

Mục lục

Trang

Chương 2	HÀM SỐ LŨY THỪA-HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT	3
PHẦN 1. HÀM SỐ LŨY THỪA-HÀM SỐ MŨ-HÀM SỐ LOGARIT		3
A. LÝ THUYẾT		3
2.1	Lũy thừa-Hàm số lũy thừa	3
2.1.1	Lũy thừa	3
2.1.2	Hàm số lũy thừa: $y = x^a$	3
2.2	Logarit	4
2.2.1	Kiến thức cơ bản	4
2.3	Hàm số mũ-Hàm số logarit	5
2.3.1	Hàm số mũ: $y = a^x, (0 < a \neq 1)$	5
2.3.2	Hàm số logarit: $y = \log_a x, (0 < a \neq 1, x > 0)$	5
2.3.3	Bảng đạo hàm	6
B. BÀI TẬP TỰ LUẬN		6
2.4	Bài tập về lũy thừa	6
2.4.1	Dạng 1: Tính giá trị biểu thức	6
2.4.2	Dạng 2: Đơn giản biểu thức	8
2.4.3	Dạng 3: Lũy thừa hữu tỉ	9
2.4.4	Dạng 4: So sánh cặp số	10
2.4.5	Dạng 5: Bài toán thực tế	11
2.5	Bài tập về logarit	12
2.5.1	Dạng 1: Tính giá trị biểu thức	12
2.5.2	Dạng 2: Biến đổi logarit	13
2.5.3	Dạng 3: Chứng minh đẳng thức logarit	17
2.5.4	Dạng 4: So sánh cặp số	18
2.5.5	Dạng 4: Bài toán thực tế	18
2.6	Bài tập hàm số mũ-hàm số logarit	18
2.6.1	Dạng 1: Tập xác định hàm số	18
2.6.2	Dạng 2: Đạo hàm	19
2.6.3	Dạng 3: Chứng minh hàm số đã cho thỏa hệ thức cho trước	20
2.6.4	Dạng 4: Giải phương trình, bất phương trình	21
2.6.5	Dạng 5: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất	21
PHẦN 2. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT		22
A. PHƯƠNG TRÌNH		22
2.7	Phương trình mũ	22
2.7.1	Phương trình mũ cơ bản	22
2.7.2	Một số phương pháp giải phương trình mũ	23

2.7.2.1	Phương pháp đưa về cùng cơ số	23
2.7.2.2	Phương pháp logarit hóa	24
2.7.2.3	Phương pháp đặt ẩn phụ	25
2.7.2.3.1	Dạng 1:	25
2.7.2.3.2	Dạng 2:	25
2.7.2.3.3	Dạng 3:	25
2.7.2.4	Sử dụng tính đơn điệu của hàm số	29
2.7.2.5	Phương trình tích	30
2.7.3	Bài toán liên quan tham số m	31
2.8	Phương trình logarit	32
2.8.1	Phương trình logarit cơ bản	32
2.8.2	Một số phương pháp giải phương trình logarit	32
2.8.2.1	Phương pháp đưa về cùng cơ số	32
2.8.2.2	Phương pháp mũ hóa	32
2.8.2.3	Phương pháp đặt ẩn phụ	33
2.8.2.4	Sử dụng tính đơn điệu hàm số	34
2.8.3	Bài toán liên quan tham số m	39
B. BẤT PHƯƠNG TRÌNH		39
2.9	Bất phương trình mũ và bất phương trình logarit	39
2.9.1	Bất phương trình mũ	39
2.9.2	Bất phương trình logarit	40
2.10	Hệ phương trình mũ và logarit	40
2.11	Các ví dụ	41
2.12	Bài tập bất phương trình, hệ phương trình mũ và logarit	43
2.12.1	Giải các bất phương trình	43
2.12.2	Giải hệ phương trình	46

Chương 2

HÀM SỐ LŨY THỪA-HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A. LÝ THUYẾT

2.1 Lũy thừa-Hàm số lũy thừa

2.1.1 Lũy thừa

Với a, b là các số thực dương, m, n là những số thực tùy ý.

❶ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ lần}}$	❹ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$
❷ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	❺ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
❸ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	❻ $[u(x)]^0 = 1 \Rightarrow x^0 = 1, \begin{cases} \forall u(x) \\ x \neq 0 \end{cases}$
❹ $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$	❼ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
❺ $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	❽ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

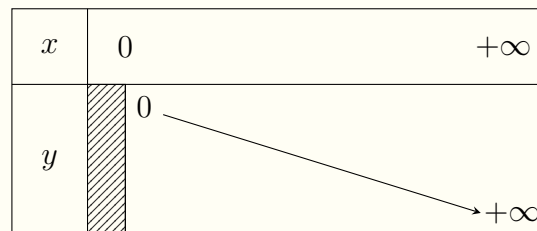
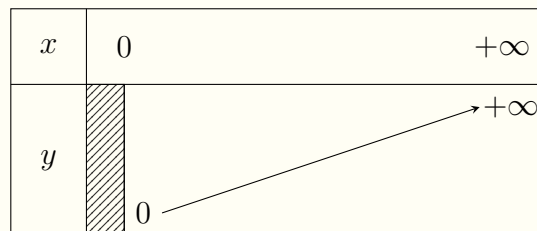
- Nếu $a < 0$ thì a^m chỉ xác định khi $\forall m \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $a > 0$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$.
- ! ■ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.
- Để so sánh $\sqrt[n]{a}$ và $\sqrt[n]{b}$. Ta sẽ đưa 2 căn đã cho về cùng bậc n (với n là bội số chung của n_1 và n_2) $\Rightarrow$ Hai số so sánh mới lần lượt là $\sqrt[n]{A}$ và $\sqrt[n]{B}$. Từ đó so sánh A và $B \Rightarrow$ kết quả so sánh của $\sqrt[n]{a}$ và $\sqrt[n]{b}$.

Công thức lãi kép: Lãi kép là phần lãi của kì sau được tính trên số tiền gốc kì trước cộng với phần lãi của kì trước.

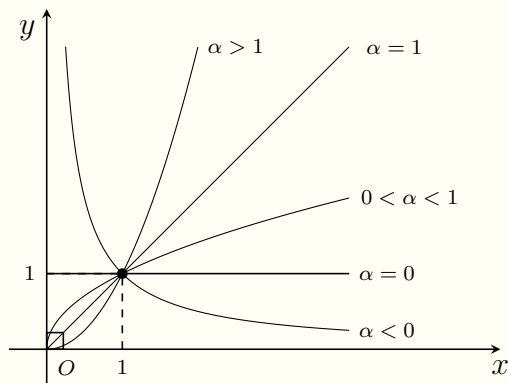
- ❶ Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$
- ❷ Số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n - A = A[(1+r)^n - 1]$

2.1.2 Hàm số lũy thừa: $y = x^\alpha$

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
❶ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$	❶ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$
❷ Sự biến thiên: $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0$	❷ Sự biến thiên: $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0$
Giới hạn đặc biệt ■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$	Giới hạn đặc biệt ■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$
❸ Tiệm cận: ■ Không có	❸ Tiệm cận: ■ TCD: Trục Ox ; TCN: Trục Oy
❹ Bảng biến thiên	❹ Bảng biến thiên



5 Đồ thị



Số mũ	Tập xác định
$\alpha = n$ (n nguyên dương)	$D = \mathbb{R}$
$\alpha = n$ (n nguyên âm)	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
α là số thực không nguyên	$D = (0; +\infty)$
⚠️ Chú ý: $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với $y = \sqrt[n]{x}$, ($n \in \mathbb{N}$)	

2.2 Logarit

2.2.1 Kiến thức cơ bản

1) Định nghĩa

❶ Với $0 < a \neq 1$, $b > 0$ ta có: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow b = a^\alpha$

❷ **Chú ý:** $\log_a b$ có nghĩa khi $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

❸ Logarit thập phân: $\lg b = \log b = \log_{10} b$

❹ Logarit tự nhiên (logarit Nepe): $\ln b = \log_e b$

2) Tính chất

Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$. Khi đó:

Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$	Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$
❺ $\log_a 1 = 0$	❻ $\log_a a = 1$
❼ $\log_a a^b = b$	❽ $a^{\log_a b} = b$

3) Các qui tắc tính logarit

Cho $a > 0$ và $b, c > 0$. Ta có:

❾ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	❿ $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
⓫ $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$	⓬ $\log_a b^2 = 2 \cdot \log_a b $

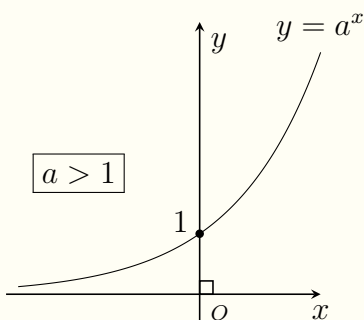
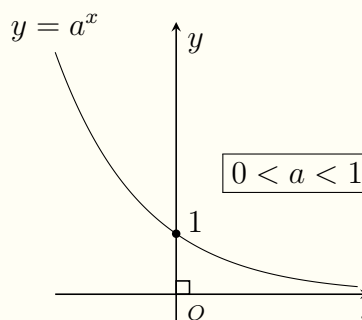
4) Các công thức đổi cơ số

Cho $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$. Ta có:

13 $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$	14 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
15 $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$	16 $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$
17 $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b, (\alpha \neq 0)$	18 $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$
19 $\log_{a^\alpha} a = \frac{1}{\alpha}$	20 $\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b$; 21 $\log_{a^\alpha} a^\beta = \frac{\beta}{\alpha}$
22 $\log_{ab} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}}$	23 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

2.3 Hàm số mũ-Hàm số logarit

2.3.1 Hàm số mũ: $y = a^x, (0 < a \neq 1)$

$a > 1$	$0 < a < 1$																														
1 Tập xác định: $D = \mathbb{R}$	1 Tập xác định: $D = \mathbb{R}$																														
2 Sự biến thiên: $y' = a^x \cdot \ln a > 0$ ■ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ■ Tiệm cận: TCN: Trục Ox	2 Sự biến thiên: $y' = a^x \cdot \ln a < 0$ ■ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ■ Tiệm cận: TCN: Trục Ox																														
3 Bảng biến thiên:	3 Bảng biến thiên:																														
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>$0 \rightarrow 1$</td><td>$\rightarrow a$</td><td>$\rightarrow +\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'			+		y		$0 \rightarrow 1$	$\rightarrow a$	$\rightarrow +\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$\rightarrow 1$</td><td>$\rightarrow a$</td><td>$\rightarrow 0$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'			-		y	$+\infty$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow a$	$\rightarrow 0$
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'			+																												
y		$0 \rightarrow 1$	$\rightarrow a$	$\rightarrow +\infty$																											
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'			-																												
y	$+\infty$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow a$	$\rightarrow 0$																											
4 Đồ thị:	4 Đồ thị:																														
																															

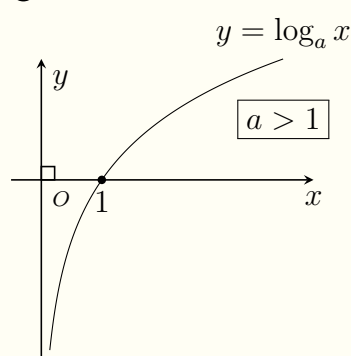
2.3.2 Hàm số logarit: $y = \log_a x, (0 < a \neq 1, x > 0)$

$a > 1$	$0 < a < 1$
1 Tập xác định: $D = (0; +\infty)$	1 Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

- ② Sự biến thiên: $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} > 0$
- Giới hạn đặc biệt:
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
- Tiệm cận:
 TCD: Trục Oy
- ③ Bảng biến thiên

x	0	1	a	$+\infty$
y'			+	
y	$-\infty$	0	1	$+\infty$

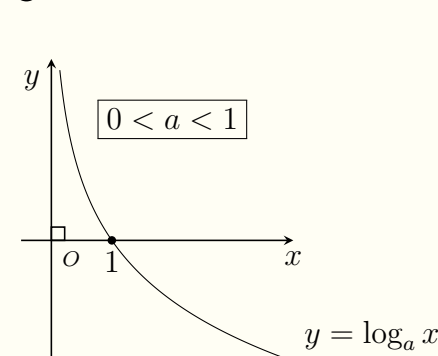
- ④ Đồ thị:



- ② Sự biến thiên: $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} < 0$
- Giới hạn đặc biệt:
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$
- Tiệm cận:
 TCD: Trục Oy
- ③ Bảng biến thiên

x	0	1	a	$+\infty$
y'			-	
y	$+\infty$	0	1	$-\infty$

- ④ Đồ thị:



2.3.3 Bảng đạo hàm

Đạo hàm	Đạo hàm hợp
① Hàm số lũy thừa: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	① Hàm lũy thừa: $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
② Hàm số mũ: ■ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ■ $(e^x)' = e^x$	② Hàm số mũ: ■ $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ ■ $(e^u)' = e^u \cdot u'$
③ Hàm số logarit: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	③ Hàm số logarit: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

2.4 Bài tập về lũy thừa

2.4.1 Dạng 1: Tính giá trị biểu thức

Ví dụ 1. Tính giá trị biểu thức: $A = 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $A = 2^{2(3+\sqrt{2})} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} = 2^{6+2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}} = 2^3 = 8$.

Đáp số $A = 8$

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \left(8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}}\right) - \left(3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}\right).$

b) $B = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{(10^{-3} : 10^{-2}) - (0,24)^0}.$

c) $C = \left(5^{-\frac{2}{5}}\right) + \left[(0,2)^{\frac{3}{4}}\right]^{-4}$

d) $D = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}.$

e) $E = 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{\frac{2}{3}} + (9^0)^2.$

f) $F = 2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}.$

g) $G = \sqrt{\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[4]{3}}\right)^2}.$

h) $H = \frac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}}.$

i) $I = (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}.$

j) $J = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + (0,25)^{-\frac{5}{2}}.$

k) $K = 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{3}}$

l) $L = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,25)^0}$

m) $M = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + (0,25)^{-\frac{5}{2}} + (0,04)^{-1,5}$

n) $N = \left((\sqrt{5})^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} + 4^{1-2\sqrt{3}} \cdot 16^{1+\sqrt{3}}$

o) $O = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{9^{\frac{5}{12}}} \pi^0 + \frac{\sqrt[3]{3}}{e^0 \cdot \sqrt{3}} \cdot 9^{\frac{7}{12}}$

p) $P = (0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$

q) $Q = 64^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{255}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{81}\right)^{-0,75}$

r) $R = (0,25)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{6}{5}} - \left(\frac{19}{2}\right)^{-2}$

s) $S = 256^{-0,75} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$

t) $T = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$

u) $U = 4^{\frac{3}{2}} + 8^{\frac{2}{3}}$

v) $V = \left(32^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}}$

w) $W = \frac{(-18)^7 \cdot 2^4 \cdot (-50)^3}{(-25)^4 \cdot (-4)^5}$

x) $X = \frac{125^6 \cdot (-16)^3 \cdot (-2)^3}{25^3 [(-5)^2]^4}$

y) $Y = \frac{\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[4]{64} \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{32}}}$

z) $Z = \frac{\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt{12}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt{6}}$

Ví dụ 2. Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính giá trị biểu thức: $K = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } 9^x + 9^{-x} = 23 \Leftrightarrow 9^x + \frac{1}{9^x} = 23 \Leftrightarrow (3^2)^x + \frac{1}{(3^2)^x} = 23 \Leftrightarrow \left[(3^x)^2 + \frac{1}{(3^x)^2} + 2 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3^x}\right] - 2 =$$

$$23 \Leftrightarrow \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow \boxed{3^x + \frac{1}{3^x} = 5}.$$

$$\text{Ta có } K = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{5 + 3^x + \frac{1}{3^x}}{1 - \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)} = \frac{5 + 5}{1 - 5} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}.$$

Đáp số $\boxed{K = -\frac{5}{2}}$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) Cho $4^x + 4^{-x} = 14$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{10 - 2^x - 2^{-x}}{3 + 2^x + 2^{-x}}$.

b) Cho $25^x + 25^{-x} = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{4 - 5^x - 5^{-x}}{9 + 5^x + 5^{-x}}$.

c) Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (7 - 4\sqrt{3})^{2016}$.

d) Tính giá trị của biểu thức $P = (9 + 4\sqrt{5})^{2017} (9 - 4\sqrt{5})^{2016}$.

e) Tính giá trị của biểu thức $P = (5 - 2\sqrt{6})^{2017} (5 + 2\sqrt{6})^{2016}$.

f) Tính giá trị của biểu thức $P = (1 + \sqrt{3})^{2016} (3 - \sqrt{3})^{2016}$.

g) Tính giá trị của biểu thức $P = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{2016} (\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^{2016}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$, $x \in \mathbb{R}$ và a, b thỏa $a + b = 1$. Tính giá trị $f(a) + f(b)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(a) + f(b) &\xrightarrow{b=1-a} f(a) + f(1-a) = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^{1-a}}{9^{1-a} + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^a} \\ &= \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{3}{3 + 9^a} = \frac{9^a + 3}{9^a + 3} = 1. \end{aligned}$$

Đáp số $f(a) + f(b) = 1$

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức sau:

a) Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$.

Tính tổng $P = f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \cdots + f\left(\frac{98}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right)$.

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$.

Tính tổng $P = f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \cdots + f\left(\frac{99}{100}\right) + f\left(\frac{100}{100}\right)$.

c) Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

Tính tổng $P = f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{8}{10}\right) + f\left(\frac{9}{10}\right)$.

d) Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$.

Tính tổng $P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$.

2.4.2 Dạng 2: Đơn giản biểu thức

Ví dụ 4. Đơn giản biểu thức: $P = \left(\frac{a^{0,5} + 2}{a + 2 \cdot a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a^{0,5} + 1}{a^{0,5}}$.

Lời giải.

$$P = \left[\frac{\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} = \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{a - \sqrt{a} + 2\sqrt{a} - 2 - \sqrt{a} + 2}{a - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{a}{a - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a - 1}.$$

Đáp số $\boxed{P = \frac{\sqrt{a}}{a - 1}}$

Bài 4. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \frac{a^{1,5} + b^{1,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} - a^{0,5} \cdot b^{0,5} + \frac{2 \cdot b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$

b) $B = \left(\frac{a^{0,5} + 2}{a + 2 \cdot a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a^{0,5} + 1}{a^{0,5}}$

c) $C = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{2}}}{x - y} \right] \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{2}$

d) $D = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x + y} - \frac{2y}{x - y}$

e) $E = (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}) \cdot (a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}})$

f) $F = (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}) \cdot (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}) \cdot (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

2.4.3 Dạng 3: Lũy thừa hữu tỉ**Ví dụ 5.** Viết biểu thức sau với dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ: $P = \sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$, ($x \geq 0$).**Lời giải.**

! Thực hiện từ trong ra ngoài từ $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ và } a^m \cdot a^n = a^{m+n}}.$

• Cách 1: $P = \sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{7}{3}}} = x^{\frac{7}{12}}.$

• Cách 2: $P^4 = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} \Rightarrow P^{12} = x^6 \cdot x = x^7 \Rightarrow P = x^{\frac{7}{12}}.$

Đáp số $\boxed{P = x^{\frac{7}{12}}}$

Bài 5. Viết các biểu thức sau với dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ (xem điều kiện được thỏa)

a) $A = \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$

b) $B = \sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2}}}.$

c) $C = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[2]{\frac{2}{3}}.$

d) $D = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}.$

e) $E = \frac{\sqrt[5]{b^2 \cdot \sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}.$

f) $F = \sqrt[3]{2018} \cdot \sqrt[2]{\frac{1}{2018}}.$

g) $G = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}.$

h) $H = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}.$

i) $I = \sqrt{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^3}.$

$$\begin{array}{lll}
 \text{j) } J = \sqrt[6]{x \cdot \sqrt[4]{x^5} \cdot \sqrt{x^3}}. & \text{k) } K = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}} : x^{\frac{11}{16}}. & \text{l) } L = \frac{(x^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{x^{-\sqrt{3}+2} \cdot x^{2+\sqrt{3}}}. \\
 \text{m) } M = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}} & \text{n) } N = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{2a^5 \cdot (a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}. & \text{o) } O = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}. \\
 \text{p) } P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}. & \text{q) } Q = \frac{x^{\frac{5}{4}y} + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}. & \text{r) } R = \frac{a^{\frac{1}{3}} (a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{4}} (a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})}.
 \end{array}$$

2.4.4 Dạng 4: So sánh cặp số

Ví dụ 6. So sánh cặp số sau: $2^{\sqrt{2}}$ và $2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2 > 1 \\ \sqrt{3} > \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{3}} > 2^{\sqrt{2}}.$$

Đáp số $2^{\sqrt{3}} > 2^{\sqrt{2}}$

Ví dụ 7. So sánh cặp số sau: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{1}{2} < 1 \\ \sqrt{3} > \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$$

Đáp số $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$

Ví dụ 8. So sánh cặp số sau: 2^{π} và 3^{π} .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3 > 2 \\ \pi > 0 \end{cases} \Rightarrow 3^{\pi} > 2^{\pi}.$$

Đáp số $3^{\pi} > 2^{\pi}$

Ví dụ 9. So sánh cặp số sau: $(\sqrt{2})^{-\pi}$ và $(\sqrt{3})^{-\pi}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \pi < 0 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2})^{-\pi} > (\sqrt{3})^{-\pi}$$

Đáp số $(\sqrt{2})^{-\pi} > (\sqrt{3})^{-\pi}$

Bài 6. So sánh các cặp số sau:

a) $4^{-\sqrt{3}}$ và $4^{-\sqrt{2}}$

b) $2^{\sqrt{3}}$ và $2^{1,7}$

c) 2^{-2} và 1

d) $(0,013)^{-1}$ và 1

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ và $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$

h) $\sqrt[3]{10}$ và $\sqrt[5]{20}$

i) $\sqrt[4]{5}$ và $\sqrt[3]{7}$

j) $\sqrt{17}$ và $\sqrt[3]{28}$

k) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$

l) $4^{\sqrt{5}}$ và $4^{\sqrt{7}}$

m) $(0,01)^{-\sqrt{2}}$ và $(10)^{-\sqrt{2}}$

n) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$ và $\left(\frac{\pi}{4}\right)^6$

o) $5^{-2\sqrt{3}}$ và $5^{-3\sqrt{2}}$

p) 5^{300} và 8^{300}

q) $(0,001)^{-3}$ và $\sqrt[3]{100}$

r) $4^{\sqrt{2}}$ và $(0,125)^{-\sqrt{2}}$

s) $(\sqrt{2})^{-3}$ và $(\sqrt{2})^{-5}$

t) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$ và $\left(\frac{5}{4}\right)^5$

u) $(0,02)^{-10}$ và 50^{11}

v) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$ và $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\sqrt{10}}{3}}$

w) $\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^{-\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$

Bài 7. So sánh các số mũ sau:

a) $(3,2)^m < (3,2)^n$

b) $(\sqrt{2})^m > (\sqrt{2})^n$

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^m > \left(\frac{1}{9}\right)^n$

d) $(\sqrt{5}-1)^m < (\sqrt{5}-1)^n$

e) $(\sqrt{2}-1)^m > (\sqrt{2}-1)^n$

f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

2.4.5 Dạng 5: Bài toán thực tế

Công thức lãi kép: Lãi kép là phần lãi của kì sau được tính trên số tiền gốc kì trước cộng với phần lãi của kì trước.



❶ Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$

❷ Số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n - A = A[(1+r)^n - 1]$

Ví dụ 10. Bà Mai gửi 50 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8%/năm. Tính số tiền lãi thu được sau 15 năm.

Lời giải.

Số tiền lãi thu được sau 15 năm: $50 \cdot [(1+8\%)^{15} - 1] \approx 108.6(\text{triệu})$

Đáp số $\approx 108.6(\text{triệu})$

Bài 8. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2%/một quý. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi quý số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho quý tiếp theo. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền (cả vốn lẫn lãi) gần nhất với kết quả nào sau đây?

Bài 9. Bác An đem gửi tổng số tiền 320 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Bác gửi 140 triệu đồng theo kỳ hạn ba tháng với lãi suất 2,1%/một quý. Số tiền còn lại bác An gửi theo kỳ hạn một tháng với lãi suất 0,73%/một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kỳ hạn số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau 15 tháng kể từ ngày gửi bác An đi rút tiền. Tính gần đúng đến hàng đơn vị

tổng số tiền lãi thu được của bác An.

Bài 10. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2%/một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền là bao nhiêu?

Bài 11. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả sử trong suốt thời gian gửi lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

Bài 12. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

Bài 13. Anh Nam mong muốn rằng sau 6 năm sẽ có 2 tỷ để mua nhà. Hỏi anh Nam phải gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiền tiết kiệm như nhau hàng năm gần nhất với giá trị nào sau đây, biết rằng lãi suất của ngân hàng là 8%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn.

Bài 14. Ông A muốn sau 5 năm có 1.000.000.000 đồng để mua ô tô Camry. Hỏi rằng ông A phải gửi ngân hàng mỗi tháng (số tiền như nhau) là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 0.5% và tiền lãi sinh ra hàng tháng được nhập vào tiền vốn.

Bài 15. Ông Việt vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông Việt sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông Việt hoàn nợ.

Bài 16. Một người đàn ông vay vốn ngân hàng với số tiền 100000000 đồng. Người đó dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ; Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi, theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 1,2% và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

2.5 Bài tập về logarit

2.5.1 Dạng 1: Tính giá trị biểu thức

1. Nhóm công thức định nghĩa

- | | |
|--|---|
| <p>❗</p> <p>❶ $a^x = b > 0 \Leftrightarrow x = \log_a b$ (mũ thành log)</p> <p>❸ $\log_a 1 = 0$</p> <p>❺ $\log_a a^b = b$</p> <p>❷ $\log_{a^\alpha} a^\beta = \frac{\beta}{\alpha}$</p> | <p>❷ $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$ (log thành mũ).</p> <p>❹ $\log_a a = 1$</p> <p>❻ $a^{\log_a b} = b$</p> <p>❸ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow b = a^{\log_a b}$</p> |
|--|---|

Ví dụ 11. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2 4 \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \log_2 4 \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_2 2^2 \cdot \log_{2^{-2}} 2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Đáp số $P = -1$

Ví dụ 12. Tính giá trị của biểu thức $P = 4^{\log_2 3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = 4^{\log_2 3} = 4^{2 \cdot \log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9.$$

Đáp số $P = 9$

Bài 17. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $A = \log_2 4 \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2$ b) $B = \log_5 \frac{1}{25} \cdot \log_{27} 9$ c) $C = \log_a \sqrt[3]{\sqrt{a}}$
d) $D = 4^{\log_2 3} + 9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$ e) $E = \log_{2\sqrt{2}} 8$ f) $F = 27^{\log_9 2} + 4^{\log_8 27}$
g) $G = \frac{\log_{a^3} a \cdot \log_{a^4} a^{\frac{1}{3}}}{\log_{\frac{1}{a}} a^7}$ h) $H = \log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2$ i) $I = 9^{2 \log_3 2 + 4 \log_{81} 5}$
j) $J = 81^{\log_3 5} + 27^{\log_9 36} + 3^{4 \log_9 7}$ k) $K = 25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}$ l) $L = 5^{3 - 2 \log_5 4}$
m) $M = 9^{\frac{1}{\log_6 3}} + 4^{\frac{1}{\log_8 2}}$ n) $N = \log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$ o) $O = 3^{1 + \log_9 4} + 4^{2 - \log_2 3}$

Bài 18. Thực hiện các phép tính sau:

- a) $A = \lg(\tan 1^\circ) + \lg(\tan 2^\circ) + \dots + \lg(\tan 89^\circ)$
b) $B = \log_8 [\log_4 (\log_2 16)] \cdot \log_2 [\log_3 (\log_4 64)]$
c) $C = 2 \log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$

2.5.2 Dạng 2: Biến đổi logarit

2. Nhóm công thức biến đổi

❶ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (tích $\Rightarrow$ tổng).

❷ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (thương $\Rightarrow$ hiệu).

!

❸ $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ (trên $\Rightarrow$ trên)

❹ $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$ (dưới $\Rightarrow$ dưới)

❺ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

❻ $\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b$

Ví dụ 13. Biến đổi biểu thức sau $P = \log_2(3x) - \log_2(4x)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \log_2(3x) - \log_2(4x) = \log_2 \frac{3x}{4x} = \log_2 \frac{3}{4}.$$

Đáp số $P = \log_2 \frac{3}{4}$

Bài 19. Thực hiện các phép tính:

a) $\log_3(2x) - \log_3(8x)$

b) $\log(6a) - \log(4a)$

c) $\ln(5b) - \ln(2b)$

Ví dụ 14. Khai triển biểu thức $P = \log_2 \frac{2a^3}{b}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \log_2 \frac{2a^3}{b} = \log_2(2a^3) - \log_2 b = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$$

Đáp số $P = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$

Ví dụ 15. Khai triển biểu thức $P = \log_{\sqrt{2}}^2(2a)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } Q = \log_{\sqrt{2}}^2(2a) = [2\log_2(2a)]^2 = [4(1 + \log_2 a)]^2 = 4(1 + 2\log_2 a + \log_2^2 a).$$

Đáp số $Q = 4(1 + 2\log_2 a + \log_2^2 a)$

Bài 20. Khai triển các biểu thức sau:

a) $\log_2(2a)$

b) $\log_3(27x)$

c) $\log_2(8a^2)$

d) $\log_3(27a^3)$

e) $\log_5(125a^5)$

f) $\log(100a^2b^3)$

g) $\log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a^3}{27}\right)$

h) $\log_{\sqrt{2}}(2a)$

i) $\log_{\sqrt{3}}(9a^2)$

j) $\log_{\sqrt[3]{3}}(27a^2b^3)$

k) $\log_{\sqrt{a}}(9\sqrt{a})$

l) $\log_a(125a^2b^3)$

m) $\log_3 \frac{9x^2}{y}$

n) $\log_{x^2} \frac{y}{z^2}$

o) $\log_3 \frac{27a^2}{\sqrt{b}}$

p) $\log_2 \frac{27a^3}{b^2}$

q) $\log_2 \frac{4x^{y^2}}{z}$

r) $\log_3 \frac{9a^{b^3}}{c^2}$

s) $\ln \frac{8e^3\sqrt{a}}{b^2}$

t) $\ln \frac{16e^{a^2}b}{\sqrt{c}}$

Bài 21. Khai triển các biểu thức sau:

a) $\log_{\sqrt{2}}^2\left(\frac{a}{b}\right)^2$

b) $\log_{\sqrt{2}}^2(2a)$

c) $\log_9^2(3a) - \log_{\frac{1}{3}}^2(27a)$

d) $\log_4^2(2a^2) - \log_{\sqrt{2}}^2 \frac{4}{a}$

e) $\log_{\sqrt{3}}^2(27x) + \log_{\frac{1}{9}}^2(3x) + \log_9^2\left(\frac{x}{27}\right)$

f) $\log_{\sqrt{3}}^2\left(\frac{3a}{b}\right)^3$

g) $\log_{\sqrt{5}}^2\left(\frac{a^2}{25b}\right)$

h) $\log_{c^2}^2 \frac{a}{b^2}$

Ví dụ 16. Cho $\log_3 x = 2\log_{\sqrt{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} b$. Tính x theo a và b .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_3 x &= 2\log_{3^{\frac{1}{2}}} a + \log_{3^{-1}} b = 4\log_3 a - \log_3 b = \log_3 a^4 - \log_3 b \\ &= \log_3 \frac{a^4}{b} \Rightarrow x = \frac{a^4}{b} \end{aligned}$$

Đáp số $x = \frac{a^4}{b}$

Ví dụ 17. Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a (a^2 \cdot b^3 \cdot c^4)$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a (a^2 \cdot b^3 \cdot c^4) = \log_a a^2 + \log_a b^3 + \log_a c^4 = 2 + 3 \log_a b + 4 \log_a c$.

$\Rightarrow P = 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 20$.

Đáp số $P = 20$

Bài 22. Tính giá trị biểu thức thỏa điều kiện cho trước.

a) Cho $\log_7 x = \log_7 ab^2 - \log_7 a^3b$. Tính x theo a và b .

b) Cho $\log_a b = 3$ và $\log_a c = 5$. Tính $P = \log_a (ab^3c^6)$

c) Cho $\log_a b = 3$ và $\log_a c = 4$. Tính $P = \log_a (ab^2c^5)$

d) Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 5$. Tính $P = \log_a (a^2 \cdot \sqrt{b^3} \cdot \sqrt[3]{c^2})$

e) Cho $\log_2 a = 4$ và $\log_3 b = 2$. Tính $P = 2 \log_2 [\log_2(8a) + 9] + \log_{\frac{1}{9}} b^2$

f) Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{3}$. Tính $P = 5 \log_3 [\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$

g) Cho $\log_5 a = 6$ và $\log_6 b = \frac{1}{4}$. Tính $P = 3 \log_5 \left[\log_5 \left(\frac{125}{a} + 28 \right) \right] + 2 \log_{\sqrt{6}} (36\sqrt{b})$

3. Nhóm đổi cơ số

❗ ❶ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	❷ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
❸ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	❹ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Ví dụ 18. Cho $\log_a x = 2$ và $\log_b x = 3$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_{ab} x + \log_{\frac{a}{b}} x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \log_{ab} x + \log_{\frac{a}{b}} x = \frac{1}{\log_x ab} + \frac{1}{\log_x \frac{a}{b}} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b} + \frac{1}{\log_x a - \log_x b} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}} + \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} - \frac{1}{\log_b x}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{36}{5}. \end{aligned}$$

Đáp số $P = \frac{36}{5}$

Bài 23. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) Cho $\log_a x = 3$ và $\log_b x = 4$. Tính $P = \log_{abx} x + \log_{\frac{a}{b}} x$.

b) Cho $\log_a x = 2$ và $\log_b x = 5$. Tính $P = \log_{ab} x - 2 \log_{\frac{a}{b}} x$.

c) Cho $\log_a x = 3$ và $\log_b x = 2$. Tính $P = 2 \log_{ab} x - 4 \log_{\frac{a}{b}} x$.

d) Cho $\log_a b = \frac{b}{2}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tính $a^{32} + b$.

e) Cho $\log_a b = \frac{b}{25}$ và $\log_5 a = \frac{125}{b}$. Tính $a + 2b$.

- f) Cho $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{b}{4}$ và $\log_{\sqrt{2}} a = \frac{16}{b}$. Tính $a - 2b$.
- g) Cho $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{b}{4}$ và $\log_{\sqrt{2}} a = \frac{16}{b}$. Tính $a - 2b$.
- h) Cho $\log_m 5 = x$ và $\log_m 3 = y$. Tính $P = (x + y) \cdot \log_{10} m$.
- i) Cho $\log_a 6 = x$ và $\log_a 2 = y$. Tính $P = (x + y) \cdot \log_{12} a$.

Ví dụ 19. Cho $\log_2 14 = a$. Tính $\log_{49\sqrt{7}} 32$ và $\log_{49} 32$ theo a .

Lời giải.

Ta có $\log_2 14 = a \Leftrightarrow \log_2 (2 \cdot 7) = a \Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2 7 = a \Leftrightarrow 1 + \log_2 7 = a$
 $\Rightarrow \log_2 7 = \boxed{a - 1}$

$$\blacksquare \log_{49\sqrt{7}} 32 = \frac{2}{5} \log_7 32 = \frac{2}{5} \log_7 2^5 = 2 \log_7 2 = \frac{2}{\log_2 7} = \frac{2}{a - 1}$$

Đáp số $\boxed{\log_{49\sqrt{7}} 32 = \frac{2}{a - 1}}$

$$\blacksquare \log_{49} 32 = \log_{7^2} 2^5 = \frac{5}{2} \cdot \log_7 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a - 1} = \frac{5}{2(a - 1)}.$$

Đáp số $\boxed{\log_{49} 32 = \frac{5}{2(a - 1)}}$

Bài 24. Thực hiện phép biến đổi theo yêu cầu bài toán

- a) Cho $\log_{12} 27 = a$. Tính $\log_6 16$ theo a .
- b) Cho $\log_2 14 = a$. Tính $\log_{49\sqrt{7}} 32$ và $\log_{49} 32$ theo a .
- c) Cho $\log_2 5 = a$; $\log_2 3 = b$. Tính $\log_3 135$ theo a, b .
- d) Cho $\log_{15} 3 = a$. Tính $\log_{25} 15$ theo a .
- e) Cho $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$.
- f) Cho $\lg 3 = 0,477$. Tính $\lg 9000$; $\lg(0,000027)$; $\frac{1}{\log_{81} 100}$.
- g) Cho $\log_7 2 = a$. Tính $\log_{\frac{1}{2}} 28$ theo a .
- h) Cho $\log_a b = \sqrt{5}$. Tính $\log_{\sqrt{ab}} \frac{b}{\sqrt{a}}$.
- i) Cho $\log_a b = \sqrt{13}$. Tính $\log_{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{ab^2}$.
- j) Cho $\log_{25} 7 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$ theo a, b .
- k) Cho $\lg 3 = a$; $\lg 2 = b$. Tính $\log_{125} 30$ theo a, b .
- l) Cho $\log_{14} 7 = a$; $\log_{14} 5 = b$. Tính $\log_{35} 28$ theo a, b .
- m) Cho $\log_{30} 3 = a$; $\log_{30} 5 = b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo a, b .

n) Cho $\log_2 3 = a$; $\log_3 5 = b$; $\log_7 2 = c$. Tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c .

o) Cho $\log_a b = \sqrt{7}$. Tính $\log_{a\sqrt{b}} \frac{a}{\sqrt{b^3}}$

p) Cho $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$; $\log_2 3 = c$. Tính $\log_6 35$ theo a, b, c .

q) Cho $\log_{49} 11 = a$; $\log_2 7 = b$. Tính $\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{121}{8}$ theo a, b .

2.5.3 Dạng 3: Chứng minh đẳng thức logarit

Ví dụ 20. Chứng minh đẳng thức: $\log_{(ax)}(bx) = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$ (xem điều kiện được thỏa).

Lời giải.

Ta có $\log_{(ax)}(bx) = \log_{(ax)} b + \log_{(ax)} x = \frac{1}{\log_b(ax)} + \frac{1}{\log_x(ax)} = \frac{1}{\log_b a + \log_b x} + \frac{1}{\log_x a + 1}$
 $= \frac{\log_a b}{1 + \log_a x} + \frac{\log_a x}{1 + \log_a x} = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$ (đpcm).

Bài 25. Chứng minh các đẳng thức sau: (xem điều kiện được thỏa)

a) $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

b) $\log_{(ax)}(bx) = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$

c) $\log_a c + \log_b c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_{ab} c}$

d) $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$

e) $\log_c \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log_c a + \log_c b)$, với $a^2 + b^2 = 7ab$

f) $\log_a (x+2y) - 2\log_a 2 = \frac{1}{2} (\log_a x + \log_a y)$, với $x^2 + 4y^2 = 12xy$

g) $\lg \frac{3a+b}{4} = \frac{1}{2} (\lg a + \lg b)$, với $9a^2 + b^2 = 10ab$

h) $\log_{(b+c)} a + \log_{(c-b)} a = 2\log_{(c+b)} a \cdot \log_{(c-b)} a$, với $a^2 + b^2 = c^2$

i) $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^k} x} = \frac{k(k+1)}{2\log_a x}$

j) $\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}$

k) $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$ với $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ và $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$

l) $\frac{\log_a N - \log_n N}{\log_b N - \log_c N} = \frac{\log_a N}{\log_c N}$ với a, b, c lần lượt theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân.

2.5.4 Dạng 4: So sánh cặp số

Bài 26. Hãy so sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$

b) $\log_{0,1} \sqrt[3]{2}$ và $\log_{0,2} 0,34$

c) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{5}$ và $\log_{\frac{5}{2}} \frac{3}{4}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80}$ và $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15 + \sqrt{2}}$

e) $\log_{13} 150$ và $\log_{17} 290$

f) $2^{\log_6 3}$ và $3^{\log_6 \frac{1}{2}}$

g) $\log_7 10$ và $\log_{11} 13$

h) $\log_2 3$ và $\log_3 4$

2.5.5 Dạng 4: Bài toán thực tế

Bài 27. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{N.t}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

Bài 28. Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm $t^\circ\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k.a^t$. (trong đó a, k là các hằng số dương). Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20%?

Bài 29. Một người đã thả một lượng bào hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bào phát triển thành 3 lần lượng đã có và tốc độ phát triển của bào ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày, lượng bào sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

2.6 Bài tập hàm số mũ-hàm số logarit

2.6.1 Dạng 1: Tập xác định hàm số

■ $y = \log_{a(x)} f(x)$ xác định khi: $\begin{cases} 0 < a(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

! ■ $y = \lg f(x)$ xác định khi: $f(x) > 0$.

■ $y = \ln f(x)$ xác định khi: $f(x) > 0$.

■ $y = a^x$ xác định khi $0 < a \neq 1$.

Ví dụ 21. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2 (3x - x^2)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi: $3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Tập xác định là $D = (0; 3)$.

Ví dụ 22. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_2 \frac{x-2}{1-x^2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi: $\frac{x-2}{1-x^2} > 0$.

- Cho $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
- Cho $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{x-2}{1-x^2}$	$+$	$-$	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu $\frac{x-2}{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$. Tập xác định là $D = (-\infty; -1) \cup (1; 2)$.

Ví dụ 23. Tìm tập xác định hàm số $y = \log_{(x-1)} \frac{x}{-x+2}$.

Lời giải. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} \frac{x}{-x+2} > 0 \\ 0 < x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 1 < x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Tập xác định hàm là $D = (1; 2)$.

Bài 30. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \lg \frac{x-1}{-2x-3}$

b) $y = \ln \sqrt{x^2 - 4x - 12}$

c) $y = \sqrt{x^2 + x - 2} \cdot \log_3(9 - x^2)$

d) $y = \log_3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$

e) $y = \log_{(2x-1)}(x^2 - 1)$

f) $y = \log_x \frac{x}{4-x^2}$

2.6.2 Dạng 2: Đạo hàm

❶ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

❸ $(e^x)' = e^x$

!

❺ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

❽ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

❷ $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

❹ $(e^u)' = e^u \cdot u'$

❻ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

❾ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Bài 31. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$

b) $y = (x^2 + 2x) e^{-x}$

c) $y = e^{-2x} \cdot \sin x$

d) $y = e^{2x+x^2}$

e) $y = x \cdot e^{\sqrt{x} - \frac{1}{3}x}$

f) $y = \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} - e^x}$

g) $y = 2^{(x^3 + 1)}$

h) $y = 3^{\sqrt{x^2 + 1}}$

i) $y = 2^x \cdot e^{\cos x}$

j) $y = \frac{3^x}{x^2 - x + 1}$

k) $y = \cos x \cdot e^{\cot x}$

l) $y = 2018^{2018x}$

Bài 32. Tính các đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = \ln(2x^2 + x + 3)$ b) $y = \log_2(\cos x)$ c) $y = e^x \cdot \ln(\cos x)$
d) $y = (2x - 1) \ln(3x^2 + x)$ e) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^3 - \cos x)$ f) $y = \log_3(\cos x)$
g) $y = \frac{\ln(2x + 1)}{\sqrt{2x + 1}}$ h) $y = \frac{\ln(2x + 1)}{x + 1}$ i) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

Bài 33. Tính đạo hàm của các hàm số sau

- a) $y = 1 - (x^2 - 2x + 1)e^x$ b) $y = 3^x - (2x + 1)2^x$ c) $y = \frac{\ln(x) - 2}{x + 1}$
d) $y = (x - 4) \log x$ e) $x \log_2(x + 1)$ f) $y = \log \sqrt[3]{x^2} \cdot \ln(3 - x^2)$
g) $y = (2x^2 - 1)e^{3x}$ h) $y = x^3 \sqrt{e^{x^2} + 1}$ i) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
j) $y = 3^x - \sqrt{e^{3x} + 1}$ k) $y = \ln(x^3 + 2x^2 - x)$ l) $y = (x^2 + 3) \ln(x^2 + 2)$
m) $y = \sqrt[4]{\ln^3(3x^2 + 1)}$ n) $y = 1 - (2x + 3)3^x$ o) $y = \sqrt{2} - e^x \cdot \sin^2 x$
p) $y = 2^x - \sqrt{e^x}$ q) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ r) $y = x \ln x + 1$
s) $y = 1 + x - 2 \ln^2 x$ t) $y = 1 - \sqrt{2 \ln x + \ln^2 x}$ u) $y = \log_2 x - 3 \log_3 x$
v) $y = \log(x^2 + 1) - \ln(2x)$ w) $y = x^\pi \cdot \pi^x$ x) $y = e^x(\sin x - \cos x)$

2.6.3 Dạng 3: Chứng minh hàm số đã cho thỏa hệ thức cho trước

Ví dụ 24. Chứng minh hàm số đã cho thỏa hệ thức được chỉ ra.

$y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Chứng minh rằng: $xy' = (1 - x^2)y$

Lời giải.

Ta có $y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$

Ta có: VT = $xy' = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) = (1 - x^2)y =$ VP (đpcm).

Bài 34. Chứng minh hàm số đã cho thỏa hệ thức được chỉ ra.

- a) $y = (x + 1)e^x; y' - y = e^x$ b) $y = e^{4x} + 2e^{-x}; y''' + 2y' - 12y = 0$
c) $y = a \cdot e^{-x} + b \cdot e^{-2x}; y'' + 3y' + 2y = 0$ d) $y = e^{-x} \sin x; y'' + 2y' + 2y = 0$
e) $y = e^{-x} \cos x; y^{(4)} + 4y = 0$ f) $y = e^{\sin x}; y' \cos x - y \sin x - y'' = 0$
g) $y = e^{2x} \sin 5x; y'' - 4y' + 29y = 0$ h) $y = \frac{1}{2}x^2 e^x; y'' - 2y' + y = e^x$
i) $y = e^{4x} + 2e^{-x}; y''' - 13y' - 12 = 0$ j) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; xy' = (1 - x^2)y$

Bài 35. Chứng minh hàm số đã cho thỏa hệ thức được chỉ ra.

- a) $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right); xy' + 1 = e^y$

- b) $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$; $xy' = y(y \ln x - 1)$
- c) $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$; $y + xy' + x^2 y'' = 0$
- d) $y = \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}$; $2x^2 y' = x^2 y^2 + 1$
- e) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$; $2y = xy' + \ln y'$
- f) $y = (x^2+1)(e^x+2016)$; $y' = \frac{2xy}{x^2+1} + e^x(x^2+1)$
- g) $y = x[3\cos(\ln x) + 4\sin(\ln x)]$; $x^2 y''' - xy' + 2y = 0$

2.6.4 Dạng 4: Giải phương trình, bất phương trình

Bài 36. Giải các phương trình, bất phương trình

- a) $f'(x) = 2f(x)$; $f(x) = e^x(x^2+3x+1)$
- b) $f'(x) = \frac{1}{x}f(x) = 0$; $f(x) = x^3 \ln x$
- c) $f'(x) > g'(x)$; $f(x) = x + \ln(x-5)$; $g(x) = \ln(x-1)$
- d) $f'(x) = 0$; $f(x) = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 5$
- e) $f'(x) < g'(x)$; $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{2x+1}$; $g(x) = 5^x + 4x \cdot \ln 5$

2.6.5 Dạng 5: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Tìm GTLN-GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

- Tính y'
- Giải phương trình $y' = 0$ và chỉ nhận những nghiệm $x_0 \in [a; b]$
- Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_0)$
- ! ■ Khi đó: $\min_{[a;b]} = \min \{f(a), f(b), f(x_0)\}$ và $\max_{[a;b]} = \max \{f(a), f(b), f(x_0)\}$

■ **⚠ Chú ý:**

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ tăng trên $[a; b]$ thì $\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a;b]} f(x) = f(b)$
2. Nếu hàm số $y = f(x)$ giảm trên $[a; b]$ thì $\max_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\min_{[a;b]} f(x) = f(b)$
3. Nếu bài toán đặt ẩn phụ thì phải có điều kiện cho ẩn phụ đó.

Ví dụ 25. Tìm GTLN-GTNN của hàm số $y = x^2 \cdot e^x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x)$.

- $y' = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0(\text{loại}) \\ x = -2 \end{cases}$
 - $f(-3) = 9.e^{-3} + 1 = \frac{9}{e^3} + 1$; $f(2) = 4.e^2 + 1$; $f(-2) = 4.e^{-2} + 1 = \frac{4}{e^2} + 1$
- Vậy $\min_{[-3;2]} f(x) = 9.e^{-3} + 1$; $\max_{[-3;2]} f(x) = 4.e^2 + 1$.

Bài 37. Tìm GTLN-GTNN của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 1$ trên đoạn $[1; e^2]$ b) $y = \ln^2 x - \ln x$ trên đoạn $[1; e^2]$
- c) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$ trên đoạn $[-3; 0]$ d) $y = x \ln x - 1$ trên đoạn $[1; e^2]$
- e) $y = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ f) $y = x^2.e^x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$

A. PHƯƠNG TRÌNH

2.7 Phương trình mũ

2.7.1 Phương trình mũ cơ bản

Với $a > 0$, $a \neq 1$ thì



$$a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$$

Ví dụ 26. Giải phương trình sau $2^{x-1} = 3$ (1)

Lời giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x - 1 = \log_2 3 \Leftrightarrow x = 1 + \log_2 3 \Leftrightarrow x = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$

Đáp số $x = \log_2 6$

⚠ Chú ý: $1 = \log_a a$ do đó: $1 = \log_2 2$

Ví dụ 27. Giải phương trình sau $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$ (2)

Lời giải.

Ta có (2) $\Leftrightarrow 2^x + 2.2^x = 3^x + 3.3^x \Leftrightarrow 3.2^x = 4.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{3}$.

Đáp số $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{3}$

Bài 38. Giải các phương trình sau:

- a) $2018^{x+1} = 2$ b) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2}$
- c) $3^{x+1} + 3^{x+2} = 9.5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$ d) $2.3^{x+1} - 6.3^{x-1} - 3^x = 9$
- e) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x}.17 + 7^x.17 = 0$ f) $5.3^x + 3.2^{x-1} = 7.2^x - 4.3^x$

2.7.2 Một số phương pháp giải phương trình mũ

2.7.2.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Dùng các công thức biến đổi phương trình đã cho về dạng: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Khi đó: Với $a > 0$, $a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$



- Trường hợp cơ số a chưa biến:

$$a^M = a^N \Leftrightarrow (a - 1) \cdot (M - N) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ M = N \end{cases}$$

Ví dụ 28. Giải phương trình $2^{x^2-1} = 8$ (1)

Lời giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2^{x^2-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-1} = 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Đáp số $x = \pm 2$

Ví dụ 29. Giải phương trình $27^{3x-2} = 9^{x-1}$ (2)

Lời giải.

Ta có (2) $\Leftrightarrow 3^{3(3x-2)} = 3^{2(x-1)} \Leftrightarrow 3(3x-2) = 2(x-1) \Leftrightarrow 9x-6 = 2x-2 \Leftrightarrow 7x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$.

Đáp số $x = \frac{4}{7}$

Ví dụ 30. Giải phương trình $2018^{x^2-3x+2} = 1$ (3)

Lời giải.

Ta có (3) $\Leftrightarrow 2018^{x^2-3x+2} = 2018^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Đáp số $x = 1; x = 2$

⚠ Chú ý: $1 = a^0$ do đó: $1 = 2018^0$.

Ví dụ 31. Giải phương trình $(x+1)^{\sqrt{x-3}} = 1$ (4)

Lời giải.

Điều kiện: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

(3) $\Leftrightarrow (x+1)^{\sqrt{x-3}} = (x+2)^0 \Leftrightarrow [(x+1) - 1] \cdot [\sqrt{x-3} - 0] = 0 \Leftrightarrow x \cdot \sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{loại}) \\ x = 3 \end{cases}$.

Đáp số $x = 3$

Bài 39. Giải các phương trình sau:

a) $(0,04)^x = 625 \cdot \sqrt[3]{5}$

b) $0,125 \cdot 16^{1-x} = \frac{\sqrt{8}}{32}$

c) $2^{8-x^2} \cdot 5^{8-x^2} = 0,001 \cdot (10^5)^{1-x}$

d) $3^{2x-1} \cdot 15^{3x} \cdot 5^{-3x} = \sqrt[3]{9}$

e) $5 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 7 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x$

f) $9^{3x-1} = 3^{8x-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} = 2^{4-3x}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x} = 2$

i) $(3 - 2\sqrt{2})^{2x} = 3 + 2\sqrt{2}$

j) $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

k) $(1, 5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

l) $(0, 75)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{5-x}$

m) $5^{x^2-5x+6} = 1$

n) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$

o) $(3 - 2\sqrt{2})^{63x} = 3 + 2\sqrt{2}$

p) $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$

q) $2 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$

r) $(x^2 - 2x + 2)^{\sqrt{4-x^2}} = 1$

s) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-2} \cdot \sqrt{x} \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^5} = \frac{9}{16}$

t) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$

2.7.2.2 Phương pháp logarit hóa

! Phương trình logarit hóa có dạng: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$

Ví dụ 32. Giải phương trình $2^{x-1} = 7^{1-x^2}$ (1)

Lời giải.

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow x - 1 = (1 - x^2) \cdot \log_2 7 \Leftrightarrow x - 1 + (x - 1)(x + 1) \log_2 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)[1 + (x + 1) \cdot \log_2 7] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 1 + (x + 1) \cdot \log_2 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + 1 = -\frac{1}{\log_2 7} = -\log_7 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 - \log_7 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\log_7 14 \end{cases}$$

Đáp số $x = 1; x = -\log_7 14$

Bài 40. Giải các phương trình sau:

a) $2^x = 3^{x^2}$

b) $5^{x-1} = 3^{\frac{x-1}{x+1}}$

c) $6^{x-1} = 5^{x^2-2x+1}$

d) $2^{4-x^2} = 3^{2-x}$

e) $3^{5^x} = 5^{3^x}$

f) $7^x = 2^{4x}$

Bài 41. Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc logarit hóa)

a) $4^{x+1} = \sqrt[3]{16}$.

b) $2^{x+1} \cdot 3^{2x+3} = 6^{3x+1}$.

c) $2^{2x^2+x+5} = 8^{2x+1}$.

d) $5^x \cdot 8^{x+1} = 100$.

e) $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$.

f) $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 5^x = 200$.

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$.

h) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+3} + 3^{x+1}$.

i) $8^{\frac{x}{x+2}} = 36 \cdot 3^{2-x}$.

j) $3^{x+2} - 3^{x+1} = 18$.

k) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 125^{\frac{x+17}{x-3}}$

l) $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$

m) $(3 - 2\sqrt{2})^{2x} = 3 + 2\sqrt{2}$

n) $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

o) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

p) $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$

q) $(\sqrt{2x-x^2})^{x-1} = 1$

r) $(\sqrt{x-x^2})^{x-2} = 1$

s) $(x^2-x+1)^{x^2-1} = 1$

t) $(x+1)^{\sqrt{x-3}} = 1$

u) $(x^2+3)^{|x^2-5x+4|} = (x^2+3)^{x+1}$

Bài 42. Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc logarit hóa)

a) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 9477$

b) $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$

c) $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$

d) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 7^x + 7^{x+1} - 7^{x+2}$

e) $2^{2x+5} - 3^{x+\frac{9}{2}} = 3^{x+\frac{7}{2}} - 4^{x+4}$

f) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+2} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$

g) $9^x - 2^{x+\frac{3}{2}} = 2^{x+\frac{1}{2}} - 3^{2x-1}$

h) $4^{-x} - 3^{-x-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-x} - 2^{-2x-1}$

i) $5^{x+\frac{1}{2}} - 9x = 3^{2x-2} - 5^{x-\frac{1}{2}}$

j) $4^{x+2} - 10 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^x - 11 \cdot 2^{2x}$

k) $x^2 - (2^x - 3)x + 2(1 - 2^x) = 0$

l) $x^2 \cdot 2^{x+1} = 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|} + 2^{x-1}$

m) $6^{2x+3} = 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}$

n) $3^{x+3} \cdot 7^{x+3} = 3^{2x} \cdot 7^{2x}$

o) $3^{2x+3} \cdot 5^{2x+3} = 5^{5x} \cdot 3^{5x}$

p) $3^{x-1} \cdot 2^{2x-2} = 12^{9-x}$

q) $8^{\frac{x}{x+2}} = 36 \cdot 3^{2-x}$

r) $5^{x^2-5x+6} = 2^{x-1}$

s) $2^x \cdot 5^{\frac{x-1}{x}} = 10$

t) $3^{x^2-4x} = 2^{x-4}$

u) $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 40$

v) $2^{2x+6} + 2^{x+7} - 17 = 0$

w) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

x) $5^{x-1} + 5^{3-x} = 26$

y) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$

z) $5^{x+1} + 6 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x-1} = 52$

2.7.2.3 Phương pháp đặt ẩn phụ

2.7.2.3.1 Dạng 1:

$$P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$$

2.7.2.3.2 Dạng 2:

$$\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot (ab)^{f(x)} + \lambda \cdot b^{2f(x)} = 0$$

! Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ hoặc $a^{2f(x)}$ (chia cơ số lớn nhất hoặc nhỏ nhất). Sau đó đặt

$$t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$$

2.7.2.3.3 Dạng 3:

$$a^{f(x)} + b^{f(x)} = m$$

với $a \cdot b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

Ví dụ 33. Giải phương trình: $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ (1)

Lời giải.

$$(1) \Leftrightarrow (3^2)^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = 3^x, (t > 0), \text{ phương trình } (*) \text{ trở thành } t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (n)} \\ t = 3 \text{ (n)} \end{cases}$$

- Với $t = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$
- Với $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_3 3 = 1$

Đáp số $\boxed{x = \log_3 2; x = 1}$

Ví dụ 34. Giải phương trình: $25^x + 15^x = 2 \cdot 9^x$ (2)

Lời giải.

Chia hai vế cho 25^x , ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 1 + \frac{15^x}{25^x} = 2 \cdot \frac{9^x}{25^x} \Leftrightarrow 2 \cdot \left[\left(\frac{3}{5} \right)^x \right]^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^x + 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3}{5} \right)^x > 0, \text{ phương trình } (*) \text{ trở thành } 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5} \right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Đáp số $\boxed{x = 0}$

Ví dụ 35. Giải phương trình: $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$ (3)

Lời giải.

$$\text{Nhận xét: } (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1 \Leftrightarrow [(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})]^x = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x \cdot (2 - \sqrt{3})^x = 1$$

$$\text{Đặt } (2 + \sqrt{3})^x = t > 0 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$$

$$\text{Phương trình (3) trở thành: } t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + \sqrt{3} > 0 \text{ (nhận)} \\ t = 2 - \sqrt{3} > 0 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

- Với $t = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$
- Với $t = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

Đáp số $\boxed{x = 1; x = -1}$

Bài 43. Giải các phương trình sau:

a) $2^{1+2x} + 15 \cdot 2^x - 8 = 0$

b) $5^{x+1} - 5^{2-x} = 124$

c) $5^{\sqrt{x}} - 5^{1-\sqrt{x}} + 4$

d) $3^{2-2x} - 2 \cdot 3^{2-x} - 27 = 0$

e) $5^x + 25^{1-x} = 6$

f) $(7 + 4\sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 6$

g) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6$

h) $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$

i) $4^{x+1} - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

j) $3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$

k) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$

l) $49^x + 7^{x+1} - 8 = 0$

m) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

o) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$

q) $4^{x^2+2} + 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$

s) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$

u) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

w) $\frac{8}{2^{x-1}} + \frac{2^x}{2+2^x} = \frac{18}{2^{x-1} + 2^{1-x} + 2}$

n) $(7+4\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 6$

p) $3^{2x+5} - 36 \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$

r) $3^{2x^2+2x+1} - 28 \cdot 3^{x^2+x} + 9 = 0$

t) $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$

v) $5^{\sqrt{x}} - 5^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0$

Bài 44. Giải các phương trình sau:

a) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

c) $e^{2x} - 4 \cdot e^{-2x} = 3$

e) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

g) $e^{6x} - 3 \cdot e^{3x} + 2 = 0$

i) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

k) $25^x - 23 \cdot 5^x - 5 = 0$

m) $13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$

o) $\frac{3}{2^{3-x}} = 4^{x-4} - 7$

q) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 4$

s) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 4$

u) $(\sqrt[3]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} - 84 = 0$

w) $8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

y) $4^x + 2^{3-4x} = 6$

b) $2^{x+2} - 2^{2-x} - 15 = 0$

d) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

f) $4^{x+1} + 2^{x+2} - 3 = 0$

h) $-8^x + 2 \cdot 4^x + 2^x - 2 = 0$

j) $9^x - 25 \cdot 3^x + 7 = 0$

l) $25^x - 6 \cdot 5^{x+1} + 5^3 = 0$

n) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = \frac{1}{5}$

p) $3^{2(x+1)} - 82 \cdot 3^x + 9 = 0$

r) $9^{x^2-1} - 3^{x^2+1} - 6 = 0$

t) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

v) $4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x+2} - 16 = 0$

x) $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$

z) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0$

Bài 45. Giải các phương trình sau:

a) $5^{2x-3} = \frac{2}{5^{x-1}} + 15$

c) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-3} = 6^{5-2x} - 12$

e) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$

g) $9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} = 2$

i) $\frac{9}{2^{x-2}} = \frac{10+4\frac{x}{2}}{4}$

k) $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} = 9^{\sqrt{x}}$

m) $4^{3+2\cos x} - 7 \cdot 4^{1+\cos x} - 2 = 0$

o) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9$

d) $\frac{3^{2x}}{100^x} = 2 \cdot (0,3)^x + 3$

f) $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$

h) $5 \cdot 2^{3|x-1|} - 3 \cdot 2^{5-3x} + 7 = 0$

j) $3 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}} - 8 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} + 4 = 0$

l) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$

n) $(7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 = 0$

Bài 46. Giải các phương trình mũ sau:

a) $9^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 4^{x+1} = 0$

b) $49^x - 2 \cdot 35^x - 7 \cdot 5^{2x+1} = 0$

c) $2 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$

d) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$

e) $4 \cdot 9^x + 12^x - 3 \cdot 16^x$

f) $8 \cdot 4^x + 9^x = 6^{x+1}$

g) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

h) $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$

i) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x$

j) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$

k) $4^x - 2 \cdot 6^x = 3 \cdot 9^x$

l) $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x$

m) $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$

n) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

o) $25^x + 10^x + 2^{2x+1}$

p) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$

q) $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$

r) $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x}$

s) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

t) $8 \cdot 4^x + 9^x = 6^{x+1}$

u) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

v) $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$

w) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$

Bài 47. Giải các phương trình mũ sau:

a) $(2 + \sqrt{3})^{x^2} + (2 - \sqrt{3})^{x^2} = 4$

b) $(\sqrt{7 + \sqrt{48}})^x + (\sqrt{7 - \sqrt{48}})^x = 14$

c) $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x = 10$

d) $6 \cdot (\sqrt{5} + 1)^x - 2 \cdot (\sqrt{5} - 1)^x = 2^{x+2}$

e) $(\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}})^x + (\sqrt[3]{3 - \sqrt{8}})^x = 6$

f) $(8 + 3\sqrt{7})^{\tan x} + (8 - 3\sqrt{7})^{\tan x} = 16$

g) $(\sqrt{4 - \sqrt{15}})^x + (\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x = (2\sqrt{2})^x$

h) $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 14$

i) $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 4$

j) $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3 \cdot (2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0$

k) $\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^x + 7 \cdot \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$

l) $(3 + \sqrt{5})^x + 16 \cdot (3 - \sqrt{5})^x = 2^{x+3}$

2.7.2.4 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Xét hàm số: $f(x) = g(x)$ (1)

- Đoán x_0 là một nghiệm của phương trình (1) (thông thường là lân cận của số 0)
- Dựa vào tính đồng biến và nghịch biến của $f(x)$ và $g(x)$ để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất:
 - $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến
 - $f(x)$ đơn điệu và $g(x) = c$ (hằng số)



- Nếu $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

■ **Lưu ý**

- Hàm số bậc nhất: $y = ax + b$, ($a \neq 0$)
 - Đồng biến khi: $a > 0$
 - Nghịch biến khi: $a < 0$
- Hàm số mũ: $y = a^x$
 - Đồng biến khi: $a > 1$
 - Nghịch biến khi: $0 < a < 1$

Ví dụ 36. Giải phương trình: $3^x = 5 - 2x$ (4)

Lời giải.

Đặt $f(x) = 3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (vì $a = 3 > 1$)

$g(x) = 5 - 2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (vì $a = -2 < 0$)

Ta có: $f(1) = g(1) \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (4).

Ví dụ 37. Giải phương trình: $(x + 4) \cdot 9^x - (x + 5) \cdot 3^x + 1 = 0$ (5)

Lời giải.

Đặt $3^x = t > 0$, phương trình (4) trở thành: $(x + 4)t^2 - (x + 5)t + 0 = 0$

$$\Delta = (x + 5)^2 - 4(x + 4) = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x + 5 + x + 3}{2(x + 4)} = 1 \\ t = \frac{x + 5 - x - 3}{2(x + 4)} = \frac{1}{x + 4} \end{cases}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

- Với $t = \frac{1}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ 3^x \cdot (x + 4) = 1 \end{cases} (**)$

Xét hàm số $f(x) = 3^x \cdot (x + 4)$, $\forall x \in (-4; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 3^x \cdot (x + 4) \cdot \ln 3 + 3^x = 3^x \cdot [(x + 3) \cdot \ln 3 + 1] > 0, \forall x \in (-4; +\infty)$
 $\Rightarrow f(x)$ đồng biến $\forall x \in (-4; +\infty)$ và $g(x) = 1$ là hàm không đổi.

Ta thấy $f(-1) = g(-1) \Rightarrow x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (**).

Vậy phương trình (5) có hai nghiệm $x = 0; x = -1$

Đáp số $x = 0; x = -1$

Bài 48. Giải các phương trình mũ sau (sử dụng tính đồng biến và nghịch biến)

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$

d) $2x = 3^{\frac{x}{2}} + 1$

e) $2^x = x + 2$

f) $7^{6-x} = x + 2$

g) $3^x = x + 2$

h) $2x = 3^{\frac{x}{2}} + 1$

i) $3^x = 11 - x$

j) $2^{-x} + 3x + 10 = 0$

k) $3^x = 5 - 2x$

l) $2^{x+1} - 4^x = x - 1$

m) $4^x + 7^x = 9x + 2$

n) $6^x + 2^x = 5^x + 3^x$

o) $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$

p) $2^x + 5^x = 7^x$

q) $9^x + 2(x-2) \cdot 3^x + 2x - 5 = 0$

r) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$

s) $(3 + 2\sqrt{2})^x + (3 - 2\sqrt{2})^x = 6^x$

t) $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$

u) $2^{\sqrt{3-x}} = -x^2 + 8x - 14$

v) $3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$

Bài 49. Giải các phương trình sau:

a) $3 \cdot 16^{x-2} - (3x - 10) \cdot 4^{x-2} + 3 - x = 0$

b) $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$

c) $9^{x^2} + (x^2 - 3) \cdot 3^{x^2} + 2(1 - x^2) = 0$

d) $3^{2x} + 2(x-2) \cdot 3^x + 2x - 9 = 0$

e) $3^{2x-3} - (3x - 10) \cdot 3^{x-2} + 3 - x = 0$

f) $4^{\frac{1}{x}} + 2x \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 6x = 9$

g) $25^x - 2(3 - x) \cdot 5^x + 2x - 7 = 0$

h) $3 \cdot 25^{x-2} + (3x - 10) \cdot 5^{x-2} + 3 - x = 0$

i) $3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$

j) $9^x + 2(x-2) \cdot 3^x + 2x - 5 = 0$

k) $4^x + (x-8) \cdot 2^x + 12 - 2x = 0$

l) $(x+4) \cdot 9^x - (x+5) \cdot 3^x + 1 = 0$

2.7.2.5 Phương trình tích

■ Phương trình tích: $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

■ Nghiệm phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$

!

• $\Delta = b^2 - 4ac$

• Nghiệm là $\begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

Ví dụ 38. Giải phương trình: $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x = 25$ (1)**Lời giải.**

(1) $\Leftrightarrow 25 \cdot 2^x - 25 - 2^x \cdot 5^x + 5^x = 0 \Leftrightarrow 25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(25 - 5^x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 = 0 \\ 25 - 5^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 5^x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Đáp số $x = 0; x = 2$

Ví dụ 39. Giải phương trình: $2(x^2 - 3^{x+1}) = 3x(1 - 4 \cdot 3^x) - 1$ (2)

Lời giải 1. *Nghiệm phương trình bậc 2 (theo biến x)*

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 3(1 - 4 \cdot 3^x) \cdot x - 6 \cdot 3^x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9(1 - 8 \cdot 3^x + 16 \cdot 9^x) - 8(-6 \cdot 3^x + 1) = 144 \cdot 9^x - 24 \cdot 3^x + 1 = (12 \cdot 3^x - 1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - 12 \cdot 3^x + 12 \cdot 3^x - 1}{4} \\ x = \frac{3 - 12 \cdot 3^x - 12 \cdot 3^x + 1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 3^x = \frac{1}{6} - \frac{x}{6} (*) \end{cases}$$

Xét phương trình $(**) \ 3^x = \frac{1}{6} - \frac{x}{6}$. Đặt

$$f(x) = 3^x; \ g(x) = \frac{1}{6} - \frac{x}{6}$$

- Hàm số $f(x) = 3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (vì $a = 3 > 1$)
- Hàm số $g(x) = \frac{1}{6} - \frac{x}{6}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (vì $a = -\frac{1}{6} < 0$)

Ta nhận thấy $f(-1) = g(-1) \Rightarrow x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(*)$.

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x = \frac{1}{2}; x = -1$

Lời giải 2. *Đưa về phương trình tích*

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 + 6 \cdot 3^x \cdot (2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) \left(x - \frac{1}{2}\right) + 6 \cdot 3^x \cdot (2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x - 1 + 6 \cdot 3^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 3^x = \frac{1}{6} - \frac{x}{6} \text{ (giải như ở trên)} \end{cases}$$

Bài 50. Giải các phương trình mũ sau (đưa về phương trình tích)

- | | |
|---|--|
| a) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x = 25$ | b) $-8^x + 2 \cdot 4^x + 2^x - 2 = 0$ |
| c) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x$ | d) $x^2 \cdot 3^{x-1} + x(3^x - 2^x) = 2(2^x - 3^{x-1})$ |
| e) $5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0$ | f) $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$ |
| g) $2^x + 3^x = 1 + 6^x$ | h) $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$ |

2.7.3 Bài toán liên quan tham số m

Bài 51. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm:

- | | |
|--|---|
| a) $9^x + 3^x + m = 0$ | b) $9^x + m \cdot 3^x - 1 = 0$ |
| c) $4^x - 2^{x+1} = m$ | d) $2^x + (m + 1) \cdot 2^{-x} + m = 0$ |
| e) $25^x - 2 \cdot 5^x - m - 2 = 0$ | f) $16^x - (m - 1) \cdot 2^{2x} + m - 1 = 0$ |
| g) $25^x + m \cdot 5^x + 1 - 2m = 0$ | h) $3^{4-2x^2} - 2 \cdot 3^{2-x^2} = 2m - 3 = 0$ |
| i) $9^{x+\sqrt{1-x^2}} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{1-x^2}} + 4 = m$ | j) $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ |

Bài 52. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất.

a) $m \cdot 2^x + 2^{-x} - 5 = 0$

b) $m \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

c) $(\sqrt{5} + 1)^x + m \cdot (\sqrt{5} - 1)^x = 2^x$

d) $4^x - 2^{x+3} + 3 = m$

Bài 53. Tìm tham số m để các phương trình mũ sau có hai nghiệm phân biệt trái dấu

a) $49^x + (m - 1) \cdot 7^x + m - 2m^2 = 0$

b) $(m + 1) \cdot 4^x + (3m - 2) \cdot 2^{x+1} - 3m + 1 = 0$

c) $9^x + 3(m - 1) \cdot 3^x - 5m + 2 = 0$

d) $(m + 3) \cdot 16^x + (2m - 1) \cdot 4^x + m + 1 = 0$

Bài 54. Tìm tham số m để các phương trình:

a) $m \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ có hai nghiệm dương phân biệt.

b) $16^x - m \cdot 8^x + (2m - 1) \cdot 4^x = m \cdot 2^x$ có ba nghiệm phân biệt

c) $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

d) $9^{x^2} - 4 \cdot 3^{x^2} + 8 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

2.8 Phương trình logarit

2.8.1 Phương trình logarit cơ bản

Với $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

⚠ Chú ý: Khi giải phương trình logarit ta cần đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

■ Các công thức logarit thường sử dụng

$$\text{CT.1} \quad \log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\text{CT.2} \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

$$\text{CT.3} \quad \log_a b^\beta = \begin{cases} \beta \cdot \log_a b & \text{nếu } \beta \text{ lẻ} \\ \beta \cdot \log_a |b| & \text{nếu } \beta \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$\text{CT.4} \quad \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$$

$$\text{CT.5} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\text{CT.6} \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

2.8.2 Một số phương pháp giải phương trình logarit

2.8.2.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \quad (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

2.8.2.2 Phương pháp mũ hóa

Với $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$$

Ví dụ 40. Giải phương trình: $\log_3(2x - 1) = -2$

(1)

Lời giải.

Điều kiện: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(2x - 1) = \log_2 2^{-2} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{5}{8}} \text{ (nhận).}$$

Ví dụ 41. Giải phương trình: $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$ (2)

Lời giải.

Điều kiện: $9 - 2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 9$ (*)

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(9 - 2^x) = \log_2 2^{3-x} \Leftrightarrow 9 - 2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow 2^x + \frac{8}{2^x} - 9 = 0 \text{ (**)}$$

$$\text{Đặt } 2^x = t > 0, \text{ phương trình (**)} \text{ trở thành } t + \frac{8}{t} - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 8 \end{cases}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ thay vào điều kiện (*) thỏa.
- Với $t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$ thay vào điều kiện (*) thỏa.

Nghiệm phương trình đã cho là $\boxed{x = 0; x = 3}$

2.8.2.3 Phương pháp đặt ẩn phụ

■ Đặt điều kiện cho phương trình:

■ Biến đổi phương trình đã cho về dạng:

$$[\alpha \cdot \log_a f(x)]^2 + \beta \cdot \log_a f(x) + c = 0 \text{ (*)}$$

!

■ Đặt $\log_a f(x) = t$

■ Phương trình (*) trở thành: $\alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t + c = 0$ (**)

■ Giải phương trình (**), tìm được nghiệm $t \Rightarrow$ nghiệm x .

Ví dụ 42. Giải phương trình: $\log_2^2 x - 4 \cdot \log_2 x + 3 = 0$ (3)

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt } \log_2 x = t, \text{ phương trình (3) trở thành } t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$
- Với $t = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$

Nghiệm phương trình đã cho là $\boxed{x = 2; x = 8}$

2.8.2.4 Sử dụng tính đơn điệu hàm số

Phương trình:

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

- $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập xác định $\mathbb{D}$.
- $y = g(x)$ nghịch biến (hoặc đồng biến) trên tập xác định $\mathbb{D}$.
- $f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow x = x_0$ là nghiệm duy nhất của (1) trên $\mathbb{D}$.
- ! ■ **Lưu ý:**

- a) Hàm số $y = \log_a x$: $\begin{cases} \text{đồng biến khi: } a > 1 \\ \text{nghịch biến khi: } 0 < a < 1 \end{cases}$
- b) Hàm số $y = ax + b$: $\begin{cases} \text{đồng biến khi: } a > 0 \\ \text{nghịch biến khi: } a < 0 \end{cases}$

Ví dụ 43. Giải phương trình: $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$

(4)

Lời giải.Điều kiện: $x > 0$.Đặt $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ vì $a = \frac{1}{3} < 1$. $g(x) = x - 4$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ vì $a = 1 > 0$ Ta có $f(3) = g(3) \Rightarrow \boxed{x = 3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (4).**Bài 55.** Giải các phương trình logarit (đưa về cùng cơ số hoặc mũ hóa)

- a) $\log_2(x+2) - \log_2(x-2) = 2$
- b) $\log(x^2 + 2x - 3) + \log(x+3) = \log(x-1)$
- c) $2 \cdot \log_{25}(3x-11) + \log_5(x-27) = 3 + \log_5 8$
- d) $\log_5 x^3 + \log_{0,2} x + \log_{\sqrt[3]{25}} x = 7$
- e) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$
- f) $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2-25) = 7$
- g) $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$
- h) $\log_3(3^{x+1} - 26) = 2 - x$
- i) $\log_4(x+3) - \log_2 \sqrt{x-1} = 2 - \log_4 8$
- j) $\log_4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \log_2(4x)^4 + 10 = 0$
- k) $2 \cdot \log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$
- l) $\frac{3}{2} \cdot \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$
- m) $\log_2 |x-2| + \log_2 |x+5| + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$
- n) $\frac{1}{3} \cdot \log_2(3x-4)^6 \cdot \log_2 x^3 = 8 \cdot (\log_2 \sqrt{x})^2 + [\log_2(3x-4)^2]^2$

Bài 56.

a) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$

Đáp số: $x = 0; x = 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7 - x) = 1$

Đáp số: $x = 3$

c) $\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x + 2)^3 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4 - x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x + 6)^3$

Đáp số: $x = 2; x = 1 - \sqrt{33}$

d) $\log_2(x + 2) + \log_4(x - 5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$

Đáp số: $x = 6; x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

e) $\log_2 |x - 2| + \log_2 |x + 5| + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$

Đáp số: $x = -3; x = 6; x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

f) $\log_4(x - 1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x + 2}$

Đáp số: $x = \frac{5}{2}$

g) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$

Đáp số: $x = -5$

Bài 57. Giải các phương trình logarit sau (đưa về cùng cơ số)

a) $\log_2 [x(x - 1)] = 1$

b) $\log_2 x + \log_2(x + 1) = 1$

c) $\ln x + \ln(x + 1) = 0$

d) $\log_3 [7 + 2 \log_3(x - 2)] = 2$

e) $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{0,2} \sqrt{3}$

f) $\log_5(x^2 + 1) + \log_{\frac{1}{5}} 5 = \log_5(x + 2) - 2 \log_{\frac{1}{25}}(x - 2)$

g) $\log(x + 6) - \frac{1}{2} \log(2x - 3) = 2 - \log 25$

h) $\log_5 x = \log_5(x + 6) - \log_5(x + 2)$

i) $\log_2(x - 2) - 6 \cdot \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x - 5} = 2$

j) $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 1) = 3$

k) $\log_4(x + 3) - \log_4(x - 1) = 2 - \log_4 8$

l) $\log(x - 2) + \log(x - 3) = 1 - \log 5$

m) $2 \log_8(x - 2) - \log_8(x - 3) = \frac{2}{3}$

n) $\log \sqrt{5x - 4} + \log \sqrt{x + 1} = 2 + \log 0,18$

o) $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1$

p) $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 1) = \frac{1}{\log_5 2}$

q) $\log_4 x + \log_4(10 - x) = 2$

r) $\log_5(x - 1) + \log_{\frac{1}{5}}(x + 2) = 0$

s) $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 3) = \log_2 10 - 1$

t) $\log_9(x + 8) - \log_3(x + 26) + 2 = 0$

Bài 58. Giải các phương trình logarit sau (đưa về cùng cơ số)

a) $2 \log_2(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \log_{0,5}(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 3$

b) $\log_2(x^2 + 3) + \log_{0,5} 5 = 2 \log_{0,25}(x - 1) - \log_2(x + 1)$

c) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$

d) $1 + \log(x^2 - 2x + 1) - \log(x^2 + 1) = 2 \log(1 - x)$

e) $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x = 5$

f) $2 + \log(4x^2 - 4x + 1) - \log(x^2 + 19) = 2\log(1 - 2x)$

g) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$

h) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = 1 + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7 - x)$

i) $\log_2 \log_2 x = \log_3 \log_3 x$

j) $\log_2 \log_3 x = \log_3 \log_2 x$

k) $\log_2 \log_3 x + \log_3 \log_2 x = \log_3 \log_3 x$

l) $\log_2 \log_3 \log_4 x = \log_4 \log_3 \log_2 x$

m) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20x}$

n) $\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x$

Bài 59. Giải các phương trình logarit sau (đưa về cùng cơ số)

a) $(\log_2 x) \cdot \log_3 \frac{3}{x} - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$

b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \log_2 \sqrt{2 - \frac{x}{4}} = 0$

c) $\log(x^2 + 2x - 3) + \log \left[\frac{x+3}{x-1} \right] = 0$

d) $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$

e) $\log_{(x+3)} 6 + \frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(x+3)} = 1$

f) $\log_2 |\tan x| + \log_4 \left[\frac{\cos x}{2\cos x + \sin x} \right] = 0$

g) $\log(2x + 1) + \log(3 - x) = 2\log x$

h) $\log_4 \{2\log_3 [1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$

i) $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \ln(x + 7)$

Bài 60. Giải các phương trình logarit sau (đưa về cùng cơ số)

a) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$

b) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$

c) $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$

d) $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$

e) $\log_2(9 - 2^x) = 5^{\log_5(3-x)}$

f) $\log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1$

g) $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x$

h) $\log_5(26 - 3^x) = 2$

i) $\log_2(5^{x+1} - 25^x) = 2$

j) $\log_4(3 \cdot 2^{x+1} - 5) = x$

k) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1} - 25^x) = -2$

l) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) = 2$

Bài 61. Giải các phương trình logarit (đưa về cùng cơ số)

a) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$

b) $\log_{x-1}(x^2 - 4x + 5) = 1$

c) $\log_x(5x^2 - 8x + 3) = 2$

d) $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$

e) $\log_{x-3}(x - 1) = 2$

f) $\log_x(x + 2) = 2$

g) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) = 2$

h) $\log_{x+3}(x^2 - x) = 1$

i) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$

j) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$

k) $\log_x(x^2 - 2) = 1$

l) $\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 2) = 2$

m) $\log_{2x+4}(x^2 + 1) = 1$

n) $\log_x \frac{15}{1 - 2x} = -2$

o) $\log_{x^2}(3 - 2x) = 1$

p) $\log_{x^2+3x}(x + 3) = 1$

q) $\log_x(2x^2 - 5x + 4) = 2$

r) $\log_{x^2} 16 + \log_x 64 = 3$

Bài 62. Giải các phương trình logarit (đặt ẩn phụ, dạng đặt ẩn phụ hoàn toàn)

a) $\log_3(3^{x+1} - 26) = 2 - x$

b) $\log_4(x + 3) - \log_2 \sqrt{x - 1} = 2 - \log_4 8$

c) $\log_4 \left(\frac{x}{4} \right)^2 - \log_2 (4x)^4 + 10 = 0$

d) $2 \cdot \log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$

e) $-\log^3 x + 2 \log^2 x = 2 - \log x$

f) $\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 = 0$

g) $\log_3(27x) - 3\sqrt{\log_3 x} - 1 = 0$

h) $\log_3^2 + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

i) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$

j) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

k) $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$

l) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x$

m) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

n) $\log_5 x - \log_x \frac{1}{5} = 2$

o) $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} = 2$

p) $2 \log_5 \sqrt{x} - 2 = \log_x \frac{1}{5}$

q) $2\sqrt{\log_2 x} - \log_2 4x = 0$

r) $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$

s) $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}$

t) $\log_2 \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\log_2 x} = -\frac{2}{3}$

u) $\log_2^2 x + 2 \log_4 \frac{1}{x} = 0$

v) $\log_2^2(2 - x) - 8 \log_{\frac{1}{4}}(2 - x) = 5$

w) $\log_5^2 x + 4 \log_{25} 5x - 5 = 0$

x) $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$

y) $\log_{x^2} 3 + \log_9 x = 1$

z) $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$

Bài 63. Giải các phương trình logarit (đặt ẩn phụ, dạng đặt ẩn phụ hoàn toàn)

- a) $\log_{\sqrt{3}}(x-2) \cdot \log_5 x = 2\log_3(x-2)$ b) $\log_2(2^x+1) \cdot \log_2(2^{x+1}+2) = 2$
 c) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$ d) $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 4$
 e) $\log_{\cos x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 1$ f) $\frac{1}{4-\log x} + \frac{2}{2+\log x} = 1$
 g) $\frac{1}{5-\log x} + \frac{3}{3+\log x} = 1$ h) $\frac{1}{4+\log_2 x} + \frac{2}{2-\log_2 x} = 1$
 i) $4\log_4^2 x + 2\log_4 x^2 + 1 = 0$ j) $\log_x^3 10 + \log_x^2 10 - 6\log_x 10 = 0$
 k) $\log_x 5\sqrt{5} - 1,25 = \log_x^2 \sqrt{5}$ l) $\log_2(5^x-1) \cdot \log_4^2(5^x-1) = 1$
 m) $\log_2(2x)^2 \cdot \log_x^2 2 = 1$ n) $\log_2(3^x+3) - 4\log_{3^x+3} 2 = 0$
 o) $\log_{\frac{2}{x}} 2 + \log_2 4x = 3$ p) $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$
 q) $\log_{2x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$ r) $\log_2 |x+1| - \log_{x+1} 64 = 1$
 s) $\frac{2\log x}{\log x - 1} = -\log x + \frac{2}{\log x - 1}$ t) $|\log_{\frac{1}{3}} x - 2| + 3 = |\log_{\frac{1}{3}} x + 1|$

Bài 64. Giải các phương trình logarit (đặt ẩn phụ, dạng đặt ẩn phụ không hoàn toàn)

- a) $\log_5^2(x+1) + (x-5)\log_5(x+1) = 16$
 b) $\log_3^2 x + (x-12)\log_3 x + 11 = 0$
 c) $\log^2 x - \log x \cdot \log_2 4x + 2\log_2 x = 0$
 d) $6 \cdot 9^{\log_2 x} + 6 \cdot x^2 = 13 \cdot x^{\log_2 6}$
 e) $x \cdot \log_2^2 x - 2(x+1)\log_2 x + 4 = 0$
 f) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$
 g) $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) = 16$
 h) $(x+3)\log_3^2(x+2) + 4(x+2)\log_3(x+2) = 16$
 i) $\log_{x^2}(2+x) + \log_{\sqrt{2-x}} x = 2$
 j) $\log_3^2(x+1) + (x-5)\log_3(x+1) = 2x-6$
 k) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$
 l) $4\sqrt{\log_3 x - 1} - \log_3 \sqrt{x} = 4$

Bài 65. Giải các phương trình logarit (sử dụng công thức biến đổi, đặt ẩn phụ)

- a) $4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0$ b) $4^{\log_3 x} - 5 \cdot 2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 9} = 0$
 c) $2^{\log_2^2 x+1} = x^{2\log_3 x} - 48$ d) $2^{\log_2^2 x+1} + 224 = x^{2\log_2 x}$
 e) $\log_7 x + \log_3(\sqrt{x}+2)$ f) $\log_2(x-3) + \log_3(x-2) = 2$
 g) $\log_3(x+1) + \log_5(2x+1) = 2$ h) $\log_2(x+3^{\log_6 x}) = \log_6 x$
 i) $4^{\log_7(x+3)} = x$ j) $\log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 x$
 k) $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$ l) $\sqrt[3]{2-\log x} = 1 - \sqrt{\log x - 1}$
 m) $\sqrt[3]{1-\log_3 x} + \sqrt[3]{1+\log_3 x} = 1$ n) $\log_2^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3\log_3 x - 2}$
 o) $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$ p) $6^x = 3\log_6(5x+1) + 2x+1$
 q) $7^{x-1} = 6 \cdot \log_7(6x-5) + 1$ r) $5^{2(\log_5 2+x)} - 2 = 5^{\log_5 2+x}$

Bài 66. Giải phương trình logarit (sử dụng tính đơn điệu của hàm số)

a) $\log_2(3x - 1) = -x + 1$

b) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$

c) $x + \log_3 x = 4$

d) $2x + \log_{\frac{1}{2}} x = 5$

e) $\log_3 x = -x + 11$

f) $2^{\log_5(x+3)} = x$

g) $3^{\log_2(x-3)} = x$

h) $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$

i) $2^x - 2^{1-x} = \log_2 \frac{1-x}{x}$

j) $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5} \ (x > 0)$

k) $x^2 + 3^{\log_2 x} = 5^{\log_2 x}$

l) $\log_5(x+3) = 3-x$

m) $\log_2(3-x) = x$

n) $\log_5(x+3) = 3-x$

o) $x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3$

p) $2 \log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$

q) $\log_2(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}) = \frac{1}{4} \log_3 x$

2.8.3 Bài toán liên quan tham số m

Bài 67. Bài toán liên quan đến tìm tham số.

a) Tìm tham số m để phương trình: $\log_2(4^x - m) = x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm tham số m để phương trình: $\log_3(9^x + 9m^3) = 2$ có hai nghiệm phân biệt.

c) Tìm tham số m để phương trình: $\log_3^2 x - (m+2) \cdot \log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 \cdot x_2 = 27$

Bài 68. Tìm tham số m để phương trình:

$2 \log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) = \log_2(x^2 + mx - 2m^2)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1^2 + x_2^2 > 1$.

Bài 69. Cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$

a) Giải phương trình khi: $m = 2$

b) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm trên $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

B. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

2.9 Bất phương trình mũ và bất phương trình logarit

2.9.1 Bất phương trình mũ

■ Khi giải bất phương trình mũ, ta cần chú ý đến tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a - 1) \cdot (M - N) > 0$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:

- Đưa về cùng cơ số.
- Đặt ẩn phụ.
- Sử dụng tính đơn điệu:

$$\begin{cases} y = f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{D} \text{ thì: } f(u) < f(v) \Rightarrow u < v \\ y = f(x) \text{ nghịch biến trên } \mathbb{D} \text{ thì: } f(u) < f(v) \Rightarrow u > v \end{cases}$$

2.9.2 Bất phương trình logarit

- Khi giải bất phương trình logarit, ta cần chú ý đến tính đơn điệu của hàm số logarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

- $\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a - 1)(B - 1) > 0$
- $\frac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A - 1)(B - 1) > 0$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình logarit:

- Đưa về cùng cơ số.
- Đặt ẩn phụ.
- Tính đơn điệu của hàm số.

2.10 Hệ phương trình mũ và logarit

Hệ phương trình mũ và logarit

Khi giải hệ phương trình mũ và logarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng đại số.
- Phương pháp đặt ẩn phụ.
- Phương pháp dùng tính đơn điệu của hàm số.

2.11 Các ví dụ

Giải các bất phương trình và hệ phương trình sau

Ví dụ 44. Giải bất phương trình: $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$ (1)

Lời giải.

$$(1) \Leftrightarrow 9x^2 - 17x + 11 \leq 7 - 5x \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Ví dụ 45. Giải bất phương trình: $\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}$ (2)

Lời giải.Điều kiện: $x \neq -1$

$$(2) \Leftrightarrow 3^{-2x} > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} + 2x < 0 \Leftrightarrow 2x \left(\frac{1}{x+1} + 1 \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(x+2)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \cdot \text{Kết hợp điều kiện} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

Nghiệm của bất phương trình (2) là $\boxed{\forall x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0)}$

Ví dụ 46. Giải bất phương trình: $3^{x+1} + 5^{x+2} \geq 3^{x+2} + 5^{x+1}$ (3)

Lời giải.

$$(3) \Leftrightarrow 25 \cdot 5^x - 5 \cdot 5^x > 9 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow 20 \cdot 5^x > 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x > \frac{3}{10} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{5}{3}} \frac{3}{10}$$

Nghiệm của bất phương trình (2) là $\boxed{\forall x \in \left(\log_{\frac{5}{3}} \frac{3}{10}; +\infty\right)}$

Ví dụ 47. Giải bất phương trình: $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x}$ (4)

Lời giải.

$$(4) \Leftrightarrow \left[\left(x^2 + \frac{1}{2} - 1\right) \right] \cdot [(2x^2 + x + 1) - (1 - x)] \leq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot (2x^2 + 2x) \leq 0 (*)$$

Bảng xét dấu vế trái của (*)

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$			
VT	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có nghiệm của bất phương trình:

$$\boxed{\forall x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)}$$

Ví dụ 48. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0$ (1)

Lời giải.

Điều kiện: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{2} \leq x < 1 \\ 2 < x \leq 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là $x \in [2 - \sqrt{2}; 1) \cup (2; 2 + \sqrt{2}]$

Ví dụ 49. Giải bất phương trình: $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right)$ (2)

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x + 4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 2 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là: $x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty)$

Ví dụ 50. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Từ (2) $\Rightarrow y = 5 - x$ thay vào phương trình (1) ta được: $2^x + 2^{5-x} = 12 \Leftrightarrow 2^x + \frac{32}{2^x} = 12$ (*)

Đặt $2^x = t > 0$, phương trình (*) trở thành $t + \frac{32}{t} = 12 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 32 = 0 \begin{cases} t = 4 \\ t = 8 \end{cases}$

• Với $t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$

• Với $t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2$

Nghiệm hệ phương trình là: $(x; y) = (2; 3), (3; 2)$

Ví dụ 51. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{3} & (1) \\ \log_3(xy) = 1 & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x \cdot y > 0$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow xy = 3$.

Ta có $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{3} \\ xy = 3 \end{cases}$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 2\sqrt{3}X + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} = y$$

Vậy nghiệm hệ phương trình là $(x; y) = (\sqrt{3}; \sqrt{3})$

2.12 Bài tập bất phương trình, hệ phương trình mũ và logarit

2.12.1 Giải các bất phương trình

Bài 70. Giải các bất phương trình mũ (đưa về cùng cơ số)

a) $9^{x^2-2x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3$

b) $2^x + 4 \cdot 5^x - 4 < 10^x$

c) $\frac{1}{3^x-1} > \frac{1}{1-3^{x-1}}$

d) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} < 1$

e) $9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} \leq 2$

f) $2 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2}} \geq 9^{\sqrt{x}}$

g) $3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0$

h) $5^{2x-1} < 7^{3-x}$

i) $3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} > 13$

j) $3 \cdot 2^x + 7 \cdot 5^x > 49 \cdot 10^x - 2$

k) $\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0$

Bài 71.

a) $2^{3-6x} > 1$

b) $16^x > 0,125$

c) $(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$

e) $(0,1)^{4x^2-2x-2} \leq (0,1)^{2x+3}$

f) $^{x+1}\sqrt{3} > 9$

g) $8^{\sqrt{8x}} > 4096$

h) $2^{x^2-3x-4} < 3^{x^2-3x-4}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+13} < \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x}$

j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6x-5}{2+5x}} < \frac{25}{4}$

k) $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}$

l) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

m) $5^x - 3^{x+1} \geq 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$

n) $7^x - 5^{x+2} < 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$

o) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$

p) $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} \leq 11$

q) $9^{x^2-3x+2} - 6^{x^2-3x+2} < 0$

r) $6^{2x+3} \leq 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}$

s) $2^{x+2} + 5^{x+1} \leq 2^x + 5^{x+2}$

t) $2^{x-1} \cdot 3^{x+2} > 36$

u) $(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}$

v) $(\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{x-1}}$

w) $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1}$

x) $2^{\frac{1}{|2x-1|}} \geq 2^{\frac{1}{3x+1}}$

y) $(0,4)^{x^2-1} > (0,6)^{x^2+6}$

z) $(0,2)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$

Bài 72. Giải các bất phương trình mũ (đặt ẩn phụ)

a) $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} + 3^{\sqrt{x}-2} < 11$

b) $2^x + 2^{-x} - 3 < 0$

c) $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$

d) $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}-1} + 5^{\sqrt{x}}$

e) $\frac{2^{x-1} - 1}{2^{x+1} + 1} < 2$

f) $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}$

g) $2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x - 4^x \geq 0$

h) $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$

i) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$

j) $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{1 + \sqrt[4]{x}} > 9^{\sqrt{x}}$

k) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$

l) $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x$

m) $6^x - 2 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x + 6 \geq 0$

n) $27^x + 12^x > 2 \cdot 8^x$

o) $49^{\frac{1}{x}} - 35^{\frac{1}{x}} \geq 25^{\frac{1}{x}}$

p) $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$

q) $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} \geq 34 \cdot 25^{2x-x^2}$

r) $3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0$

s) $4^{x+\sqrt{x-1}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x-1}+1} + 16 \geq 0$

t) $2^{\frac{1}{x}+1} + 2^{2-\frac{1}{x}} < 9$

u) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$

v) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 \geq 0$

w) $(2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0$

x) $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$

y) $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$

z) $\frac{4 - 7 \cdot 5^x}{5^{2x+1} - 12 \cdot 5^x + 4} \leq \frac{2}{3}$

Bài 73. Giải các bất phương trình mũ (sử dụng tính đơn điệu)

a) $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$

b) $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$

c) $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1$

d) $3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} > 13$

e) $\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0$

f) $\frac{3^x + x - 4}{x^2 - x - 6} > 0$

Bài 74. Giải các bất phương trình logarit (đưa về cùng cơ số)

a) $2 \cdot \log_3(4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2$

b) $\log_5(4^x + 144) - 4 \cdot \log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$

c) $\log_{\frac{8}{3}} \left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 6) \right] \geq 0$

d) $\log_{0,5} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0$

e) $\log_{\frac{1}{3}} [\log_4(x^2 - 5)] > 0$

f) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_2(\log_{x-1} 9)] > 0$

g) $\log_3(1 - 2x) \geq \log_3(5x - 2)$

h) $\log_5(1 - x) < \log_5(x + 3)$

i) $\log_5(1 - 2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x + 1)$

j) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5 - x} < \log_{\frac{1}{3}}(3 - x)$

k) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} x > 0$

l) $\log_2(3x + 4) > \log_2(5 - x)$

m) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_2 \frac{1 + 2x}{1 + x} \right) > 0$

n) $\log_{0,4} \frac{x + 7}{2x + 3} < \log_{0,4}(5 - x)$

o) $\log_{\frac{1}{3}} [\log_4 (x^2 - 5)] > 0$

p) $\log_7 (2 - x) \leq \log_7 (3x + 6)$

q) $\log_{\frac{1}{3}} (x + 4) < \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 2x + 2)$

r) $(x^2 - 4) \log_{\frac{1}{2}} x > 0$

s) $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$

t) $\log_2 (x + 3) \geq 1 + \log_2 (x - 1)$

u) $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} < 0$

v) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} \geq 0$

w) $2 \log_8 (x - 2) + \log_{\frac{1}{8}} (x - 3) > \frac{2}{3}$

x) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2x - 3}{x + 1} \geq 0$

Bài 75. Giải các bất phương trình logarit (đặt ẩn phụ)

a) $\log_2 x + 2 \log_x 4 - 3 \leq 0$

b) $\log_5 (1 - 2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}} (x + 1)$

c) $2 \log_5 x - \log_x 125 < 1$

d) $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$

e) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$

f) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 < 0$

g) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 6 \log_2 x + 8 \leq 0$

h) $\sqrt{1 - 9 \log_{\frac{1}{8}}^2 x} > 1 - 4 \log_{\frac{1}{8}} x$

i) $\log_x 100 - \frac{1}{2} \log_{100} x > 0$

j) $\frac{1 + \log_3^2 x}{1 + \log_3 x} > 1$

Bài 76. Giải các bất phương trình logarit (đặt ẩn phụ)

a) $\frac{2}{1 - \log_2 x} + \frac{\log_4 x}{1 + \log_2 x} > \frac{\log_2 x}{1 - \log_2^2 x}$

b) $\frac{1}{4 + \log_2 x} + \frac{2}{2 - \log_2 x} \leq 1$

c) $\sqrt{\log_3^2 x - 4 \log_3 x + 9} \geq 2 \log_3 x - 3$

d) $\frac{1}{5 - \log_5 x} + \frac{2}{1 + \log_5 x} < 1$

e) $\sqrt{\log_9 (3x^2 + 4x + 2)} + 1 \geq \log_3 (3x^2 + 4x + 2)$

f) $6 \log_3 |1 - x| + \log_3^2 (x - 1) + 5 \geq 0$

g) $\log_9^2 x > \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x + 1} - 1)$

Bài 77. Giải các bất phương trình logarit (sử dụng tính đơn điệu của hàm số)

a) $\frac{3}{\log_2 (x + 1)} > \frac{2}{\log_3 (x + 1)}$

b) $\frac{\log \frac{5 + x}{5 - x}}{2^x - 3x + 1} < 0$

c) $\log_7 x < \log_3 (\sqrt{x} + 2)$

d) $2^{-|x-2|} \cdot \log_2 (4x - x^2 - 2) \geq 1$

Bài 78. Giải các bất phương trình logarit (sử dụng tính đơn điệu của hàm số)

a) $(x + 1) \log_{0,5}^2 x + (2x + 5) \log_{0,5} x + 6 \geq 0$

b) $\log_2 (2^x + 1) + \log_3 (4^x + 2) \leq 2$

c) $(x + 1) \log_{\frac{2}{3}}^2 x + 2(x + 3) \log_{\frac{1}{3}} x + 8 \leq 8$

d) $(4 \cdot 3^x + 3^{-x})^{3 \log_3 (x-1) - \log_3 (x-1)(2x+1)} > 1$

e) $\frac{\log_5 (x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11} (x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0$

f) $\log_2 (\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1) + \log_3 (x^2 - 5x + 7) \leq 2$

Bài 79. Giải các bất phương trình logarit

- a) $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_x 9 > x + 4$ b) $\log_3 \log_{\frac{9}{16}} (x^2 - 4x + 3) \geq 0$
- c) $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1}$ d) $\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+2)^3}{x^2 - 3x - 4} > 0$
- e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} \leq x^3$ f) $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$
- g) $\frac{\log_{\sqrt{2}}(x-3)^2}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$ h) $\frac{\log_3 \left(x + \frac{4}{5}\right)}{\log_7 \left(x^2 - 2x + \frac{7}{16}\right)}$
- i) $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)} + \frac{1}{\log_2 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} > 0$ j) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x) \leq 1$

Bài 80. Giải các bất phương trình logarit

- a) $\frac{\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x + 11)}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} \geq 0$
- b) $\frac{\log_2(x^2 - 2x - 7) - \log_3(x^2 - 2x - 7)^8}{3x^2 - 13x + 4} \leq 0$
- c) $\log_{\frac{1}{3}} (\sqrt{9x - x^2} + 3) > \log_3 \frac{27}{\sqrt{9x - x^2} + \sqrt{5 - x^2}} - 3$
- d) $\log_2 (\sqrt{x^2 - 4x} + 3) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1} + 1$

2.12.2 Giải hệ phương trình**Bài 81.** Giải các hệ phương trình mũ sau

- a) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 20 \\ 5^x \cdot 2^y = 50 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 3^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}, (x > 0)$
- d) $\begin{cases} 4^{-2x} + 4^{2y} = \frac{1}{2} \\ x + y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2^y + 200 \cdot 5^y \\ x + y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9} \\ y - x = 2 \end{cases}$
- g) $\begin{cases} 27^x = 9^x \\ 81^x = 243 \cdot 3^y \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 64^x + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$
- j) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x + 2^{y+1} = 3 \\ 4x + 4^y = 32 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \frac{11}{4} \\ 2^x - 3^y = -\frac{3}{4} \end{cases}$
- m) $\begin{cases} x + 3^{y-1} = 2 \\ 3x + 9^y = 18 \end{cases}$ n) $\begin{cases} y^2 = 4^x + 2 \\ 2^{x+2} + y + 1 = 0 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 4^{(x-y)^2-1} = 1 \\ 5^{3x-2y-3} = 125 \end{cases}$

$$\begin{array}{lll}
\text{p)} \begin{cases} x^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases} & \text{q)} \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases} & \text{r)} \begin{cases} x^{x^2-y^2-16} = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}, (x > 0) \\
\text{s)} \begin{cases} 4^x - 3^y = 7 \\ 4^x \cdot 3^x = 144 \end{cases} & \text{t)} \begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{cases} & \text{u)} \begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} = 56 \\ 3 \cdot 2^x + 3^{x+y+1} = 87 \end{cases} \\
\text{v)} \begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2 \cdot 3^{x+1} + 3 \cdot 2^y = 8 \end{cases} & \text{w)} \begin{cases} 3^{\sqrt{x}+1} - 2^y = -4 \\ 3^{\sqrt{x}+1} - 2^{y+1} = -1 \end{cases} & \text{x)} \begin{cases} 7^x - 16^x = 0 \\ 4^x - 49^x = 0 \end{cases} \\
\text{y)} \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases} & \text{z)} \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}
\end{array}$$

Bài 82. Giải các hệ phương trình logarit sau:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \begin{cases} xy = 64 \\ \log_x y = 5 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} \\
\text{c)} \begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2 + 6) = 4 \\ \log_x + \log_3 y = 1 \end{cases} \\
\text{e)} \begin{cases} x^{\log_3 y} + 2 \cdot y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 3 \cdot x^{\log_2 y} = 10 \\ \log_4 x^2 + \log_2 y = 2 \end{cases} \\
\text{g)} \begin{cases} \log_x(2x + y - 2) = 2 \\ \log_y(2y + x - 2) = 2 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} \log_2(xy) = 4 \\ \log_2 \frac{x}{y} = 2 \end{cases} \\
\text{i)} \begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ \log_6(x^2 + y^2) = 1 \end{cases} & \text{j)} \begin{cases} \log^2 x = \log^2 y + \log^2(xy) \\ \log^2(x - y) + \log x \cdot \log y = 0 \end{cases} \\
\text{k)} \begin{cases} \log_{xy} \frac{y}{x} - \log_y^2 x = 1 \\ \log_2(y - x) = 1 \end{cases} & \text{l)} \begin{cases} \log_{xy}(x - y) = 1 \\ \log_{xy}(x + y) = 0 \end{cases} \\
\text{m)} \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} & \text{n)} \begin{cases} \sqrt{y} + \log x^2 = 2 \\ y + 4 \log x = 28 \end{cases} \\
\text{o)} \begin{cases} \sqrt{y} + 2 \log x = 3 \\ y - 3 \log x^2 = 1 \end{cases} & \text{p)} \begin{cases} \log(x + y) - \log(x - y) = 1 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \\
\text{q)} \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases} & \text{r)} \begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 81 \\ \log_2 x + 2 \log_4 y = 1 \end{cases} \\
\text{s)} \begin{cases} 2^{\log_{0,5}(x+y)} = 5^{\log_5(x+y)} \\ \log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases} & \text{t)} \begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2(x + y) + \log_2(x - y) = 4 \end{cases}
\end{array}$$