

TOÁN HỌC PHỔ THÔNG
TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN MŨ VÀ LOGARIT HAY VÀ ĐẶC SẮC

2019

Từ cơ bản tới nâng cao
Dành cho học sinh ôn 8+

Hướng tới kỳ thi
THPT QUỐC GIA

NGUYỄN XUÂN NHẬT

Lời nói đầu

Nhân dịp trung thu 2019, tôi – **Nguyễn Xuân Nhật** xin gửi món quà nho nhỏ đến toàn thể các em học sinh lớp 12 (2k2) giúp các em luyện tập chuyên đề: "Mũ và Logarit" qua các bài toán hay và khó được đề cập trong tài liệu này.

Tài liệu bao gồm 4 chủ đề:

PHƯƠNG TRÌNH BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

CỰC TRỊ MŨ VÀ LOGARIT

ĐỒ THỊ MŨ VÀ LOGARIT

ỨNG DỤNG MŨ VÀ LOGARIT VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

Trong quá trình biên soạn, xin gửi lời cảm ơn đến Minh Tuấn hỗ trợ tôi trong quá trình tự thiết kế bìa. Và chân thành cảm ơn đến team Phản biện: Bạn Lý Thanh Tiến, em Trịnh Thị Giang và em Trần Xuân Hương đã giúp tôi phản biện chuyên đề này.

Do hoàn thành chuyên đề trong thời gian ngắn, dù đã cố gắng cẩn thận nhưng vẫn có thể phát sinh nhiều sai sót. Mọi ý kiến đóng góp của bạn đọc vui lòng gửi về

☑ **Facebook:** <https://www.facebook.com/thenghi.phuong.9>

☑ **Email:** phuongthenghi@gmail.com

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

1. ĐỀ BÀI.

★ **Câu 1.** Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.

- A. $S = -35$. B. $S = 20$. C. $S = 25$. D. $S = -21$.

★ **Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| < 10$) để phương trình sau có nghiệm:

$$2^{x-1} = \log_4(x + 2m) + m$$

- A. 9. B. 10. C. 5. D. 4.

★ **Câu 3.** Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình sau có nghiệm?

$$e^m + e^{3m} = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right).$$

- A. 2. B. 0. C. Vô số. D. 1.

★ **Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình $f(3^x) + f(2x-1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

★ **Câu 5.** Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$$(3a^2 + 12a + 15)\log_{27}(2x - x^2) + \left(\frac{9}{2}a^2 - 3a + 1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2\log_9(2x - x^2) + \log_{11}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)$$

- A. 2. B. 0. C. Vô số. D. 1.

★ **Câu 6.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S .

- A. 15. B. 14. C. 13. D. 16.

★ **Câu 7.** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$\ln(m + 2\sin x + \ln(m + 3\sin x)) = \sin x$$

A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

★ **Câu 8.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn:

$$\begin{cases} e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y \\ \log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

★ **Câu 9.** Cho phương trình $\log_2(2x^2 - 4x + 4) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ và $0 < x < 100$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

★ **Câu 10.** Cho phương trình $27^x + 3x \cdot 9^x + (3x^2 + 1)3^x = (m^3 - 1)x^3 + (m - 1)x$, m là tham số. Biết rằng giá trị m nhỏ nhất để phương trình đã cho có nghiệm trên $(0; +\infty)$ là $a + e \ln b$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $17a + 3b$ bằng

A. 26. B. 54. C. 48. D. 18.

★ **Câu 11.** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|)$$

Có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

★ **Câu 12.** Cho các hàm số $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ thỏa mãn:

$$f_0(x) = \ln x + |\ln x - 2019| - |\ln x + 2019|, f_{n+1}(x) = |f_n(x)| - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Số nghiệm của phương trình $f_{2020}(x) = 0$ là:

A. 6058. B. 6057. C. 6059. D. 6063.

★ **Câu 13.** Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$ B. $-5 \leq m \leq 5$ C. $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$ D. $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$

★ **Câu 14.** Tìm tham số m để tổng các nghiệm của phương trình sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$$1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x.$$

A. 0 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

★ **Câu 15.** Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

- A. $(3,8;3,9)$. B. $(3,6;3,7)$. C. $(3,7;3,8)$. D. $(3,5;3,6)$.

★ **Câu 16.** Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt là

$$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$$

- A. 45. B. 38. C. 34. D. 27.

★ **Câu 17.** Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

- A. 4036. B. 4034. C. 4038. D. 4040.

★ **Câu 18.** Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để phương trình

$$\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a$$

có hai nghiệm phân biệt?

- A. 0. B. 2022. C. 2014. D. 2015.

★ **Câu 19.** Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-2019} + \frac{1}{x-2020}$ và $y = e^x - m + 1$ (m tham số) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại đúng 2020 nghiệm phân biệt?

- A. 2020. B. 2019. C. 2018. D. 2022.

★ **Câu 20.** Giả sử tồn tại số thực a sao cho phương trình $e^x + e^{-x} = 2\cos ax + 4$ có đúng 2019 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm phân biệt của phương trình $e^x - e^{-x} = 2\cos ax$ là:

- A. 2019. B. 2018. C. 4037. D. 4038.

★ **Câu 21.** Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ để phương trình $(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x - m$ có đúng hai nghiệm thực là

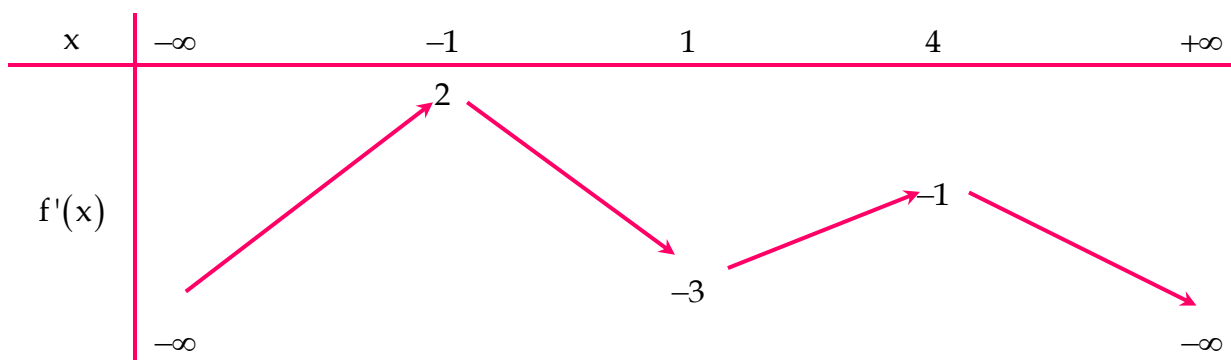
- A. 2022. B. 2021. C. 2. D. 1.

★ **Câu 22.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho phương trình sau có nghiệm

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x - m + 2$$

- A. Vô số. B. 4. C. 6. D. 5.

★ **Câu 23.** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điều kiện của m để bất phương trình $f(x+2) - xe^x < m$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x \in [-1; 1]$.

- A. $m > f(1) + \frac{1}{e}$. B. $m > f(3) + 2e$. C. $m > f(-1) + \frac{1}{e}$. D. $m > f(3) - 2e$.

★ **Câu 24.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

- A. 20. B. 10. C. 15. D. 5.

★ **Câu 25.** Cho bất phương trình $9^x + (m-1) \cdot 3^x + m > 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) có nghiệm đúng $\forall x \geq 1$

- A. $m > 0$. B. $m \geq -\frac{3}{2}$. C. $m > -2$. D. $m > -\frac{3}{2}$.

★ **Câu 26.** Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2} (4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

- A. $S = \{-1; 1\}$. B. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$.
C. $S = \{-5; 5\}$. D. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$.

★ **Câu 27.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình

$$\left| \frac{3\ln^2 x + 2\ln x + 12}{\ln^2 x - (m+1)\ln x + 4} \right| \geq 2$$

nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 7.

★ **Câu 28.** Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a \in (2; 3]$. B. $a \in (8; +\infty)$. C. $a \in (6; 7]$. D. $a \in (-6; -5]$.

★ **Câu 29.** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ của tham số m để bất phương trình $3\log_x \leq 2\log\left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 2018.

B. 2019.

C. 4036.

D. 2020.

★ **Câu 30.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(\ln^4 x - 16) + 3m(\ln^2 x - 4) - 14(\ln x - 2) \geq 0$ đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng:

A. $-\frac{3}{8}$.

B. -2 .

C. $-\frac{7}{8}$.

D. $\frac{1}{2}$.

2. HƯỚNG DẪN GIẢI.

★ Câu 1

Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.

A. $S = -35$.

B. $S = 20$.

C. $S = 25$.

D. $S = -21$.

☑ **Lời giải**

Ta có: $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m \Leftrightarrow 4^x - 8 \cdot 2^x = m^2 + 6m - 7 \quad (1)$.

Đặt $2^x = t$, với $x \in (1; 3)$ thì $t \in (2; 8)$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t = m^2 + 6m - 7 \quad (2)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t, t \in (2; 8)$ có $f'(t) = 2t - 8; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in (2; 8)$.

Lại có $f(2) = -12; f(4) = -16; f(8) = 0$.

Mà hàm $f(t)$ xác định và liên tục trên $t \in (2; 8)$ nên $-16 \leq f(t) < 0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm trên $t \in (2; 8) \Leftrightarrow -16 \leq m^2 + 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

Vậy $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Do đó $S = -21$.

Chọn ý D.

★ Câu 2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| < 10$) để phương trình sau có nghiệm:

$$2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m$$

A. 9.

B. 10.

C. 5.

D. 4.

☑ **Lời giải**

ĐKXĐ: $x+2m > 0$.

Ta có $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x+2m) + 2m$

Đặt $t = \log_2(x+2m)$. Từ đó suy ra $\begin{cases} 2^x = t + 2m \\ 2^t = x + 2m \end{cases} \Rightarrow 2^x + x = 2^t + t \quad (1)$

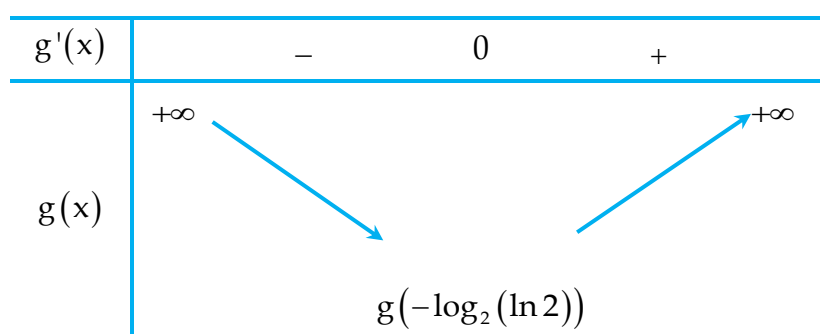
Do hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$$2^x = x + 2m \Leftrightarrow 2m = 2^x - x.$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - x \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_2(\ln 2)$	$+\infty$
-----	-----------	------------------	-----------



Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $2m \geq g(-\log_2(\ln 2)) \Leftrightarrow m \geq \frac{g(-\log_2(\ln 2))}{2} \approx 0,457$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x + 2m = 2^x > 0$)

Do m nguyên và $|m| < 10$, nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Chọn ý A.

★ Câu 3

Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình sau có nghiệm?

$$e^m + e^{3m} = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2}).$$

A. 2.

B. 0.

C. Vô số.

D. 1.

☑ Lời giải

Điều kiện xác định: $x \in [-1; 1]$.

Xét phương trình: $e^m + e^{3m} = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$ (1).

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2}$. Khi đó $t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$e^m + e^{3m} = 2t\left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow e^m + e^{3m} = t(t^2 + 1) \Leftrightarrow (e^m)^3 + e^m = t^3 + t \quad (2).$$

Xét hàm số: $g(u) = u^3 + u$ trên $\mathbb{R}$ có: $g'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó: $(2) \Leftrightarrow g(e^m) = g(t) \Leftrightarrow e^m = t$.

Khi đó ta có $(1) \Leftrightarrow e^m = x + \sqrt{1-x^2}$ (3)

Xét hàm số: $f(x) = x + \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1; 1]$. Có:

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in [-1; 1].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $x \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow -1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2}.$$

Do $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in \{0\}$.

Chọn ý D.

★ Câu 4

Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình $f(3^x) + f(2x-1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

✓ *Lời giải*

Ta có:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{x^2+1} - x) + e^{-x} - e^x = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} + e^{-x} - e^x \\ &= -\left[\ln(\sqrt{x^2+1} + x) + e^x - e^{-x} \right] = -f(x) \end{aligned}$$

Phương trình đã cho tương đương với: $f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) (*)$

Xét hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1} + x} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3^x = 1 - 2x \Leftrightarrow 3^x + 2x - 1 = 0 (**)$$

Xét hàm số $g(x) = 3^x + 2x - 1$ có $g'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Suy ra phương trình $(**)$ có duy nhất một nghiệm $x = 0$.

Chọn ý C.

★ Câu 5

Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$$(3a^2 + 12a + 15)\log_{27}(2x - x^2) + \left(\frac{9}{2}a^2 - 3a + 1\right)\log_{\sqrt{11}}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2\log_9(2x - x^2) + \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)$$

A. 2.

B. 0.

C. Vô số.

D. 1.

☑ **Lời giải**

Điều kiện $0 < x < \sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình ban đầu tương đương

$$(a^2 + 4a + 5)\log_3(2x - x^2) + (9a^2 - 6a + 2)\log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4)\log_3(2x - x^2) + (9a^2 - 6a + 1)\log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)^2 \log_3(2x - x^2) + (3a - 1)^2 \log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3a - 1}{a + 2}\right)^2 = \frac{\log_3(2x - x^2)}{\log_{11}\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)} (*)$$

Mà vế trái của (*) luôn dương với mọi a nguyên dương.

$$\text{Vì } 0 < x < \sqrt{2} \text{ nên } 2 - x^2 < 2 \Rightarrow \frac{2}{2 - x^2} > 1 \Rightarrow \log_{11}\left(\frac{2}{2 - x^2}\right) > 0$$

Do đó từ (*) suy ra $\log_3(2x - x^2) > 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow$ không tồn tại x .

Vậy không có giá trị của tham số a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý B.

★ Câu 6

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình

$2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S .

A. 15.

B. 14.

C. 13.

D. 16.

☑ **Lời giải**

Ta có: $2x^2 - 5x + 4 > 0$ với mọi x nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\begin{cases} mx - 5 > 0 \\ mx - 5 \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > 5 \\ mx \neq 6 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất tương đương với ta nhận nghiệm $x=2$ và loại $x=5$ hoặc nhận nghiệm $x=5$ và loại $x=2$.

- Trường hợp 1: Nhận nghiệm $x=2$ và loại $x=5$.

$$\text{Điều này tương đương với } \begin{cases} 2m > 5 \\ 2m \neq 6 \\ \begin{cases} 5m \leq 5 \\ 5m = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{2} \\ m \neq 3 \\ \begin{cases} m \leq 1 \\ m = \frac{6}{5} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{vô lí}).$$

- Trường hợp 2: Nhận nghiệm $x=5$ và loại $x=2$.

$$\text{Điều này tương đương với } \begin{cases} 5m > 5 \\ 5m \neq 6 \\ \begin{cases} 2m \leq 5 \\ 2m = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{6}{5} \\ \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ m = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ 1 < m \leq \frac{5}{2} \\ m \neq \frac{6}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 10m = 30 \\ \begin{cases} 10 < 10m \leq 25 \\ m \neq 12 \end{cases} \end{cases}. \text{ Vì } 10m \in \mathbb{Z} \text{ nên } 10m \in \{11; 13; 14; \dots; 25\} \cup \{30\}.$$

Trong tập hợp này có 15 phần tử nên tập hợp S cũng có 15 phần tử.

$$\text{Chú ý: } m \in \left\{ \frac{11}{10}; \frac{13}{10}; \frac{14}{10}; \dots; \frac{25}{10} \right\} \cup \left\{ \frac{30}{10} \right\}.$$

Chọn ý A.

★ Câu 7

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$\ln(m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)) = \sin x$$

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

☑ **Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x) > 0 \\ m + 3 \sin x > 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x) &= e^{\sin x} \\ \Leftrightarrow m + 3 \sin x + \ln(m + 3 \sin x) &= e^{\sin x} + \sin x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(m+3\sin x)} + \ln(m+3\sin x) = e^{\sin x} + \sin x, \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$, $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $(1) \Leftrightarrow f[\ln(m+3\sin x)] = f(\sin x) \Leftrightarrow \ln(m+3\sin x) = \sin x$.

Đặt $a = \sin x$, $a \in [-1; 1]$. Phương trình trở thành: $\ln(m+3a) = a \Leftrightarrow m = e^a - 3a$.

Xét $g(a) = e^a - 3a$, $a \in [-1; 1]$, $g'(a) = e^a - 3 < 0$, $\forall a \in [-1; 1]$.

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì $g(1) \leq m \leq g(-1) \Leftrightarrow e - 3 \leq m \leq \frac{1}{e} + 3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m là: 0; 1; 2; 3.

Chọn ý B.

★ Câu 8

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn:

$$\begin{cases} e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y \\ \log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

☑ **Lời giải**

Ta có:

$$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + (3x+5y-10) = e^{x+3y-9} + (x+3y-9) \quad (1)$$

Do hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 3x+5y-10 = x+3y-9 \Leftrightarrow 2x+2y = 1$$

Khi đó phương trình

$$\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0, \text{ đặt } t = \log_5(x+5), t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 \quad (2)$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (m+6)^2 - 4(m^2+9) = -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn là 4 giá trị.

Chọn ý C.

★ Câu 9

Cho phương trình $\log_2(2x^2 - 4x + 4) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ và $0 < x < 100$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

☑ **Lời giải**

Điều kiện: $2x^2 - 4x + 4 > 0$ (*)

$$\text{Ta có } \log_2(2x^2 - 4x + 4) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2[2(x^2 - 2x + 2)] + (x^2 - 2x + 1) = 2^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x + 2) + \log_2 2 + (x^2 - 2x + 1) = 2^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2) = 2^{y^2} + y^2 \quad (1).$$

Xét hàm $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow f(\log_2(x^2 - 2x + 2)) = f(y^2) \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x + 2) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 2^{y^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 2^{y^2}.$$

Do $0 < x < 100 \Rightarrow 1 \leq (x-1)^2 + 1 = 2^{y^2} \leq 99^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log_2(99^2 + 1)$; do y nguyên dương nên ta suy ra $1 \leq y \leq 3$.

- $y = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (Thỏa mãn Đk (*) và x nguyên dương).
- $y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 16 \Rightarrow x^2 - 2x - 14 = 0$ (Không có giá trị nguyên nào thỏa mãn).
- $y = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 512 \Rightarrow x^2 - 2x - 510 = 0$ (Không có giá trị nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x; y) = (2; 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý C.

★ Câu 10

Cho phương trình $27^x + 3x \cdot 9^x + (3x^2 + 1)3^x = (m^3 - 1)x^3 + (m - 1)x$, m là tham số. Biết rằng giá trị m nhỏ nhất để phương trình đã cho có nghiệm trên $(0; +\infty)$ là $a + e \ln b$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $17a + 3b$ bằng

A. 26.

B. 54.

C. 48.

D. 18.

☑ *Lời giải*

Phương trình đã cho tương đương $x^3 + 3x^2 3^x + 3x \cdot (3^x)^2 + (3^x)^3 + x + 3^x = (mx)^3 + mx$

$$\Leftrightarrow (x + 3^x)^3 + x + 3^x = (mx)^3 + mx (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (*) suy ra $x + 3^x = mx$. Vì $x > 0$ suy ra $1 + \frac{3^x}{x} = m$.

Xét hàm số $f(x) = 1 + \frac{3^x}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(3^x \ln 3)x - 3^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3^x(x \ln 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 3} = \log_3 e.$$

Dấu của $f'(x)$ cũng là dấu của nhị thức bậc nhất $x \ln 3 - 1$, do đó ta có bảng biến thiên:

x	0	$\log_3 e$			$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$1 + e \cdot \ln 3$			$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của m để phương trình có nghiệm là $m = 1 + e \ln 3$.

Suy ra $a = 1, b = 3 \Rightarrow 17a + 3b = 17 + 9 = 26$.

Chọn ý **A.**

★ **Câu 11**

Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|)$$

Có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

☑ *Lời giải*

Điều kiện: $\frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình: } \frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|) (*)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + 2x^2 = 4(x + |x - m|)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) - \log_2 (|x - m| + 1) + 2x^2 - 4x = 4|x - m|$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2 (|x - m| + 1) + 2 + (4|x - m| + 4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2 (4|x - m| + 4) + (4|x - m| + 4) \quad (1)$$

- Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(2x^2 - 4x + 6) = f(4|x - m| + 4) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 6 = 4|x - m| + 4$

$$\Leftrightarrow 2|x - m| = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = x^2 - 2x + 1 \\ 2x - 2m = -(x^2 - 2x + 1) \end{cases} \quad (\text{do } x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases} \quad (2)$$

- Vẽ đồ thị hai hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ và $h(x) = x^2 + 1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy (bạn đọc tự vẽ hình)

(**Chú ý:** Hai đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(1; 2)$)

Để phương trình (*) có đúng ba nghiệm phân biệt thì (2) phải có đúng ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2m$ và hai đồ thị trên có đúng ba điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 2 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của m bằng 3.

Chọn ý B.

★ Câu 12

Cho các hàm số $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ thỏa mãn:

$$f_0(x) = \ln x + |\ln x - 2019| - |\ln x + 2019|, f_{n+1}(x) = |f_n(x)| - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Số nghiệm của phương trình $f_{2020}(x) = 0$ là:

A. 6058.

B. 6057.

C. 6059.

D. 6063.

☑ **Lời giải**

$$\text{Ta có: } f_{2020}(x) = 0 \Leftrightarrow f_{2019}(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f_{2018}(x) = 0 \\ f_{2018}(x) = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_{2017}(x) = \pm 1 \\ f_{2017}(x) = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_0(x) = 0 \\ f_0(x) = \pm 2 \\ \dots \\ f_0(x) = \pm 2020 \end{cases}.$$

$$\text{Xét hàm số } y = f_0(x) = \begin{cases} \ln x + 4038; 0 < x < e^{-2019} \\ -\ln x; e^{-2019} \leq x < e^{2019} \\ \ln x - 4038; x \geq e^{2019} \end{cases}, \text{ ta có: } y' = \begin{cases} \frac{1}{x}; 0 < x < e^{-2019} \\ -\frac{1}{x}; e^{-2019} \leq x < e^{2019} \\ \frac{1}{x}; x \geq e^{2019} \end{cases}.$$

Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = f_0(x)$:

x	0	$-e^{2019}$	e^{2019}	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty$	2019	-2019	$+\infty$

Vậy số nghiệm của phương trình là: $1009.2.3 + 2 + 3 = 6059$.

Chọn ý **C.**

★ **Câu 13**

Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$

B. $-5 \leq m \leq 5$

C. $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$

D. $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$

☑ **Lời giải**

$$3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5) \Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}}{3^{|m| + 5}} = \frac{\ln(|m| + 5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10} \cdot \ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = 3^{|m| + 5} \cdot \ln(|m| + 5)$$

Xét hàm số $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 5$ có $f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 5$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = f(|m| + 5) \Rightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 10 = |m| + 5 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 5 = |m|$$

Mà ta có $-\sqrt{6} \leq \sin x + \sqrt{5} \cos x \leq \sqrt{6}$

Nên để phương trình có nghiệm ta phải có

$$5 - \sqrt{6} \leq |m| \leq 5 + \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6} \\ -5 - \sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6} - 5 \end{cases}$$

Chọn ý C.

★ Câu 14

Tìm tham số m để tổng các nghiệm của phương trình sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$$1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x.$$

A. 0

B. 2

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

☑ **Lời giải**

$$1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x$$

$$\Leftrightarrow [(x^2 - mx - 1) + (x^2 - m^2x - 1)] \cdot 2^{-(x^2 - mx - 1)} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{(x^2 - m^2x - 1) - (x^2 - mx - 1)} + (x^2 - m^2x - 1).$$

Đặt $a = (x^2 - mx - 1)$, $b = (x^2 - m^2x - 1)$ thì phương trình trên trở thành

$$(a+b) \cdot 2^{-a} = a \cdot 2^{b-a} + b \Leftrightarrow a+b = a \cdot 2^b + b \cdot 2^a \Leftrightarrow a(2^b - 1) + b(2^a - 1) = 0 \quad (*).$$

Nếu $a=0$ hoặc $b=0$ thì phương trình (*) thỏa mãn.

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình (*) tương đương $\frac{2^b - 1}{b} + \frac{2^a - 1}{a} = 0 \quad (**).$

Ta để ý rằng

- Với $a > 0$ thì $2^a > 1$, tức là $2^a - 1 > 0$ nên $\frac{2^a - 1}{a} > 0$.
- Với $a < 0$ thì $2^a < 1$, tức là $2^a - 1 < 0$ nên $\frac{2^a - 1}{a} > 0$.

Suy ra $\frac{2^a - 1}{a} > 0, \forall a \neq 0$. Hoàn toàn tương tự: $\frac{2^b - 1}{b} > 0, \forall b \neq 0$.

Nên $\frac{2^b - 1}{b} + \frac{2^a - 1}{a} > 0, \forall a \neq 0, b \neq 0$. Suy ra phương trình (**) vô nghiệm.

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$. Tức là phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} x^2 - mx - 1 = 0 \\ x^2 - m^2x - 1 = 0 \end{cases}$.

Hai phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ và $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trùng nhau khi $m = 0$ hoặc $m = 1$.

- Nếu $m = 0$ thì hai phương trình đều là $x^2 - 1 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_1 = 0$.

- Nếu $m = 1$ thì hai phương trình đều là $x^2 - x - 1 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_2 = 1$.

Khi $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thì hai phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ và $x^2 - m^2x - 1 = 0$ không có nghiệm nào trùng nhau.

Phương trình bậc hai $x^2 - mx - 1 = 0$ có $\Delta > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_1 + x_2 = m$.

Phương trình bậc hai $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có $\Delta > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_3 + x_4 = m^2$.

Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt và tổng của chúng là

$$T_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + m^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$

$$T_3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}, \text{ nên } \min T_3 = -\frac{1}{4}.$$

So sánh $T_1, T_2, \min T_3$ thì được giá trị nhỏ nhất của tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $-\frac{1}{4}$ và đạt tại $m = -\frac{1}{2}$.

Chọn ý **C**.

★ Câu 15

Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

- A.** $(3,8;3,9)$. **B.** $(3,6;3,7)$. **C.** $(3,7;3,8)$. **D.** $(3,5;3,6)$.

☑ **Lời giải**

Điều kiện: $x > -1$.

Vì $x=0$ không thỏa mãn phương trình nên ta có

$$(1) \Leftrightarrow [m \ln(x+1) - x - 2][\ln(x+1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ln(x+1) = x + 2 \\ \ln(x+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x+2}{\ln(x+1)}, \\ x = \frac{1}{e} - 1 \end{cases} \quad (2)$$

Do nghiệm $x = \frac{1}{e} - 1 < 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn

$0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt sao cho

$0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}}{\ln^2(x+1)}. f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} = 0, (3).$$

Xét hàm số $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}$ có $h'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0$ nên $h(x)$

đồng biến trên $(0; +\infty)$ do đó phương trình $f'(x) = 0$ có không quá một nghiệm.

Mà $f'(2) \cdot f'(4) < 0$ và $f'(x)$ là hàm số liên tục trên $[2; 4]$ suy ra phương trình (3) có duy nhất một nghiệm $x_0 \in (2; 4)$. Từ đó ta có bảng biến thiên:

x	0	2	x_0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{\ln 3}$	$\frac{6}{\ln 5}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$0 < x_1 < 2 < 4 < x_2 \text{ khi và chỉ khi } m > \frac{6}{\ln 5} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{6}{\ln 5}; +\infty \right).$$

$$\text{Vậy } a = \frac{6}{\ln 5} \in (3,7; 3,8).$$

Chọn ý **C**.

★ Câu 16

Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt là

$$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$$

A. 45.

B. 38.

C. 34.

D. 27.

☑ **Lời giải**

Phương trình tương đương với

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) = 27 + 3^{3-x} \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 3t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 3-x \Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x \\ \Leftrightarrow m = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27.$$

$$\text{Đặt } g(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$				11	
			7			$-\infty$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $7 < m < 11 \Rightarrow m \in \{8; 9; 10\}$. Vậy tổng các giá trị m bằng 27.

Chọn ý **D**.

★ Câu 17

Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

A. 4036.

B. 4034.

C. 4038.

D. 4040.

✓ **Lời giải**

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2) \\ \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)(1)$$

Xét hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ với $t \geq 0$.

Hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = 2^t \cdot \log_2(t+2) \cdot \ln 2 + \frac{2^t}{(t+2) \ln 2} > 0, \forall t \geq 0.$$

Vậy hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Từ (1)} \Leftrightarrow f((x-1)^2) &= f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ -(x-1)^2 = 2(x-m) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ 2m = x^2 + 1 & (2) \end{cases} (*) \end{aligned}$$

Xét phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	
		+	-
$g(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m < 3 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ vô nghiệm khi $2m > 3 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Xét phương trình $2m = x^2 + 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^2 + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		0	
		-	+
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ vô nghiệm khi $2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

- Khi $m = \frac{3}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có nghiệm $x = 2$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2}$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

- Khi $m = \frac{1}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = 2 \pm \sqrt{2}$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có nghiệm $x = 0$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

Xét phương trình $-x^2 + 4x - 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra không tồn tại m để phương trình (1) và (2) có cùng tập nghiệm gồm 2 phần tử. Vậy không tồn tại m để (*) có 2 nghiệm phân biệt.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt.

- TH1: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.
- TH2: (2) có 2 nghiệm phân biệt và (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.
- TH3: (1) có nghiệm $x = 2$ và (2) có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Kết hợp với điều kiện m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ ta có $m \in \left[-2019; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2019\right]$.

Vì m nguyên nên ta có 4038 giá trị của m .

Chọn ý **C**.

★ Câu 18

Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để phương trình

$$\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a$$

có hai nghiệm phân biệt?

A. 0.

B. 2022.

C. 2014.

D. 2015.

☑ **Lời giải**

Phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} - x = a$

Đặt hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} - x$ có tập xác định $D = (-5; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$

Ta có : $f'(x) = \frac{-1}{(x+5)\ln^2(x+5)} - \frac{3^x \ln 3}{(3^x - 1)^2} - 1 < 0, \forall x \in D$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định

Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \frac{1}{3^{-5} - 1} + 5 = 5 - \frac{243}{242}$; $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Bảng biến thiên

x	-5	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	-
$f(x)$	$5 - \frac{243}{242}$	$+\infty$	$+\infty$	
		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Phương trình $f(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a \geq 5 - \frac{243}{242}$

Do $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [4; 2018] \end{cases}$

Vậy có $2018 - 4 + 1 = 2015$ giá trị của a .

Chọn ý **D.**

★ Câu 19

Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-2019} + \frac{1}{x-2020}$ và $y = e^x - m + 1$ (m tham số) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để (C_1) cắt $-\infty$ tại đúng 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020.

B. 2019.

C. 2018.

D. 2022.

☑ **Lời giải**

$$e^x + e^{-x} = 2 \cos ax + 4 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cos ax + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = \left(2 \cos \frac{ax}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{ax}{2} & (1) \\ e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -2 \cos \frac{ax}{2} & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $x=x_0$ là nghiệm của (1) thì $x=-x_0$ là nghiệm của (2).

Vậy suy ra phương trình đã cho có $2 \cdot 2019 = 4038$ nghiệm.

Chọn ý **D.**

★ Câu 21

Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ để phương trình $(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x - m$ có đúng hai nghiệm thực là

A. 2022.

B. 2021.

C. 2.

D. 1.

☑ **Lời giải**

- Điều kiện: $x > -\frac{1}{4}$.
- Với $x=1$ thay vào phương trình $(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x - m$ (*) ta được $m=2$.
- Khi $m=2$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Dễ thấy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x_0 \neq 1$.

$\Rightarrow m=2$ thì phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực.

- Với $x \neq 1$ thì:

$$(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x - m \Leftrightarrow \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) = \frac{2x-m}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1} = 0.$$

Xét hàm số $y = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1}$ với $x \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Ta có: $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3} + \frac{2}{(2x+1)\ln 5} + \frac{2-m}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ và $m < 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{4}$		-1	$+\infty$
y'		+		+
y		$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: phương trình $y=0$ có đúng 2 nghiệm $x_1 \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$; $x_2 \in (1; +\infty)$ với mọi $m < 2$.

Vậy với mọi giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt, tức là có 2022 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý A.

★ Câu 22

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho phương trình sau có nghiệm

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x - m + 2$$

A. Vô số.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

☑ *Lời giải*

Ta có: $2x^2 - x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 1 = 2\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) + \frac{7}{8} = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó điều kiện để phương trình xác định là $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (2x^2 - x + 1) = x^2 - 5x - m + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + 3x^2 + 3x + m + 1 = \log_2 (2x^2 - x + 1) + 1 + 4x^2 - 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + 3x^2 + 3x + m + 1 = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + 4x^2 - 2x + 2 \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad \forall t \in (0; +\infty)$, do đó

$f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên (2) $\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + m + 1 = 4x^2 - 2x + 2$

$$\Leftrightarrow m = x^2 - 5x + 1 \quad (3)$$

Xét hàm số $\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 5x + 1$, $f'(x) = 2x - 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{21}{4}$	$+\infty$

Vậy (3) có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\frac{21}{4}$. khi đó

$3x^2 + 3x + m + 1 = 3x^2 + 3x + x^2 - 5x + 1 + 1 = 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + (x-1)^2 + 1 > 0$ nên (1) đúng.

Vậy $m \geq -\frac{21}{4}$, mà m là số nguyên âm nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Chọn ý **D.**

★ Câu 23

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	2	-3	-1	$-\infty$

Điều kiện của m để bất phương trình $f(x+2) - xe^x < m$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x \in [-1; 1]$.

- A.** $m > f(1) + \frac{1}{e}$. **B.** $m > f(3) + 2e$. **C.** $m > f(-1) + \frac{1}{e}$. **D.** $m > f(3) - 2e$.

☑ **Lời giải**

Xét hàm số $g(x) = f(x+2) - xe^x$ trên đoạn $[-1; 1]$

Ta có: $g'(x) = f'(x+2) - (x+1)e^x$

Với mọi $x \in [-1; 1]$, ta có: $0 \leq (x+1)e^x$ và $1 \leq x+2 \leq 3$ suy ra $f'(x+2) < -1$

Do đó, ta có $g'(x) < 0, \forall x \in [-1; 1]$. Vì vậy $g(1) \leq g(x) \leq g(-1) = f(1) + \frac{1}{e}, \forall x \in [-1; 1]$.

Suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi

$$m > \max_{[-1;1]} g(x) \Rightarrow m > f(1) + \frac{1}{e}$$

Chọn ý A.

★ Câu 24

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 20.

B. 10.

C. 15.

D. 5.

✓ Lời giải

$$\frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 > 0 \text{ (vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x). (*)$$

Khi đó:

$$\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} - 1 \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{3(x^2 + x + 1)} \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) - \log_3 3(x^2 + x + 1) \geq -2(2x^2 + x + m + 1) + 6(x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) + 2(2x^2 + x + m + 1) \geq \log_3 3(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1). (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + 2t$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 2 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó (1) tương đương với

$$f(2x^2 + x + m + 1) \geq f(3(x^2 + x + 1)) \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 \geq 3(x^2 + x + 1) \text{ (thỏa mãn } (*))$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 \leq m.$$

BPT $x^2 + 2x + 2 \leq m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min g(x)$ với $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + 2$ với $x \in \mathbb{R}$ có $g'(x) = 2x + 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$

1

Từ bảng biến thiên suy ra $\min g(x) = 1$. Do đó $m \geq 1$.

Vì $m \in [-10; 10]$ nên tập $S = \{1; 2; \dots; 10\}$. Vậy S có 10 phần tử.

Chọn ý **B.**

★ Câu 25

Cho bất phương trình $9^x + (m-1) \cdot 3^x + m > 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) có nghiệm đúng $\forall x \geq 1$

- A. $m > 0$. B. $m \geq -\frac{3}{2}$. C. $m > -2$. D. $m > -\frac{3}{2}$.

☑ **Lời giải**

Đặt $t = 3^x$, $t(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} t = +\infty \Rightarrow$ với $x \in [1; +\infty)$, thì $t \in [3; +\infty)$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow t^2 + (m-1)t + m > 0$ (2)

Để (1) có nghiệm đúng $\forall x \geq 1$ thì (2) có nghiệm đúng $\forall t \geq 3$

$$\Leftrightarrow t^2 + (m-1)t + m > 0 \quad \forall t \geq 3 \Leftrightarrow t^2 - t > -m(t+1) \quad \forall t \geq 3 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t}{t+1} > -m \quad \forall t \geq 3 \quad (3)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 - t}{t+1} \text{ có } f'(t) = \frac{(2t-1)(t+1) - (t^2 - t)}{(t+1)^2} = \frac{2t^2 + t - 1 - t^2 + t}{(t+1)^2} = \frac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)^2}$$

$$\text{Với } t \geq 3, \quad t^2 + 2t - 1 \geq 3^2 + 2 \cdot 3 - 1 > 0 \quad \text{nên} \quad f'(t) > 0 \quad \forall t \in [3; +\infty)$$

$$\Rightarrow \min_{[3; +\infty)} f(t) = f(3) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Do đó } (3) \Leftrightarrow -m < \min_{[3; +\infty)} f(t) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}.$$

Chọn ý **D.**

★ Câu 26

Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2} (4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

- A. $S = \{-1; 1\}$. B. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$.
C. $S = \{-5; 5\}$. D. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$.

☑ **Lời giải**

Ta có

$$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \leq m^2$ là một hình tròn (C_1) tâm $I(2;2)$, bán kính $R_1=|m|$ với $m \neq 0$ hoặc là điểm $I(2;2)$ với $m=0$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$ là một đường tròn (C_2) tâm $J(-1;2)$, bán kính $R_2=2$.

- **TH1:** Với $m=0$ ta có: $I(2;2) \notin (C_2)$ suy ra $m=0$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.
- **TH2:** Với $m \neq 0$.

Để hệ $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \\ x^2+y^2+2x-4y+1=0 \end{cases}$ tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thì hình tròn

(C_1) và đường tròn (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau $\Leftrightarrow IJ=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3^2+0^2}=|m|+2$
 $\Leftrightarrow |m|=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Chọn ý **A.**

★ Câu 27

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình

$$\left| \frac{3\ln^2 x + 2\ln x + 12}{\ln^2 x - (m+1)\ln x + 4} \right| \geq 2$$

nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

☑ **Lời giải**

Đặt $t = \ln x$, $t \in \mathbb{R}$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm các giá trị nguyên của tham số m

để bất phương trình $\left| \frac{3t^2 + 2t + 12}{t^2 - (m+1)t + 4} \right| \geq 2$ (1) nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Để (1) nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$, điều kiện cần là $t^2 - (m+1)t + 4 = 0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta_t < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 3$ (*).

Điều kiện đủ: Do $3t^2 + 2t + 12 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ và với m thỏa mãn điều kiện (*), ta thấy $t^2 - (m+1)t + 4 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên (1) tương đương với

$$\frac{3t^2 + 2t + 12}{t^2 - (m+1)t + 4} \geq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t^2 + 2(m+2)t + 4 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0.$$

Kết hợp với điều kiện (*) và điều kiện m nguyên, ta được các giá trị m cần tìm là $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn ý B.

★ Câu 28

Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a \in (2; 3]$. B. $a \in (8; +\infty)$. C. $a \in (6; 7]$. D. $a \in (-6; -5]$.

☑ **Lời giải**

Đặt $t = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ suy ra $t \geq \frac{3}{4}$.

Bất phương trình trở thành $t + a \ln t + 1 \geq 0, t \geq \frac{3}{4}$.

Cần tìm $a_{\max}$ để $f(t) = t + a \ln t + 1 \geq 0, t \geq \frac{3}{4}$.

Có $f'(t) = 1 + \frac{a}{t} > 0, \forall t \geq \frac{3}{4} \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \frac{7}{4} + a \ln \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{-7}{4 \ln \frac{3}{4}} \approx 6,08.$$

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a \in (6; 7]$.

Chọn ý C.

★ Câu 29

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ của tham số m để bất phương trình $3 \log_x \leq 2 \log(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})$ có nghiệm thực?

- A. 2018. B. 2019. C. 4036. D. 2020.

☑ **Lời giải**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x} - (1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m > \frac{1-x}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}.$$

Bpt đã cho tương đương:

$$\begin{aligned}\log x^3 &\leq \log \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} \right)^2 \\ \Leftrightarrow x^3 &\leq \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} \right)^2 \\ \Leftrightarrow x\sqrt{x} &\leq \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} \right) \\ \Leftrightarrow m &\geq \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x} \right) + \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$$

Vậy $m \geq \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x) \geq \sqrt{2} \approx 1,414$.

Vậy có tất cả 2018 giá trị của tham số m thỏa mãn.

Chọn ý A.

★ Câu 30

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(\ln^4 x - 16) + 3m(\ln^2 x - 4) - 14(\ln x - 2) \geq 0$ đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng:

A. $-\frac{3}{8}$.

B. -2 .

C. $-\frac{7}{8}$.

D. $\frac{1}{2}$.

☑ *Lời giải*

Đặt $t = \ln x, t \in \mathbb{R}$ ta được :

$$f(t) = m^2(t^4 - 16) + 3m(t^2 - 4) - 14(t - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2) \left[m^2(t^3 + 2t^2 + 4t + 8) + 3m(t+2) - 14 \right] \geq 0 \Leftrightarrow (t-2)g(t) \geq 0$$

Ta có bất phương trình đã cho nghiệm đúng $\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Nếu $t=2$ không phải là nghiệm của $g(t)$ thì $f(t)$ sẽ đổi dấu khi t đi qua $t=2$. Do đó điều kiện cần để $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ là $t=2$ phải là nghiệm của $g(t)=0$

$$\Rightarrow g(2) = 0 \Leftrightarrow 32m^2 + 12m - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

Thử lại:

- Với $m = \frac{1}{2}$ thì $f(t) = \frac{1}{4}(t-2)^2(t^2 + 4t + 18) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

- Với $m = -\frac{7}{8}$ thì $f(t) = \frac{1}{64}(t-2)^2(49t^2 + 196t + 420) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $m = -\frac{7}{8}$ thỏa mãn.

Vậy $S = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{7}{8}\right\}$. Nên tổng các phần tử của S là $\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = -\frac{3}{8}$.

Chọn ý **A.**

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

2.1. ĐỀ BÀI.

★ **Câu 1.** Cho các số thực x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ là

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2+\sqrt{10}}{4}$.

C. $\frac{5+\sqrt{10}}{4}$.

D. $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

★ **Câu 2.** Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là

A. $\sqrt{10}$.

B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

C. $2\sqrt{10}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

★ **Câu 3.** Cho 2 số thực $a, b > 1$ thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng?

A. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$ B. $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$ C. $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$ D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$

★ **Câu 4.** Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = |x-y| + |x^3 - y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + 2b$

A. 25.

B. 34.

C. 32.

D. 41.

★ **Câu 5.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\ln(b^2 + c^2 + 1) - 2\ln(3a) = 9a^2 - b^2 - c^2 - 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2(b+c)}{a} + \frac{5a^2-1}{2a^3}$ đạt được khi $a+2b+3c$ bằng?

A. 8.

B. 10.

C. 11.

D. 9.

★ **Câu 6.** Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $4 + 3^{x^2-2y+2} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 2y$.

A. $-\frac{9}{4}$.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $-\frac{33}{8}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

★ **Câu 7.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\log_{16} \frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1} = x(x-2) + y(y-2) + z(z-2).$$

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng?

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

★ **Câu 8.** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3x^4y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}$.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

★ **Câu 9.** Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 (x+3y) \leq 2 + 2\log_2 y$.

Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a} - \frac{b}{c}$ với a, b, c là

các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức

$$P = a + b + c$$

A. 30.

B. 15.

C. 17.

D. 10.

★ **Câu 10.** Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

★ **Câu 11.** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y(x-4).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

A. 3.

B. $5 + 2\sqrt{5}$.

C. $3 - 2\sqrt{5}$.

D. $1 + \sqrt{5}$.

★ **Câu 12.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}.$$

A. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}.$

B. $\frac{37-\sqrt{249}}{94}.$

C. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}.$

D. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}.$

★ **Câu 13.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$$\log_{\sqrt{3}}(y^2+8y+16) + \log_2(5-x)(1+x) = 2\log_3 \frac{5+4x-x^2}{3} + \log_2(2y+8)^2.$$

Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left| \sqrt{x^2+y^2} - m \right|$ không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con không phải là tập rỗng?

A. 2047.

B. 16383.

C. 16384.

D. 32.

★ **Câu 14.** Cho x, y là các số dương thỏa mãn

$$\log_2 \frac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0.$$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}$. Tính

$$T = 10M - m.$$

A. $T = 60.$

B. $T = 94.$

C. $T = 104.$

D. $T = 50.$

★ **Câu 15.** Cho các số thực a, b, m, n sao cho $2m+n < 0$ và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \log_2(a^2+b^2+9) = 1 + \log_2(3a+2b) \\ 9^{-m} \cdot 3^{-n} \cdot 3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln[(2m+n+2)^2+1] = 81 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2}$.

A. $2\sqrt{5}-2.$

B. 2.

C. $\sqrt{5}-2.$

D. $2\sqrt{5}.$

★ **Câu 16.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2 \geq 9$ và $\log_{x^2+y^2}(x(8x^2+8y^2-7x)-7y^2) \geq 2$.

Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x+y$ lần lượt là M và m . Khi đó giá trị của biểu thức $(M+3\sqrt{2}m)$ bằng

A. $12+18\sqrt{2}.$

B. 24.

C. $6\sqrt{10}.$

D. $10-2\sqrt{3}.$

★ **Câu 17.** Cho các số thực $a, b, c \in (1; +\infty)$ thỏa mãn $a^{10} \leq b$ và $\log_a b + 2\log_b c + 5\log_c a = 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a$.

A. 25.

B. $\frac{90}{12}$.

C. 15.

D. 21.

★ **Câu 18.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \geq 0; y \geq 0; z \geq -1$ sao cho:

$\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3}$.

A. $S = 4\sqrt{2}$.

B. $S = 6$.

C. $S = 6\sqrt{3}$.

D. $S = 4$.

★ **Câu 19.** Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2(12-a-b) = \frac{1}{2}\log_2(a+2)(b+2)+1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{a^3}{b+2} + \frac{b^3}{a+2} + \frac{45}{a+b}$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Hỏi giá trị của $m+n$ bằng bao nhiêu?

A. 62.

B. 63.

C. 64.

D. 65.

2.2. HƯỚNG DẪN GIẢI.

★ Câu 1

Cho các số thực x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ là

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2+\sqrt{10}}{4}$.

C. $\frac{5+\sqrt{10}}{4}$.

D. $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

☑ *Lời giải*

Điều kiện $4x^2 + 9y^2 \neq 1$.

- Nếu $4x^2 + 9y^2 < 1$.

Ta có $(2x)^2 + (3y)^2 < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ 3y < 1 \end{cases} \Rightarrow x + 3y < \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow P < \frac{3}{2}$. (1)

- Nếu $4x^2 + 9y^2 > 1$.

Khi đó $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+3y \geq 4x^2+9y^2 \Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$.

Biểu thức P được viết lại thành: $P = x + 3y = \frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right) + \left(3y-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$.

Áp dụng BĐT **Cauchy** ta được:

$$\left[\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right) + \left(3y-\frac{1}{2}\right)\right]^2 \leq \left(\frac{1}{4}+1\right)\left[\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y-\frac{1}{2}\right)^2\right] \leq \frac{5}{8}.$$

Suy ra $P = \frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right) + \left(3y-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \leq \frac{3+\sqrt{10}}{4}$. (2)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2\left(2x-\frac{1}{2}\right) = 3y-\frac{1}{2} \\ x+3y = \frac{3+\sqrt{10}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6y=1 \\ 4x+12y=3+\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{10}}{20} \\ y = \frac{5+2\sqrt{10}}{30} \end{cases}.$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

Chọn ý **D**.

★ Câu 2

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là

- A. $\sqrt{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. C. $2\sqrt{10}$. D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

☑ **Lời giải**

Do $a^2 + b^2 > 1$ nên từ $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1 \Rightarrow a+b \geq a^2 + b^2 > 1$.

Suy ra:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 > 1 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi

đó:

$$P = 2a + 4b - 3 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 4\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{(2^2 + 4^2) \cdot \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right]} \leq \sqrt{20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{10}$$

(Áp dụng BĐT **Cauchy**)

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(b - \frac{1}{2}\right) > 0 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \\ b = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \sqrt{10} \text{ khi } \begin{cases} a = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \\ b = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}.$$

Chọn ý A.

★ **Câu 3**

Cho 2 số thực $a, b > 1$ thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng?

- A. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$ B. $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$ C. $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$ D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$

☑ **Lời giải**

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{1 - \log_2 a}{\log_3 2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}} + \sqrt{\log_2 3} \sqrt{1-t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\log_2 3}} - \frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1-t}} \quad (t = \log_2 a)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-t} = \log_2 3 \sqrt{t} \Leftrightarrow 1-t = t \cdot \log_2^2 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1+\log_2^2 3}$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{1+\log_2^2 3}\right) = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2} \Rightarrow \min P = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$$

Chọn ý **A.**

★ **Câu 4**

Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2+y^2+1) = 3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = |x-y| + |x^3-y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + 2b$

A. 25.

B. 34.

C. 32.

D. 41.

✓ **Lời giải**

Ta sẽ chuyển bài toán về giải phương trình logarit để tìm mối liên hệ giữa x, y .
Đặt $t = x^2 + y^2 (t \geq 0)$.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2^{t-1} + \log_3(t+1) - 3 \text{ có } f'(t) = 2^{t-1} \cdot \ln 2 + \frac{1}{(t+1) \cdot \ln 3} > 0 \forall t \geq 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow xy \in [-1; 1]$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned} S^2 &= (x-y)^2 + (x-y)^2 (x^2 + xy + y^2)^2 + 2(x-y)^2 (x^2 + xy + y^2) \\ &= (x-y)^2 (1 + x^2 + xy + y^2)^2 = (2 - 2xy)(3 + xy)^2 \leq \frac{512}{27} \Rightarrow S \leq \frac{16\sqrt{6}}{9}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 16 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 34.$$

Chọn ý **B.**

★ **Câu 5**

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$\ln(b^2 + c^2 + 1) - 2\ln(3a) = 9a^2 - b^2 - c^2 - 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \frac{2(b+c)}{a} + \frac{5a^2-1}{2a^3}$ đạt được khi $a+2b+3c$ bằng?

A. 8.

B. 10.

C. 11.

D. 9.

☑ **Lời giải**

Giả thiết bài toán được viết lại như sau:

$$\ln(b^2 + c^2 + 1) + b^2 + c^2 + 1 = \ln(9a^2) + 9a^2.$$

Xét hàm số $f(x) = \ln(x) + x$ ($x > 0$) có $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \forall x > 0$.

Nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Tại lại có:

$$f(b^2 + c^2 + 1) = f(9a^2) \Rightarrow b^2 + c^2 + 1 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 9a^2 - 1 > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{3}.$$

Ta có

$$P = \frac{2(b+c)}{a} + \frac{5a^2-1}{2a^3} \leq \frac{2\sqrt{2(b^2+c^2)}}{a} + \frac{5a^2-1}{2a^3} = \frac{2\sqrt{18a^2-2}}{a} + \frac{5a^2-1}{2a^3} = 2\sqrt{18-\frac{2}{a^2}} + \frac{5}{2a} - \frac{1}{2a^3}.$$

Đặt $t = \frac{1}{a}$ ($0 < t < 3$). Biểu thức P được viết lại thành

$$P \leq f(t) = 2\sqrt{18-2t^2} + \frac{5}{2}t - \frac{1}{2}t^3.$$

Ta có: $f'(t) = \frac{-4t}{\sqrt{18-2t^2}} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}t^2, \forall t \in (0; 3); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$$\Rightarrow P \leq f(t) \leq f(1) = 10.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} t=1 \\ b=c \\ b^2+c^2=9a^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=c=2 \end{cases}$.

Suy ra $a+2b+3c=11$.

Chọn ý C.

★ **Câu 6**

Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $4 + 3^{x^2-2y+2} = (4 + 9^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 2y$.

A. $-\frac{9}{4}$.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $-\frac{33}{8}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

☑ **Lời giải**

Ta sẽ đưa về việc giải phương trình từ đó tìm ra mối liên hệ giữa x, y với ý tưởng cũ quy về hàm đặc trưng.

Từ giả thiết ta có $\frac{4+3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}} = \frac{4+3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{4+3^x}{7^x}$ có $f'(x) = -4 \cdot \frac{7^x \cdot \ln 7}{7^{2x}} + \left(\frac{3}{7}\right)^x \ln \frac{3}{7} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có: $f(x^2 - 2y + 2) = f(2(x^2 - 2y)) \Leftrightarrow x^2 - 2y = 2$.

$\Rightarrow S = x + 2y = x^2 + x - 2 \geq -\frac{9}{4}$.

Chú ý. Ngoài ra ta có thể đặt $t = x^2 - 2y$ sau đó dùng máy tính để giải phương trình mũ!

Chọn ý A.

★ Câu 7

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\log_{16} \frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1} = x(x-2) + y(y-2) + z(z-2).$$

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng?

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

☑ **Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \log_{16} \left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1} \right) &= x(x-2) + y(y-2) + z(z-2) \\ \Leftrightarrow \log_{16} (x+y+z) + 2(x+y+z) &= \log_{16} (2x^2+2y^2+2z^2+1) + x^2 + y^2 + z^2 \\ \Leftrightarrow \log_4 4(x+y+z) + 4(x+y+z) &= \log_4 (2x^2+2y^2+2z^2+1) + (2x^2+2y^2+2z^2+1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_4 t + t (t > 0)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 4} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà ta có $f[4(x+y+z)] = f(2x^2+2y^2+2z^2+1) \Rightarrow 4(x+y+z) = 2x^2+2y^2+2z^2+1$.

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{5}{2}.$$

Xét mặt cầu (S) có toạ độ tâm và bán kính là $I(1;1;1)$ và $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ta có $P = \frac{x+y-z}{x+y+z} \Leftrightarrow (P-1)x + (P-1)y + (P+1)z = 0 \quad (\alpha)$

Mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) có điểm chung và điều kiện cần và đủ là

$$d[I;(\alpha)] \leq R \Leftrightarrow \frac{|P-1+P-1+P+1|}{\sqrt{2(P-1)^2+(P+1)^2}} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3P^2 - 2P - 13 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\sqrt{10}}{3} \leq P \leq \frac{1+2\sqrt{10}}{3}.$$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \frac{x+y-z}{x+y+z}$ là $\frac{2}{3}$.

Chọn ý B.

★ Câu 8

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{3x^4y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}$.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

✓ **Lời giải**

Giả thiết bài toán được viết lại thành:

$$\log_3(x+4y) + x + 4y = \log_3(3x+3y) + 3(x+y)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 x + x \ (x > 0)$ có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 1 > 0 \ \forall x > 0$.

Vậy nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà ta lại có $f(x+4y) = f(3x+3y) \Rightarrow x+4y = 3x+3y \Leftrightarrow y = 2x$.

Biểu thức P được viết lại thành:

$$P = \frac{6x^5 + 4x^2 + 8x^2}{x(3x)^2} = \frac{6x^5 + 12x^2}{9x^3} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3x} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3x} + \frac{2}{3x} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{2}{3}x^2 \cdot \frac{2}{3x} \cdot \frac{2}{3x}} = 2.$$

Vậy $P_{\min} = 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1; y = 2$.

Chọn ý C.

★ Câu 9

Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2(x+3y) \leq 2 + 2\log_2 y$. Biết giá trị

lớn nhất của biểu thức $S = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a} - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$

A. 30.

B. 15.

C. 17.

D. 10.

☑ **Lời giải**

Theo giả thiết ta có $\log_2(x^2 + 3xy) \leq \log_2 4y^2 \Leftrightarrow x^2 + 3xy \leq 4y^2 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq 1$

Khi đó chia cả tử và mẫu cho y ta chuyển về bài toán xét tính đơn điệu của hàm.

Đặt $t = \frac{x}{y} (0 < t \leq 1)$.

Suy ra $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+2}} - \frac{2t+3}{t+2}$ có :

$$f'(t) = \frac{5-3t}{2\sqrt{(t^2-t+2)^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} \geq \frac{2}{2\sqrt{2^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} > 0, \forall t \in (0;1].$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;1] \Rightarrow f(t) \leq f(1) = \sqrt{2} - \frac{5}{3} \Rightarrow P = 10$.

Chọn ý **D.**

★ **Câu 10**

Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6 ?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

☑ **Lời giải**

Xét $x \in [0; \ln 4]$. Đặt $t = e^x \Rightarrow t \in [1; 4]$. Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1; 4]$

Đạo hàm: $g'(t) = 2t - 4$. Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Ta có: $g(1) = m - 3$; $g(2) = m - 4$; $g(4) = m$

Giá trị nhỏ nhất của $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0; \ln 4]$ sẽ thuộc

$$A = \{|m-3|; |m-4|; |m|\}$$

- Xét $|m-4| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \Rightarrow A = \{7; 6; 10\} \\ m = -2 \Rightarrow A = \{5; 6; 2\} \end{cases}$

Ta thấy $m = 10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$

- Xét $|m-3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \Rightarrow A = \{5; 6; 9\} \\ m = -3 \Rightarrow A = \{7; 6; 3\} \end{cases}$ (không thỏa mãn)

- Xét $|m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \Rightarrow A = \{2; 3; 6\} \\ m = -6 \Rightarrow A = \{10; 9; 6\} \end{cases}$

Ta thấy $m = -6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ý C.

★ Câu 11

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y \quad x - 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

- A. 3. B. $5 + 2\sqrt{5}$. C. $3 - 2\sqrt{5}$. D. $1 + \sqrt{5}$.

☑ **Lời giải**

Ta có $5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y \quad x - 4$

$$\Leftrightarrow 5^{x+4y} - 3^{-x-4y} + x + 4y = 5^{xy-1} - 3^{1-xy} + xy - 1 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t - 3^{-t} + t$ trên $\mathbb{R}$. Có $f'(t) = 5^t \ln 5 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $x + 4y = xy - 1 \quad (3)$.

- Dễ thấy $x = 4$ không thỏa mãn (3).
- Với $x \neq 4$, $(3) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-4}$ kết hợp điều kiện $y > 0$ suy ra $x > 4$.

Do đó $P = x + y = x + \frac{x+1}{x-4}$. Xét hàm số $g(x) = x + \frac{x+1}{x-4}$ trên $(4; +\infty)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 1 - \frac{5}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + \sqrt{5} \\ x = 4 - \sqrt{5} \end{cases}$$

x	4	$4 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$5 + 2\sqrt{5}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min} = \min_{(4; +\infty)} g(x) = 5 + 2\sqrt{5}$.

Chọn ý B.

★ Câu 12

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$.

B. $\frac{37-\sqrt{249}}{94}$.

C. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$.

D. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

☑ **Lời giải**

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow x+y > 0$.

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) + 2 - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy+2-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y) + (3x+3y) = 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2\log_3 t + t$, $t \in (0; +\infty)$, có $f'(t) = \frac{2}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2 = 3x+3y$

Đặt $\begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}$. Khi đó $P = \frac{3a-b+3}{2a+6}$ và (2) là: $3(a-1)^2 + b^2 = 1$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3}(a-1) = \cos t, \\ b = \sin t, \end{cases} (t \in [0; 2\pi])$, khi đó

$$P = \frac{3\cos t - \sqrt{3}\sin t + 6\sqrt{3}}{2\cos t + 8\sqrt{3}} \Leftrightarrow (2P-3) \cdot \cos t + \sqrt{3}\sin t = 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P$$

Do phương trình luôn có nghiệm t nên ta có

$$(2P-3)^2 + 3 \geq (6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P)^2 \Leftrightarrow 47P^2 - 69P + 24 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{69-\sqrt{249}}{94} \leq P \leq \frac{69+\sqrt{249}}{94}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Chọn ý [C].

Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$$\log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + \log_2(5 - x)(1 + x) = 2\log_3 \frac{5 + 4x - x^2}{3} + \log_2(2y + 8)^2.$$

Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - m \right|$ không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con không phải là tập rỗng?

A. 2047.

B. 16383.

C. 16384.

D. 32.

☑ *Lời giải*

Điều kiện: $y \neq -4; -1 < x < 5$.

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + \log_2(5 - x)(1 + x) = 2\log_3 \frac{-x^2 + 4x + 5}{3} + \log_2(2y + 8)^2$ (1)

$$\Leftrightarrow 2\log_3(y + 4)^2 + \log_2(-x^2 + 4x + 5) = 2\left[\log_3(-x^2 + 4x + 5) - 1\right] + \log_2\left[4(y + 4)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(y + 4)^2 - \log_2(y + 4)^2 = 2\log_3(-x^2 + 4x + 5) - \log_2(-x^2 + 4x + 5) \quad (2).$$

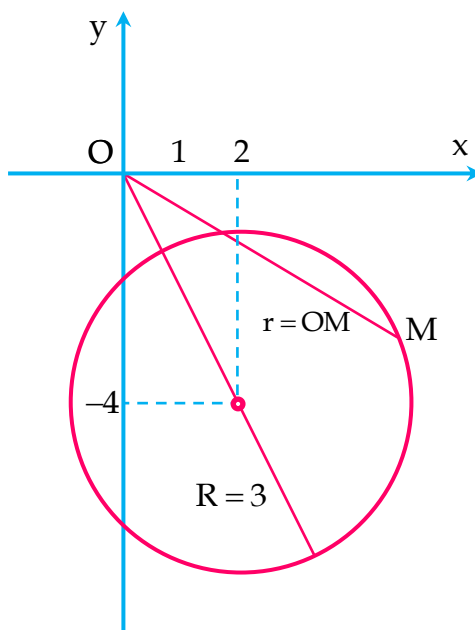
Xét hàm số $f(t) = 2\log_3 t - \log_2 t, t > 0$, có:

$$f'(t) = \frac{2}{t \ln 3} - \frac{1}{t \ln 2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{2 \ln 2 - \ln 3}{\ln 2 \cdot \ln 3} > 0, \forall t > 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến với $t > 0$, suy ra:

$$(2) \Leftrightarrow (y + 4)^2 = -x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$$

Suy ra Tập hợp các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn (1) là đường tròn (C) tâm là $I(2; -4)$ và bán kính $R = 3$ bỏ bớt 2 điểm $(-1; -4), (5; -4)$.



Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường tròn $(C) \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$ là khoảng cách từ M đến gốc O .

Vì $IO = 2\sqrt{5} > 3$ nên O nằm ngoài (C) và ta có:

$$2\sqrt{5} - 3 \leq r \leq 2\sqrt{5} + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} - 3 - m \leq r - m \leq 2\sqrt{5} + 3 - m$$

$$\Rightarrow \text{Với } P = |r - m|, \max P = \max \left\{ |2\sqrt{5} - 3 - m|, |2\sqrt{5} + 3 - m| \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Để thỏa mãn bài toán ta phải có: } \begin{cases} |2\sqrt{5} - 3 - m| \leq 10 \\ |2\sqrt{5} + 3 - m| \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leq 2\sqrt{5} - 3 - m \leq 10 \\ -10 \leq 2\sqrt{5} + 3 - m \leq 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{5} - 13 \leq m \leq 2\sqrt{5} + 7 \\ 2\sqrt{5} - 7 \leq m \leq 13 + 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} - 7 \leq m \leq 2\sqrt{5} + 7.$$

Ta có: $2\sqrt{5} - 7 \approx -2,5; 2\sqrt{5} + 7 \approx 11,5 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; \dots; 11\} \Rightarrow$ Tập S có 14 phần tử $\Rightarrow$ Số tập con khác rỗng của tập S là: $2^{14} - 1 = 16383$.

Chọn ý B.

★ Câu 14

Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$. Gọi

M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2}$. Tính

$$T = 10M - m.$$

A. $T = 60$.

B. $T = 94$.

C. $T = 104$.

D. $T = 50$.

☑ **Lời giải**

$$\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 5y^2) - \log_2 (x^2 + 10xy + y^2) + \log_2 2 + 2(x^2 + 5y^2) - (x^2 + 10xy + y^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 + 10y^2) + 2(x^2 + 5y^2) \leq \log_2 (x^2 + 10xy + y^2) + (x^2 + 10xy + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10y^2 \leq x^2 + 10xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{y}\right) + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 9$$

Ta viết lại biểu thức $P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 9}{\frac{x}{y} + 1}$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, điều kiện: $1 \leq t \leq 9$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + t + 9}{t + 1}$; có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 8}{(t + 1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}$

Và $f(1) = \frac{11}{2}$; $f(2) = 5$; $f(9) = \frac{99}{10}$

Nên suy ra $M = \frac{99}{10}$, $m = 5$. Vậy $T = 10M - m = 94$.

Chọn ý B.

★ Câu 15

Cho các số thực a, b, m, n sao cho $2m + n < 0$ và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \log_2(a^2 + b^2 + 9) = 1 + \log_2(3a + 2b) \\ 9^{-m} \cdot 3^{-n} \cdot 3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln[(2m + n + 2)^2 + 1] = 81 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a - m)^2 + (b - n)^2}$.

A. $2\sqrt{5} - 2$.

B. 2.

C. $\sqrt{5} - 2$.

D. $2\sqrt{5}$.

☑ **Lời giải**

Ta có: $\log_2(a^2 + b^2 + 9) = 1 + \log_2(3a + 2b) \Leftrightarrow \log_2(a^2 + b^2 + 9) = \log_2[2(3a + 2b)]$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 9 = 6a + 4b \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 2)^2 = 4$.

Gọi $H(a; b)$, suy ra H thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 2$.

Lại có $9^{-m} \cdot 3^{-n} \cdot 3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln[(2m + n + 2)^2 + 1] = 81$

$\Leftrightarrow 3^{-(2m+n) + \left(\frac{-4}{2m+n}\right)} + \ln[(2m + n + 2)^2 + 1] = 81, (1)$

Với $\forall m, n$ thỏa mãn $2m + n < 0$, ta có:

- $-(2m + n) + \frac{-4}{2m + n} \geq 2\sqrt{\left[-(2m + n)\right] \cdot \left(\frac{-4}{2m + n}\right)} = 4 \Rightarrow 3^{-(2m+n) + \left(\frac{-4}{2m+n}\right)} \geq 81$
- $\ln[(2m + n + 2)^2 + 1] \geq \ln 1 = 0$.

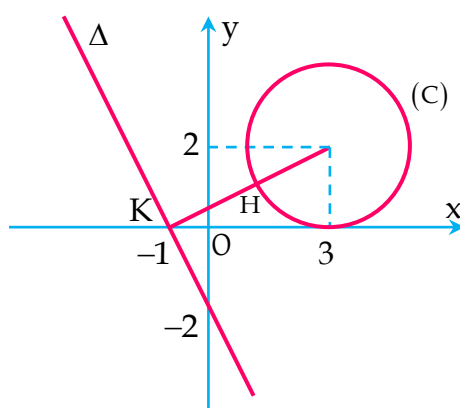
Suy ra $3^{-(2m+n) + \left(\frac{-4}{2m+n}\right)} + \ln[(2m + n + 2)^2 + 1] \geq 81$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} -(2m+n) = \frac{-4}{2m+n} \\ 2m+n+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m+n+2=0.$$

Gọi $K(m;n)$, suy ra K thuộc đường thẳng Δ có phương trình $2x+y+2=0$.

$$\text{Ta có: } P = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2} = HK.$$

$$d(I, \Delta) = \frac{|2 \cdot 3 + 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5} > 2 \Rightarrow \text{đường thẳng } \Delta \text{ không cắt đường tròn (C)}.$$



Do đó HK ngắn nhất khi K là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng Δ và điểm H là giao điểm của đoạn thẳng IK với đường tròn (C) .

$$\text{Lúc đó } HK = IK - IH = 2\sqrt{5} - 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2\sqrt{5} - 2$.

Chọn ý **A.**

★ Câu 16

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 \geq 9$ và $\log_{x^2+y^2} (x(8x^2 + 8y^2 - 7x) - 7y^2) \geq 2$.

Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + y$ lần lượt là M và m .

Khi đó giá trị của biểu thức $(M + 3\sqrt{2}m)$ bằng

A. $12 + 18\sqrt{2}$.

B. 24.

C. $6\sqrt{10}$.

D.

$10 - 2\sqrt{3}$.

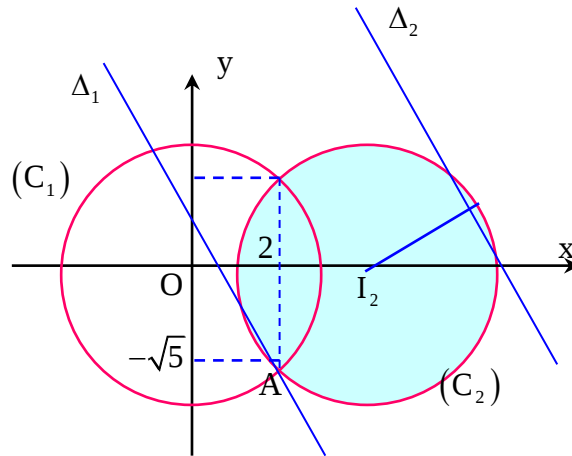
☑ **Lời giải**

Từ giả thiết ta suy ra

$$\log_{x^2+y^2} (x(8x^2 + 8y^2 - 7x) - 7y^2) \geq 2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(8x - 7) \geq (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + y^2 \leq 9.$$

Như vậy x, y là hai số thực thỏa mãn hệ điều kiện
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ (x - 4)^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Mà tập hợp các giá trị thỏa hệ điều kiện trên chính là miền D giới hạn bởi phần bên trong đường tròn $(C_2): (x-4)^2 + y^2 = 9$ và phần bên ngoài đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 \geq 9$. Hai đường tròn có bán kính $R_1 = R_2 = 3$ và tâm $I_1(0;0)$, tâm $I_2(4;0)$ như hình vẽ dưới đây.



Xét họ các đường thẳng Δ song song với nhau $3x + y - P = 0$

Ứng với đường thẳng Δ_1 đi qua A ta có $3 \cdot 2 - \sqrt{5} - P = 0 \Leftrightarrow P = 6 - \sqrt{5}$.

Ứng với đường thẳng Δ_2 tiếp xúc với (C_2) . Từ đó ta có: $d(I_2; \Delta_2) = R_2$.

$$\Leftrightarrow \frac{|3 \cdot 4 + 0 - P|}{\sqrt{9+1}} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 12 - 3\sqrt{10} \\ P = 12 + 3\sqrt{10} \end{cases}$$

Vậy suy ra GTLN và GTNN của P tương ứng là $\begin{cases} M = P_2 = P_{\max} = 12 + 3\sqrt{10} \\ m = P_1 = P_{\min} = 6 - \sqrt{5} \end{cases}$

Vậy $M + 3\sqrt{2}m = 12 + 18\sqrt{2}$.

Chọn ý A.

★ Câu 17

Cho các số thực $a, b, c \in (1; +\infty)$ thỏa mãn $a^{10} \leq b$ và $\log_a b + 2\log_b c + 5\log_c a = 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a$.

A. 25.

B. $\frac{90}{12}$.

C. 15.

D. 21.

☑ **Lời giải**

Đặt $x = \log_a b; y = \log_b c; z = \log_c a$. Ta có $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x \cdot y \cdot z = 1 \\ x \geq 10 \\ x + 2y + 5z = 12 \end{cases}$

Khi đó:

$$P = \frac{2}{z} + \frac{5}{y} + \frac{10}{x} = \frac{2}{z} + \frac{5}{y} + \frac{100}{x} - \frac{90}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{z} \cdot \frac{5}{y} \cdot \frac{100}{x}} - 9 = 30 - 9 = 21$$

$$\text{Suy ra } P_{\min} = 21 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 1 \\ \frac{2}{z} = \frac{5}{y} = \frac{100}{x} \\ x + 2y + 5z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_a b = 10 \\ \log_b c = \frac{1}{2} \\ \log_c a = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow b = c^2 = a^{10}$$

Chọn ý **D.**

★ Câu 18

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \geq 0; y \geq 0; z \geq -1$ sao cho:

$$\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3}.$$

A. $S = 4\sqrt{2}.$

B. $S = 6.$

C. $S = 6\sqrt{3}.$

D. $S = 4.$

☑ **Lời giải**

Từ giả thiết ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y &\Leftrightarrow \log_2 (x+y+1) = \log_2 (4x+y+3) + 2x-y \\ &\Leftrightarrow \log_2 [2(x+y+1)] + 2(x+y+1) = \log_2 (4x+y+3) + 4x+y+3. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(u) = \log_2 u + u (u > 0)$ có $f'(u) = 1 + \frac{1}{u \ln 2} > 0$.

Suy ra $f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà ta có: $f[2(x+y+1)] = f(4x+y+3) \Rightarrow 2(x+y+1) = 4x+y+3 \Leftrightarrow y = 2x+1$.

$$\text{Biểu thức } T \text{ trở thành } T = \frac{(x+z+1)^2}{5x+1} + \frac{(2x+3)^2}{x+2z+3} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \frac{(3x+z+4)^2}{6x+2z+4}.$$

$$\text{Đặt } t = 3x+z+4 (t \geq 3). \text{ } T \text{ trở thành } T = \frac{t^2}{2t-4} (t \geq 3).$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{t^2}{2t-4} \forall t \geq 3 \quad \text{có}$$

$$f'(t) = \frac{2t^2-8t}{(2t-4)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0(L) \vee t = 4 \Rightarrow \min_{t \in [3; +\infty)} f(t) = f(4) = 4.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 4.

Chọn ý **D.**

★ Câu 19

Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2(12 - a - b) = \frac{1}{2} \log_2(a + 2)(b + 2) + 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3}{b+2} + \frac{b^3}{a+2} + \frac{45}{a+b}$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Hỏi giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

A. 62.

B. 63.

C. 64.

D. 65.

☑ *Lời giải*

Biến đổi giả thiết ta có: $\log_2(12 - a - b) = \frac{1}{2} \log_2(a + 2)(b + 2) + 1$

$$\Leftrightarrow \log_2(12 - a - b) = \log_2 2\sqrt{(a + 2)(b + 2)}$$

$$\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{(a + 2)(b + 2)} = 12$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có $(12 - a - b)^2 = 4(a + 2)(b + 2) \leq (a + b + 4)^2 \Rightarrow a + b \geq 4$.

Biến đổi tiếp biểu thức $P = \frac{a^3(a + 2) + b^3(a + 2)}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b} = \frac{a^4 + b^4 + 2(a^3 + b^3)}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b}$

Chú ý tới 2 bất đẳng thức quen thuộc $\begin{cases} a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}(a + b)^4 \\ a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a + b)^3 \end{cases}$

Từ đó suy ra

$$P \geq \frac{\frac{1}{8}(a + b)^4 + 2 \cdot \frac{1}{4}(a + b)^3}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{45}{a + b} = \frac{(a + b)^4 + 4(a + b)^3}{2(12 - a - b)^2} + \frac{45}{a + b} = \frac{t^4 + 4t^3}{2(12 - t)^2} + \frac{45}{t}$$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t^4 + 4t^3}{2(12 - t)^2} + \frac{45}{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{(t + 4)t^3}{(12 - t)^3} + \frac{2(t + 3)t^2}{(12 - t)^2} - \frac{45}{t^2} \geq \frac{(4 + 4) \cdot 4^3}{(12 - 4)^3} + \frac{2(4 + 3)4^2}{(12 - 4)^2} - \frac{45}{4^2} > 0$$

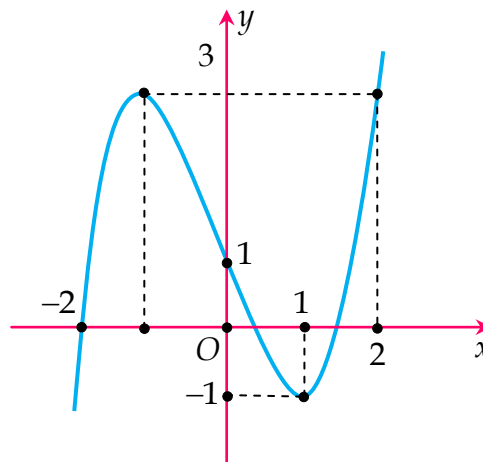
$$\Rightarrow P \geq f(t) \geq f(4) = \frac{61}{4} \Rightarrow \min P = \frac{61}{4} \Rightarrow m + n = 65$$

Chọn ý **D**.

ĐỒ THỊ MŨ VÀ LOGARIT

1. ĐỀ BÀI

★ **Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

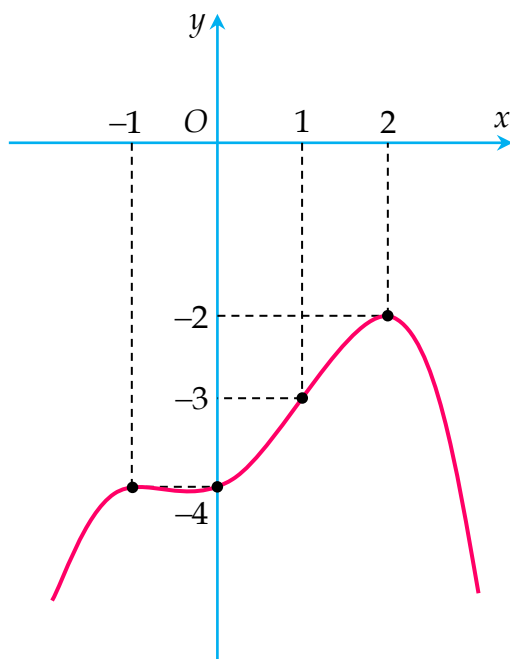
A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

★ **Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tổng tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$$

Đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là?

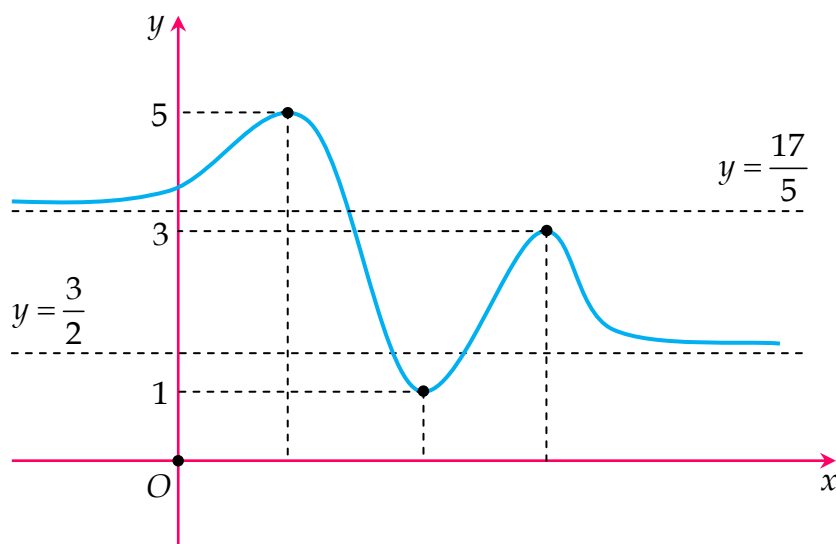
A. 10.

B. 4.

C. 5

D. 9

★ Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình sau có nghiệm là bao nhiêu?

$$e^{f^3(x) + 2f^2(x) - 7f(x) + 5} + \ln\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = m?$$

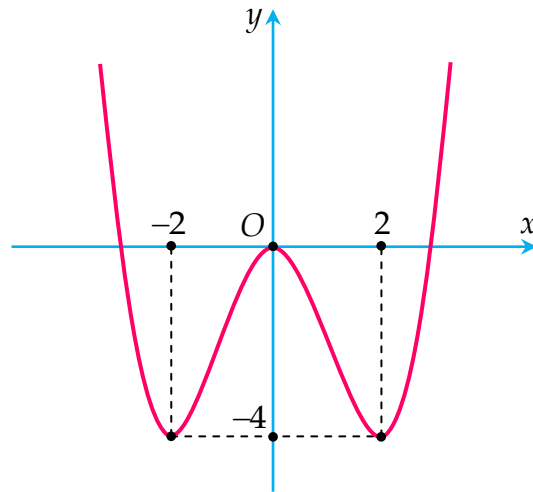
A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

★ Câu 4. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 2)$ khi và chỉ khi :

$$3^{f(x)+m} + 4^{f(x)+m} \leq 5f(x) + 2 + 5m$$

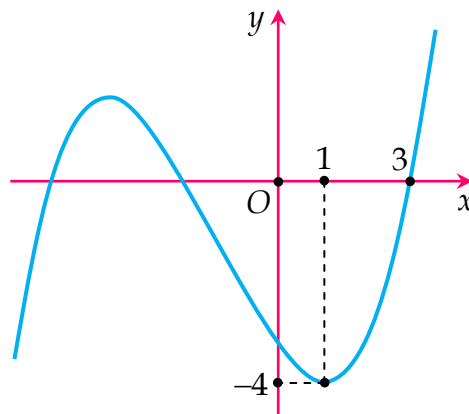
A. $-f(-1) < m < 1 - f(2)$

B. $-f(2) < m < 1 - f(-1)$

C. $-f(2) < m < 1 - f(-1)$

D. $-f(2) \leq m \leq 1 - f(-1)$

★ **Câu 5.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

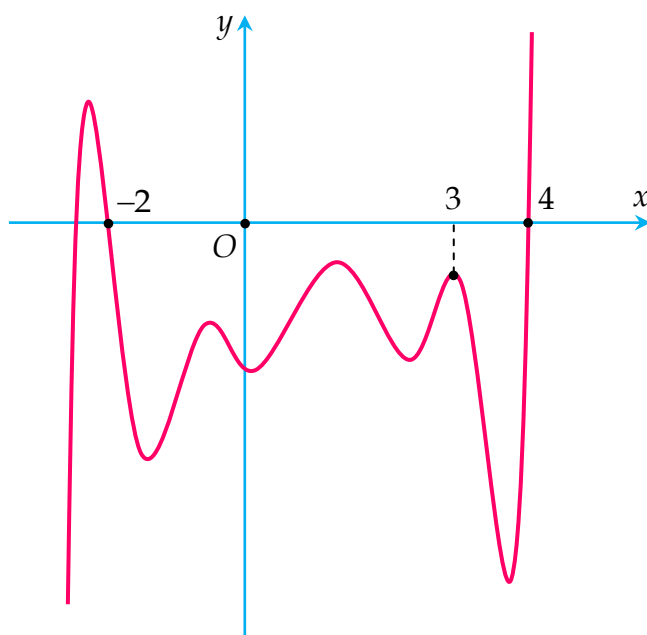
A. $m > -\frac{4}{1011}$

B. $m \geq \frac{4}{3e + 2019}$

C. $m > -\frac{2}{1011}$

D. $m > \frac{f(e)}{3e + 2019}$

★ **Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(x) \geq \frac{2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 + 27m}{27}$ nghiệm đúng với $x \in (-2; 3)$

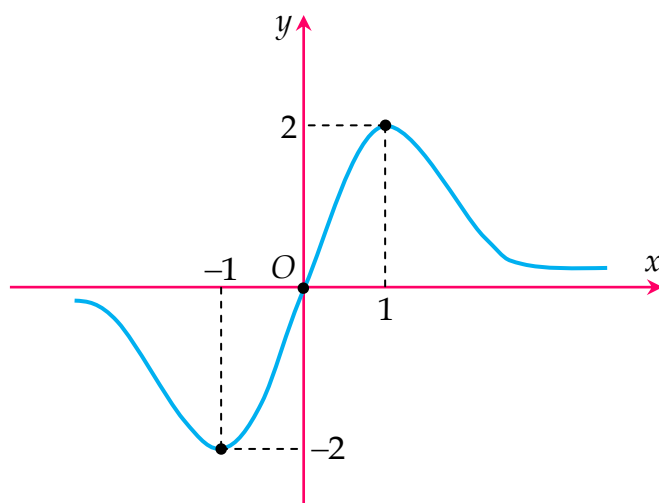
A. $f(3) \leq m \leq f(3) + 1$

B. $f(-2) + 1 \leq m \leq f(3)$

C. $f(-2) - 2 \leq m \leq f(3)$

D. $f(3) \leq m \leq f(-2) - 2$

★ **Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới:



Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

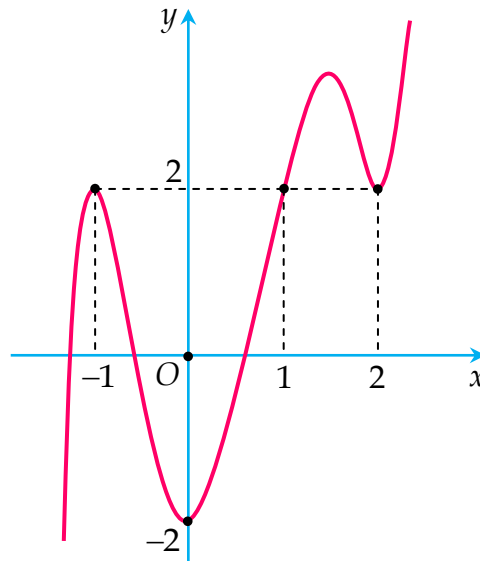
A. $0 < m < 2$.

B. $0 < m < 1$.

C. $1 < m$

D. $m < 0$.

★ **Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào



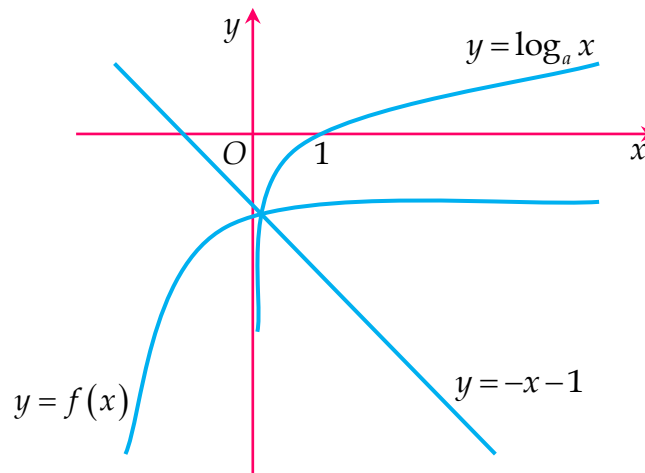
A. $x=1$

B. $x=0$

C. $x=-1$

D. $x=2$

★ **Câu 9.** Hình vẽ bên là đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = f(x)$. Đồ thị của chúng đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x - 1$. Tính $f(\log_a 2018)$



A. $f(\log_a 2018) = -1 - \frac{a}{2018}$

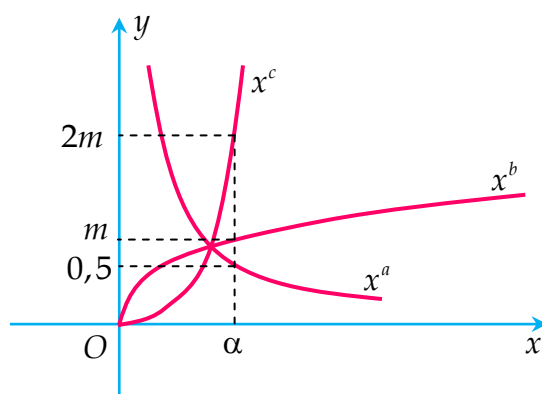
B. $f(\log_a 2018) = -1 - \frac{1}{2018a}$

C. $f(\log_a 2018) = -1 + \frac{a}{2018}$

D. $f(\log_a 2018) = -1 + \frac{1}{2018a}$

★ **Câu 10.** Cho hình vẽ của đồ thị các hàm số $y = x^a$; $y = x^b$; $y = x^c$ có đồ thị như hình bên. Khi đó hãy tìm tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{3a^2 + (2b + a + c)^2}{a^2 + 5c^2 + 4ac} ?$$



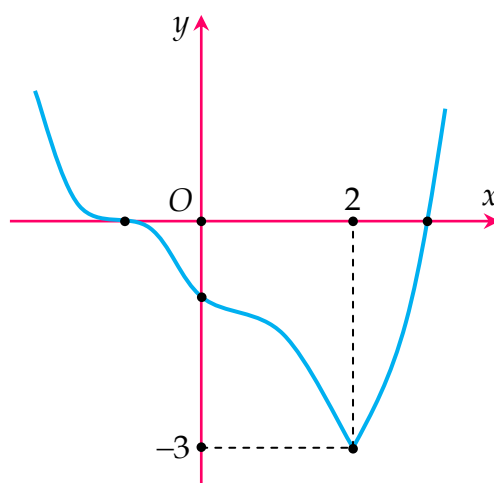
A. 31

B. 32

C. 33

D. 34

★ **Câu 11.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(x) + x^2 > 4x + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$



A. $m < -3$.

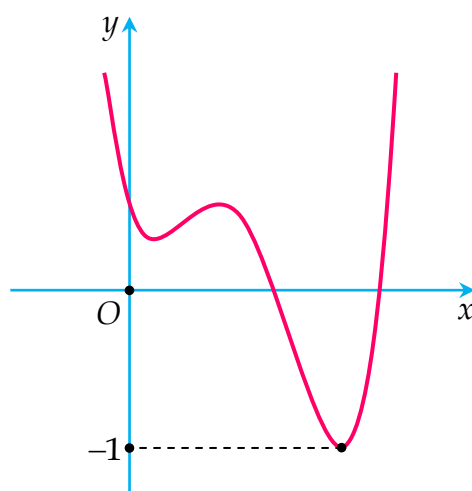
B. $m < -10$.

C. $m < -2$.

D. $m < 5$.

★ **Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$



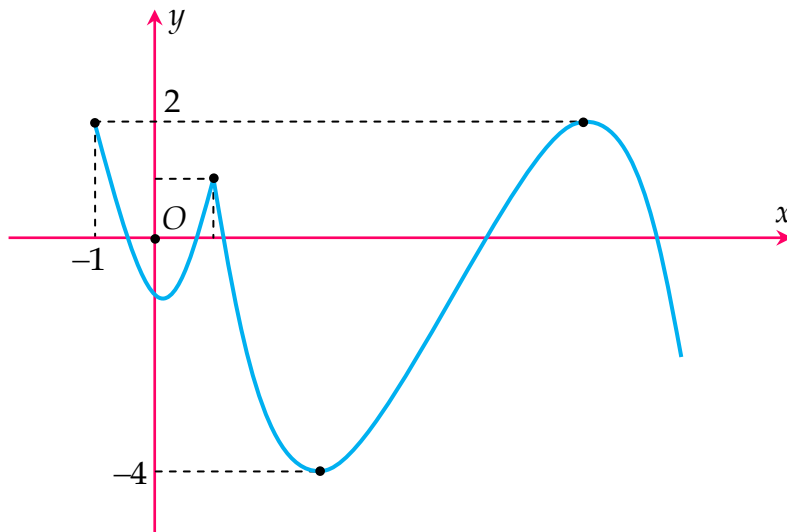
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

★ Câu 13. Cho hàm số liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.3^{f(x)} - [f(x)^2 + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$$

Nghiem đúng với mọi giá trị $x \in [-1;9]$?

A. 22

B. 31

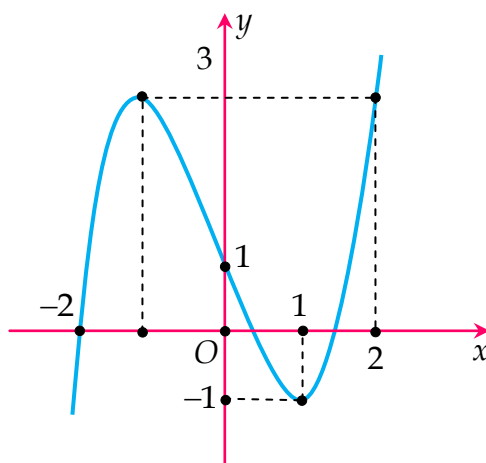
C. 5

D. 6

2. LỜI GIẢI

★ Câu 1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

☑ *Lời giải*

Đặt $t = \pi^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$f(t) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{m^2 - 1}{8}, (t > 0).$$

Quan sát đồ thị đã cho của hàm số $y = f(x)$ ta thấy rằng

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$-1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < m < 3$$

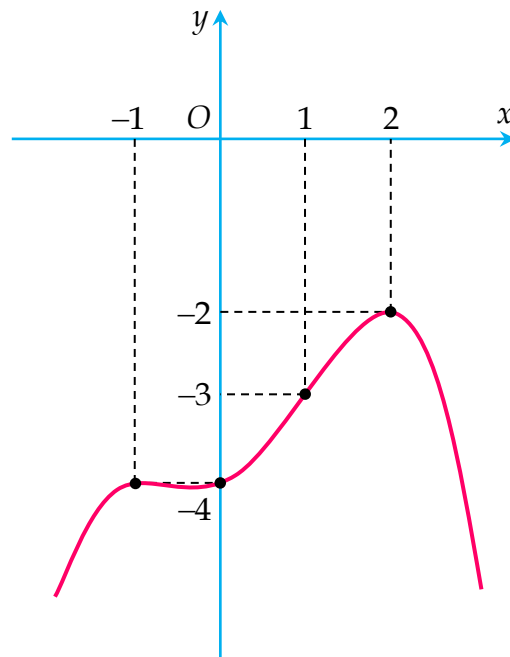
Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có tất cả 5 giá trị nguyên của m .

Chọn ý **A.**

★ Câu 2

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tổng tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$$

Đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là?

A. 10.

B. 4.

C. 5

D. 9

✓ **Lời giải**

Đặt $t = f(x)$. Quan sát đồ thị ta thấy $f(x) \leq -2 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \leq -2$

Bất phương trình đã cho được viết lại như sau

$$9 \cdot 6^t + (4 - t^2) \cdot 9^t \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^t, \forall t \leq -2 \Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2) \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \leq -m^2 + 5m$$

Xét hàm số $g(t) = 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2) \left(\frac{3}{2}\right)^{2t}$

$$\text{Có } g'(t) = 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2t \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + 2(4 - t^2) \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \cdot \ln\frac{3}{2} \geq 0, \forall t \leq -2$$

Từ đó suy ra $\max_{(-\infty; -2]} g(t) = g(-2) = 4$

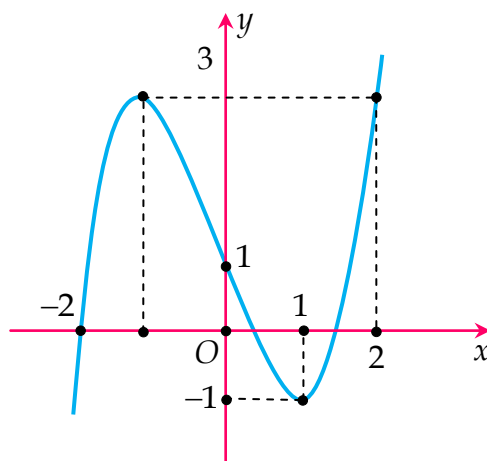
Yêu cầu bài toán tương đương với $-m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$ nên tổng tất cả các giá trị của tham số m là 10.

Chọn ý A.

★ **Câu 3**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

☑ **Lời giải**

Quan sát đồ thị ta thấy rằng $1 \leq f(x) \leq 5$, đặt $t = f(x)$, giả thiết trở thành

$$e^{t^3 + 2t^2 - 7t + 5} + \ln\left(t + \frac{1}{t}\right) = m$$

Xét:

$$g(t) = t^3 + 2t^2 - 7t + 5, g'(t) = 3t^2 + 4t - 7 \geq 0 \forall t \geq 1 \Rightarrow g(1) \leq g(t) \leq g(5) \Leftrightarrow 1 \leq g(t) \leq 145$$

$$\text{Mặt khác } h(t) = t + \frac{1}{t}, h'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0 \forall t \in [1; 5] \Rightarrow 2 \leq h(t) \leq \frac{26}{5}$$

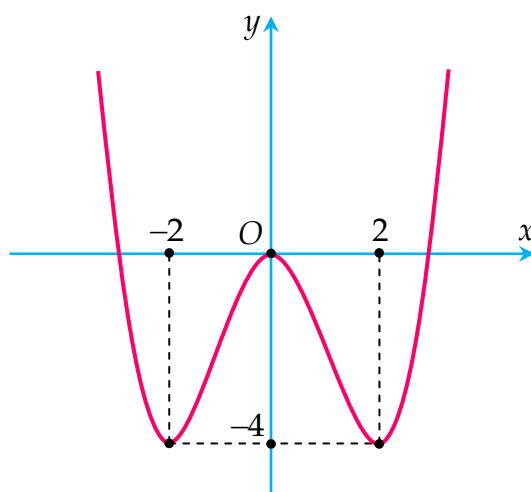
$$\text{Vậy hàm } u(t) = e^{t^3 + 2t^2 - 7t + 5} + \ln\left(t + \frac{1}{t}\right) \text{ đồng biến với } t \in [1; 5]$$

$$\text{Để phương trình đầu có nghiệm thì } e + \ln 2 \leq m \leq e^{145} + \ln \frac{26}{5}$$

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của m là 4.

Chọn ý **B.**

Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 2)$ khi và chỉ khi :

$$3^{f(x)+m} + 4^{f(x)+m} \leq 5f(x) + 2 + 5m$$

A. $-f(-1) < m < 1 - f(2)$

B. $-f(2) < m < 1 - f(-1)$

C. $-f(2) < m < 1 - f(-1)$

D. $-f(2) \leq m \leq 1 - f(-1)$

✓ **Lời giải**

Từ đồ thị của hàm số suy ra bảng biến thiên

x	-1	2
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$f(-1)$	$f(2)$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(2) < f(x) < f(-1), \forall x \in (-1; 2)$

$$\Rightarrow f(2) + m < f(x) + m < f(-1) + m, \forall x \in (-1; 2)$$

Đặt $t = f(x) + m \Rightarrow f(2) + m < t < f(-1) + m, \forall x \in (-1; 2)$

Giả thiết tương đương $3^t + 4^t \leq 5t + 2 \Leftrightarrow 3^t + 4^t - 5t - 2 \leq 0$ (1)

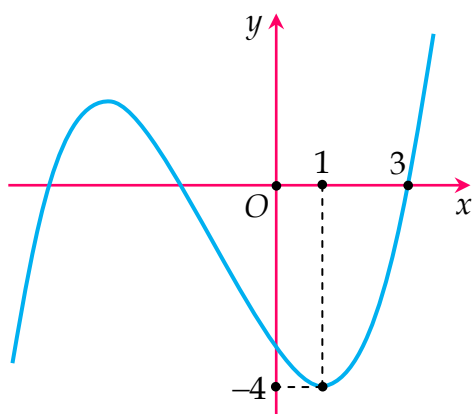
Xét phương trình $3^t + 4^t - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

Dùng phương pháp xét dấu (1) $\Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} f(2) + m \geq 0 \\ f(-1) + m \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -f(2) \leq m \leq 1 - f(-1)$

Chọn ý D.

★ **Câu 5**

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m > -\frac{4}{1011}$

B. $m \geq \frac{4}{3e + 2019}$

C. $m > -\frac{2}{1011}$

D. $m > \frac{f(e)}{3e + 2019}$

☑ **Lời giải**

Đặt $e^x = t (t > 0)$. Ta đưa bất phương trình đã cho thành bất phương trình ẩn t , từ đó lập luận để có phương trình ẩn t có nghiệm thuộc $(1; e)$

Ta chú ý rằng hàm số $y = f(x)$ với $y = f(t)$ có tính chất giống nhau nên từ đồ thị hàm số đã cho ta suy ra tính chất hàm $f(t)$

Sử dụng phương pháp hàm số để tìm m sao cho bất phương trình có nghiệm

Bất phương trình $m > f(x)$ có nghiệm trong $(a; b)$ khi $m > \min_{[a; b]} f(x)$

☑ **Cách giải**

Xét bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ (*)

Đặt $e^x = t (t > 0)$ với $x \in (0; 1) \Rightarrow t \in (e^0; e^1) \Rightarrow t \in (1; e)$

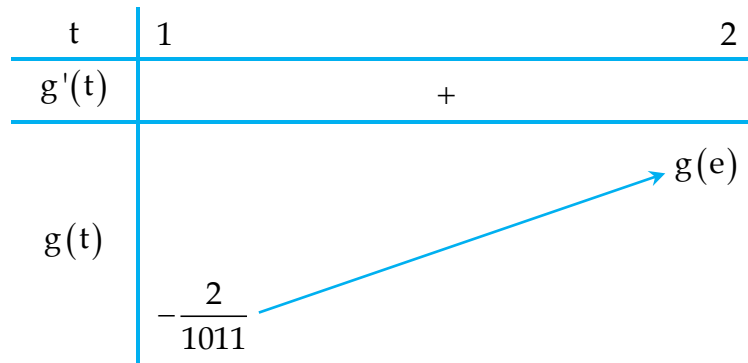
Ta được bất phương trình $f(t) < m(3t + 2019) \Leftrightarrow m > \frac{f(t)}{3t + 2019}$ (1)

Ta xét hàm $g(t) = \frac{f(t)}{3t + 2019}$ trên $t \in (1; e) \Rightarrow g'(t) = \frac{f'(t)(3t + 2019) - 3f(t)}{(3t + 2019)^2}$

Thấy đồ thị hàm số $y = f(t)$ có tính chất giống với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên trên khoảng đang xét $f(t) < 0$ và đồ thị hàm số đi lên từ trái qua phải hay hàm số đồng biến trên $(1; e)$ nên $f'(t) > 0$

Từ đó $g'(t) > 0$ với $t \in (1; e)$ hay hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(1; e)$

Ta có bảng biến thiên của $g(t)$ trên $[1; e]$

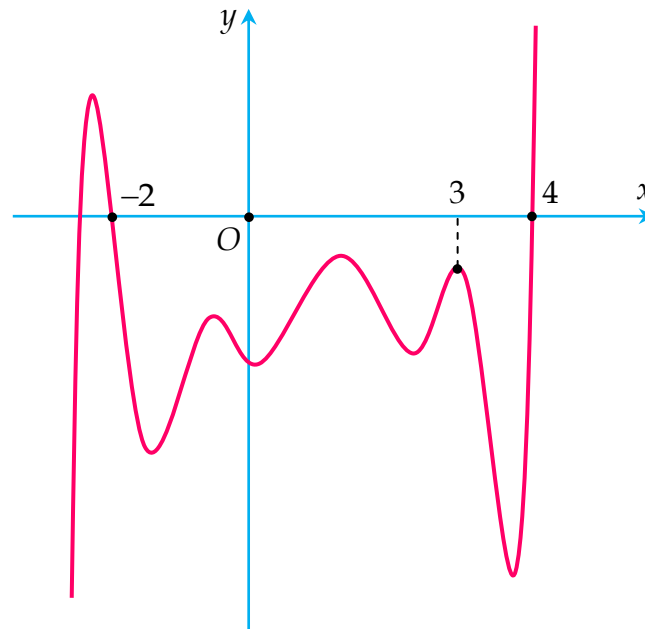


Từ bảng biến thiên ta thấy để $m > \frac{f(t)}{3t+2019}$ có nghiệm $t \in (1; e)$ thì $m > -\frac{2}{1011}$.

Chọn ý **C.**

★ Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(x) \geq \frac{2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 + 27m}{27}$ nghiệm đúng với $x \in (-2; 3)$

A. $f(3) \leq m \leq f(3) + 1$

B. $f(-2) + 1 \leq m \leq f(3)$

C. $f(-2) - 2 \leq m \leq f(3)$

D. $f(3) \leq m \leq f(-2) - 2$

☑ **Lời giải**

Ta có với $x \in (-2; 3)$ thì $f'(x) < 0$

Ta có $f(3) < f(x) < f(-2), \forall x \in (-2; 3); f(3) - 2m < f(x) - m < f(-2) - m$

Đặt $t = f(x) - m \Rightarrow f(3) - m < t < f(-2) - m$

Ta có $f(x) \geq \frac{2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 + 27m}{27}$

$$\Leftrightarrow 2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 - 27(f(x)-m) \leq 0 \Leftrightarrow 2^t + 5^t - 27t - 2 \leq 0$$

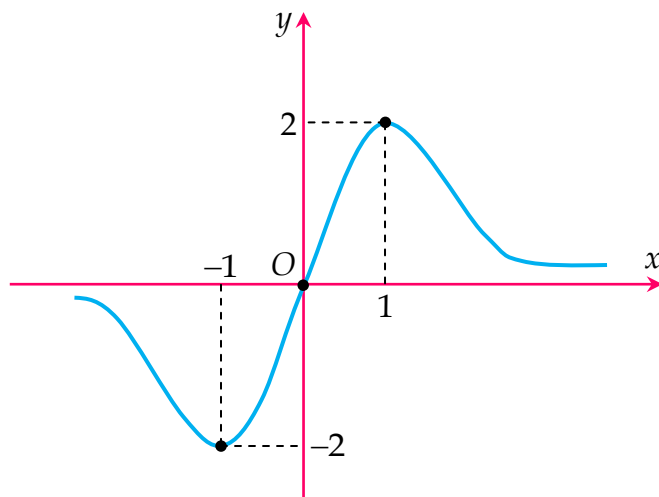
Vế trái chỉ có 2 nghiệm $t=0; t=2$

$$\text{Ta có } 0 \leq t \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(3)-m \geq 0 \\ f(-2)-m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow f(-2)-2 \leq m \leq f(3)$$

Chọn ý [C].

★ Câu 7

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới:



Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $0 < m < 2$.

B. $0 < m < 1$.

C. $1 < m$

D. $m < 0$.

☑ **Lời giải**

$$\text{Ta có } f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}} \Leftrightarrow f(x) = 2^{2m+1}$$

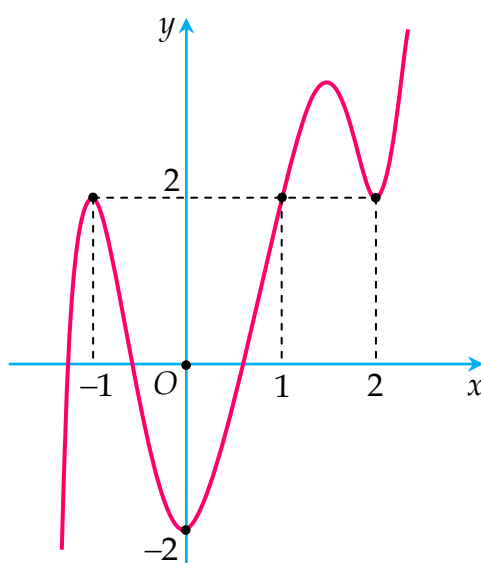
Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 2^{2m+1} < 2 \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn ý [D].

★ Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào



A. $x = 1$

B. $x = 0$

C. $x = -1$

D. $x = 2$

☑ **Lời giải**

Xét $y = \pi^{2(f(x)-4x)}$ có $y' = \pi^{2(f(x)-4x)} \cdot \ln \pi (2f'(x) - 4)$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 thì y' phải đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm đó. Dựa vào đồ thị, ta thấy chỉ có điểm $x = -1$ làm $f'(x) - 2$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua.

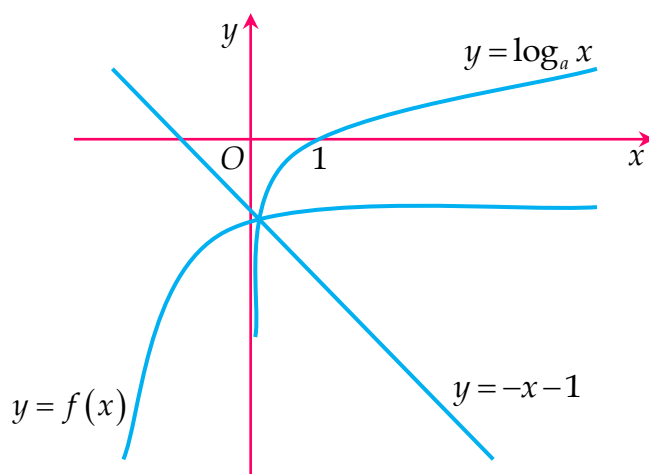
Vậy hàm đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn ý [C].

★ **Câu 9**

Hình vẽ bên là đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = f(x)$. Đồ thị của chúng đối

xúng với nhau qua đường thẳng $y = -x - 1$. Tính $f(\log_a 2018)$



A. $f(\log_a 2018) = -1 - \frac{a}{2018}$

B. $f(\log_a 2018) = -1 - \frac{1}{2018a}$

C. $f(\log_a 2018) = -1 + \frac{a}{2018}$

D. $f(\log_a 2018) = -1 + \frac{1}{2018a}$

☑ **Lời giải**

Gọi $(b; c) \in (C_1): y = \log_a x; (e; f) \in (C_2): y = f(x)$

Ta có hệ điều kiện

$$\begin{cases} c + f = -(b + e) - 2 \\ 1(b - e) - 1(c - f) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -f - e - 2 \\ b - c = e - f \end{cases} \begin{cases} b = -f - 1 \\ c = -e - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -e - 1 = \log_a(-f - 1) \Leftrightarrow -f - 1 = a^{-e-1} \Leftrightarrow f = -1 - a^{-e-1} \Leftrightarrow f(x) = -1 - a^{-x-1}.$$

Vậy $f(\log_a 2018) = -1 - a^{-\log_a 2018 - 1} = -1 - \frac{1}{2018a}$

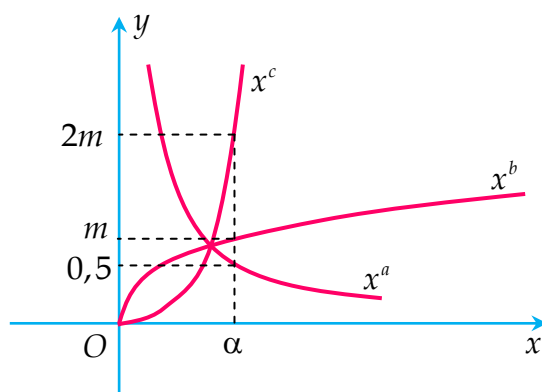
Chọn ý **B.**

★ **Câu 10**

Cho hình vẽ của đồ thị các hàm số $y = x^a; y = x^b; y = x^c$ có đồ thị như hình bên. Khi

đó hãy tìm tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{3a^2 + (2b + a + c)^2}{a^2 + 5c^2 + 4ac} ?$$



A. 31

B. 32

C. 33

D. 34

☑ **Lời giải**

Nhận thấy ngay khi $x = \alpha$, ta có

$$\alpha^c = 2\alpha^b \Leftrightarrow c \log_2 \alpha = 1 + b \log_2 \alpha \Leftrightarrow (c - b) \log_2 \alpha = 1$$

$$\alpha^a = 0.5 \Leftrightarrow a \log_2 \alpha = -1$$

$$\Leftrightarrow a + c = b$$

Đến đây thay vào biểu thức ta được một hàm thuần nhất 2 biến rồi đặt 1 ẩn đưa về khảo sát hàm 1 biến!

Biểu thức T được viết lại thành

$$T = \frac{3a^2 + 9(a+c)^2}{(a+2c)^2 + c^2} = \frac{3\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 9\left(\frac{a}{c} + 1\right)^2}{\left(\frac{a}{c} + 2\right)^2 + 1}.$$

Khảo sát hàm đơn biến $f(t)$ với $t = \frac{a}{c}$ ta thu được:

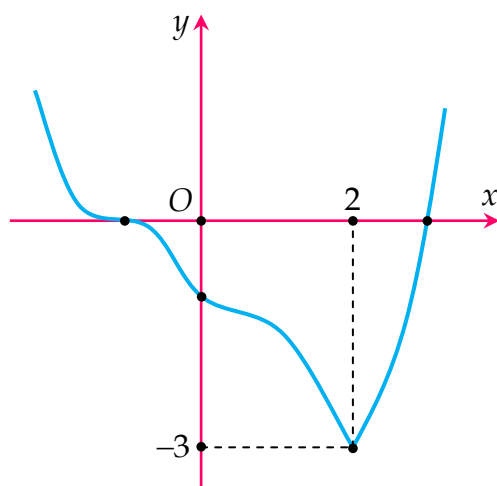
$$\begin{cases} \max f(t) = \frac{3}{2}(11 + \sqrt{109}) \\ \min f(t) = \frac{-3}{2}(\sqrt{109} - 11) \end{cases} \Rightarrow S = 33.$$

Chọn ý **C.**

★ Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để

bất phương trình $2f(x) + x^2 > 4x + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$



A. $m < -3$.

B. $m < -10$.

C. $m < -2$.

D. $m < 5$.

☑ *Lời giải*

Bất phương trình đã cho tương đương với $2f(x) + x^2 - 4x > m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy $\min_{(-1;3)} f(x) = -3$, dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Lại có $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4 \geq -4$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy $\min_{(-1;3)} (2f(x) + x^2 - 4x) = 2 \cdot (-3) + (-4) = -10$.

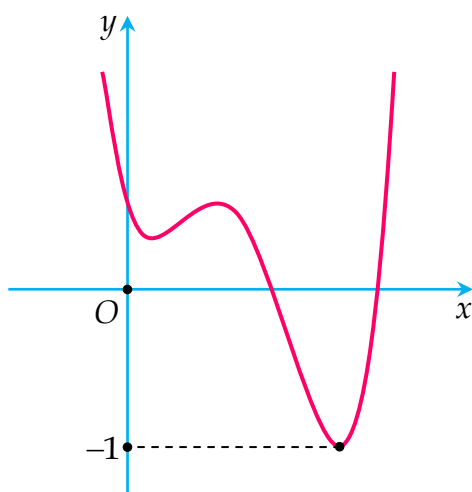
Do đó bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi $m < -10$.

Chọn ý **B**.

★ **Câu 12**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

☑ **Lời giải**

Xét hàm số $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)} \Rightarrow g'(x) = f'(x)2^{f(x)} \cdot \ln 2 - f'(x)3^{f(x)} \cdot \ln 3; \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2^{f(x)} \cdot \ln 2 = 3^{f(x)} \cdot \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy:

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt (vì hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị).

Phương trình (2) vô nghiệm vì đường thẳng $y = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\ln 3}{\ln 2} < -1$ không cắt đồ thị hàm số.

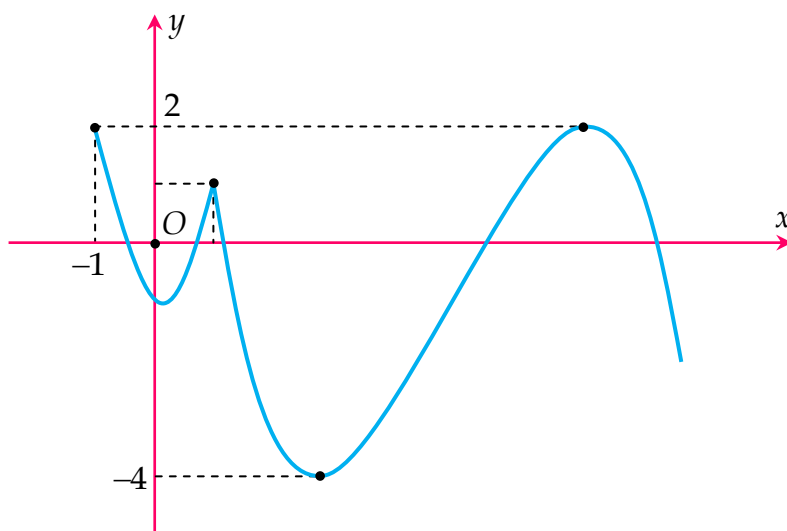
Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay hàm số đã cho có 3 cực trị.

Chọn ý A.

★ **Câu 13**

Cho hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới

đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.3^{f(x)} - [f(x)^2 + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$$

Nghiem đúng với mọi giá trị $x \in [-1; 9]$?

A. 22

B. 31

C. 5

D. 6

✓ *Lời giải*

Từ đồ thị suy ra $-4 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in [-1; 9]$. Đặt $t = f(x), t \in [-4; 2]$

Ta tìm m sao cho $16.3^t - [t^2 + 2t - 8].4^t \geq (m^2 - 3m).6^t$ đúng với mọi $t \in [-4; 2]$

$$16.3^t - [t^2 + 2t - 8].4^t \geq (m^2 - 3m).6^t, \quad \forall t \in [-4; 2]$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^t \geq (m^2 - 3m), \quad \forall t \in [-4; 2]$$

Ta có $\frac{16}{2^t} \geq 4, \forall t \in [-4; 2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 2$.

Mà $t^2 + 2t - 8 \leq 0, \forall t \in [-4; 2]$. Do đó $[t^2 + 2t - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^t \leq 0, \forall t \in [-4; 2]$.

Dấu bằng xảy ra khi $t = 2$.

Suy ra $\frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^t \geq 4, \forall t \in [-4; 2]$.

Vậy $\frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^t \geq (m^2 - 3m), \forall t \in [-4; 2] \Leftrightarrow m^2 - 3m \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4$

Kết quả $m = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. **Chọn ý D.**

ỨNG DỤNG MŨ VÀ LOGARIT VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

1. ĐỀ BÀI.

★ **Câu 1.** Bác Bình tham gia chương trình bảo hiểm An sinh xã hội của công ty bảo hiểm với thể lệ như sau: Cứ đến tháng 9 hàng năm bác Bình đóng vào công ty 20 triệu đồng với lãi suất hàng năm không đổi 6%/năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm bác Bình thu về tổng tất cả số tiền lớn hơn 400 triệu đồng?

- A. 14 năm. B. 12 năm. C. 11 năm D. 13 năm.

★ **Câu 2.** Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 0,6%/tháng, cứ sau mỗi tháng người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (biết rằng lãi suất không thay đổi và tiền lãi mỗi tháng tính theo số tiền có thực tế trong tài khoản của tháng đó).

- A. 108 triệu đồng. B. 102 triệu đồng.
C. 104 triệu đồng. D. 106 triệu đồng.

★ **Câu 3.** Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý (3 tháng) với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 79760000 đồng. B. 74813000 đồng. C. 65393000 đồng. D. 70656000 đồng.

★ **Câu 4.** Để chuẩn bị cho việc mua nhà, chị An thực hiện việc tiết kiệm bằng cách mỗi tháng gửi đều đặn vào ngân hàng 10 triệu đồng/tháng. Biết rằng trong thời gian chị An gửi tiền thì ngân hàng áp dụng mức lãi suất 0,65% tháng và chị An không rút lãi lần nào. Hỏi chị An phải gửi tối thiểu bao nhiêu tháng để có được số tiền 500 triệu đồng bao gồm cả tiền gốc và tiền lãi?

- A. 41 tháng. B. 42 tháng. C. 43 tháng. D. 44 tháng.

★ **Câu 5.** Vợ chồng anh A dự định lương của vợ dùng chi trả sinh hoạt phí, lương của anh A được gửi tiết kiệm hàng tháng. Biết đầu tháng này anh mới được tăng lương nhận mức lương 6 triệu đồng/tháng và cứ sau 2 năm lương của anh được tăng lên 10% so với 2 năm trước đó. Giả sử rằng dự định của vợ chồng anh được thực hiện từ đầu tháng này và lãi suất ngân hàng ổn định ở 0,5 % một tháng. Tính số tiền vợ chồng anh A tiết kiệm được sau 50 tháng.

- A. 341.570.000. B. 336.674.000. C. 384.968.000. D. 379.782.000.

★ **Câu 6.** Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 1 tỷ đồng với lãi suất 0,5% / tháng (lãi tính theo từng tháng và cộng dồn vào gốc). Kể từ lúc gửi sau mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi người đó rút 10 triệu đồng để chi tiêu (nếu tháng cuối cùng không đủ 10 triệu thì rút hết). Hỏi trong bao lâu kể từ ngày gửi người đó rút hết tiền trong tài khoản? (giả sử lãi suất không thay đổi trong quá trình người đó gửi).

- A. 136 tháng. B. 137 tháng. C. 138 tháng. D. 139 tháng.

★ **Câu 7.** Anh An mới đi làm, hưởng lương 8 triệu đồng một tháng và sẽ được nhận lương vào cuối tháng làm việc. An kí hợp đồng với ngân hàng trích tự động $\frac{1}{10}$ tiền

lương của mình mỗi tháng để gửi vào tài khoản tiết kiệm, lãi suất 0,45% /tháng theo thể thức lãi kép. Kể từ tháng thứ 7, anh An được tăng lương lên mức 8 triệu 500 nghìn đồng mỗi tháng. Sau một năm đi làm, tài khoản tiết kiệm của anh An có bao nhiêu tiền (Đơn vị: triệu đồng, kết quả lấy đến 3 chữ số sau dấu phẩy)

- A. 10,148 triệu (đ) B. 10,144 triệu (đ) C. 10,190 triệu (đ) D. 10,326 triệu (đ)

★ **Câu 8.** Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với lương năm đầu là 72 triệu đồng, cứ sau 3 năm thì tăng lương 10%. Nếu tính theo hợp đồng thì sau đúng 21 năm, người đó nhận được tổng số tiền của công ty là

- A. $216(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng). B. $7200(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng).
C. $720(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng). D. $2160(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng).

★ **Câu 9.** Ông A vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng theo thỏa thuận: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng ông A sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ (biết rằng tháng cuối cùng có thể trả dưới 9 triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì ông A trả hết nợ cho ngân hàng?

- A. 22 tháng. B. 23 tháng. C. 24 tháng. D. 25 tháng

★ **Câu 10.** Chị Minh muốn mua một chiếc điện thoại trị giá 20 triệu đồng, nhưng vì chưa đủ tiền nên chị chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 30% / năm và trả trước 5 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng chị phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 1 năm kể từ

ngày mua điện thoại, chị sẽ trả hết nợ, biết kì trả nợ đầu tiên sau ngày mua điện thoại đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó.

- A. 1,42 triệu. B. 4,7 triệu. C. 1,46 triệu. D. 1,57 triệu.

★ **Câu 11.** Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền 100000000 đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi, theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 1,2% và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

A. $a = \frac{12 \cdot 10^5 (1,012)^{59}}{(1,012)^{60} - 1}$ (đồng).

B. $a = \frac{12 \cdot 10^5 (1,012)^{60}}{(1,012)^{60} - 1}$ (đồng).

C. $a = \frac{12 \cdot 10^6 (1,012)^{60}}{(1,012)^{60} - 1}$ (đồng).

D. $a = \frac{12 \cdot 10^6 (1,012)^{59}}{(1,012)^{60} - 1}$ (đồng).

★ **Câu 12.** Năm 2019 em Thành đã trúng tuyển vào trường Đại học Sư Phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Vì gia đình em khó khăn, để có tiền đi học trong 5 năm nên vào đầu tháng 9/2019 em đã làm thủ tục vay vốn sinh viên 24.000.000 đồng/1 năm (vay vốn liên tục trong 5 năm và thủ tục vay vốn hằng năm được thực hiện vào đầu tháng 9) với lãi suất là 0,6%/tháng. Sau đúng hết 5 năm em Thành ra trường và kiếm được việc làm nên em trả cho ngân hàng mỗi tháng a đồng. Giá trị của a gần nhất với số nào trong các số dưới đây để trong 5 năm em Thành có thể trả hết nợ vay ngân hàng.

- A. 3.500.000 đồng. B. 3.000.000 đồng. C. 2.770.000 đồng. D. 3.270.000 đồng.

★ **Câu 13.** Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

- A. 46794000 đồng. B. 44163000 đồng. C. 42465000 đồng. D. 41600000 đồng.

★ **Câu 14.** Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8% / tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?

- A. 38.400.000 đồng. B. 38.400.000 đồng. C. 76.800.000 đồng. D. 39.200.000 đồng.

2. HƯỚNG DẪN GIẢI.

★ Câu 1

Bác Bình tham gia chương trình bảo hiểm An sinh xã hội của công ty bảo hiểm với thể lệ như sau: Cứ đến tháng 9 hàng năm bác Bình đóng vào công ty 20 triệu đồng với lãi suất hàng năm không đổi 6% / năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm bác Bình thu về tổng tất cả số tiền lớn hơn 400 triệu đồng?

A. 14 năm.

B. 12 năm.

C. 11 năm

D. 13 năm.

☑ *Lời giải*

Gọi số tiền mỗi năm bác Bình đóng vào công ty là A .

Đặt $q = 1 + 6\% = 1,06$.

Gọi S_n là số tiền cả gốc và lãi sau năm thứ n , ta có:

$$S_1 = A + A.6\% = Aq$$

$$S_2 = (S_1 + A) + (S_1 + A).6\% = (S_1 + A)q = Aq^2 + Aq$$

....

$$S_n = (S_{n-1} + A) + (S_{n-1} + A).6\% = (S_{n-1} + A).q = Aq^n + Aq^{n-1} + \dots + Aq = Aq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Để thu về tổng số tiền lớn hơn 400 triệu thì

$$S_n > 400 \Leftrightarrow Aq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} > 400 \Leftrightarrow q^n > \frac{400(q - 1)}{Aq} + 1 \Leftrightarrow n > \log_q \left(\frac{400(q - 1)}{Aq} + 1 \right).$$

Thay $q = 1,06; A = 20$ suy ra $n > 12,99$. Vậy sau ít nhất 13 năm bác Bình thu về tổng tất cả số tiền lớn hơn 400 triệu đồng.

Chọn ý D.

★ Câu 2

Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 0,6% / tháng, cứ sau mỗi tháng người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (biết rằng lãi suất không thay đổi và tiền lãi mỗi tháng tính theo số tiền có thực tế trong tài khoản của tháng đó).

A. 108 triệu đồng.

B. 102 triệu đồng.

C. 104 triệu đồng.

D. 106 triệu đồng.

☑ *Lời giải*

Sau lần rút thứ nhất, số tiền còn lại là:

$$10^8 \cdot 1,006 - 5 \cdot 10^5 \text{ (đồng)}.$$

Sau lần rút thứ 2, số tiền còn lại là:

$$\left[10^8 \cdot 1,006 - 5 \cdot 10^5\right] \cdot 1,006 - 5 \cdot 10^5 = 10^8 \cdot (1,006)^2 - 5 \cdot 10^5 \cdot (1,006 + 1) \text{ (đồng)}.$$

Sau lần rút thứ 3, số tiền còn lại là:

$$\left[10^8 \cdot (1,006)^2 - 5 \cdot 10^5 (1,006 + 1)\right] \cdot 1,006 - 5 \cdot 10^5 = 10^8 \cdot (1,006)^3 - 5 \cdot 10^5 (1,006^2 + 1,006 + 1) \text{ (đồng)}.$$

...

Một cách tổng quát, sau lần rút tiền thứ n , số tiền còn lại là:

$$\begin{aligned} &10^8 \cdot 1,006^n - 5 \cdot 10^5 \cdot \left[(1,006)^{n-1} + (1,006)^{n-2} + \dots + 1,006 + 1\right] \\ &= 10^8 \cdot 1,006^n - 5 \cdot 10^5 \cdot \frac{1,006^n - 1}{1,006 - 1} \text{ (đồng)}. \end{aligned}$$

Vậy sau đúng 36 lần rút tiền thì số tiền còn lại là:

$$10^8 \cdot (1,006)^{36} - 5 \cdot 10^5 \cdot \frac{(1,006)^{36} - 1}{0,006} \approx 104 \cdot 10^6 \text{ (đồng)}.$$

Chọn ý **B.**

★ Câu 3

Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý (3 tháng) với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 79760000 đồng. **B.** 74813000 đồng. **C.** 65393000 đồng. **D.** 70656000 đồng.

☑ **Lời giải**

Gọi T_1 là số tiền gửi theo quý và T_2 là số tiền gửi theo tháng trong năm thứ nhất.

T_3 là số tiền gửi theo quý và T_4 là số tiền gửi theo tháng trong năm thứ hai.

Trong 1 năm đầu ta có:

$$T_1 = 200 \cdot (1 + 0,021)^4 \text{ (triệu đồng)}$$

$$T_2 = 200 \cdot (1 + 0,0073)^{12} \text{ (triệu đồng)}$$

Trong năm thứ 2 ta có:

$$T_3 = \frac{T_1}{2} (1 + 0,021)^4 \text{ (triệu đồng)}$$

$$T_4 = \left(T_2 + \frac{T_1}{2}\right) (1 + 0,0073)^{12} \text{ (triệu đồng)}$$

Sau 2 năm tổng số tiền thu được là: $T = T_3 + T_4 \approx 474813000$ (đồng).

Vậy số tiền lãi chị Lan thu được là: $474813000 - 400000000 = 74813000$ (đồng).

Chọn ý **B.**

★ Câu 4

Để chuẩn bị cho việc mua nhà, chị An thực hiện việc tiết kiệm bằng cách mỗi tháng gửi đều đặn vào ngân hàng 10 triệu đồng/tháng. Biết rằng trong thời gian chị An gửi tiền thì ngân hàng áp dụng mức lãi suất 0,65% tháng và chị An không rút lãi lần nào. Hỏi chị An phải gửi tối thiểu bao nhiêu tháng để có được số tiền 500 triệu đồng bao gồm cả tiền gốc và tiền lãi?

A. 41 tháng.

B. 42 tháng.

C. 43 tháng.

D. 44 tháng.

☑ *Lời giải*

Chị An hàng tháng gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là A đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất $r\%$ một tháng.

Cuối tháng thứ 1, chị An có số tiền là: $P_1 = A + A.r = A(1+r)$

Đầu tháng thứ 2, chị An có số tiền là:

$$P_1 + A = A(1+r) + A = A + A(1+r) = A[1+(1+r)]$$

Cuối tháng thứ 2, chị An có số tiền là:

$$P_2 = P_1 + P_1.r = A + A(1+r) + [A + A(1+r)].r = A[(1+r)^2 + (1+r)]$$

Đầu tháng thứ 3, chị An có số tiền là:

$$P_2 + A = A[(1+r) + (1+r)^2] + A = A[1 + (1+r) + (1+r)^2]$$

Cuối tháng thứ 3, chị An có số tiền là:

$$P_3 = P_2 + P_2.r = A[1 + (1+r) + (1+r)^2] + A[1 + (1+r) + (1+r)^2].r = A[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)]$$

...

Cuối tháng thứ n , chị An có số tiền là:

$$P_n = A \left[\underbrace{(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r)^2 + (1+r)}_{S_n} \right] \Leftrightarrow P_n = A(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

trong đó $A = 10$ (triệu đồng), $r = 0,65\%$ và n là số tháng gửi.

$$\text{Theo giả thiết } P_n = 500 \Leftrightarrow A(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 500 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{500r}{A(1+r)} + 1$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1+r} \left(\frac{500r}{A(1+r)} + 1 \right) = \log_{1+0,0065} \left(\frac{500 \cdot 0,0065}{10(1+0,0065)} + 1 \right) \approx 43,19.$$

Vì n nguyên dương nên $n = 44$.

Vậy phải gửi tối thiểu 44 tháng thì chị An mới có được số tiền 500 triệu đồng.

Chọn ý **D.**

★ Câu 5

Vợ chồng anh A dự định lương của vợ dùng chi trả sinh hoạt phí, lương của anh A được gửi tiết kiệm hàng tháng. Biết đầu tháng này anh mới được tăng lương nhận mức lương 6 triệu đồng/tháng và cứ sau 2 năm lương của anh được tăng lên 10% so với 2 năm trước đó. Giả sử rằng dự định của vợ chồng anh được thực hiện từ đầu tháng này và lãi suất ngân hàng ổn định ở 0,5 % một tháng. Tính số tiền vợ chồng anh A tiết kiệm được sau 50 tháng.

- A. 341.570.000. B. 336.674.000. C. 384.968.000. D. 379.782.000.

☑ *Lời giải*

Số tiền vợ chồng anh A tiết kiệm được sau 2 năm (24 tháng) là:

$$T_1 = \frac{6 \cdot (1 + 0,5\%) \cdot [(1 + 0,5\%)^{24} - 1]}{0,5\%} \quad (\text{triệu đồng})$$

Số tiền trên được hưởng lãi suất 26 tháng tiếp theo nên thành $T_1 \cdot (1 + 0,5\%)^{26}$

Số tiền có được nhờ tiết kiệm tiền lương của anh A trong 24 tháng tiếp theo là

$$T_2 = \frac{6 \cdot (1 + 10\%) \cdot (1 + 0,5\%) \cdot [(1 + 0,5\%)^{24} - 1]}{0,5\%}$$

Số tiền trên được hưởng lãi suất 2 tháng tiếp theo nên thành $T_2 \cdot (1 + 0,5\%)^2$

Số tiền có được nhờ tiết kiệm tiền lương của anh A trong 2 tháng (thứ 49+50) là

$$T_3 = \frac{6 \cdot (1 + 10\%)^2 \cdot (1 + 0,5\%) \cdot [(1 + 0,5\%)^2 - 1]}{0,5\%}$$

Vậy tổng số tiền vợ chồng anh A tiết kiệm được sau 50 tháng là

$$T_1 \cdot (1 + 0,5\%)^{26} + T_2 \cdot (1 + 0,5\%)^2 + T_3 = 33667400 \text{ đồng}$$

Chọn ý **B.**

★ Câu 6

Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 1 tỷ đồng với lãi suất 0,5% / tháng (lãi tính theo từng tháng và cộng dồn vào gốc). Kể từ lúc gửi sau mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi người đó rút 10 triệu đồng để chi tiêu (nếu tháng cuối cùng không đủ 10 triệu thì rút hết). Hỏi trong bao lâu kể từ ngày gửi người đó rút hết tiền trong tài khoản? (giả sử lãi suất không thay đổi trong quá trình người đó gửi).

- A. 136 tháng. B. 137 tháng. C. 138 tháng. D. 139 tháng.

☑ *Lời giải*

Số tiền người đó gửi ban đầu là $a = 1000$ triệu đồng, lãi suất hàng tháng $m = 0,005$; số tiền người đó rút ra hàng tháng là $r = 10$ triệu đồng.

Sau tháng thứ nhất (người đó chưa rút 10 triệu) người đó thu được số tiền là

$$T_1 = a(1 + m) .$$

Đầu tháng thứ hai người đó có số tiền là $a(1+m)-r$

Cuối tháng thứ hai (người đó chưa rút 10 triệu) người đó có số tiền là

$$T_2 = (a(1+m)-r)(1+m) = a(1+m)^2 - r(1+m).$$

Đầu tháng thứ ba người đó có số tiền là $a(1+m)^2 - r(1+m) - r$.

Cuối tháng thứ ba (người đó chưa rút 10 triệu) người đó có số tiền là

$$T_3 = a(1+m)^3 - r(1+m)^2 - r(1+m).$$

Cứ như thế số tiền người đó có cuối tháng thứ n là (người đó chưa rút 10 triệu)

$$T_n = a(1+m)^n - [r(1+m)^{n-1} + r(1+m)^{n-2} + \dots + r(1+m)] = a(1+m)^n - r \cdot \frac{(1+m)^n - (1+m)}{m}$$

Người đó rút hết tiền trong tài khoản khi

$$T_n - r \leq 0 \Leftrightarrow T_n \leq 10 \Leftrightarrow a(1+m)^n - r \cdot \frac{(1+m)^n - (1+m)}{m} \leq 10$$

$$\text{thay số ta được } 1000 \cdot 1,005^n - 10 \cdot \frac{1,005^n - 1,005}{0,005} \leq 10 \Leftrightarrow 1,005^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 138,975.$$

Vậy sau 139 tháng thì người đó rút hết tiền.

Chọn ý D.

★ **Câu 7**

Anh An mới đi làm, hưởng lương 8 triệu đồng một tháng và sẽ được nhận lương vào cuối tháng làm việc. An kí hợp đồng với ngân hàng trích tự động $\frac{1}{10}$ tiền lương của mình mỗi tháng để gửi vào tài khoản tiết kiệm, lãi suất 0,45% /tháng theo thể thức lãi kép. Kể từ tháng thứ 7, anh An được tăng lương lên mức 8 triệu 500 nghìn đồng mỗi tháng. Sau một năm đi làm, tài khoản tiết kiệm của anh An có bao nhiêu tiền (Đơn vị: triệu đồng, kết quả lấy đến 3 chữ số sau dấu phẩy)

A. 10,148 triệu (đ) **B.** 10,144 triệu (đ) **C.** 10,190 triệu (đ) **D.** 10,326 triệu (đ)

☑ **Lời giải**

Sau 1 năm với lãi suất r thì:

Khoản lương tiết kiệm được của tháng 1: $0.8 \cdot (1+r)^{11}$

Khoản lương tiết kiệm được của tháng 2: $0.8 \cdot (1+r)^{10}$

...

Khoản lương tiết kiệm được của tháng 6: $0.8 \cdot (1+r)^6$

Khoản lương tiết kiệm được của tháng 7: $0.85 \cdot (1+r)^5$

Khoản lương tiết kiệm được của tháng 8: $0.85 \cdot (1+r)^4$

...

Khoản lương tiết kiệm được của tháng 12: $0.85 \cdot (1+r)^0$

Vậy tổng tiền tiết kiệm được từ khoản lương sau 1 năm là

$$\begin{aligned} T &= 0.8 \left[(1+r)^{11} + \dots + (1+r)^6 \right] + 0.85 \left[(1+r)^5 + \dots + (1+r)^0 \right] \\ &= 0.8 \cdot (1+r)^6 \frac{(1+r)^6 - 1}{r} + 0.85 \frac{(1+r)^6 - 1}{r} \\ &= 0.8 \cdot 1.0045^6 \cdot \frac{1.0045^6 - 1}{0.0045} + 0.85 \cdot \frac{1.0045^6 - 1}{0.0045} = 10,144 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

Chọn ý B.

★ Câu 8

Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với lương năm đầu là 72 triệu đồng, cứ sau 3 năm thì tăng lương 10%. Nếu tính theo hợp đồng thì sau đúng 21 năm, người đó nhận được tổng số tiền của công ty là

- A. $216(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng). B. $7200(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng).
C. $720(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng). D. $2160(1,1^7 - 1)$ (triệu đồng).

✓ *Lời giải*

Số tiền lương sau 3 năm đầu tiên người đó nhận được là $72 \cdot 3 = 216$ (triệu đồng).

Kể từ năm thứ 4 đến năm thứ 6, mỗi năm người đó nhận được số tiền lương là

$$72 \cdot (1 + 10\%) = 72 \cdot 1,1 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền lương sau 6 (3.2) năm người đó nhận được là

$$216 + 3 \cdot 72 \cdot 1,1 = 216 \cdot (1 + 1,1) \text{ (triệu đồng)}.$$

Kể từ năm thứ 7 đến năm thứ 9, mỗi năm người đó nhận được số tiền lương là

$$72 \cdot 1,1 \cdot (1 + 10\%) = 72 \cdot 1,1^2 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền lương sau 9 (3.3) năm người đó nhận được là

$$216 \cdot (1 + 1,1) + 3 \cdot 72 \cdot 1,1^2 = 216 \cdot (1 + 1,1 + 1,1^2) \text{ (triệu đồng)}.$$

Tương tự như vậy, số tiền lương sau 21 (3.7) năm người đó nhận được là

$$216 \cdot (1 + 1,1 + 1,1^2 + \dots + 1,1^6) \text{ (triệu đồng)}.$$

Mặt khác ta thấy $1; 1,1; 1,1^2; \dots; 1,1^6$ là một cấp số nhân gồm 7 số hạng với

$$u_1 = 1, q = 1,1.$$

Tổng 7 số hạng của cấp số nhân trên là

$$S_7 = 1 + 1,1 + \dots + 1,1^6 = \frac{1 \cdot (1,1^7 - 1)}{1,1 - 1} = 10 \cdot (1,1^7 - 1).$$

Vậy sau đúng 21 năm, số tiền lương người đó nhận được là

$$216.10.(1,1^7 - 1) = 2160(1,1^7 - 1) \text{ (triệu đồng)}.$$

Chọn ý **D.**

★ Câu 9

Ông A vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 0,6% một tháng theo thỏa thuận: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng ông A sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ (biết rằng tháng cuối cùng có thể trả dưới 9 triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì ông A trả hết nợ cho ngân hàng?

- A. 22 tháng. B. 23 tháng. C. 24 tháng. D. 25 tháng

☑ **Lời giải**

Số tiền ông A còn nợ sau n tháng: $T_n = X(1+r)^n - T \frac{(1+r)^n - 1}{r}$. (Trong đó X : số tiền

ông A vay ngân hàng, r : lãi suất, T : số tiền ông A hoàn nợ mỗi kì).

Để trả hết nợ thì n là số nguyên dương nhỏ nhất để $T_n \leq 0$

Áp dụng bài toán ta được: Ông A trả nợ hết ngân hàng khi:

$$200.\left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^n - 9.\frac{\left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^n - 1}{\frac{0,6}{100}} \leq 0 \Leftrightarrow 200.(1,006)^n \leq 1500.[(1,006)^n - 1]$$

$$\Leftrightarrow 1500 \leq 1300.(1,006)^n \Leftrightarrow \frac{15}{13} \leq (1,006)^n \Leftrightarrow n \geq \log_{1,006} \frac{15}{13} \approx 23,92.$$

Từ đó suy ra sau 24 tháng thì ông A trả hết nợ.

Chọn ý **C.**

★ Câu 10

Chị Minh muốn mua một chiếc điện thoại trị giá 20 triệu đồng, nhưng vì chưa đủ tiền nên chị chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 30% / năm và trả trước 5 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng chị phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 1 năm kể từ ngày mua điện thoại, chị sẽ trả hết nợ, biết kì trả nợ đầu tiên sau ngày mua điện thoại đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó.

- A. 1,42 triệu. B. 1,47 triệu. C. 1,46 triệu. D. 1,57 triệu.

☑ **Lời giải**

Số tiền chị Minh còn nợ lại sau khi trả 5 triệu là 15 triệu đồng lãi suất 2,5% / tháng.

Gọi A triệu là số tiền hàng tháng chị Minh trả của hàng điện thoại.

Sau 1 tháng số tiền còn nợ lại là: $15(1+0,025) - A$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ lại là: $15(1+0,025)^2 - A(1+0,025) - A$.

Sau 3 tháng số tiền còn nợ lại là: $15(1+0,025)^3 - A(1+0,025)^2 - A(1+0,025) - A$.

...

Sau 12 tháng số tiền còn nợ lại là:

$$15(1+0,025)^{12} - A[(1+0,025)^{11} + \dots + (1+0,025) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow 15(1+0,025)^{12} - A \left[\frac{(1+0,025)^{12} - 1}{0,025} \right] = 0 \Leftrightarrow A = \frac{15 \cdot 0,025 \cdot (1+0,025)^{12}}{(1+0,025)^{12} - 1}$$

$$\Leftrightarrow A \approx 1,462306905.$$

Chọn ý **C**.

★ Câu 11

Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền 100000000 đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi, theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 1,2% và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

A. $a = \frac{12 \cdot 10^5 (1,012)^{59}}{(1,012)^{60} - 1}$ (đồng).

B. $a = \frac{12 \cdot 10^5 (1,012)^{60}}{(1,012)^{60} - 1}$ (đồng).

C. $a = \frac{12 \cdot 10^6 (1,012)^{60}}{(1,012)^{60} - 1}$ (đồng).

D. $a = \frac{12 \cdot 10^6 (1,012)^{59}}{(1,012)^{60} - 1}$ (đồng).

☑ *Lời giải*

Gọi m , r , T_n , a lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau n tháng, số tiền trả đều đặn mỗi tháng.

Sau khi hết tháng thứ n thì còn lại: $T_n = m(r+1)^n - \frac{a}{r}[(r+1)^n - 1]$.

☑ *Chứng minh:*

Gọi m , r , T_n , a lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau n tháng, số tiền trả đều đặn mỗi tháng.

- Sau khi hết tháng thứ nhất ($n=1$) thì còn lại: $T_1 = m(r+1) - a$.
- Sau khi hết tháng thứ hai ($n=2$) thì còn lại: $T_2 = [m(r+1) - a](r+1) - a$

$$= m(r+1)^2 - a(r+1) - a = m(r+1)^2 - a(r+2) = m(r+1)^2 - \frac{a}{r}[(r+1)^2 - 1].$$

- Sau khi hết tháng thứ ba ($n = 3$) thì còn:

$$T_3 = \left[m(r+1)^2 - \frac{a}{r} \left[(r+1)^2 - 1 \right] \right] (r+1) - a = m(r+1)^3 - \frac{a}{r} \left[(r+1)^3 - 1 \right].$$

...

- Sau khi hết tháng thứ n thì còn lại: $T_n = m(r+1)^n - \frac{a}{r} \left[(r+1)^n - 1 \right].$

Áp dụng công thức trên, ta có:

$$T_n = 0 \Leftrightarrow a = \frac{m(r+1)^n r}{(r+1)^n - 1} = \frac{12 \cdot 10^5 \left(\frac{1,2}{100} + 1 \right)^{60}}{\left(\frac{1,2}{100} + 1 \right)^{60} - 1} = \frac{12 \cdot 10^5 (1,012)^{60}}{(1,012)^{60} - 1} \text{ (đồng)}.$$

Chọn ý B.

★ Câu 12

Năm 2019 em Thành đã trúng tuyển vào trường Đại học Sư Phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Vì gia đình em khó khăn, để có tiền đi học trong 5 năm nên vào đầu tháng 9/2019 em đã làm thủ tục vay vốn sinh viên 24.000.000 đồng/1 năm (vay vốn liên tục trong 5 năm và thủ tục vay vốn hằng năm được thực hiện vào đầu tháng 9) với lãi suất là 0,6%/tháng. Sau đúng hết 5 năm em Thành ra trường và kiếm được việc làm nên em trả cho ngân hàng mỗi tháng a đồng. Giá trị của a gần nhất với số nào trong các số dưới đây để trong 5 năm em Thành có thể trả hết nợ vay ngân hàng.

A. 3.500.000 đồng. **B.** 3.000.000 đồng. **C.** 2.770.000 đồng. **D.** 3.270.000 đồng.

☒ **Lời giải**

Đặt $q = 1 + r\% = 1,006$

Gọi P_n là số tiền vay mà em Thành nợ ngân hàng sau n năm ($1 \leq n \leq 5$).

Sau 1 năm em Thành nợ: $P_1 = 24 \cdot q^{12}$ (triệu đồng).

Sau 2 năm em Thành nợ: $P_2 = (P_1 + 24) \cdot q^{12} = 24 \cdot q^{24} + 24q^{12} = 24q^{12} (q^{12} + 1)$ (triệu đồng) .

...

Sau 5 năm em Thành nợ: $P_5 = (P_4 + 24) \cdot q^{12} = 24q^{12} (q^{48} + q^{36} + q^{24} + q^{12} + 1)$ (triệu đồng).

$$= 24q^{12} \frac{1 - q^{60}}{1 - q^{12}} \text{ (triệu đồng)}.$$

Gọi Q_n là số tiền mà em Thành còn nợ ngân hàng sau khi trả nợ được n tháng $n \geq 1$.

Sau 1 tháng em Thành còn nợ là: $Q_1 = P_5 \cdot q - a$ (triệu đồng).

Sau 2 tháng em Thành còn nợ là: $Q_2 = Q_1 \cdot q - a = P_5 \cdot q^2 - a \cdot q - a$ (triệu đồng).

...

Sau n tháng em Thành còn nợ là: $Q_n = Q_{n-1} \cdot q - a = P_5 \cdot q^n - a \cdot q^{n-1} - a \cdot q^{n-2} - \dots - a$ (triệu đồng).

$$= P_5 \cdot q^n - a \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1) = P_5 \cdot q^n - a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Để em Thành sau 5 năm đi làm có thể trả được nợ thì $Q_{60} = 0$ hay $P_5 \cdot q^{60} = a \cdot \frac{1 - q^{60}}{1 - q}$

$$\Leftrightarrow 24q^{12} \cdot \frac{1 - q^{60}}{1 - q^{12}} \cdot q^{60} = a \cdot \frac{1 - q^{60}}{1 - q} \Leftrightarrow a = \frac{24q^{72} \cdot (1 - q)}{1 - q^{12}} \approx 2,976 \text{ (triệu đồng)}$$

Chọn ý **B.**

★ Câu 13

Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

A. 46794000 đồng. **B.** 44163000 đồng. **C.** 42465000 đồng. **D.** 41600000 đồng.

☑ **Lời giải**

Tổng số tiền Nam vay cả gốc lẫn lãi sau 4 năm:

$$\begin{aligned} A &= 10^6(1+0,04)^4 + 10^6(1+0,04)^3 + 10^6(1+0,04)^2 + 10^6(1+0,04) \\ &= 10^6(1+0,04) \left[1 + (1+0,04) + (1+0,04)^2 + (1+0,04)^3 \right] \\ &= 10^6(1+0,04) \cdot \frac{1 - (1+0,04)^4}{1 - (1+0,04)} = 44163256 \end{aligned}$$

Chọn ý **B.**

★ Câu 14

Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8% / tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?

A. 38.400.000 đồng. **B.** 38.400.000 đồng. **C.** 76.800.000 đồng. **D.** 39.200.000 đồng.

☑ **Lời giải**

Số tiền phải trả tháng thứ nhất

$$\frac{200}{48} + 200 \cdot 0,8\% \text{ triệu đồng}$$

Số tiền phải trả tháng thứ hai

$$\frac{200}{48} + \left(200 - \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 47 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% \text{ triệu đồng}$$

Số tiền phải trả tháng thứ ba

$$\frac{200}{48} + \left(200 - 2 \cdot \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 46 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% \text{ triệu đồng}$$

...

Số tiền phải trả sau tháng thứ 48

$$\frac{200}{48} + \left(200 - 47 \cdot \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 1 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% \text{ triệu đồng}$$

Vậy nên tổng số tiền lãi phải trả là

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + 2 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + \dots + 47 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + 200 \cdot 0,8\% \\ &= \frac{200}{48} \cdot 0,8\% (1 + 2 + \dots + 48) = \frac{200}{48} \cdot 0,8\% \cdot \frac{48(1+48)}{2} = 39,2 \end{aligned}$$

Chọn ý **D.**