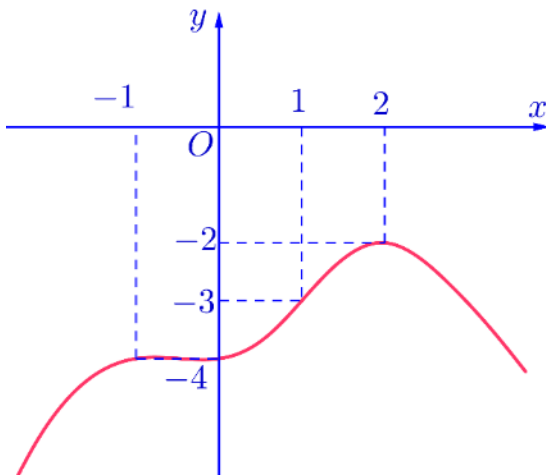
$$S_1 < S_2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f'(x)dx < -\int_1^4 f'(x)dx \Leftrightarrow f(1) - f(-1) < -[f(4) - f(1)] \Leftrightarrow f(-1) > f(4)$$

Suy ra $f(x)_{\min} = f(4)$ và $(2) \Rightarrow m \geq 3 - f(4)$

Ví dụ 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(1) - 1$.
- B. $m > f(1) + 1$.
- C. $m \leq f(1) - 1$.
- D. $m < f(1) - 1$.



Lời giải

Chọn đáp án D

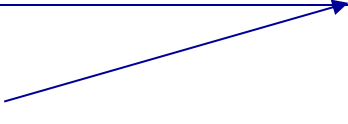
Ta có $f(x) \leq 3^x - 2x + m \Leftrightarrow f(x) - 3^x + 2x \leq m$.

Đặt $g(x) = f(x) - 3^x + 2x$. Khi đó $g'(x) = f'(x) - 3^x \ln 3 + 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3^x \ln 3 - 2.$$

Đặt $h(x) = 3^x \ln 3 - 2$. Khi đó $h'(x) = 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x \in (-\infty; 1]$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1		
$h'(x)$		+	+	- $3\ln 3 - 2$
$h(x)$	-2			

$$\Rightarrow h(x) > -2, \forall x \in (-\infty; 1]. \quad (1)$$

Theo đồ thị $y = f'(x)$, ta thấy $f'(x) \leq -3, \forall x \in (-\infty; 1]$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $f'(x) < h(x), \forall x \in (-\infty; 1]$.

Nên $g'(x) = f'(x) - h(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1]$, suy ra $\min_{(-\infty; 1]} g(x) = g(1) = f(1) - 1$.

Do đó $f(x) \leq 3^x - 2x + m$ có nghiệm trên $(-\infty; 1]$ khi và chỉ khi $m \geq \min_{(-\infty; 1]} g(x) \Leftrightarrow m \geq f(1) - 1$.

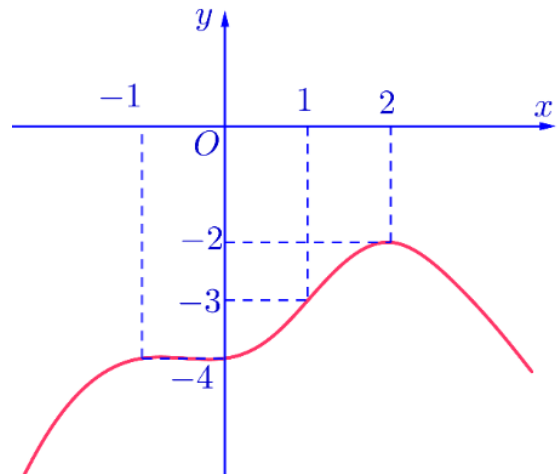
Ví dụ 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị như hình vẽ. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$$

đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 10. B. 4. C. 5. D. 9.



✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án A

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)} \quad (1)$$

Đặt $t = f(x) \in (-\infty; -2]$ (theo đồ thị)

$$\Rightarrow (1): 9 \cdot 6^t + (4 - t^2) \cdot 9^t \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^t$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2) \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \leq -m^2 + 5m \quad (2)$$

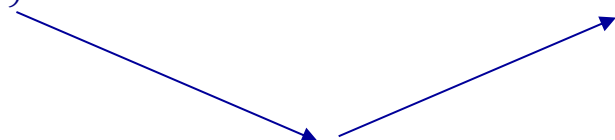
Đặt: $g(t) = 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + (4-t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \left[9 + (4-t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t\right], t \in (-\infty; -2]$.

Xét hàm số: $h(t) = 9 + (4-t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$ với $t \in (-\infty; -2]$

$$h'(t) = -2t \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + (4-t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \ln \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \left[-2t + (4-t^2) \cdot \ln \frac{3}{2}\right].$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\left(\ln \frac{3}{2}\right)^2}}{\ln \frac{3}{2}} > -2 \text{ (loại) hoặc } t = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\left(\ln \frac{3}{2}\right)^2}}{\ln \frac{3}{2}} < -2 \text{ (tm)}$$

Ta có BBT:

x	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\left(\ln \frac{3}{2}\right)^2}}{\ln \frac{3}{2}}$	-2		
$h'(t)$	0	-	0	+	0
$h(t)$	9				9

Từ BBT $\Rightarrow h(t) \leq 9 \forall t \in (-\infty; -2]$ (3).

$\forall t \in (-\infty; -2] \Rightarrow 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^t \leq \frac{4}{9}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $g(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \left[9 + (4-t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t\right] \leq 4 \forall t \in (-\infty; -2]$

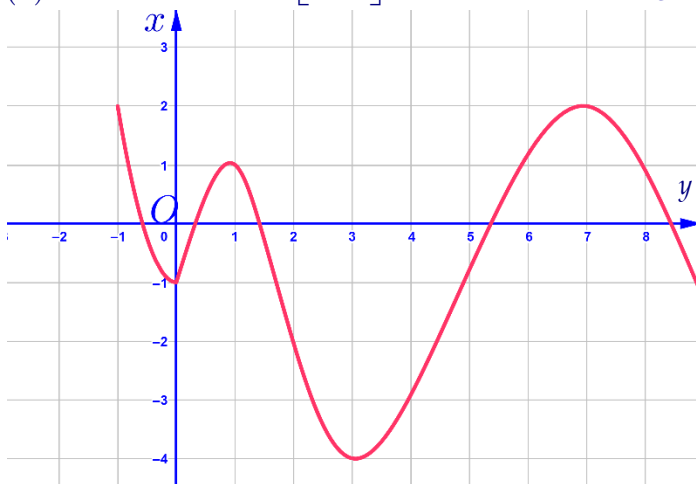
$\Rightarrow \max_{(-\infty; -2]} g(t) = 4$. (Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = -2$).

Bất phương trình (1) đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình (2) đúng với $\forall t \in (-\infty; -2]$
 $\Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq \max_{(-\infty; -2]} g(t) \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên của m là: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Ví dụ 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 9]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$16.3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc đoạn $[-1; 9]$?

A. 32.

B. 31.

C. 5.

D. 6.

Đề thi thử THPT Quốc Gia Yên Khánh Ninh Bình Lần 4 năm 2019

★ Lời giải

☞ Chọn đáp án D

Từ đồ thị ta suy ra $-4 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in [-1; 9]$.

Đặt $t = f(x)$, $t \in [-4; 2]$.

ycbt $\Leftrightarrow$ tìm m sao cho bất phương trình $16.3^t - [t^2 + 2t - 8].4^t \geq (m^2 - 3m).6^t$ (1) đúng với $\forall t \in [-4; 2]$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t \geq m^2 - 3m \text{ với } \forall t \in [-4; 2] \quad (*).$$

Ta có $\frac{16}{2^t} \geq 4$, $\forall t \in [-4; 2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 2$.

Mặt khác $t^2 + 2t - 8 \leq 0$ với $\forall t \in [-4; 2]$.

Do đó $(t^2 + 2t - 8) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t \leq 0$, $\forall t \in [-4; 2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 2 \vee t = -4$.

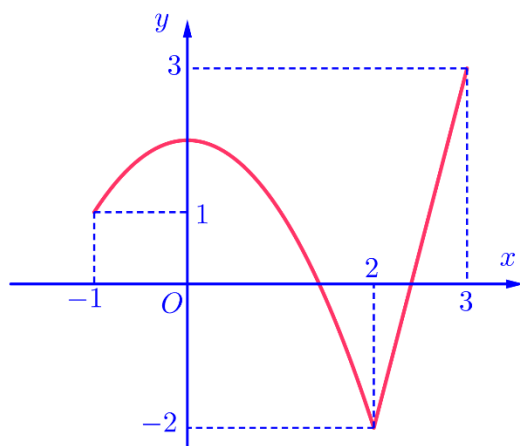
Như vậy $\frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t \geq 4 \quad \forall t \in [-4; 2]$. Mà $\frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t \geq m^2 - 3m$ với $\forall t \in [-4; 2]$.

Suy ra $m^2 - 3m \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4$. Như vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Ví dụ 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq 7$.
- B. $m \geq 7$.
- C. $m \leq 2\sqrt{2} - 2$.
- D. $m \geq 2\sqrt{2} + 2$.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Yên Khánh A Ninh Bình Lần 4 năm 2019

✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án A

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$ liên tục trên $[-1; 3]$ ta có:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{7-x}}, x \in (-1; 3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{7-x} \Leftrightarrow x+1 = 7-x \Leftrightarrow x = 3 \text{ (nhận)}$$

$$g(-1) = 2, g(3) = 4 \Rightarrow \max_{[-1; 3]} g(x) = \max\{g(-1), g(3)\} = g(3) = 4. \quad (1)$$

$$\text{Từ đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ ta có: } \max_{[-1; 3]} f(x) = f(3) = 3. \quad (2)$$

Đặt $h(x) = f(x) + g(x)$ trên $[-1; 3]$, kết hợp với (1) và (2) ta suy ra:

$$h(x) \leq \max_{[-1; 3]} f(x) + \max_{[-1; 3]} g(x) = f(3) + g(3) = 7, \text{ đẳng thức xảy ra khi } x = 3.$$

Vậy bất phương trình $m \leq h(x)$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

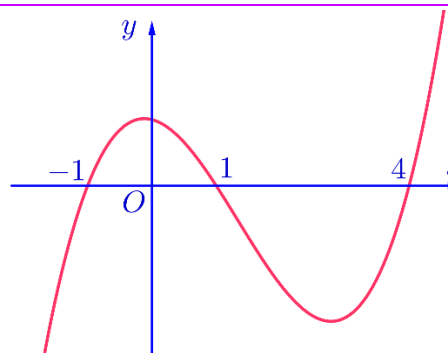
$$m \leq \max_{[-1; 3]} h(x) = 7.$$

Ví dụ 7.

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 4 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$

$$2019f(\sqrt{15x^2 - 30x + 16}) - m\sqrt{15x^2 - 30x + 16} - m = 0$$

- A. 4541.
- B. 4542.
- C. 4543.
- D. 4540.



★ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Theo đề $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4)$

$$\forall x \in [0; 2]: t = \sqrt{15x^2 - 30x + 16} = \sqrt{15(x-1)^2 + 1} \geq 1; t(0) = t(2) = 4 \Rightarrow t \in [1; 4]$$

Với $t > 1$ thì phương trình có 2 nghiệm x thỏa mãn.

Với $t = 1$ có 1 nghiệm x thỏa mãn.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow 2019f(t) = m(t+1) \Leftrightarrow 2019(t+1)(t-1)(t-4) = m(t+1)$$

Xét $t \in (1; 4]$

$$\Rightarrow m = g(t) = 2019(t-1)(t-4) = 2019(t^2 - 5t + 4) = 2019 \left[\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \right] \geq 2019 \left(-\frac{9}{4} \right) = -4542,75$$

x	1	$\frac{5}{2}$	4
$g'(t)$	0	-	0
$g(t)$	0		0

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -4542,75 < m < 0 \Rightarrow m \in \{-45042; -45042; \dots; -1\}$ có 45042 m nguyên thỏa mãn.

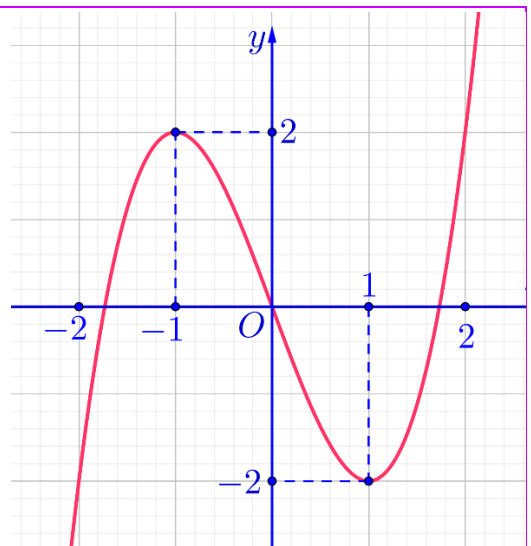
Ví dụ 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình

$$\frac{1}{2}f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) + 1 - m \geq 0 \text{ có nghiệm là}$$

- A. $m \leq 2$.
- B. $1 \leq m \leq 2$.
- C. $m \leq 1$.
- D. $m \leq -5$.



★ Lời giải

☞ Chọn đáp án A

$$\text{Đánh giá: } x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{2|x|}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$$

Từ đồ thị thấy

$$x \in [-1; 1] \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

$$x \in [-2; 2] \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

Xét bất phương trình

$$\frac{1}{2} f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) + 1 \geq m. \text{ Đặt } t = \frac{2x}{x^2+1}; u = f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

$$\text{Vì } t \in [-1; 1] \Rightarrow u \in [-2; 2] \Rightarrow -2 \leq f(u) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} f(u) + 1 \leq 2$$

Vậy để bất phương trình ban đầu có nghiệm thì $m \leq 2$.

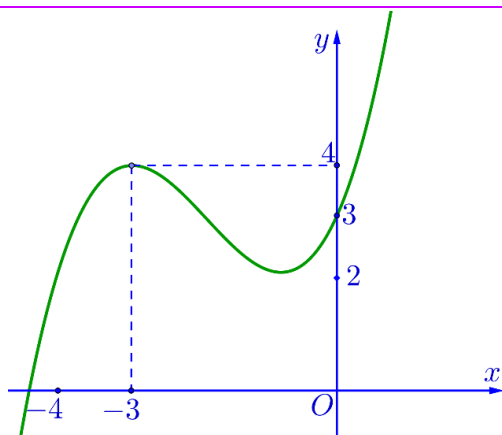
Ví dụ 9.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. S là tập hợp chứa tất cả $m \in \mathbb{Z}$ thuộc $[-10; 10]$ để

$$f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{10}{3} - f(m) \leq 0 \text{ có nghiệm}$$

số phần tử của S là

- A. 9.
- B. 10.
- C. 11.
- D. 12.



Lời giải

Chọn đáp án A

$$f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} - f(m) \leq 0 \Leftrightarrow f(m) \geq f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} = g(x)$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } m \geq \min g(x) = \min f(\sqrt{1-x^2}) + \min\left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}\right) \quad \forall x \in [-1; 1]$$

(vì điều kiện $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$)

- $0 \leq t = \sqrt{1-x^2} \leq 1$ suy ra $f(\sqrt{1-x^2}) = f(t) \quad \forall t \in [0; 1]$ quan sát đồ thị ta thấy $\min_{[0; 1]} f(t) = \min_{[-1; 1]} f(\sqrt{1-x}) = 3$ khi $t=0 \Rightarrow x=1$.

- $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \quad \forall x \in [-1; 1]; h'(x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1); h'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0; x=1$
 $\min h(x) = \min \left\{ h(0) = \frac{8}{3}; h(1) = 0 \right\} = 0$

$$\min_{[-1; 1]} g(x) = \min_{[-1; 1]} g(x) = \min_{[-1; 1]} f(\sqrt{1-x^2}) + \min_{[-1; 1]} h(x) = 3 + 0 = 3$$

Suy ra $f(m) \geq 3$ quan sát đồ thị $\Leftrightarrow m \geq 0$ và $m \in [-10; 10]$ suy ra $m \in \{0; 1; 2; \dots; 10\}$ có $10 - 0 + 1 = 11$ giá trị.

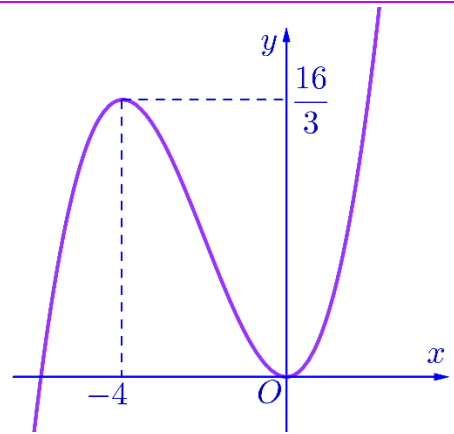
Ví dụ 10.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương

$$\text{trình } f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) \leq f(m^2 + 4m + 4)$$

luôn đúng ?

- A. 3. B. 4.
C. 1. D. vô số.



★ Lời giải

☞ Chọn đáp án D

Đặt $t = \frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -1 - 4t \quad (*)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (4t+1)^2 \Leftrightarrow -\frac{9}{11} \leq t \leq 1$.

Suy ra $0 \leq |t| \leq 1$.

Từ đồ thị $y = f(x)$ ta có

$y = f(x)$ đồng biến trên $\forall x \in [0; +\infty)$

Do $m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \in [0; +\infty)$; $|t| \in [0; +\infty)$

Nên $f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) \leq f(m^2 + 4m + 4) \Leftrightarrow f(|t|) \leq f(m^2 + 4m + 4) \Leftrightarrow |t| \leq m^2 + 4m + 4$ Bất

phương trình luôn đúng $\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq -1 \end{cases}$. Suy ra có vô số giá trị của tham số m .

Ví dụ 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

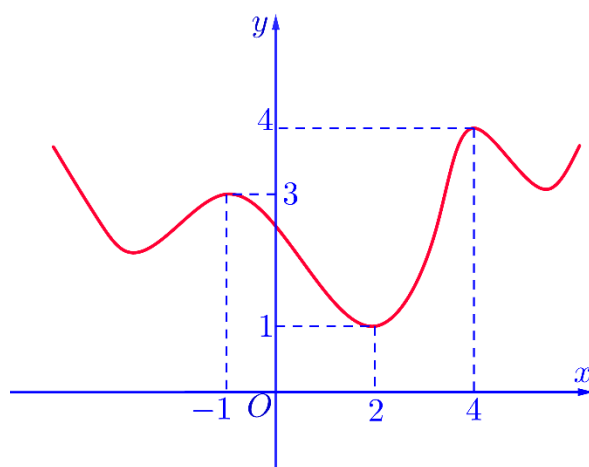
$f^2(x) + 1 - \frac{m}{f(x)} - \sqrt{mf(x)} \leq 0$ luôn đúng trên đoạn $[-1; 4]$?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. vô số.



✶ Lời giải

☛ Chọn đáp án D

Dựa vào đồ thị ta có $\forall x \in [-1; 4] \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow m \geq 0$

Bất phương trình ban đầu tương đương với :

$$\frac{5}{4}f^2(x) + 1 - \left(\frac{m}{f(x)} + 2\sqrt{\frac{m}{f(x)}} \cdot \frac{f(x)}{2} + \frac{f^2(x)}{4} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}f^2(x) + 1 \leq \left(\sqrt{\frac{m}{f(x)}} + \frac{f(x)}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5}{4}f^2(x) + 1} - \frac{f(x)}{2} \leq \sqrt{\frac{m}{f(x)}}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \left(\sqrt{\frac{5}{4}f^2(x) + 1} - \frac{f(x)}{2} \right) \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{m}$$

Đặt $\sqrt{f(x)} = t (1 \leq t \leq 2)$

Bất phương trình trở thành

$$\left(\sqrt{\frac{5}{4}t^4 + 1} - \frac{t^2}{2} \right) t \leq \sqrt{m}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \sqrt{m} \geq h(t)$ với $h(t) = \left(\sqrt{\frac{5}{4}t^4 + 1} - \frac{t^2}{2} \right) t$

$$h'(t) = \frac{\frac{30}{4}t^4 + 2}{2\sqrt{\frac{5}{4}t^4 + 1}} - \frac{3}{2}t^2 > 0, \forall t \in [1; 2]$$

$$\Rightarrow h(t) \leq h(2), \forall t \in [1; 2]$$

Để bất phương luôn đúng trên đoạn $[-1; 4]$ ta phải có

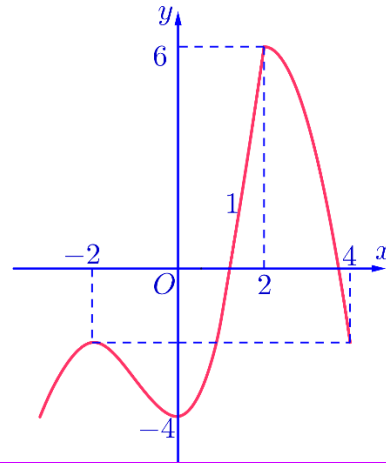
$$\sqrt{m} \geq h(2) \Rightarrow m \geq h^2(2) = (2\sqrt{21} - 4)^2$$

Suy ra có vô số giá trị m thoả mãn.

Ví dụ 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên âm m để bất phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right) \leq m - x$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

- A. 3.
- B. 9.
- C. 8.
- D. 10.



Lời giải

Chọn đáp án D

Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}+1\right) + 6\left(\frac{x}{2}+1\right) \leq 3m + 6$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 3m + 6 \geq \min g(t)$ với $g(t) = f(t) + 6t$ với $t = \frac{x}{2} + 1$ và $t \in [0; 2]$

Xét hàm số $g = f(t) + 6t$ với $t \in [0; 2]$

Quan sát đồ thị $[0; 2]$ hàm số $f(t)$ đồng biến suy ra $f'(t) > 0$

Ta có $g' = f'(t) + 6 > 0, \forall t \in [0; 2]$ suy ra hàm số g đồng biến $\forall t \in [0; 2]$ nên

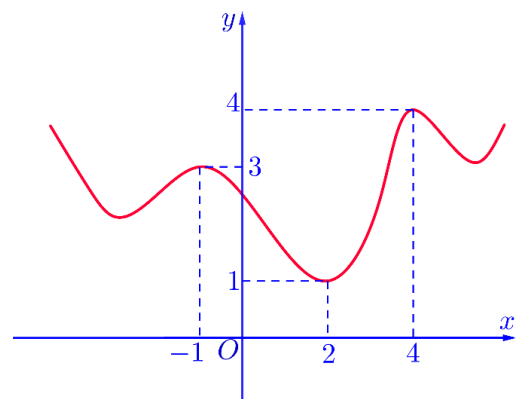
$$g \geq g(0) = f(0) = -4 \Rightarrow \min g(t) = -4 \Rightarrow 3m + 6 \geq -4 \Leftrightarrow m \geq -\frac{10}{3}.$$

Vì m nguyên âm nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Ví dụ 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm lớn hơn -50 của tham số m để bất phương trình $(f^3(x) - 3f(x) + m)^3 - 4f(x) + m \leq 0$ luôn đúng trên đoạn $[-1; 4]$?

- | | |
|-------|-------|
| A. 3. | B. 5. |
| C. 1. | D. 2. |



Lời giải

☛ Chọn đáp án D

$$\text{BPT } (f^3(x) - 3f(x) + m)^3 - 4f(x) + m \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (f^3(x) - 3f(x) + m)^3 + (f^3(x) - 3f(x) + m) \leq [f(x)]^3 + f(x)$$

$$\text{Đặt } f^3(x) - 3f(x) + m = t$$

$$\text{Bất phương trình trở thành } t^3 + t \leq f^3(x) + f(x)$$

Xét hàm số đặc trưng cho hai vế của BPT $g(u) = u^3 + u$ có $g'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số $g(u)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ vậy ta có

$$g(t) \leq g(f(x))$$

$$\Leftrightarrow t \leq f(x)$$

$$\Leftrightarrow f^3(x) - 3f(x) + m \leq f(x)$$

$$\Leftrightarrow m \leq -f^3(x) + 4f(x)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq \min g(x)$ với $g(x) = -[f(x)]^3 + 4f(x)$

$$\text{Đặt } f(x) = v$$

$$\text{Có } \forall x \in [-1; 4] \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow 1 \leq v \leq 4$$

Để BPT luôn đúng trên đoạn $[-1; 4]$ ta phải có

$$m \leq \min_{[1;4]} (-v^3 + 4v) \Rightarrow m \leq -48 \text{ và } m > -50 \Rightarrow m \in \{-49; -48\}.$$

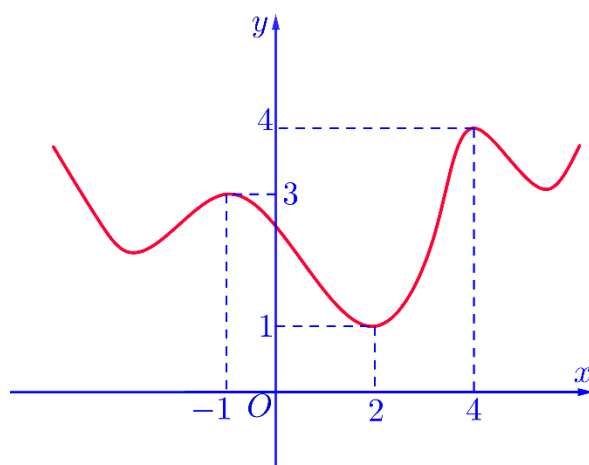
Ví dụ 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồ thị của hàm số $y = f(x)g(x)$ như sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020; 2020]$ của tham số m để bất phương trình

$$m + 1 - \frac{1}{1 + f^2(x)} - \frac{1}{1 + g^2(x)} \leq 0 \text{ luôn}$$

đúng trên đoạn $[-1; 4]$?

- A. 2019. B. 2020.
C. 2021. D. 2022.



☛ Lời giải

☛ Chọn đáp án D

Ta có bất phương trình tương đương với :

$$m+1 \leq \frac{1}{1+f^2(x)} + \frac{1}{1+g^2(x)} = h(x)$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow m+1 \leq \min_{x \in [-1; 4]} h(x)$$

Xét bất đẳng thức sau :

Nếu $\forall ab \geq 1$, Có

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \quad (1)$$

Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+2}{(a^2+1)(b^2+1)} \geq \frac{2}{ab+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab+1)(a^2+b^2+2)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq \frac{2(a^2b^2+a^2+b^2+1)}{(ab+1)(a^2+1)(b^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab-1)(a-b)^2}{(ab+1)(a^2+1)(b^2+1)} \geq 0$$

$$\text{Áp dụng (1)} \quad h(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} + \frac{1}{1+g^2(x)} \geq \frac{2}{1+f(x)g(x)}$$

Dựa vào đồ thị ta có

$$1 \leq f(x)g(x) \leq 4 \Rightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{2}{1+f(x)g(x)} \leq 1 \text{ suy ra } \min_{x \in [-4; 1]} h(x) = \frac{5}{2}$$

Vậy để thỏa mãn điều kiện đề bài ta phải có

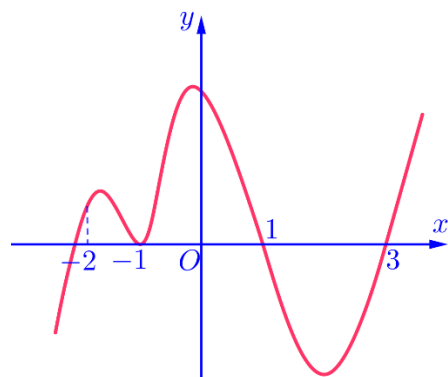
$$m+1 \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow m \leq \frac{-3}{5} \text{ và } m \in [-2020; 2020]; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2020; -2019; \dots; -1\}.$$

Vậy có 2020 giá trị nguyên của m .

Ví dụ 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $(mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m+1)f(x) \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 2]$

- A. 0. B. 1.
C. 3. D. 4.



★ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Đặt $g(x) = mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1$ hàm số luôn xác định với $\forall x \in [-2; 2]$.

Vì $f(x)$ đổi dấu 1 lần từ dương qua âm khi qua $x = 1 \quad \forall x \in [-2; 2]$

Bất phương trình $\Leftrightarrow g(x) \cdot f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2; 2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2; 1] \\ g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [1; 2] \end{cases}.$$

Hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ nên $g(1) = 0 \Rightarrow m + 2m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên chỉ lấy $m = -1$.

Thử lại $m = -1 \Rightarrow g(x) = -x + \sqrt{5-x^2} - 1 \geq 0 \quad \forall x \in [-2; 1]$ và $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [1; 2]$

Nên $m = -1$ thỏa mãn. Chọn B.

★ Lời giải

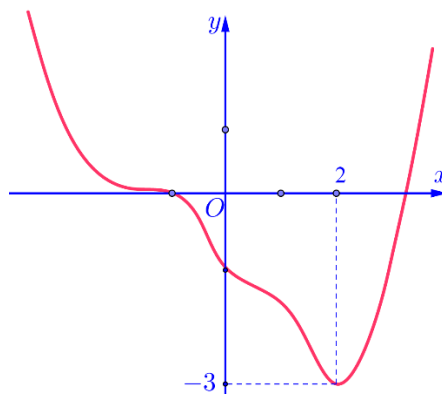
☞ Chọn đáp án B

Ví dụ 16.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(x) + x^2 > 4x + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$.

- A. $m < -3$. B. $m < -10$.
C. $m < -2$. D. $m < 5$.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Sở Giáo Dục Ninh Bình Năm 2019 Lần 1

★ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Bất phương trình $\Leftrightarrow m < 2f(x) + x^2 - 4x = g(x)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < \min_{(-1; 3)} g(x)$

Từ đồ thị $\min_{(-1; 3)} f(x) = -3$ khi $x = 2$ (1)

$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \geq -4 \Rightarrow \min_{(-1; 3)} (x^2 - 4x) = -4$ khi $x = 2$ (2)

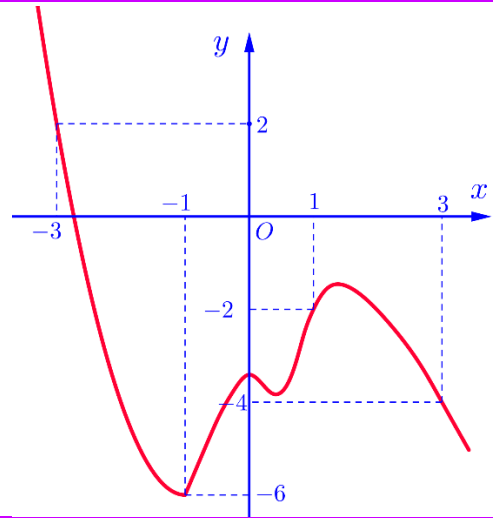
Từ (1) và (2) suy ra $\min_{(-3;1)} g(x) = -2.3 - 4 = -10 \Rightarrow m < -10$

Ví dụ 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) + 2 = -m^2$ có nghiệm

- A. 4. B. 5.
C. 6. D. 7.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Sở Giáo Dục Ninh Bình Năm 2019 Lần 1

Lời giải

Chọn đáp án B

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$

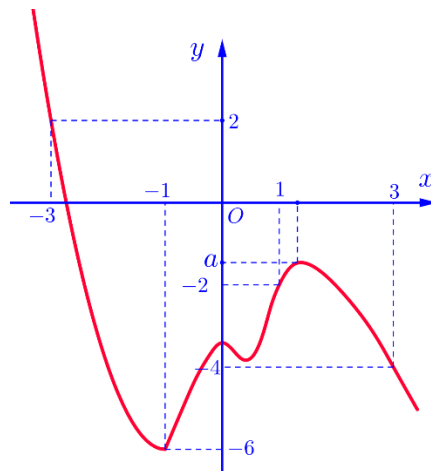
Điều kiện của t $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

$$t' = -4 \cdot \frac{6 - 18x}{2\sqrt{6x - 9x^2}} = \frac{12(3x - 1)}{\sqrt{6x - 9x^2}}; t = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$t(0) = t\left(\frac{2}{3}\right) = 3, t\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow t \in [-1; 3]$$

$$\text{Suy ra } f(t) + 2 = -m^2 \Leftrightarrow f(t) = -m^2 - 2$$

Theo đồ thị



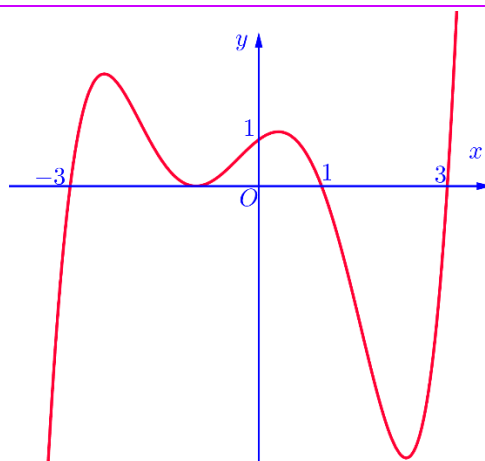
Với $t \in [-1; 3] \Rightarrow f(t) \in [-6; a], a \in (-2; -1) \Rightarrow f(t) \in [-6; -1)$ để phương trình có nghiệm thì

$$-m^2 - 2 \in [-6; -1) \Leftrightarrow -6 \leq -m^2 - 2 < -1 \Leftrightarrow -4 \leq -m^2 \leq -1 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; -1; -2\}.$$

Ví dụ 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $|f(|x-2|)+1|-m=8$ có 8 nghiệm phân biệt trong khoảng $(-5; 5)$

- A. 1. B. 5.
C. 6. D. 7.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Sở Giáo Dục Vĩnh Phúc Lần 1 Năm 2019

✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án A

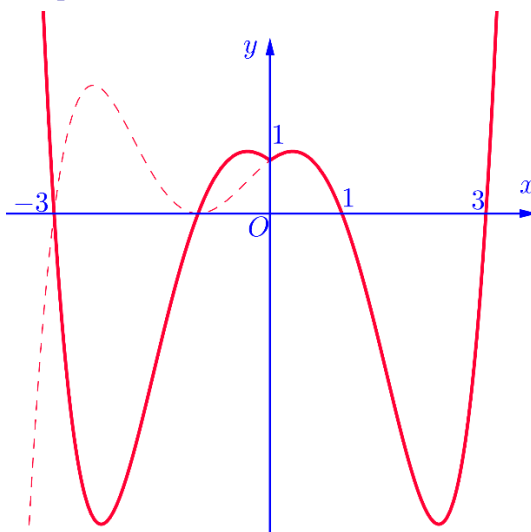
$|f(|x-2|)+1|-m=8 \Leftrightarrow |f(|x-2|)+1|=m+8$ Nghiệm của phương trình là giao điểm của đường thẳng $y = m+8$ và đồ thị hàm số $y = |f(|x-2|)+1| (C_3)$

Đồ thị hàm số $y = |f(|x-2|)+1|$ gồm 3 bước

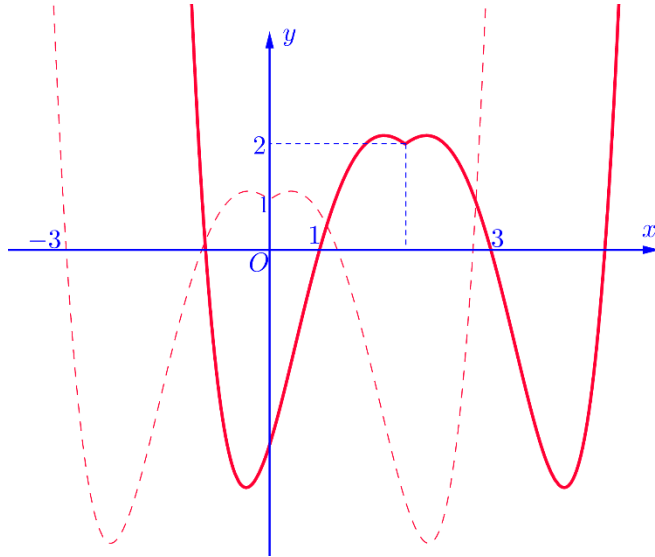
Bước 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$

Từ đồ thị $y = f(x)$ có đồ thị là (C) suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có đồ thị (C_1) gồm 2 phần:

- **Phần 1:** Giữ phần bên phải, bỏ phần bên trái đồ thị (C) .
- **Phần 2:** Đối xứng phần 1 qua Oy .

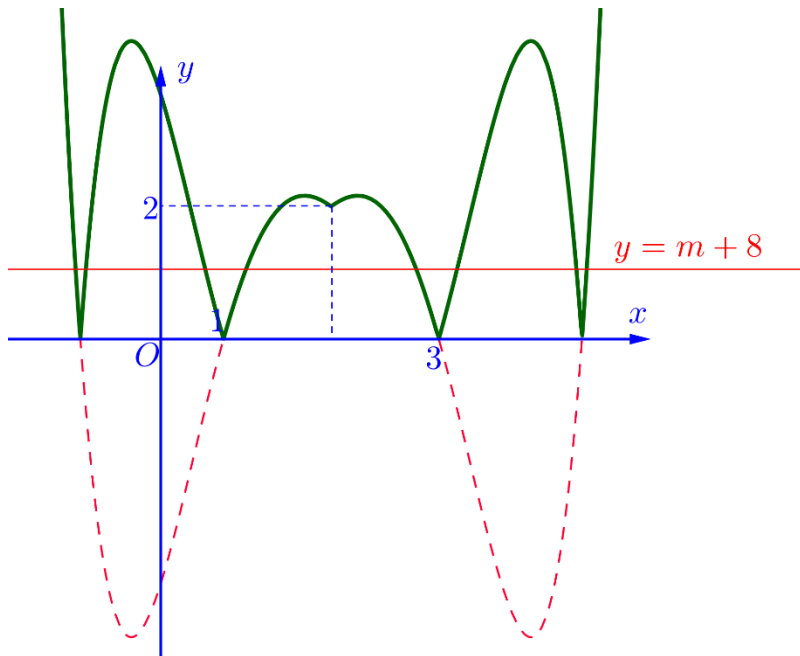


Bước 2. Hàm số $y = f(|x-2|)+1$ có đồ thị là (C_2) . Tịch tiến sang phải 2 đơn vị lên trên 1 đơn vị đồ thị (C_1) thu được đồ thị (C_2)



Bước 3. Đồ thị hàm số $y = |f(|x-2|)+1|$ (C_3) gồm 2 phần

- Phần 1: Giữ nguyên phần bên trên trục hoành Ox của đồ thị (C_2) .
- Phần 2: Đối xứng phần bên dưới của đồ thị (C_2) qua trục Ox .

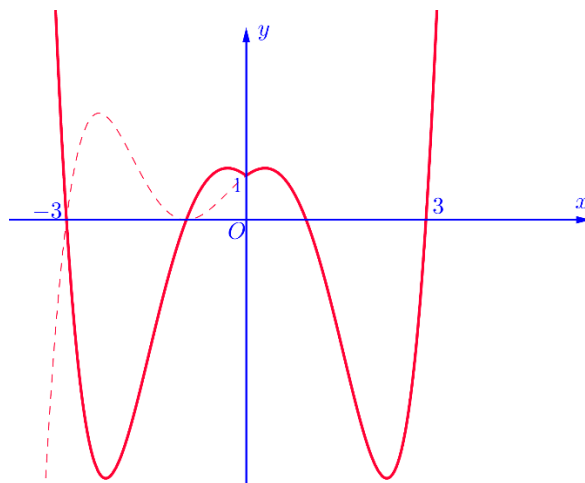


Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m+8 < 2 \Leftrightarrow -8 < m < -6$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -7$ vậy có 1 giá trị.

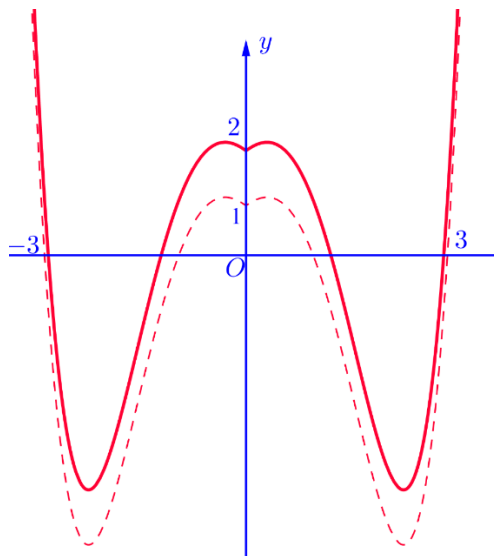
★ Nhận xét: Để đơn giản ta đặt $t = x-2 \Rightarrow t \in (-7; -3)$ ta thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = |f(|t|)+1|$ theo 3 bước

Bước 1. Vẽ đồ thị hàm $y = f(|x|)$ (C_1) gồm 2 phần

- **Phần 1:** Giữ phần bên phải, bỏ phần bên trái đồ thị (C).
- **Phần 2:** Đối xứng phần 1 qua Oy .

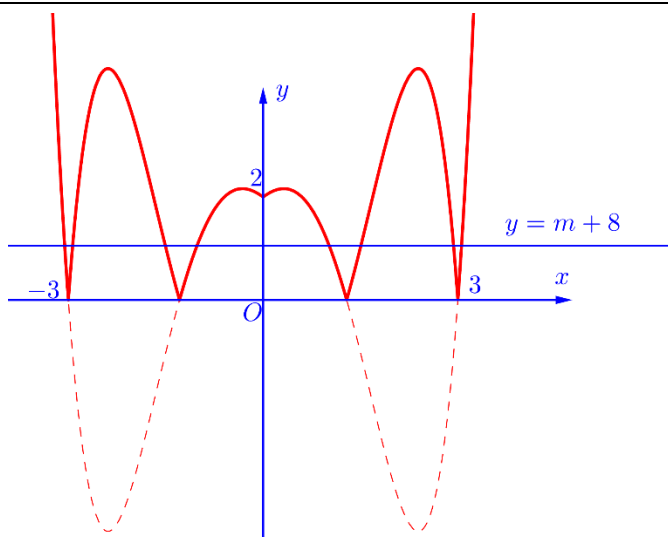


Bước 2. Tịnh tiến lên trên 1 đơn vị đồ thị (C_1) được đồ thị (C_2)



Bước 3. Đồ thị hàm số $y = |f(|x|) + 1|$ gồm 2 phần

- Phần 1: Giữ nguyên phần bên trên trục hoành Ox của đồ thị (C_2).
- Phần 2: Đối xứng phần bên dưới của (C_2) qua trục Ox .



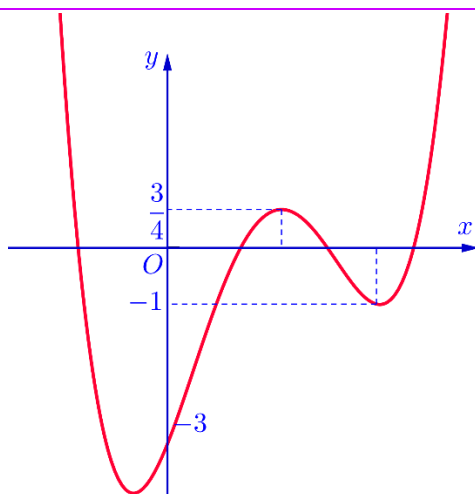
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m + 8 < 2 \Leftrightarrow -8 < m < -6$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -7$ vậy có 1 giá trị.

Ví dụ 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x + m|) = m$ có 4.

- A. 0.
C. 2.

- B. 1.
D. Vô số.



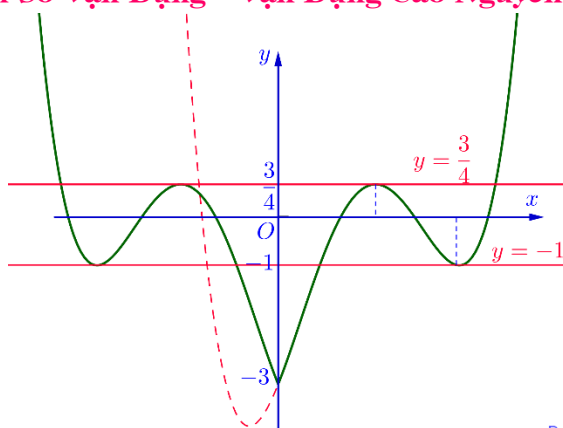
✪ Lời giải

☛ Chọn đáp án B

Nghiệm của phương trình $f(|x + m|) = m$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x + m|)$ và đường thẳng $y = m$.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x + m|)$ và đường thẳng $y = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m$.

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và vị trí có 4 nghiệm.



Từ đồ thị suy ra để phương trình có 4 nghiệm thì

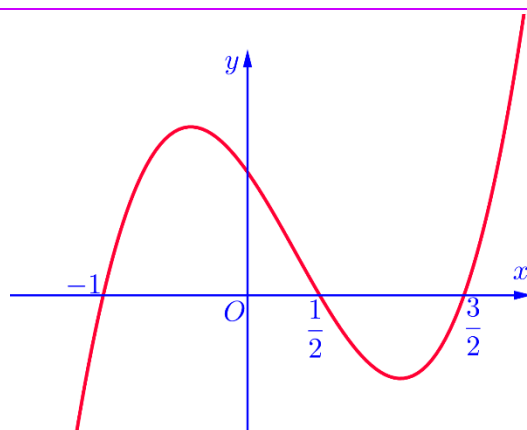
$$\begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy có 1 giá trị nguyên $m = -1$.

Ví dụ 20.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
 $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Hàm số có đồ thị $f'(x)$ như
 hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình
 $f(x) = e$ có số phần tử là

- A. 1. B. 2.
 C. 3. D. 4.



✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án D

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e$, $\begin{cases} g'(x) = f'(x) \\ g(0) = 0 \end{cases}; f(x) = e \Leftrightarrow g(x) = 0$

Đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x) = a(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ với $a > 0$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	0	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$g\left(\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$

$Ox: y = 0$

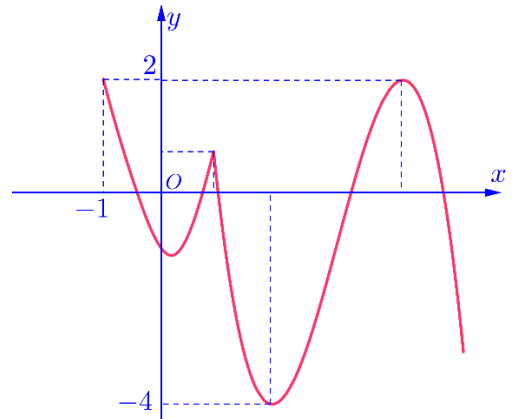
Ta có $g\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(\frac{3}{2}\right) - g(0) = \int_0^{\frac{3}{2}} g'(x) dx = a \int_0^{\frac{3}{2}} (x+1) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) dx = -\frac{9}{64}a < 0$

Suy ra phương trình có 4 nghiệm.

Ví dụ 21.

Cho hàm số liên tục trên $[-1; 9]$ và đồ thị như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $16 \cdot 3^{f(x)} - [f(x)^2 + 2f(x) - 8] \cdot 4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m) \cdot 6^{f(x)}$

Có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 9]$



A. 22.

B. 31.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn đáp án D

Theo đồ thị $-4 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in [-1; 9]$. Đặt $t = f(x), t \in [-4; 2]$.

Bài toán trở thành tìm m để $16 \cdot 3^t - [t^2 + 2t - 8] \cdot 4^t \geq (m^2 - 3m) \cdot 6^t$ có nghiệm đúng với $t \in [-4; 2]$.

$$16 \cdot 3^t - [t^2 + 2t - 8] \cdot 4^t \geq (m^2 - 3m) \cdot 6^t, \forall t \in [-4; 2]$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t \geq (m^2 - 3m), \forall t \in [-4; 2]$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow m^2 - 3m \leq \min_{t \in [-4; 2]} g(t)$$

Với $\frac{16}{2^t} \geq 4, \forall t \in [-4; 2]$, dấu bằng xảy ra khi $t = 2$.

$$t^2 + 2t - 8 \leq 0, \forall t \in [-4; 2] \Rightarrow \left[t^2 + 2t - 8 \right] \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^t \leq 0, \forall t \in [-4; 2] \text{ dấu bằng xảy ra khi } t = 2.$$

$$\text{Suy ra } g(t) = \frac{16}{2^t} - \left[t^2 + 2t - 8 \right] \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^t \geq 4, \forall t \in [-4; 2] \Rightarrow \min_{[-4; 2]} g(t) = 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4 \text{ và } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

Kết luận: có 6 giá trị m .

Ví dụ 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [1; 2025]$ sao cho phương trình

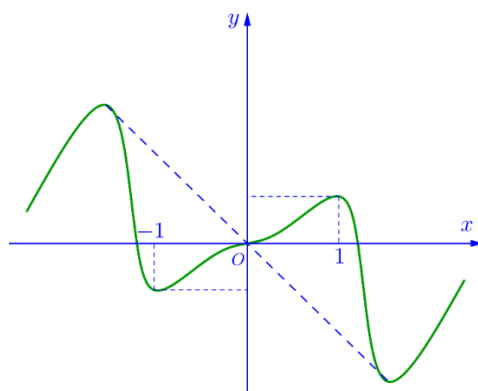
$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + f\left(m - \sqrt{m^2 + 1}\right) = 0 \text{ có nghiệm.}$$

A. 2019.

B. 2022.

C. 2025.

D. 2026.



✪ Lời giải

☛ Chọn đáp án D

Theo đồ thị hàm số đối xứng với nhau qua Ox suy ra hàm số $f(x)$ hàm số lẻ.

$$\Rightarrow f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + f\left(m - \sqrt{m^2 + 1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(m - \sqrt{m^2 + 1}\right) = -f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \Leftrightarrow f\left(m - \sqrt{m^2 + 1}\right) = f\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right)$$

$$\text{Ta có } 1 = \frac{-2x}{-2x} \geq \frac{-2x}{1+x^2} \geq \frac{-2x}{2x} = -1 \Rightarrow \frac{-2x}{x^2+1} \in [-1; 1] \Rightarrow f\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right) \text{ đồng biến.}$$

$$\text{Mặt khác } \left(m - \sqrt{m^2 + 1}\right) \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow f\left(m - \sqrt{m^2 + 1}\right) \text{ đồng biến.}$$

$$\Rightarrow m - \sqrt{m^2 + 1} = \frac{-2x}{x^2 + 1} \Rightarrow -1 \leq m - \sqrt{m^2 + 1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 + \sqrt{m^2 + 1} \leq m \leq 1 + \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^2 + 1} \leq m + 1 \\ m - 1 \leq \sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$$

Nên phương trình có nghiệm với

★ DẠNG 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ xác định tham số m để $g(x, m) \geq 0$

Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm

m để bất phương trình

$m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng

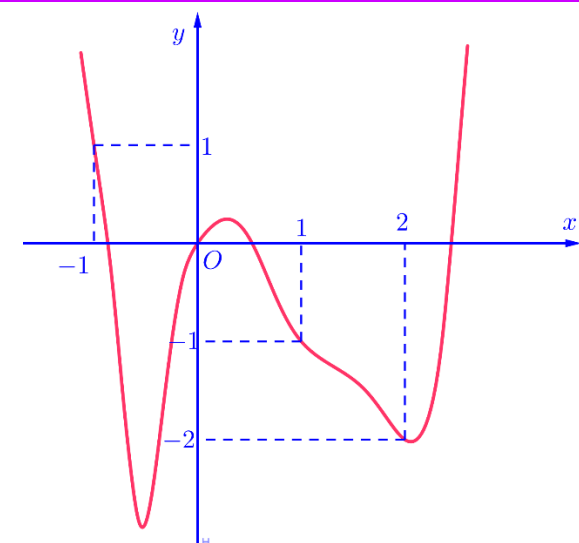
với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

A. $m \geq 2f(0) + 1$.

B. $m \leq 2f(0) - 1$.

C. $m \leq 2f(-1)$.

D. $m \geq 2f(-1)$.



★ Lời giải

☛ Chọn đáp án B

Ta có $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3 \Leftrightarrow m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$.

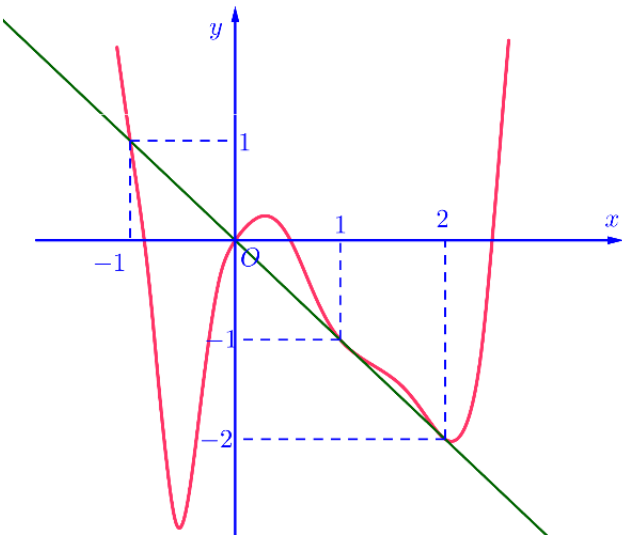
Yêu cầu bài toán $m \leq \min g(x)$ với $g(x) = 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$.

Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4 = 2[f(t) - (-t)]$ ($t = x+2$)

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$.

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

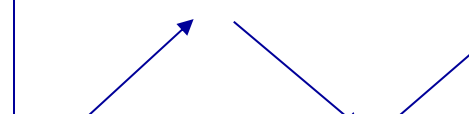
Nghiệm của phương trình (1) chính là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -t$ và đồ thị hàm số $f'(t)$



Ta có $g'(x) > 0$ khi đồ thị $f'(t)$ nằm trên đường thẳng $y = -t$; $g'(x) < 0$ khi đồ thị $f'(t)$ nằm dưới đường thẳng $y = -t$. Chỉ cần xét khoảng $g'(x) > 0$ khoảng còn lại mặc nhiên sẽ làm cho $g'(x) < 0$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(t) > -t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < -1 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > -2 \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên nghiệm bội chẵn tức điểm tiếp xúc không tham gia vào quá trình xét dấu

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

$$\min g(x) = g(-2) = 2f(0) - 1 \Rightarrow m \leq 2f(0) - 1 \quad \forall x \in (-3; +\infty) \Rightarrow m \leq 2f(0) - 1$$

Ví dụ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

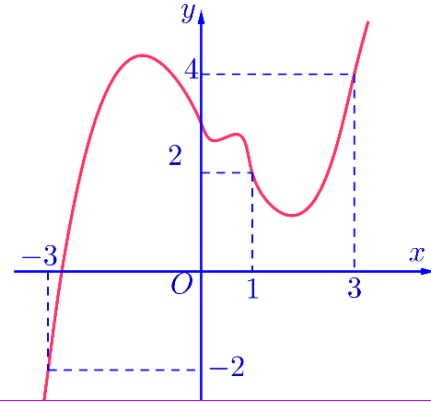
Tìm m để bất phương trình

$$m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x) \text{ nghiệm đúng}$$

với mọi $x \in [-4; 2]$.

A. $m \geq 2f(0) - 1$. B. $m \geq 2f(-3) - 4$.

C. $m \geq 2f(3) - 16$. D. $m \geq 2f(1) - 4$.



★ Lời giải

☞ Chọn đáp án D

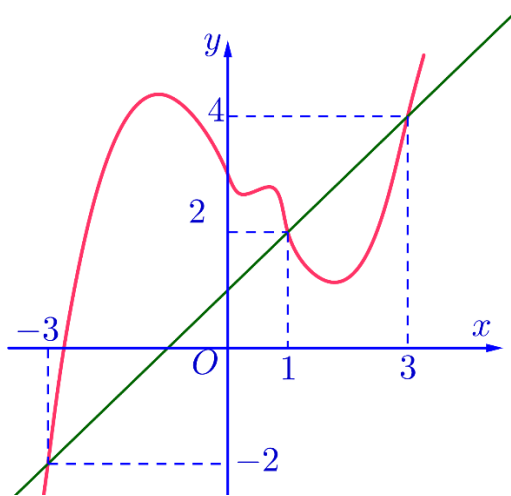
$$m + x^2 + 4 \geq 2(f(x+1) - 2x) \Leftrightarrow m \geq 2f(x+1) - (x+2)^2$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max g(x)$ với $g(x) = 2f(x+1) - (x+2)^2$

Đặt $t = x+1$

Ta có $g'(x) = 2f'(x+1) - 2(x+2) = 2(f'(x+1) - (x+2)) = 2[f'(t) - (t+1)]$.

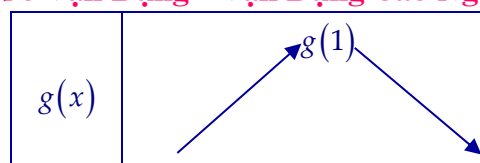
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t+1$ nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = t+1$ và đồ thị $f'(t)$.



Từ đồ thị $g'(x) = 2[f'(t) - (t+1)] > 0$ khi đồ thị $f'(t)$ nằm trên đường thẳng $y = t+1$ và $g'(x) = 2[f'(t) - (t+1)] < 0$ khi đồ thị $f'(t)$ nằm dưới đường thẳng $y = t+1$, ta chỉ cần xét

$$\text{trường hợp } g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < t < 2 \\ t > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x+1 < 2 \\ x+1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$$

x	-4	1	-2
$g'(x)$	$+$	0	$- \quad 0$

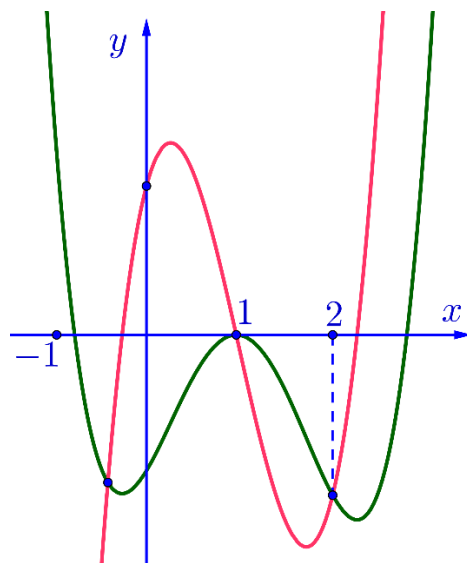


Suy ra $\max g(x) = 2f(1) - 4 \quad \forall x \in [-4; 2]$ nên $m \geq 2f(1) - 4$.

Ví dụ 3.

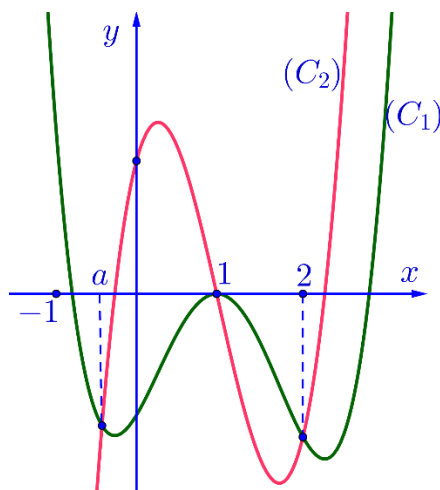
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y = f(x)$ và $y = f'(x)$. Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) \leq me^x$ luôn đúng trên $[0; 2]$ là ?

- A. $m \geq 0$. B. $m \geq f(0)$.
- C. $m \geq \frac{f(2)}{e^2}$. D. $m \geq f(0) + \frac{f(2)}{e}$.



✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án



Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại x_0 thì x_0 là cực trị của hàm số $y = f(x)$. Dựa vào đồ thị ta kí hiệu (C_1) là đồ thị hàm số $y = f(x)$, (C_2) đồ thị của hàm số $y = f'(x)$

$$f(x) \leq me^x \Leftrightarrow m \geq \frac{f(x)}{e^x}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max g(x)$ với $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

Ta có $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = a \in (-1; 0) \end{cases}.$$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f(x)$ khi đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên đồ thị $f(x)$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f(x)$ khi đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới đồ thị $f(x)$

Theo đồ thị ta có bảng biến thiên.

x	0	a	1	2
$g'(x)$	+	0	+	0
$g(x)$				

Khi đó $\max_{[0; 2]} g(x) = g(1) = 0$

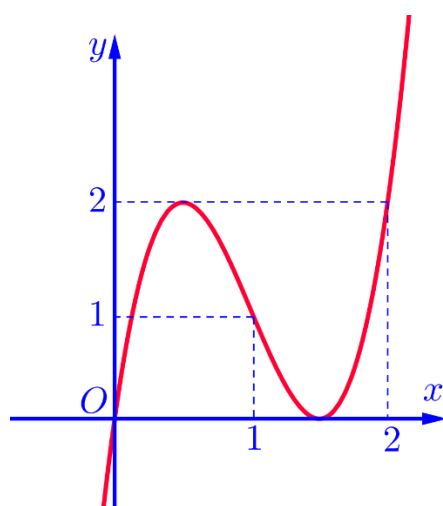
$\Rightarrow m \geq 0$

Ví dụ 4.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$. B. $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$.

C. $m \geq f(0) - \frac{1}{2}$. D. $m > f(0) - \frac{1}{2}$.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Chuyên Quang Trung Lần 5 năm 2019

★ Lời giải

☞ Chọn đáp án

$f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m \quad (1)$

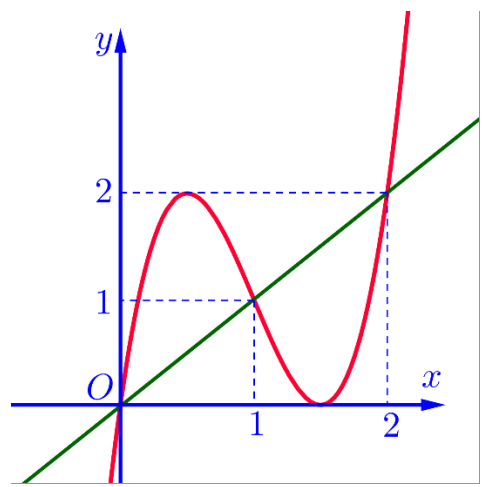
Ta có: $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1]$. Đặt $2\sin x = t (t \in (0; 2])$ ta được bất phương trình:

$$f(t) - \frac{1}{2}t^2 < m \quad (2).$$

(1) đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi (2) đúng với mọi $t \in (0; 2]$.

Xét $g(t) = f(t) - \frac{1}{2}t^2$ với $t \in (0; 2]$.

$$g'(t) = f'(t) - t.$$



Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và $y = x$

Ta có bảng biến thiên

x	0	1	2
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	$g(1)$		

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow m > \max_{(0; 2]} g = g(1) = f(1) - \frac{1}{2}.$$

★ **DẠNG 5:** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định tham số để phương trình có nghiệm

Ví dụ 5.

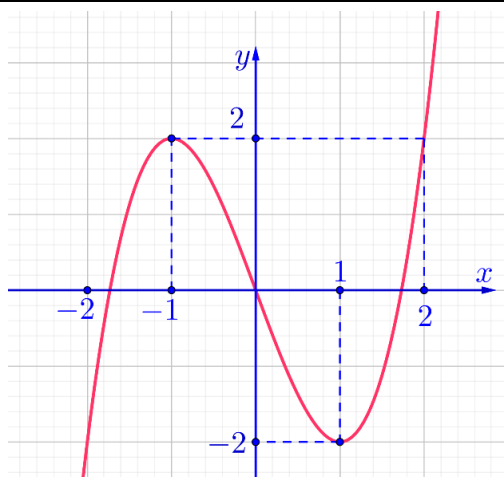
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left[\sqrt{2f(\cos x)}\right] = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án C

Đặt $t = \cos x$ với $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow t \in (-1; 0]$.

Quan sát đồ thị trên $(-1; 0)$ hàm số nghịch biến nên $0 = f(0) \leq f(t) < f(-1) = 2$

Đặt $u = \sqrt{2f(\cos x)} \Rightarrow u \in [0; 2)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình $f(u) = m$ có nghiệm $[0; 2)$.

$$\Leftrightarrow \min_{[0; 2)} f(u) \leq m < \max_{[0; 2)} f(u)$$

Quan sát đồ thị $\min_{[0; 2)} f(u) = -2; \max_{[0; 2)} f(u) = 3 \Rightarrow -2 \leq m < 3$ và $m \in \mathbb{Z}$

Nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$, có 4 giá trị m .

Ví dụ 6.

Số các giá trị của tham số m không vượt quá 5 để phương trình

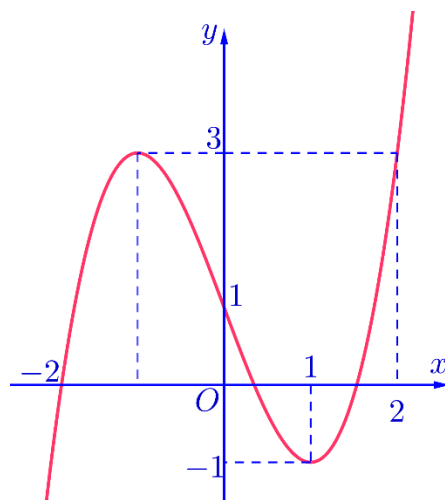
$$f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.



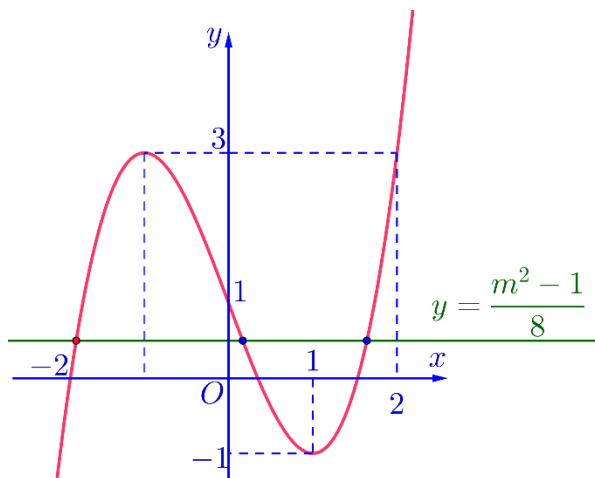
✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Đặt $t = \pi^x > 0$. Phương trình có dạng

$$f(t) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{m^2 - 1}{8}, (t > 0)$$

Nghiệm phương trình phụ thuộc vào số giao điểm giữa đường thẳng $y = \frac{m^2 - 1}{8}$ và đồ thị hàm số $y = f(t)$



Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt dương

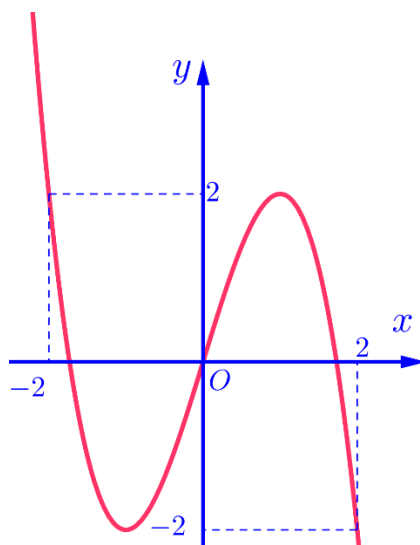
$$\Leftrightarrow -1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < m < 3 \text{ và } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

Vậy có 5 giá trị m .

Ví dụ 7.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 9]$ sao cho bất phương trình $2^{f^2(x)+f(x)-m} - 16 \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m} - 4^{f(x)} + 16 < 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$?

- A. 6. B. 8.
C. 5. D. 7.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Sở Bắc Ninh 07-05-2019

☛ Chọn đáp án A

Ta có: $2^{f^2(x)+f(x)-m} - 16 \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m} - 4^{f(x)} + 16 < 0$

$\Leftrightarrow 4^{f(x)} \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m} - 16 \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m} - 4^{f(x)} + 16 < 0$

$\Leftrightarrow 4^{f(x)} (2^{f^2(x)-f(x)-m} - 1) - 16 (2^{f^2(x)-f(x)-m} - 1) < 0$

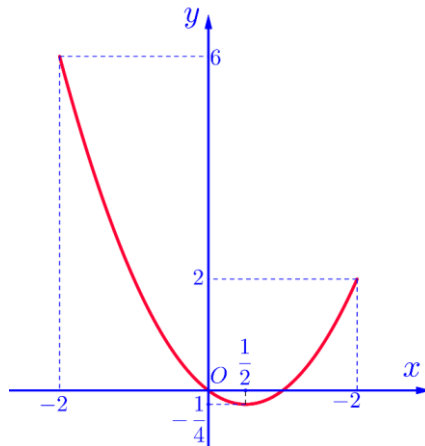
$\Leftrightarrow (4^{f(x)} - 16) (2^{f^2(x)-f(x)-m} - 1) < 0$

Theo đồ thị $x \in (-1; 1) \Rightarrow -2 < f(x) < 2 \Leftrightarrow 4^{-2} < 4^{f(x)} < 4^2 \Rightarrow 4^{f(x)} - 16 < 0 \forall x \in (-1; 1)$

Do đó $2^{f^2(x)-f(x)-m} - 1 > 0 \Leftrightarrow f^2(x) - f(x) - m > 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1) \Leftrightarrow f^2(x) - f(x) > m$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$

Xét $g[f(x)] = f^2(x) - f(x)$

Đặt $t = f(x)$ với $t \in (-2; 2)$, $g(t) = t^2 - t$ có đồ thị như hình vẽ



Theo đồ thị $g(t) > m \Leftrightarrow m < \max_{t \in (-2; 2)} g(t) = 6$ và $m \in [0; 9] \Rightarrow 0 \leq m < 6$.

Ví dụ 8.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Hỏi có bao

hiệu m nguyên để phương trình

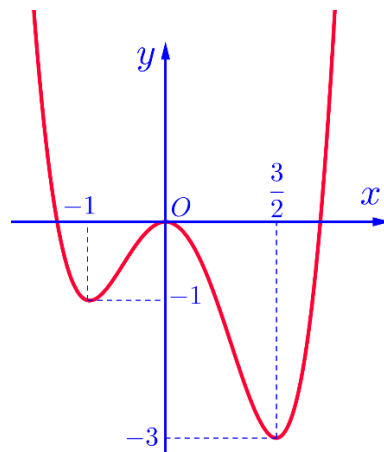
$f(|x|) = m$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



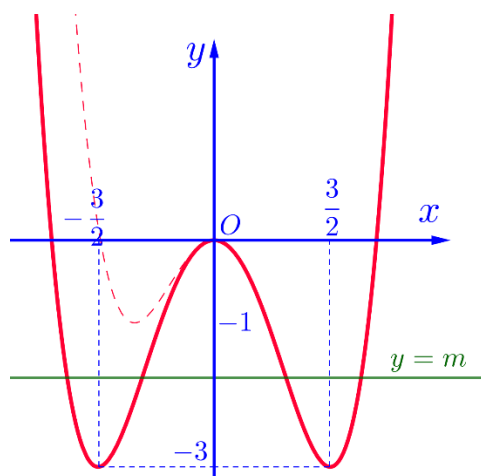
Đề thi thử THPT Quốc Gia Sở Bắc Ninh 07-05-2019

☛ Lời giải

☛ Chọn đáp án C

Từ đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $(C'): y = f(|x|)$ gồm 2 phần

- **Phần 1:** Giữ nguyên phần đồ thị (C) trên miền $x \geq 0$, (kí hiệu phần đồ thị này là (C_1)), Bỏ phần đồ thị (C) ở bên trái trục Oy .
- **Phần 2:** Đối xứng phần 1 qua Oy .



Theo đồ thị (C') ta có:

Phương trình $f(|x|) = m$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -3 < m \leq 0$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

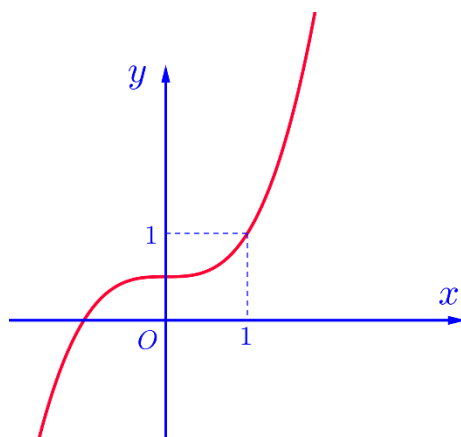
Ví dụ 9.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ, gọi S là tập hợp các giá trị của m ($m \in \mathbb{R}$) sao cho

$$(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

. Số phần tử của tập S là?

- A. 2. B. 0.
C. 3. D. 1.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Chuyên Quang Trung Lần 5

☛ Lời giải

☛ Chọn đáp án A

🔗 Hướng giải 1

$$\text{Từ đồ thị hàm số ta suy ra } \begin{cases} f(1)=1 \\ f(-1)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ c=0 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$$

$$\text{Theo đề } f(1)=1 \Rightarrow m^3-m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

Với $m=0$, ta có:

$$\begin{aligned} (x-1)(f(x)-1) &= (x-1)\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}-1\right) \\ &= \frac{1}{2}(x-1)(x^3-1) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x^2-x+1) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Với $m=1$, ta có:

$$\begin{aligned} (x-1)[f(2x-1)-f(x)+f(x)-1] \\ &= (x-1)\left[\frac{1}{2}(2x-1)^3+\frac{1}{2}-1\right] \\ &= \frac{1}{2}(x-1)(8x^3-12x^2+6x-1-1) = (x-1)(4x^3-6x^2+3x-1) \\ &= (x-1)^2(4x^2-2x+1) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

$$\text{Với } m=-1, \text{ ta có: } (x-1)[-f(2x-1)+f(x)+f(x)-1] = (x-1)\left[-\frac{1}{2}(2x-1)^3-\frac{1}{2}+x^3\right]$$

$$(x-1)(-x^3+6x^2-3x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ (Loại)}$$

Vậy $m=0$ và $m=1$.

🔗 Hướng giải 2

Để $(x-1)[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1]$ nhận $x=1$ là nghiệm bội lẻ duy nhất và khi qua $x=1$ (

$[m^3 f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1]$ đổi dấu từ $-$ sang $+$). Khi đó: $m^3-m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\pm 1 \end{cases}$.

+ Thử lại, ta thấy với $m=0$ thỏa.

Tư duy giải toán Hàm Số Vận Dụng – Vận Dụng Cao Nguyễn Thành Trung

+ Với $m=1$, ta có: $\left[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1 \right] = f(2x-1) - 1$ là một hàm số bậc ba có hệ số bậc cao nhất dương.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2x-1) - 1] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(2x-1) - 1] = -\infty$ nên khi qua $x=1$ hàm số sẽ đổi dấu từ $-$ sang $+$ thỏa mãn.

+ Với $m=-1$, ta có: $\left[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1 \right] = -f(2x-1) + 2f(x) - 1$ là một hàm số bậc ba có hệ số bậc cao nhất âm.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2x-1) - 1] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(2x-1) - 1] = +\infty$ nên khi qua $x=1$ hàm số sẽ đổi dấu từ $+$ sang $-$ không thỏa mãn.

Ví dụ 10.

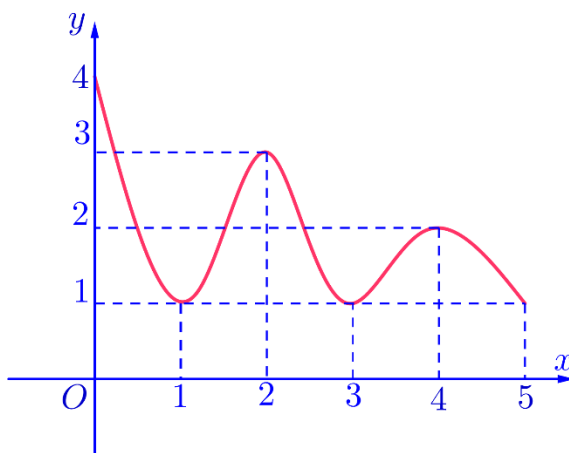
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

$$(2025 - m)\sqrt{f^2(x) + f(x) - 1} \geq \sqrt{3x} + \sqrt{10 - 2x}$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 5]$

A. 2019 . B. 2020 .

C. 2021 . D. 2022 .



★ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 5]$ thì ta cần có

$$2025 - m \geq \max_{[0; 5]} \left(\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{\sqrt{f^2(x) + f(x-2) - 1}} \right)$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky

$\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = \sqrt{3}\sqrt{x} + \sqrt{2}\sqrt{5-x} \leq \sqrt{(3+2)(x+5-x)} = 5$ dấu bằng "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=3$. Nhìn đồ thị ta thấy rằng $f(x) \geq 1$ dấu "=" xảy ra khi $x=3; x=1; x=5$.

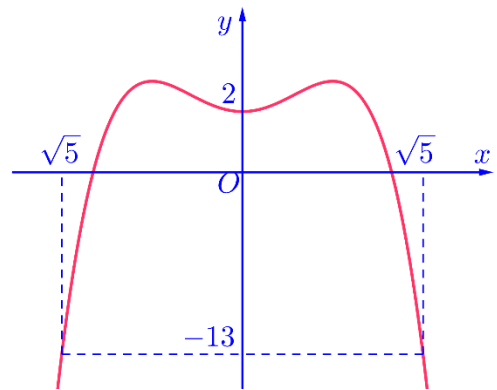
Suy ra $\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{\sqrt{f^2(x) + f(x) - 1}} \leq \frac{5}{\sqrt{f^2(x) + f(x) - 1}} \leq 5 \Rightarrow m \leq 2020$.

Ví dụ 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì điều kiện của m là

- A. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. B. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.
C. $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$. D. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$.



✶ Lời giải

☞ Chọn đáp án A

Để $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5} \leq 0 \Leftrightarrow 3m \geq 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}$

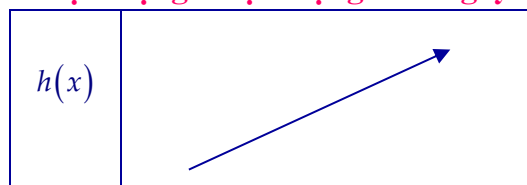
Với $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2m \geq \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} h(x)$

Xét hàm số $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}; h'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} h'(-\sqrt{5}) = 2f'(-\sqrt{5}) + 6.5 - 4 = 0 \\ h'(\sqrt{5}) = 2f'(\sqrt{5}) + 6.5 - 4 = 0 \\ h'(0) = 2f'(0) + 0 - 4 = 0 \\ h'(1) = 2f'(1) + 6.1 - 4 > 0 \\ h'(-1) = 2f'(-1) + 6.1 - 4 > 0 \end{cases} \quad \text{suy ra } h(x) \text{ đồng biến trên } [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$$

x	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
$h'(x)$	+	0



Suy ra $h(x) \leq h(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5}) \Rightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} f(x) = 2f(\sqrt{5})$

Ví dụ 12.

Cho $0 < \sqrt{a} - 1 < \sqrt{b} - 1 < a$ và hàm số

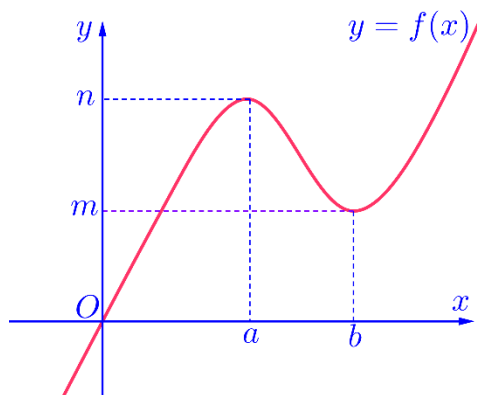
$y = g(x) = \frac{f(x)}{f((x+1)^2)}$ có đạo hàm $[0; +\infty)$. Biết

đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Khẳng định

nào sau đây đúng với $x \in [\sqrt{a} - 1; \sqrt{b} - 1]$

A. $g(x) \geq \frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$. B. $g(x) \leq \frac{f(\sqrt{a}-1)}{n}$.

C. $g(x) \leq \frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$. D. $-10 \leq g(x) \leq 0$.



✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án A

Ta có $x \in [\sqrt{a} - 1; \sqrt{b} - 1] \Rightarrow (x+1)^2 \in [a; b]$ theo đồ thị có

$$m \leq f((x+1)^2) \leq n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{f((x+1)^2)} \leq \frac{1}{m}$$

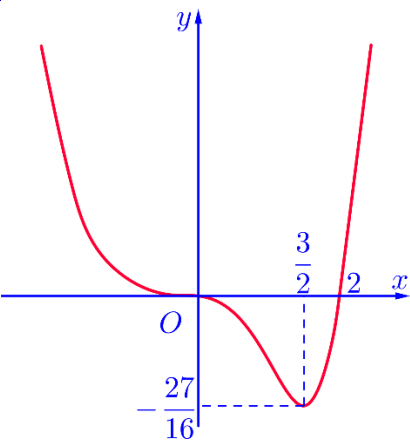
Với $0 < \sqrt{a} - 1 < \sqrt{b} - 1 < a$ theo đồ thị hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[\sqrt{a} - 1; \sqrt{b} - 1]$

$$f(\sqrt{a}-1) \leq f(x) \leq f(\sqrt{b}-1) \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)}{f((x+1)^2)} \leq \frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$$

Ví dụ 13.

Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.
Tính tổng tất cả các phần tử của A .

- A. 5.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 6.



✪ Lời giải

☞ Chọn đáp án B

Đặt $t = 2\sin x$ với $x \in [-\pi; 2\pi]$.

$$t' = 2\cos x.$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right). x \in [-\pi; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t'	-	0	+	0	+
t	0	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 0

Từ đó, ta suy ra được bảng biến thiên của $u = |2\sin x|$ là

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
u'	+	0	-	0	+	0	-
u	0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ 0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ 0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ 0

Với $u = 2$ ta có 3 nghiệm phân biệt $x \in [-\pi; 2\pi]$.

Với $u = 0$ ta có 4 nghiệm phân biệt $x \in [-\pi; 2\pi]$.

Với $0 < u < 2$ ta có 6 nghiệm phân biệt $x \in [-\pi; 2\pi]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(u) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt trong khoảng $(0; 2)$

$$\Leftrightarrow -\frac{27}{16} < f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2 \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Vậy $A = \{1; 2\}$. Tổng tất cả các phần tử của A bằng 3.

✪ **DẠNG 6:** Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xác định số nghiệm của hàm số $g(x) = f(x) + g(x)$

Ví dụ 1.

Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có $f(1) = 2018$ và

có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số

$g(x) = f(x) - x^3 + 3x - 2019$. Phương trình

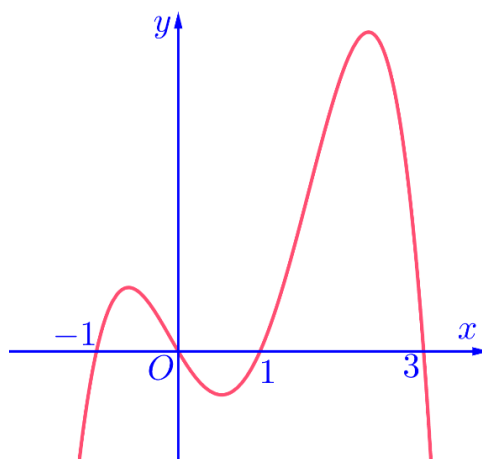
$g(x) + 2 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm dương

A. 0.

B. 1.

C. 2.

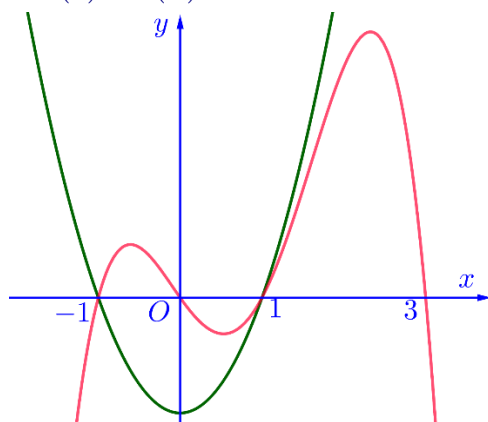
D. 3.



✪ **Lời giải**

☞ **Chọn đáp án**

Ta có $g'(x) = f'(x) - 3x^2 + 3 = f'(x) - (3x^2 - 3)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$ có nghiệm là hoành độ giao điểm của hàm số $y = f'(x)$ và $(P): y = 3x^2 - 3$.



Theo đồ thị ta có đồ thị hàm số $g'(x) > 0$ khi đồ thị $f'(x)$ nằm trên đồ thị (P) và ngược lại $g'(x) < 0$ khi đồ thị $f'(x)$ nằm dưới đồ thị (P) .

★ Từ đồ thị ta có :

$$g(1) = 1$$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến $(0; 1)$ suy ra

$f(0) > f(1) = 2018 \Rightarrow g(0) = f(0) - 2019 > f(1) - 2019 = 2018 - 2019 = -1$

Phương trình $g(x)+2=0 \Leftrightarrow g(x)=-2$ là giao điểm giữa đồ thị hàm số $g(x)$ và đường thẳng $y=-2$

Bảng biến thiên :

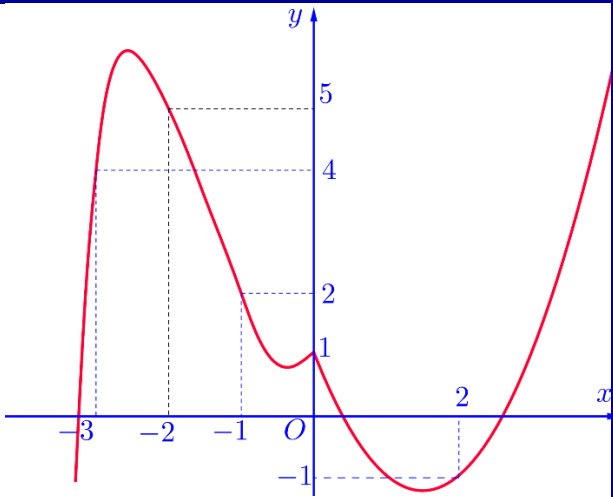
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0		$+$	0
$g(x)$					

Kết luận : phương trình $g(x)+2=0$ có 1 nghiệm dương

Ví dụ 2.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f'(x)>0$ với mọi $x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. Số nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ của bất phương trình $[f(x)+x-1](x^2-x-6)>0$ là

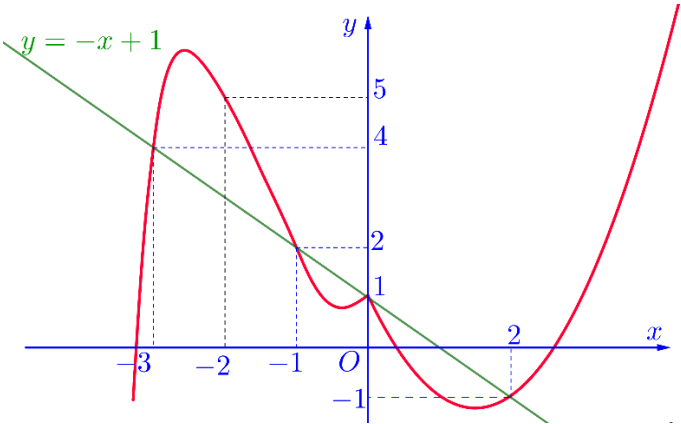
- A. 9.
- B. 10.
- C. 8.
- D. 7.



Đề thi thử THPT Quốc Gia Môn Toán Trường Lương Thế Vinh lần 3 năm 2019

Lời giải

Chọn đáp án D



Tư duy giải toán Hàm Số Vận Dụng – Vận Dụng Cao Nguyễn Thành Trung

Đặt $g(x) = [f(x) + x - 1](x^2 - x - 6)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ f(x) + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ f(x) = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; x = 3 \\ f(x) = -x + 1 \end{cases} \quad (1).$$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -x + 1$. Dựa vào đồ thị hàm số đã vẽ ở hình trên

$$f(x) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -1, x = 0 \text{ và } x = 2.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3		-2		-1		0	2		3		$+\infty$	
x^2-x-6		+		+	0	-		-		-		0	+	
$f(x)+x-1$		-	0	+		+	0	-	0	-	0	+		+
$g(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	+	0	-	0	+

$$\Rightarrow [f(x) + x - 1](x^2 - x - 6) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$$

Kết hợp điều kiện x nguyên và $x \in (-10; 10)$ ta có $x \in \{1; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

★ DẠNG 7: Biện luận tham số m của bất phương trình hoặc phương trình bằng cách đưa về hàm số đặc trưng

Ví dụ 1.

Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Đề thi thử THPT Quốc Gia Môn Toán Trường Lương Thế Vinh lần 3 năm 2019

🔴 Lời giải

🔴 Chọn đáp án D

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{f(x) + m} \Leftrightarrow t^3 = f(x) + m \Leftrightarrow f(x) = t^3 - m \quad (1).$$

$$\text{Ta có } f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m, \text{ suy ra } f(t) = x^3 - m \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } f(x) - f(t) = t^3 - x^3 \Leftrightarrow f(x) + x^3 = f(t) + t^3 \Leftrightarrow x^5 + 4x^3 = t^5 + 4t^3 \quad (3).$$

Xét hàm số $g(u) = u^5 + 4u^3 \Rightarrow g'(u) = 5u^4 + 12u^2 \geq 0 \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó (3)} \Leftrightarrow g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t. \text{ Thay vào (1) ta được } f(x) = x^3 - m \Rightarrow x^5 + 2x^3 = 3m \quad (4).$$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3$ trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Ta có } h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0 \forall x \in [1; 2] \Rightarrow h(x) \text{ đồng biến trên đoạn } [1; 2].$$

$$\text{Vậy ta có } \min_{[1; 2]} h(x) = h(1) = 3 \text{ và } \max_{[1; 2]} h(x) = h(2) = 48.$$

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[1;2] \Leftrightarrow$ Phương trình (4) có nghiệm trên $[1;2]$.

$\Leftrightarrow \min_{[1;2]} h(x) \leq 3m \leq \max_{[1;2]} h(x) \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$. Vậy có 16 giá trị nguyên của m .