
NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

Nguyễn Minh Tuấn ft Phạm Việt Anh



TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

Chương 1

Các dạng toán và phương pháp

1 Các dạng toán cơ bản

Dạng 1

Tính tích phân tổng quát sau

$$I_1 = \int (\sin x)^n dx; I_2 = \int (\cos x)^n dx$$

Phương pháp

Ta chú ý các công thức hạ bậc sau

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \\ \sin^3 x &= \frac{-\sin 3x + 3 \sin x}{4}; \cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}\end{aligned}$$

Nếu n chẵn hoặc $n = 3$ thì ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc triệt để

Nếu n lẻ và lớn hơn 3 thì ta sẽ sử dụng phép biến đổi sau.

Biến đổi 1. Ta có

$$\begin{aligned}I_1 &= \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{2p+1} dx = \int (\sin x)^{2p} \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^p d(\cos x) \\ &= - \int \left(C_p^0 - C_p^1 \cos^2 x + \dots + (-1)^k C_p^k (\cos^2 x)^k + \dots + (-1)^p C_p^p (\cos^2 x)^p \right) d(\cos x) \\ &= - \left(C_p^0 \cos x - \frac{1}{3} C_p^1 \cos^3 x + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} C_p^k (\cos x)^{2k+1} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p+1} C_p^p (\cos x)^{2p+1} \right) + C\end{aligned}$$

Biến đổi 2. Ta có

$$I_2 = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + \dots + (-1)^k C_p^k (\sin^2 x)^k + \dots + (-1)^p C_p^p (\sin^2 x)^p \right) d(\sin x) \\
&= \left(C_p^0 \sin x - \frac{1}{3} C_p^1 \sin^3 x + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} C_p^k (\sin x)^{2k+1} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p+1} C_p^p (\sin x)^{2p+1} \right) + C
\end{aligned}$$

Nhìn chung đây là một dạng toán không khó, cái khó của nó là phép biến đổi tương đối dài và công kênh, và mấu chốt là hạ bậc dần dần để đưa về nguyên hàm cơ bản. Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu ví dụ về phần này!

Bài 1

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int \cos^6 x dx.$
- $I = \int (\sin 5x)^9 dx.$
- $I = \int (\cos 2x)^{13} dx.$
- $I = \int (3 + \cos x)^5 dx.$

Lời giải

1. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos^6 x dx = \int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 dx \\
&= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^3 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx \\
&= \frac{1}{4} \int \left(1 + 3 \cos 2x + \frac{3(1 + 2 \cos 4x)}{2} + \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \right) dx \\
&= \frac{1}{16} \int (7 + 12 \cos 2x + 12 \cos 4x + \cos 3x + 3 \cos x) dx \\
&= \frac{1}{16} \left(7x + 6 \sin 2x + 3 \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 3x + 3 \sin x \right) + C
\end{aligned}$$

2. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int (\sin 5x)^9 dx = \int (\sin 5x)^8 (\sin 5x) dx = -\frac{1}{5} \int (1 - \cos^2 5x)^4 d(\cos 5x) \\
&= -\frac{1}{5} \int (1 - 4 \cos^2 5x + 6 \cos^4 5x - 4 \cos^6 5x + \cos^8 5x) d(\cos 5x)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{5} \left(\cos 5x - \frac{4}{3} \cos^3 5x + \frac{6}{5} \cos^5 5x - \frac{4}{7} \cos^7 5x + \frac{1}{9} \cos^9 5x \right) + C$$

3. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned} I &= \int (\cos 2x)^{13} dx = \int (\cos 2x)^{12} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \sin^2 2x)^6 d(\sin 2x) \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - 6\sin^2 2x + 15\sin^4 2x - 20\sin^6 2x + 15\sin^8 2x - 6\sin^{10} 2x + \sin^{12} 2x) d(\sin 2x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin 2x - 2\sin^3 2x + 3\sin^5 2x - \frac{20}{7} \sin^7 2x + \frac{5}{3} \sin^9 2x - \frac{6}{11} \sin^{11} 2x + \frac{1}{13} \sin^{13} 2x \right) + C \end{aligned}$$

4. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned} I &= \int (3 + \cos x)^5 dx = \int (3^5 + 5 \cdot 3^4 \cos x + 10 \cdot 3^3 \cos^2 x + 10 \cdot 3^2 \cos^3 x + 5 \cdot 3 \cos^4 x + \cos^5 x) dx \\ &= \int \left(243 + 405 \cos x + 135 (1 + \cos 2x) + \frac{45}{2} (\cos 3x + 3 \cos x) + \frac{15}{2} (1 + \cos 2x)^2 + \cos^5 x \right) dx \\ &= \int \left(378 + \frac{945}{2} \cos x + 135 \cos 2x + \frac{45}{2} \cos 3x + \frac{15}{2} \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) + \cos^5 x \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1557}{4} + \frac{945}{2} \cos x + 150 \cos 2x + \frac{45}{2} \cos 3x + \frac{15}{4} \cos 4x \right) dx + \int \cos^4 x \cos x dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1557 + 1890 \cos x + 600 \cos 2x + 90 \cos 3x + 15 \cos 4x) dx + \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1557x + 1890 \sin x + 300 \sin 2x + 30 \sin 3x + \frac{15}{4} \sin 4x \right) \\ &\quad + \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1557x + 1894 \sin x + 300 \sin 2x + 30 \sin 3x + \frac{15}{4} \sin 4x - \frac{8}{3} \sin^3 x + \frac{4}{5} \sin^5 x \right) + C \end{aligned}$$

Tóm lại. Qua 4 ví dụ trên ta đã phần nào nắm được dạng toán này, riêng ở ví dụ 4 ta đã sử dụng tới công thức khai triển hệ số Newton để khai trên biểu thức trong dấu nguyên hàm và các bước còn lại chỉ là biến đổi thông thường.

Dạng 2

Đôi khi trong khi làm các bài tính tích phân ta bắt gặp các bài toán liên quan tới tích các biểu thức $\sin x, \cos x$ khi đó ta sẽ sử dụng các công thức biến tích thành tổng để giải quyết các bài toán này. Sau đây là các công thức cần nhớ

$$I = \int (\cos mx) (\cos nx) dx = \frac{1}{2} \int (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x) dx$$

$$I = \int (\sin mx) (\sin nx) dx = \frac{1}{2} \int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx$$

$$I = \int (\sin mx) (\cos nx) dx = \frac{1}{2} \int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx$$

$$I = \int (\cos mx) (\sin nx) dx = \frac{1}{2} \int (\sin(m+n)x - \sin(m-n)x) dx$$

Nhìn chung đây là một dạng toán cơ bản, sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu các bài toán về nó.

Bài 2

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int (\cos x)^3 \sin 8x dx$
- $I = \int (\cos 2x)^{13} dx$

Lời giải

1. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned} I &= \int (\cos x)^3 \sin 8x dx = \int \frac{(3 \cos x + \cos 3x)}{4} \sin 8x dx \\ &= \frac{1}{4} \int (3 \cos x \sin 8x + \cos 3x \sin 8x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (3 \cos x \sin 8x + \cos 3x \sin 8x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left[\frac{3}{2} (\sin 9x + \sin 7x) + \frac{1}{2} (\sin 11x + \sin 5x) \right] dx \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{3}{9} \cos 9x + \frac{3}{7} \cos 7x + \frac{1}{11} \cos 11x + \frac{1}{5} \cos 5x \right) + C \end{aligned}$$

2. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$I = \int (\sin x)^4 (\sin 3x) (\cos 10x) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)^2 (\sin 13x + \sin 7x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) (\sin 13x + \sin 7x) dx \\
&= \frac{1}{8} \int \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) (\sin 13x + \sin 7x) dx \\
&= \frac{1}{16} \int (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) (\sin 13x + \sin 7x) dx \\
&= \frac{1}{6} \int (3 (\sin 13x + \sin 7x) - 4 \cos 2x (\sin 13x + \sin 7x) + \cos 4x (\sin 13x + \sin 7x)) dx \\
&= \frac{1}{6} \int (3 (\sin 13x + \sin 7x) - 2 (\sin 15x + \sin 11x + \sin 9x + \sin 5x) +
\end{aligned}$$

Dạng 3

Tính tích phân tổng quát $I = \int \sin^m x \cos^n x dx$

Phương pháp

Trường hợp 1. Nếu m, n là các số nguyên.

Nếu m và n chẵn thì dùng công thức hạ bậc biến tích thành tổng.

Nếu m chẵn và n lẻ thì ta biến đổi

$$\begin{aligned}
I &= \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\sin x)^n (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int (\sin x)^m (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x) \\
&= \int (\sin x)^m \left(C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + \dots + (-1)^k C_p^k (\sin^2 x)^k + \dots + (-1)^p C_p^p (\sin^2 x)^p \right) d(\sin x) \\
&= C_p^0 \frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1} - C_p^1 \frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3} + \dots + (-1)^k C_p^k \frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m} + \dots + (-1)^p C_p^p \frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m} + C
\end{aligned}$$

Nếu m lẻ và n chẵn thì ta cũng biến đổi tương tự như trường hợp trên.

Nếu m lẻ và n lẻ thì dùng ta sẽ tách ra 1 biểu thức $\sin x$ hoặc $\cos x$ để đưa vào trong dấu vi phân.

Trường hợp 2. Nếu m, n là các số hữu tỷ.

Trong trường hợp này ta sẽ đặt $u = \sin x$ và tùy theo trường hợp ta sẽ biến đổi nó để đưa về bài toán cơ bản. Ta sẽ tìm hiểu kỹ thuật này qua các bài toán dưới.

Bài 3

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int (\sin x)^2 (\cos x)^4 dx$
- $I = \int (\sin 3x)^{10} (\cos 3x)^5 dx$
- $I = \int (\sin 5x)^9 (\cos 5x)^{111} dx$
- $I = \int \frac{(\sin 3x)^7}{\sqrt[5]{\cos^4 3x}} dx$

Lời giải

1. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int (\sin x)^2 (\cos x)^4 dx = \frac{1}{4} \int (\sin 2x)^2 (\cos x)^2 dx \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) dx \\
 &= \frac{1}{16} \int \left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) \right) dx \\
 &= \frac{1}{32} \int (2 + \cos 2x - 2 \cos 4x - \cos 6x) dx = \frac{1}{32} \left(2x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{2} - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C
 \end{aligned}$$

2. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int (\sin 3x)^{10} (\cos 3x)^5 dx = \int (\sin 3x)^{10} (\cos 3x)^4 \cos 3x dx \\
 &= \frac{1}{3} \int (\sin 3x)^{10} (1 - \sin^2 3x)^2 d(\sin 3x) = \frac{1}{3} \int (\sin 3x)^{10} (1 - 2\sin^2 3x + \sin^4 3x) d(\sin 3x) \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 ((\sin 3x)^{10} - 2(\sin 3x)^{12} + (\sin 3x)^{14}) d(\sin 3x) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{(\sin 3x)^{11}}{11} - \frac{2(\sin 3x)^{13}}{13} + \frac{(\sin 3x)^{15}}{15} \right) + C
 \end{aligned}$$

3. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int (\sin 5x)^9 (\cos 5x)^{111} dx = \int (\cos 5x)^{111} (\sin 5x)^8 \sin 5x dx \\
 &= \frac{-1}{5} \int (\cos 5x)^{111} (1 - \cos^2 5x)^4 d(\cos 5x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{5} \int (\cos 5x)^{111} (1 - 4\cos^2 5x + 6\cos^4 5x - 4\cos^6 5x + \cos^8 5x) d(\cos 5x) \\
&= -\frac{1}{5} \left(\frac{(\cos 5x)^{112}}{112} - \frac{4(\cos 5x)^{114}}{114} + \frac{6(\cos 5x)^{116}}{116} - \frac{4(\cos 5x)^{118}}{118} + \frac{(\cos 5x)^{120}}{120} \right) + C
\end{aligned}$$

4. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\sin 3x)^7}{\sqrt[5]{\cos^4 3x}} dx = \int (\cos 3x)^{-\frac{1}{5}} (\sin 3x)^6 \sin 3x dx \\
&= \frac{-1}{3} \int (\cos 3x)^{-\frac{4}{5}} (1 - \cos^2 3x)^3 d(\cos 3x) \\
&= \frac{-1}{3} \int (\cos 3x)^{-\frac{4}{5}} (1 - 3\cos^2 3x + 3\cos^4 3x - \cos^6 3x) d(\cos 3x) \\
&= \frac{-1}{3} \left(5(\cos 3x)^{\frac{1}{5}} - \frac{15}{11}(\cos 3x)^{\frac{11}{5}} + \frac{15}{21}(\cos 3x)^{\frac{21}{5}} - \frac{5}{31}(\cos 3x)^{\frac{31}{5}} \right) + C
\end{aligned}$$

Dạng 4

Tính tích phân tổng quát

$$I_1 = \int (\tan x)^n dx; I_2 = \int (\cot x)^n dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

Phương pháp

Trong các bài toán như thế này ta cần chú ý tới các công thức sau

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C;$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + c;$$

$$\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\tan x) = \tan x + C;$$

$$\int (1 + \cot^2 x) dx = - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \int d(\cot x) = -\cot x + C.$$

Để làm các bài toán tính $\int (\tan x)^n dx$ ta sẽ cần cố gắng tách về dạng $\tan^m x (\tan^2 x + 1)$ đến cuối cùng để đưa về bài toán cơ bản.

Sau đây chúng ta sẽ cùng tìm hiểu các ví dụ minh họa để hiểu rõ hơn các bài toán này.

Bài 4

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int (\tan x)^8 dx$
- $I = \int (\tan 2x)^{13} dx$
- $I = \int (\cot x)^{12} dx$
- $I = \int (\cot 4x)^9 dx$
- $I = \int (\tan x + \cot x)^5 dx$

Lời giải

1. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int (\tan x)^8 dx = \\
 &= \int ((\tan x)^6 (1 + \tan^2 x) - (\tan x)^4 (1 + \tan^2 x) + (\tan x)^2 (1 + \tan^2 x) - (\tan x)^0 (1 + \tan^2 x) + 1) dx \\
 &= \int [(\tan x)^6 - (\tan x)^4 + (\tan x)^2 - (\tan x)^0] d(\tan x) + \int dx \\
 &= \frac{(\tan x)^7}{7} - \frac{(\tan x)^5}{5} + \frac{(\tan x)^3}{3} - \frac{\tan x}{1} + x + C
 \end{aligned}$$

2. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int (\cot x)^{12} dx \\
 &= \int ((\cot x)^{10} (1 + \cot^2 x) - (\cot x)^8 (1 + \cot^2 x) + (\cot x)^6 (1 + \cot^2 x) \\
 &\quad - (\cot x)^4 (1 + \cot^2 x) + (\cot x)^2 (1 + \cot^2 x) - (\cot x)^0 (1 + \cot^2 x) + 1) dx \\
 &= - \int ((\cot x)^{10} - (\cot x)^8 + (\cot x)^6 - (\cot x)^4 + (\cot x)^2 - (\cot x)^0) d(\cot x) + \int dx \\
 &= - \left(\frac{(\cot x)^{11}}{11} - \frac{(\cot x)^9}{9} + \frac{(\cot x)^7}{7} - \frac{(\cot x)^5}{5} + \frac{(\cot x)^3}{3} - \frac{\cot x}{1} \right) + x + C
 \end{aligned}$$

3. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int (\tan 2x)^{13} dx \\
 &= \int ((\tan 2x)^{11} (1 + \tan^2 2x) - (\tan 2x)^9 (1 + \tan^2 2x) + (\tan 2x)^7 (1 + \tan^2 2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\tan 2x)^5 (1 + \tan^2 2x) + (\tan 2x)^3 (1 + \tan^2 2x) - \tan 2x (1 + \tan^2 2x) + \tan 2x \\
& = \frac{1}{2} \int ((\tan 2x)^{11} - (\tan 2x)^9 + (\tan 2x)^7 - (\tan 2x)^5 + (\tan 2x)^3 - \tan 2x) d(\tan 2x) + \int \tan 2x dx \\
& = \frac{1}{2} \left(\frac{(\tan 2x)^{12}}{12} - \frac{(\tan 2x)^{10}}{10} + \frac{(\tan 2x)^8}{8} - \frac{(\tan 2x)^6}{6} + \frac{(\tan 2x)^4}{4} - \frac{(\tan 2x)^2}{2} - \ln |\cos 2x| \right) + C
\end{aligned}$$

4. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int (\cot 4x)^9 dx = \int [(\cot 4x)^7 (1 + \cot^2 4x) - (\cot 4x)^5 (1 + \cot^2 4x) + \\
& \quad + (\cot 4x)^3 (1 + \cot^2 4x) - (\cot 4x) (1 + \cot^2 4x)] dx + \cot 4x \\
&= -\frac{1}{4} \int ((\cot 4x)^7 - (\cot 4x)^5 + (\cot 4x)^3 - (\cot 4x)) d(\cot 4x) + \int \cot 4x dx \\
&= \frac{-1}{4} \left(\frac{(\cot 4x)^8}{8} - \frac{(\cot 4x)^6}{6} + \frac{(\cot 4x)^4}{4} - \frac{(\cot 4x)^2}{2} \right) + \frac{1}{4} \ln |\sin 4x| + C
\end{aligned}$$

5. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int (\tan x + \cot x)^5 dx = \int [(\tan x)^5 + 5(\tan x)^4 \cot x + 10(\tan x)^3 (\cot x)^2 \\
& \quad + 10(\tan x)^2 (\cot x)^3 + 5 \tan x (\cot x)^4 + (\cot x)^5] \\
&= \int [(\tan x)^5 + (\cot x)^5 + 5(\tan x)^3 + 5(\cot x)^3 + 10 \tan x + 10 \cot x] dx \\
&= \int ((\tan x)^5 + 5(\tan x)^3 + 10 \tan x) dx + \int ((\cot x)^5 + 5(\cot x)^3 + 10 \cot x) dx \\
&= \int ((\tan x)^3 (1 + \tan^2 x) + 4 \tan x (1 + \tan^2 x) + 6 \tan x) dx \\
& \quad + \int ((\cot x)^3 (1 + \cot^2 x) + 4 \cot x (1 + \cot^2 x) + 6 \cot x) dx \\
&= \int ((\tan x)^3 + 4 \tan x) d(\tan x) + 6 \int \tan x dx - \int ((\cot x)^3 + 4 \cot x) d(\cot x) + 6 \int \cot x dx \\
&= \frac{(\tan x)^4}{4} + 2 \tan^2 x - 6 \ln |\cos x| - \frac{(\cot x)^4}{4} - 2 \cot^2 x + 6 \ln |\sin x| + C
\end{aligned}$$

Tóm lại. Qua 5 ví dụ trên ta đã phần nào hiểu được phương pháp làm các bài tập của dạng toán này, mấu chốt là đưa về nguyên hàm tích phân hàm đa thức qua các phép biến đổi và thêm bớt, và đồng thời cũng cần áp dụng linh hoạt công thức khai triển hệ thức Newton để giải quyết bài toán dễ dàng. Về phần bài tập luyện tập có lẽ không cần thêm vì các bạn có thể bịa bất kì một bài toán tương tự với các bài mẫu!

Dạng 5

Tính tích phân tổng quát

$$I = \int \frac{(\tan x)^m}{(\cos x)^n} dx, I = \int \frac{(\cot x)^m}{(\sin x)^n} dx$$

Phương pháp

Ta sẽ xét dạng $I = \int \frac{(\tan x)^m}{(\cos x)^n} dx$ vì đây là 2 dạng tương tự nhau.

Trường hợp 1. Nếu m, n chẵn ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\tan x)^m}{(\cos x)^n} dx = \int (\tan x)^m \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^{k-1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\tan x)^m (1 + \tan^2 x)^{k-1} d(\tan x) \\ &= \int (\tan x)^m \left(C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1 (\tan^2 x)^1 + \dots + C_{k-1}^p (\tan^2 x)^p + \dots + C_{k-1}^{k-1} (\tan^2 x)^{k-1} \right) d(\tan x) \\ &= C_{k-1}^0 \frac{(\tan x)^{m+1}}{m+1} + C_{k-1}^1 \frac{(\tan x)^{m+3}}{m+3} + \dots + C_{k-1}^p \frac{(\tan x)^{m+2p+1}}{m+2p+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} \frac{(\tan x)^{m+2k-1}}{m+2k-1} + C \end{aligned}$$

Trường hợp 2. Nếu m và n đều lẻ thì ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\tan x)^{2k+1}}{(\cos x)^{2h+1}} dx = \int (\tan x)^{2k} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^{2h} \frac{\tan x}{\cos x} dx = \int (\tan^2 x)^k \left(\frac{1}{\cos x} \right)^{2h} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)^k \left(\frac{1}{\cos x} \right)^{2h} d \left(\frac{1}{\cos x} \right) = \int (u^2 - 1)^k u^{2h} du \left(u = \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \int u^{2h} \left(C_k^0 (u^2)^k - C_k^1 (u^2)^{k-1} + \dots + (-1)^p C_k^p (u^2)^{k-p} + \dots + (-1)^k C_k^k \right) du \\ &= C_k^0 \frac{u^{2k+2h+1}}{2k+2h+1} - C_k^1 \frac{u^{2k+2h-1}}{2k+2h-1} + \dots + (-1)^p C_k^p \frac{u^{2k+2h-2p+1}}{2k+2h-2p+1} + \dots + (-1)^k C_k^k \frac{u^{2h+1}}{2h+1} + C \end{aligned}$$

Trường hợp 3. Nếu m chẵn và n lẻ thì ta biến đổi như sau

$$I = \int \frac{(\tan x)^{2k}}{(\cos x)^{2h+1}} dx = \int \frac{(\sin x)^{2k} \cos x}{(\cos x)^{2(k+h+1)}} dx = \int \frac{(\sin x)^{2k}}{(1 - \sin^2 x)^{k+h+1}} d(\sin x)$$

Đặt $u = \sin x$ ta có

$$I = \int \frac{u^{2k} du}{(1 - u^2)^{k+h+1}} = \int \frac{u^{2k-2} [1 - (1 - u^2)]}{(1 - u^2)^{k+h+1}} du = \int \frac{u^{2k-2} du}{(1 - u^2)^{k+h+1}} - \int \frac{u^{2k-2} du}{(1 - u^2)^{k+h}}$$

Hệ thức trên là hệ thức truy hồi các bạn có thể tham khảo ở phần sau, do đó tính được I . Nhìn chung các bài toán trên mang tính tổng quát và có lẽ nhìn vào các lời giải tổng quát đó ta sẽ thấy nó thật lằng nhằng và phức tạp, nhưng khi vào các ví dụ cụ thể ta sẽ thấy cách làm các dạng toán này khá dễ. Sau đây ta sẽ đi vào các bài minh họa.

Bài 5

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int \frac{(\cot 5x)^{10}}{(\sin 5x)^8} dx$
- $I = \int \frac{(\tan 4x)^7}{(\cos 4x)^{95}} dx$
- $I = \int \frac{(\cot 3x)^9}{(\sin 3x)^{41}} dx$
- $I = \int \frac{(\tan 3x)^7}{(\cos 3x)^6} dx$

Lời giải

1. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(\cot 5x)^{10}}{(\sin 5x)^8} dx = \int (\cot 5x)^{10} \left[\frac{1}{(\sin 5x)^2} \right]^3 \frac{dx}{(\sin 5x)^2} \\
 &= -\frac{1}{5} \int (\cot 5x)^{10} [1 + \cot^2 5x]^3 d(\cot 5x) \\
 &= -\frac{1}{5} \int (\cot 5x)^{10} (1 + 3(\cot 5x)^2 + 3(\cot 5x)^4 + (\cot 5x)^6) d(\cot 5x) \\
 &= -\frac{1}{5} \left[\frac{(\cot 5x)^{11}}{11} + 3 \frac{(\cot 5x)^{13}}{13} + 3 \frac{(\cot 5x)^{15}}{15} + \frac{(\cot 5x)^{17}}{17} \right] + C
 \end{aligned}$$

2. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(\tan 4x)^7}{(\cos 4x)^{95}} dx = \int (\tan 4x)^6 \left(\frac{1}{\cos 4x} \right)^{94} \frac{\tan 4x}{\cos 4x} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{(\cos 4x)^2} - 1 \right]^3 \left(\frac{1}{\cos 4x} \right)^{94} d \left(\frac{1}{\cos 4x} \right) = \frac{1}{4} \int u^{94} (u^2 - 1)^3 du \\
 &= \frac{1}{4} \int u^{94} (u^6 - 3u^4 + 3u^2 - 1) du = \frac{1}{4} \left[\frac{u^{101}}{101} - 3 \frac{u^{99}}{99} + 3 \frac{u^{97}}{97} - \frac{u^{95}}{95} \right] + C
 \end{aligned}$$

3. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(\cot 3x)^9}{(\sin 3x)^{41}} dx = \int (\cot 3x)^8 \left(\frac{1}{\sin 3x} \right)^{40} \frac{\cot 3x}{\sin 3x} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{\sin^2 3x} - 1 \right)^4 \left(\frac{1}{\sin 3x} \right)^{40} d \left(\frac{1}{\sin 3x} \right) = -\frac{1}{3} \int u^{40} (u^2 - 1)^4 du
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} \int u^{40} (u^8 - 4u^6 + 6u^4 - 4u^2 + 1)^4 du = -\frac{1}{3} \left[\frac{u^{49}}{49} - 4 \frac{u^{47}}{47} + 6 \frac{u^{45}}{45} - 4 \frac{u^{43}}{43} + \frac{u^{41}}{41} \right] + C$$

4. Biến đổi nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned} I &= \int (\tan 3x)^7 \left[\frac{1}{(\cos 3x)^2} \right]^2 \frac{dx}{(\cos 3x)^2} = \frac{1}{3} \int (\tan 3x)^7 (1 + \tan^2 3x)^2 d(\tan 3x) \\ &= \frac{1}{3} \int (\tan 3x)^7 [1 + 2(\tan 3x)^2 + (\tan 3x)^4] d(\tan 3x) \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{(\tan 3x)^8}{8} + 2 \frac{(\tan 3x)^{10}}{10} + \frac{(\tan 3x)^{12}}{12} \right] + C \end{aligned}$$

Tóm lại. Qua 4 ví dụ trên ta thấy đó, mấu chốt chỉ là công thức lượng giác và phân tích hợp lý, cái này ở phần hướng dẫn đã có đầy đủ rồi. Tương tự mấy phần trước bài tập tự luyện có lẽ không cần vì các bạn có thể tự nghĩ ra một câu để mình làm. Ta cùng chuyển tiếp sang phần sau!

2 Các dạng toán biến đổi nâng cao

Các bài toán nguyên hàm tích phân lượng giác rất phong phú và do đó sẽ không dừng lại các dạng toán bên trên. Ở phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các dạng toán nâng cao hơn, với những phép biến đổi phức tạp hơn. Sau đây chúng ta sẽ cùng đi vào từng dạng toán cụ thể!

Dạng 1

Tính tích phân tổng quát $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a) \sin(x+b)}$

Phương pháp

Dùng đồng nhất thức

$$1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin[(x+a) - (x+b)]}{\sin(a-b)} = \frac{\sin(x+a) \cos(x+b) - \cos(x+a) \sin(x+b)}{\sin(a-b)}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a) \cos(x+b) - \cos(x+a) \sin(x+b)}{\sin(x+a) \sin(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} \right] dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} [\ln |\sin(x+b)| - \ln |\sin(x+a)|] + C \end{aligned}$$

Chú ý. Với cách này, ta có thể tìm được các nguyên hàm

- $J = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$
- $K = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Bài 1

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$
- $I = \int \frac{dx}{\cos 3x \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}$
- $I = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}$

Lời giải

1. Ta có

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin \left[\left(x + \frac{\pi}{6} \right) - x \right]}{\frac{1}{2}} = 2 \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sin x \right] \\
 \Rightarrow I &= 2 \int \frac{\left[\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sin x \right]}{\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} dx = 2 \int \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \right] dx \\
 &= 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - 2 \int \frac{d \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = 2 \ln \left| \frac{\sin x}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \right| + C
 \end{aligned}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin \left[\left(3x + \frac{\pi}{6} \right) - 3x \right]}{\frac{1}{2}} = 2 \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) \cos 3x - \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) \sin 3x \right] \\
 \Rightarrow I &= 2 \int \frac{\left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) \cos 3x - \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) \sin 3x \right]}{\cos 3x \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right)} dx \\
 &= 2 \int \frac{\sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right)} dx - 2 \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{3} \int \frac{d\left(\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} + \frac{2}{3} \int \frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x} = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\cos 3x}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} \right| + C$$

3. Ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos \left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{12}\right) \right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \sqrt{2} \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin \left(x + \frac{\pi}{12}\right) \right] \\ \Rightarrow I &= \sqrt{2} \int \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin \left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(x + \frac{\pi}{12}\right)} dx \\ &= \sqrt{2} \int \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx + \sqrt{2} \int \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{12}\right)} dx \\ &= \sqrt{2} \int \frac{d\left(\sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)} - \sqrt{2} \int \frac{d\left(\cos \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{12}\right)} \right| + C \end{aligned}$$

Dạng 2

Tính tích phân tổng quát $I = \int \tan(x+a) \tan(x+b) dx$

Phương pháp

Ta có

$$\begin{aligned} \tan(x+a) \tan(x+b) &= \frac{\sin(x+a) \sin(x+b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} \\ &= \frac{\sin(x+a) \sin(x+b) + \cos(x+a) \cos(x+b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $I = \cos(a-b) \int \frac{dx}{\cos(x+a) \cos(x+b)} - 1$.

Đến đây ta gặp bài toán tìm nguyên hàm ở **Dạng 1**.

Chú ý. Với cách này, ta có thể tính được các nguyên hàm

- $J = \int \cot(x+a) \cot(x+b) dx$
- $K = \int \tan(x+a) \tan(x+b) dx$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Bài 2

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int \cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right) dx$
- $K = \int \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right) dx$

Lời giải

1. Ta có

$$\begin{aligned} \cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \\ &= \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} - 1 \\ &= \frac{\cos \left[\left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right]}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} - 1 \end{aligned}$$

Từ đó ta tính được

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} dx - \int dx = \frac{\sqrt{3}}{2} I_1 - x + C$$

Bây giờ ta sẽ đi tính $I_1 = \int \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}$.

Ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin \left[\left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right]}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} dx \\ &= 2 \int \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} dx - 2 \int \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} dx = 2 \ln \left| \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} \right| + C \end{aligned}$$

Như vậy thì

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \ln \left| \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} \right| - x + C = \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} \right| - x + C$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \\ &= \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} + 1 \\ &= \frac{\sin \left[\left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right]}{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} + 1 \end{aligned}$$

Như vậy ta được

$$K = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} dx + \int dx = \frac{1}{2} K_1 + x + C$$

Ta tính được

$$\begin{aligned} K_1 &= \int \frac{dx}{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} \right| + C \\ \Rightarrow K &= \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} \right| + x + C \end{aligned}$$

Dạng 3

Tính tích phân tổng quát $I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$

Phương pháp

Ta biến đổi

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) \\ \Rightarrow a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \alpha) \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin (x + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \tan \frac{x + \alpha}{2} \right| + C \end{aligned}$$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Bài 3

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int \frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$
- $J = \int \frac{dx}{\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x}$

Lời giải

1. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x} = \int \frac{dx}{\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}} \\ &= \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \ln \left| \tan \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right| + C \end{aligned}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)} = -\frac{1}{4} \int \frac{d\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)} \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{\frac{\pi}{6} - 2x}{2} \right| + C = -\frac{1}{4} \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{12} - x \right) \right| + C \end{aligned}$$

Dạng 4

Tính tích phân tổng quát $I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

Phương pháp

Đặt $\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$ Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Bài 4

Tìm các nguyên hàm sau

• $I = \int \frac{dx}{3 \cos x + 5 \sin x + 3}$

• $J = \int \frac{2dx}{2 \sin x - \cos x + 1}$

• $K = \int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$

• $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) dx$

Lời giải

1. Ta đặt

$$\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{3 - 3t^2 + 10t + 3 + 3t^2} \\ &= \int \frac{2dt}{10t + 6} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5t + 3)}{5t + 3} = \frac{1}{5} \ln |5t + 3| + C = \frac{1}{5} \ln \left| 5 \tan \frac{x}{2} + 3 \right| + C \end{aligned}$$

2. Đặt $\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \int \frac{2 \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{4dt}{4t - 1 + t^2 + 1 + t^2} = \int \frac{4dt}{2t^2 + 4t} = 2 \int \frac{dt}{t(t+2)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \ln |t| - \ln |t+2| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 2 \right| + C$$

3. Đặt $\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int t dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |t| - \frac{1}{4} t^2 + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

4. Biến đổi giả thiết ta được

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x} \right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} + 1 \right) dx \end{aligned}$$

Đặt

$$\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 + 1) \ln (t^2 + t + 1) dt$$

Đến đây sử dụng tích chất $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ ta sẽ tính được tích phân cần tính.

Cách 2. Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (1 + \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (1 + \cos x) dx$$

Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (1 + \sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \sin x} dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (1 + \cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos x} dx \\ \Rightarrow I &= \frac{\pi}{2} \ln 2 - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos x} dx \right) \end{aligned}$$

Từ đây ta sẽ đi tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \sin x} dx$. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1 + \sin x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos x} dx \Rightarrow I = 0$$

Dạng 5

Tính tích phân tổng quát $I = \int \frac{dx}{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x}$

Phương pháp

Ta biến đổi về dạng $I = \int \frac{dx}{(a \tan^2 x + b \tan x + c) \cdot \cos^2 x}$.

Ta đặt

$$\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \Rightarrow I = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}$$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Bài 5

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$
- $J = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x}$

Lời giải

1. Ta có

$$I = \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(3\tan^2 x - 2\tan x - 1)\cos^2 x}$$

Đặt

$$\begin{aligned} \tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \Rightarrow I &= \int \frac{dt}{3t^2 - 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t-1)(3t+1)} \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{3}{3t+1} \right) dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4} \int \frac{d(3t+1)}{3t+1} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{3t+1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{3\tan x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

2. Ta có

$$J = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\tan^2 x - 2\tan x - 2)\cos^2 x}$$

$$\text{Đặt } \tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 2} = \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{3}}{t-1+\sqrt{3}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\tan x - 1 - \sqrt{3}}{\tan x - 1 + \sqrt{3}} \right| + C \end{aligned}$$

Dạng 6

Xét tích phân tổng quát $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx$

Phương pháp

Ta tìm A, B sao cho

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a_2 \sin x + b_2 \cos x) + B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)$$

Bài 6

Tìm các nguyên hàm sau

- $I = \int \frac{4 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$
- $J = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x}$

Lời giải

1. Ta tìm A, B sao cho $4 \sin x + 3 \cos x = A(\sin x + 2 \cos x) + B(\cos x - 2 \sin x)$

$$\Rightarrow 4 \sin x + 3 \cos x = (A - 2B) \sin x + (2A + B) \cos x \Rightarrow \begin{cases} A - 2B = 4 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } I = \int \frac{2(\sin x + 2 \cos x) - (\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} dx$$

$$= 2 \int dx - \int \frac{d(\sin x + 2 \cos x)}{\sin x + 2 \cos x} = 2x - \ln |\sin x + 2 \cos x| + C$$

2. Ta tìm A, B sao cho $3 \cos x - 2 \sin x = A(\cos x - 4 \sin x) + B(-\sin x - 4 \cos x)$

$$\Rightarrow 3 \cos x - 2 \sin x = (A - 4B) \cos x + (-4A - B) \sin x \Rightarrow \begin{cases} A - 4B = 3 \\ 4A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{11}{17} \\ B = -\frac{10}{17} \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{11}{17}(\cos x - 4 \sin x) - \frac{10}{17}(-\sin x - 4 \cos x)}{\cos x - 4 \sin x} dx \\ &= \frac{11}{17} \int dx - \frac{10}{17} \int \frac{d(\cos x - 4 \sin x)}{\cos x - 4 \sin x} = \frac{11}{17}x - \frac{10}{17} \ln |\cos x - 4 \sin x| + C \end{aligned}$$

Dạng 7

Xét tích phân tổng quát $I = \int \frac{a(\sin x)^2 + b \sin x \cos x + c(\cos x)^2}{m \sin x + n \cos x} dx$

Phương pháp

Đặt $S = a(\sin x)^2 + b \sin x \cos x + c(\cos x)^2$

Giả sử

$$\begin{aligned} S &= (p \sin x + q \cos x)(m \sin x + n \cos x) + r(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow S &= (mp + r)(\sin x)^2 + (np + mq) \sin x \cos x + (nq + r)(\cos x)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} mp + r = a \\ np + mq = b \\ nq + r = c \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} mp + r = a \\ np + mq = b \\ mp - nq = a - c \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{(a - c)m + bn}{m^2 + n^2} \\ q = \frac{(a - c)n - bm}{m^2 + n^2} \\ r = \frac{an^2 + cm^2 - bmn}{m^2 + n^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{(a - c)m + bn}{m^2 + n^2} \sin x + \frac{(a - c)n - bm}{m^2 + n^2} \cos x \right) dx + \frac{an^2 + cm^2 - bmn}{m^2 + n^2} \int \frac{dx}{m \sin x + n \cos x} \\ &= \frac{(a - c)n - bm}{m^2 + n^2} \sin x - \frac{(a - c)m + bn}{m^2 + n^2} \cos x + \frac{an^2 + cm^2 - bmn}{m^2 + n^2} \int \frac{dx}{m \sin x + n \cos x} \end{aligned}$$

Tích phân cuối cùng ta đã được tìm hiểu ở dạng trước!

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Bài 7

Tính các tích phân sau

- $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)^2 dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$
- $I = \int \frac{(3\sqrt{3} - 2)(\sin x)^2 + (4\sqrt{3} + 3) \sin x \cos x + 2(\cos x)^2}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$

Lời giải

1. Giả sử

$$\begin{aligned} (\cos x)^2 &= (a \sin x + b \cos x)(\sin x + \sqrt{3} \cos x) + c(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow (\cos x)^2 &= (a + c)(\sin x)^2 + (a\sqrt{3} + b) \sin x \cos x + (b\sqrt{3} + c)(\cos x)^2 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{1}{4}; b = \frac{\sqrt{3}}{4}; c = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right) dx + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) dx + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} = \left(\frac{1}{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{8} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \ln \sqrt{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ln \sqrt{3} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln \sqrt{3} = \frac{1}{4} (1 + \ln \sqrt{3})
\end{aligned}$$

2. Giả sử

$$\begin{aligned}
&(3\sqrt{3} - 2)(\sin x)^2 + (4\sqrt{3} + 3)\sin x \cos x + 2(\cos x)^2 \\
&= (a \sin x + b \cos x)(3 \sin x + 4 \cos x) + c(\sin^2 x + \cos^2 x) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + c = 3\sqrt{3} - 2 \\ 4a + 3b = 4\sqrt{3} + 3 \\ 4b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \\
&\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x \right) dx - \frac{2}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin \left(\arcsin \frac{3}{5} \right) \sin x + \cos \left(\arcsin \frac{3}{5} \right) \cos x} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) dx - \frac{2}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x-u)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) dx - \frac{2}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d[\sin(x-u)]}{1 - \sin^2(x-u)} \\
&= \left[\frac{1}{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{5} \ln \left| \frac{1 + \sin(x-u)}{1 - \sin(x-u)} \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{5} \ln \frac{1 + \sin x \cos u - \sin u \cos x}{1 - \sin x \cos u + \sin u \cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{5} \ln \left| \frac{5 - 4 \sin \frac{\pi}{3} + 3 \cos \frac{\pi}{3}}{5 + 4 \sin \frac{\pi}{3} - 3 \cos \frac{\pi}{3}} \right| - \frac{1}{5} \ln 4 = \frac{1}{5} \ln \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4(7 + 4\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Dạng 8

Xét tích phân tổng quát

$$I = \int \frac{m \sin x + n \cos x}{a(\sin x)^2 + 2b \sin x \cos x + c(\cos x)^2} dx$$

Phương pháp

Gọi λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Biến đổi một xú:

$$\begin{aligned} a(\sin x)^2 + 2b \sin x \cos x + c(\cos x)^2 &= \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 \\ &= \frac{\lambda_1}{1 + \frac{b^2}{(a - \lambda_1)^2}} \left(\cos x - \frac{b}{a - \lambda_1} \sin x \right)^2 + \frac{\lambda_2}{1 + \frac{b^2}{(a - \lambda_2)^2}} \left(\cos x - \frac{b}{a - \lambda_2} \sin x \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } u_1 = \cos x - \frac{b}{a - \lambda_1} \sin x; u_2 = \cos x - \frac{b}{a - \lambda_2} \sin x; k_1 = \frac{1}{a - \lambda_1}; k_2 = \frac{1}{a - \lambda_2}$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 k_1^2}} (\cos x - b k_1 \sin x); A_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 k_2^2}} (\cos x - b k_2 \sin x)$$

$$\text{Để ý } A_1^2 + A_2^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 = (\lambda_1 - \lambda_2) A_1^2 + \lambda_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) A_2^2 + \lambda_1$$

$$\text{Giả sử } m \sin x + n \cos x = p \left(\sin x + \frac{b}{a - \lambda_1} \cos x \right) + q \left(\sin x + \frac{b}{a - \lambda_2} \cos x \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p + q = m \\ \frac{p}{a - \lambda_1} + \frac{q}{a - \lambda_2} = \frac{n}{b} \end{cases} \Leftrightarrow p = \frac{bm - n(a - \lambda_2)}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} (a - \lambda_1); q = \frac{bm - n(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} (a - \lambda_2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{m \sin x + n \cos x}{a(\sin x)^2 + 2b \sin x \cos x + c(\cos x)^2} dx = \int \frac{-p du_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) A_1^2 + \lambda_2} + \int \frac{-q du_2}{(\lambda_2 - \lambda_1) A_2^2 + \lambda_1} \\ &= -p \sqrt{1 + b^2 k_1^2} \int \frac{dA_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) A_1^2 + \lambda_2} - q \sqrt{1 + b^2 k_2^2} \int \frac{dA_2}{(\lambda_2 - \lambda_1) A_2^2 + \lambda_1} \end{aligned}$$

Sau đây là các ví dụ minh họa cho các bài toán này.

Bài 8

Tính tích phân sau

$$I = \int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{2\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5\cos^2 x}$$

Lời giải

Gọi λ_1, λ_2 là 2 nghiệm của phương trình

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 6$$

Ta có:

$$2\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5\cos^2 x = \frac{1}{5}(\cos x + 2 \sin x)^2 + \frac{24}{5} \left(\cos x - \frac{1}{2} \sin x \right)^2$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (\cos x + 2 \sin x); A_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\cos x - \frac{1}{2} \sin x \right); A_1^2 + A_2^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} = \frac{3}{5} \int \frac{(2\sin x + \cos x) dx}{(2\cos x - \sin x)^2 + 1} - \frac{1}{5} \int \frac{(\sin x - 2\cos x) dx}{6 - (\cos x + 2\sin x)^2} \\
&= \frac{3}{5} \int \frac{d(\sin x - 2\cos x)}{(\sin x - 2\cos x)^2 + 1} + \frac{1}{5} \int \frac{d(\cos x + 2\sin x)}{6 - (\cos x + 2\sin x)^2} \\
&= \frac{3}{5} \arctan(\sin x - 2\cos x) + \frac{1}{10\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + \cos x + 2\sin x}{\sqrt{6} - \cos x - 2\sin x} \right| + C
\end{aligned}$$

Dạng 9

Biến đổi nâng cao với 2 dạng tích phân $\int \frac{dx}{(\sin x)^n}$ và $\int \frac{dx}{(\cos x)^n}$
 Thực chất mình chia dạng toán này thành 1 dạng toán nhỏ vì trong khi tính nguyên hàm hoặc tích phân ta sẽ có thể gặp các bài toán kiểu thế này, do đó mình muốn giới thiệu cho các bạn các cách để xử lý nó.

Xét bài toán $\int \frac{dx}{(\sin x)^n}$

- $I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$
- $I_2 = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int -d(\cot x) = -\cot x + C$
- $I_3 = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dx}{(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})^3} = \int \frac{dx}{8(\tan \frac{x}{2})^3 (\cos \frac{x}{2})^6} = \frac{1}{4} \int \frac{(1 + \tan^2 \frac{x}{2})^2 d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{(\tan \frac{x}{2})^3}$
 $= \frac{1}{4} \int \frac{1 + 2\tan^2 \frac{x}{2} + \tan^4 \frac{x}{2}}{(\tan \frac{x}{2})^3} = \frac{1}{4} \left[\frac{-1}{2(\tan \frac{x}{2})^2} + 2\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 \right] + C$
- $I_4 = \int \frac{dx}{\sin^4 x} = - \int (1 + \cot^2 x) d(\cot x) = - \left(\cot x + \frac{1}{3} \cot^3 x \right) + C$
- $I_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{dx}{(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})^5} = \int \frac{dx}{32(\tan \frac{x}{2})^5 (\cos \frac{x}{2})^{10}}$
 $= \frac{1}{16} \int \frac{(1 + \tan^2 \frac{x}{2})^4 d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{(\tan \frac{x}{2})^5} = \frac{1}{16} \int \frac{1 + 4\tan^2 \frac{x}{2} + 6\tan^4 \frac{x}{2} + 4\tan^6 \frac{x}{2} + \tan^8 \frac{x}{2}}{(\tan \frac{x}{2})^5} d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$
 $= \frac{1}{16} \left[\frac{-1}{4(\tan \frac{x}{2})^4} - \frac{2}{(\tan \frac{x}{2})^2} + 6\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + 2\left(\tan \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\tan \frac{x}{2}\right)^4 \right] + C$
- $I_6 = \int \frac{dx}{\sin^6 x} = - \int (1 + \cot^2 x)^2 d(\cot x) = - \left(\cot x + \frac{2}{3} \cot^3 x + \frac{1}{5} \cot^5 x \right) + C$

$$\begin{aligned} \bullet I_7 &= \int \frac{dx}{\sin^7 x} = \int \frac{dx}{(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})^7} = \int \frac{dx}{2^7 (\tan \frac{x}{2})^7 (\cos \frac{x}{2})^{14}} = \frac{1}{2^6} \int \frac{(1 + \tan^2 \frac{x}{2})^6 d(\tan \frac{x}{2})}{(\tan \frac{x}{2})^7} \\ &= \frac{1}{64} \left[\frac{-1}{6(\tan \frac{x}{2})^6} - \frac{3}{2(\tan \frac{x}{2})^4} - \frac{15}{2(\tan \frac{x}{2})^2} + 20 \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{2} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^4 + \frac{1}{6} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^6 + C \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet I_8 &= \int \frac{dx}{\sin^8 x} = - \int (1 + \cot^2 x)^3 d(\cot x) = - \int (1 + 3\cot^2 x + 3\cot^4 x + \cot^6 x) d(\cot x) \\ &= - \left(\cot x + \cot^3 x + \frac{3}{5} \cot^5 x + \frac{1}{7} \cot^7 x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet I_9 &= \int \frac{dx}{(\sin x)^{2n+1}} = \int \frac{dx}{(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})^{2n+1}} \\ &= \int \frac{dx}{2^{2n+1} (\tan \frac{x}{2})^{2n+1} (\cos \frac{x}{2})^{4n+2}} = \frac{1}{2^{2n}} \int \frac{(1 + \tan^2 \frac{x}{2})^{2n} d(\tan \frac{x}{2})}{(\tan \frac{x}{2})^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left[\frac{-C_{2n}^0}{2n(\tan \frac{x}{2})^{2n}} - \dots - \frac{C_{2n}^{n-1}}{2(\tan \frac{x}{2})^2} + C_{2n}^n \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{2n}^{n+1}}{2} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 + \dots + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^{2n} \right] + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet I_{10} &= \int \frac{dx}{\sin^{2n+2} x} = - \int (1 + \cot^2 x)^n d(\cot x) \\ &= - \int \left[C_n^0 + C_n^1 \cot^2 x + \dots + C_n^k (\cot^2 x)^k + \dots + C_n^n (\cot^2 x)^n \right] d(\cot x) \\ &= - \left[C_{11}^0 (\cot x) + \frac{C_n^1}{3} \cot^3 x + \dots + \frac{C_n^k}{2k+1} (\cot x)^{2k+1} + \dots + \frac{C_n^n}{2n+1} (\cot x)^{2n+1} \right] + C \end{aligned}$$

Xét bài toán $I = \int \frac{dx}{(\cos x)^n}$

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} = \int \frac{du}{2 \tan \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2}} \\ &= \int \frac{d(\tan \frac{u}{2})}{\tan \frac{u}{2}} = \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \end{aligned}$$

$$\bullet I_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\tan x) = \tan x + C$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_3 &= \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin^3 u} = \int \frac{du}{\left(2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}\right)^3} = \int \frac{du}{8\left(\tan \frac{u}{2}\right)^3 \left(\cos \frac{u}{2}\right)^6} \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{u}{2}\right)^2 d\left(\tan \frac{u}{2}\right)}{\left(\tan \frac{u}{2}\right)^3} = \frac{1}{4} \left[\frac{-1}{2\left(\tan \frac{u}{2}\right)^2} + 2 \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| + \frac{1}{2} \left(\tan \frac{u}{2}\right)^2 \right] + C \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{-1}{2\left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} + 2 \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \frac{1}{2} \left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 \right] + C
\end{aligned}$$

$$\bullet I_4 = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \tan^2 x) d(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^5\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin^5 u} \\
&= \int \frac{du}{\left(2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}\right)^5} = \int \frac{du}{32\left(\tan \frac{u}{2}\right)^5 \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{10}} \\
&= \frac{1}{16} \int \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{u}{2}\right)^4 d\left(\tan \frac{u}{2}\right)}{\left(\tan \frac{u}{2}\right)^5} \\
&= \frac{1}{16} \int \frac{1 + 4\tan^2 \frac{u}{2} + 6\tan^4 \frac{u}{2} + 4\tan^6 \frac{u}{2} + \tan^8 \frac{u}{2}}{\left(\tan \frac{u}{2}\right)^5} d\left(\tan \frac{u}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16} \left[\frac{-1}{4\left(\tan \frac{u}{2}\right)^4} - \frac{2}{\left(\tan \frac{u}{2}\right)^2} + 6 \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| + 2\left(\tan \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\tan \frac{u}{2}\right)^4 \right] + C
\end{aligned}$$

$$\bullet I_6 = \int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int (1 + \tan^2 x)^2 d(\tan x) = \tan x + \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_7 &= \int \frac{dx}{\cos^7 x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^7\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin^7 u} = \int \frac{du}{2^7\left(\tan \frac{u}{2}\right)^7 \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{14}} \\
&= \frac{1}{2^6} \int \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{u}{2}\right)^6 d\left(\tan \frac{u}{2}\right)}{\left(\tan \frac{u}{2}\right)^7} \\
&= \frac{1}{2^6} \int \frac{1 + 6\tan^2 \frac{u}{2} + 15\tan^4 \frac{u}{2} + 20\tan^6 \frac{u}{2} + 15\tan^8 \frac{u}{2} + 6\tan^{10} \frac{u}{2} + \tan^{12} \frac{u}{2}}{\left(\tan \frac{u}{2}\right)^7} d\left(\tan \frac{u}{2}\right) \\
&= \frac{1}{64} \left[\frac{-1}{6\left(\tan \frac{u}{2}\right)^6} - \frac{3}{2\left(\tan \frac{u}{2}\right)^4} - \frac{15}{2\left(\tan \frac{u}{2}\right)^2} + 20 \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| \right. \\
&\quad \left. + \frac{15}{2}\left(\tan \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\tan \frac{u}{2}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\tan \frac{u}{2}\right)^6 \right] + C
\end{aligned}$$

- $I_8 = \int \frac{dx}{\cos^8 x} = \int (1 + \tan^2 x)^3 d(\tan x) = \int (1 + 3 \tan^2 x + 3 \tan^4 x + \tan^6 x) d(\tan x) = \tan x + \tan^3 x + \frac{3}{5} \tan^5 x + \frac{1}{7} \tan^7 x + C$
- $I_9 = \int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^{2n+1}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{(\sin u)^{2n+1}} = \int \frac{du}{\left(2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}\right)^{2n+1}}$

$$= \int \frac{du}{2^{2n+1} \left(\tan \frac{u}{2}\right)^{2n+1} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{4n+2}} = \frac{1}{2^{2n}} \int \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{u}{2}\right)^{2n} d\left(\tan \frac{u}{2}\right)}{\left(\tan \frac{u}{2}\right)^{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \int \frac{C_{2n}^0 + C_{2n}^1 \tan^2 \frac{u}{2} + \dots + C_{2n}^n \left(\tan^2 \frac{u}{2}\right)^n + \dots + C_{2n}^{2n} \left(\tan^2 \frac{u}{2}\right)^{2n}}{\left(\tan \frac{u}{2}\right)^{2n+1}} d\left(\tan \frac{u}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \left[\frac{-C_{2n}^0}{2n \left(\tan \frac{u}{2}\right)^{2n}} - \dots - \frac{C_{2n}^{n-1}}{2 \left(\tan \frac{u}{2}\right)^2} + C_{2n}^n \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| \right.$$

$$\left. + \frac{C_{2n}^{n+1}}{2} \left(\tan \frac{u}{2}\right)^2 + \dots + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n} \left(\tan \frac{u}{2}\right)^{2n} \right] + C$$
- $I_{10} = \int \frac{dx}{\cos^{2n+2} x} = \int (1 + \tan^2 x)^n d(\tan x)$

$$= \int \left(C_{11}^0 + C_n^1 \tan^2 x + \dots + C_n^k \left(\tan^2 x\right)^k + \dots + C_n^n \left(\tan^2 x\right)^n \right) d(\tan x)$$

$$= \left[C_n^0 (\tan x) + \frac{C_n^1}{3} \tan^3 x + \dots + \frac{C_n^k}{2k+1} (\tan x)^{2k+1} + \dots + \frac{C_n^n}{2n+1} (\tan x)^{2n+1} \right] + C$$

Tóm lại. Qua các bài toán với những lời giải kinh khủng ở trên chắc đã làm bạn đọc choáng rồi, tuy nhiên hãy để ý nó có mấu chốt cả nhé. Đầu tiên là 2 dạng này tương tự nhau nên mình sẽ chỉ nói một dạng. Các bạn hãy chú ý tới các bài số mũ chẵn, mấu chốt chỉ là sử dụng công thức theo tan và sin, còn những bài số mũ lẻ ta đều sử dụng cách tách $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ đó chính là chìa khoá của các bài toán trên, lời giải khủng chẳng qua là biến đổi dài thôi chứ không có gì khó khăn cả!

Chương 2

Bài Toán Đề Xuất

Tính các nguyên hàm hoặc tích phân sau

Bài 1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx$

Bài 2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx$

Bài 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

Bài 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx$

Bài 5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$

Bài 6. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{10} x + \cos^{10} x - \sin^4 x \cos^4 x) dx$

Bài 7. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx$

Bài 8. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$

Bài 9. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$

Bài 10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$

Bài 11. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin x + 1} dx$

Bài 12. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^3} dx$

Bài 13. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + 2\sin 2x} dx$

Bài 14. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x - \sin^3 3x}{1 + \cos 3x} dx$

Tài liệu tham khảo

- [1] Tuyển tập các chuyên đề và kỹ thuật tính tích phân - Trần Phương
- [2] Tài liệu Internet