

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI.....	2
Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản (dùng bảng nguyên hàm)	2
Dạng 1.1 Tìm nguyên hàm cơ bản không có điều kiện.....	2
Dạng 1.2 Tìm nguyên hàm cơ bản có điều kiện.....	11
Dạng 2. Sử dụng phương pháp VI PHÂN để tìm nguyên hàm	16
Dạng 2.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	16
Dạng 2.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	17
Dạng 3. Sử dụng phương pháp ĐỔI BIẾN để tìm nguyên hàm.....	18
Dạng 3.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	18
Dạng 3.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	21
Dạng 4. Nguyên hàm từng phần.....	22
Dạng 4.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	22
Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	25
Dạng 5. Sử dụng nguyên hàm để giải toán.....	26
Dạng 6. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm.....	30
PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO	33
Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản (dùng bảng nguyên hàm)	33
Dạng 1.1 Tìm nguyên hàm cơ bản không có điều kiện.....	33
Dạng 1.2 Tìm nguyên hàm cơ bản có điều kiện.....	38
Dạng 2. Sử dụng phương pháp VI PHÂN để tìm nguyên hàm	44
Dạng 2.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	44
Dạng 2.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	45
Dạng 3. Sử dụng phương pháp ĐỔI BIẾN để tìm nguyên hàm.....	47
Dạng 3.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	47
Dạng 3.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	51
Dạng 4. Nguyên hàm từng phần.....	53
Dạng 4.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện.....	53
Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện.....	57
Dạng 5. Sử dụng nguyên hàm để giải toán.....	60
Dạng 6. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm.....	69

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản (dùng bảng nguyên hàm)

Dạng 1.1 Tìm nguyên hàm cơ bản không có điều kiện

Câu 1. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ B. $x^4 + x^2 + C$ C. $x^5 + x^3 + C$ D. $4x^3 + 2x + C$

Câu 2. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $x^2 + C$ B. $2x^2 + C$ C. $2x^2 + 4x + C$ D. $x^2 + 4x + C$

Câu 3. (Mã 102 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- A. $x^2 + C$ B. $x^2 + 6x + C$ C. $2x^2 + C$ D. $2x^2 + 6x + C$

Câu 4. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

- A. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$ B. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$
C. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$ D. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

Câu 5. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$ B. $3x^2 + 1 + C$ C. $x^3 + x + C$ D. $x^4 + x^2 + C$

Câu 6. (Mã 103 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- A. $x^2 + 3x + C$ B. $2x^2 + 3x + C$ C. $x^2 + C$ D. $2x^2 + C$

Câu 7. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$
C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$ D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$

Câu 8. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$ B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$

$$C. \int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$$

$$D. \int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$$

Câu 9. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

$$A. \int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$$

$$B. \int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$$

$$C. \int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$$

$$D. \int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$$

Câu 10. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

$$A. \int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$$

$$B. \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$C. \int \cos 3x dx = \sin 3x + C$$

$$D. \int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$$

Câu 11. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

$$A. \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$B. 3x^2 + 2x + C$$

$$C. x^3 + x^2 + C$$

$$D. x^4 + x^3 + C$$

Câu 12. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

$$A. e^x + 1 + C$$

$$B. e^x + x^2 + C$$

$$C. e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$D. \frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

Câu 13. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

$$A. x^2 + C.$$

$$B. x^2 + 5x + C.$$

$$C. 2x^2 + 5x + C.$$

$$D. 2x^2 + C.$$

Câu 14. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

$$A. \int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$$

$$B. \int 7^x dx = 7^{x+1} + C$$

$$C. \int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$$

$$D. \int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

$$A. \int f(x)dx = 2 \sin 2x + C$$

$$B. \int f(x)dx = -2 \sin 2x + C$$

$$C. \int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$D. \int f(x)dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Câu 16. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

A. $4x^3 + 1 + C$ B. $x^5 + x^2 + C$ C. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$ D. $x^4 + x + C$

Câu 17. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$ B. $\frac{x^3}{3} + x + C$ C. $6x + C$ D. $x^3 + x + C$

Câu 18. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$?

A. $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$ B. $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$ C. $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$ D. $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

Câu 19. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x + C$. B. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. C. $\frac{1}{3}e^x + C$. D. $3e^{3x} + C$.

Câu 20. (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Tính $\int (x - \sin 2x) dx$.

A. $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$. B. $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. C. $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$. D. $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Câu 21. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HÙNG YÊN NĂM 2018-2019) Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

A. $2e^{2x-1} + C$. B. $e^{2x-1} + C$. C. $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$. D. $\frac{1}{2}e^x + C$.

Câu 22. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

A. $\ln|2x+3| + C$. B. $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$. C. $\frac{1}{\ln 2}\ln|2x+3| + C$. D. $\frac{1}{2}\lg(2x+3) + C$.

Câu 23. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$. B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 24. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$

- A. $-3\cos 3x + C$. B. $3\cos 3x + C$. C. $\frac{1}{3}\cos 3x + C$. D. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Câu 25. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

- A. $x^3 + \cos x + C$. B. $6x + \cos x + C$. C. $x^3 - \cos x + C$. D. $6x - \cos x + C$.

Câu 26. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Công thức nào sau đây là sai?

- A. $\int \ln x \, dx = \frac{1}{x} + C$. B. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$.
C. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$. D. $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Câu 27. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Nếu $\int f(x) \, dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$. B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Câu 28. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. B. $\int x^e \, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$.
C. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$. D. $\int e^x \, dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 29. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $\int 2^x \, dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$. B. $\int 2^x \, dx = 2^x + C$. C. $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$. D. $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{x+1} + C$.

Câu 30. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ là

- A. $F(x) = 2x + C$. B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. C. $F(x) = x^3 + C$. D. $F(x) = x + C$.

Câu 31. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

A. $\int f(x)dx = 3x^2 + \cos x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$

D. $\int f(x)dx = 3 + \cos x + C.$

Câu 32. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

A. $x^2 + \cos x + C$

B. $x^2 - \cos x + C$

C. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$

D. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$

Câu 33. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là:

A. $\cos x + C.$

B. $-\cos x + C.$

C. $-\sin x + C.$

D. $\sin x + C.$

Câu 34. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C.$

B. $x^4 + x^2 + C.$

C. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$

D. $x^5 + x^3 + C.$

Câu 35. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

A. $e^x + x^2 + C.$

B. $e^x - x^2 + C.$

C. $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C.$

D. $e^x - 2 + C.$

Câu 36. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

A. $\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

B. $\sin x + x^2 + C.$

C. $-\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

D. $-\sin x + x^2 + C.$

Câu 37. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C.$

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C.$

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C.$

Câu 38. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

A. $\ln x - \cos x + C.$

B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C.$

C. $\ln|x| + \cos x + C.$

D. $\ln|x| - \cos x + C.$

Câu 39. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Hàm số $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty; +\infty)$?

- A. $f(x) = 3x^2$. B. $f(x) = x^3$. C. $f(x) = x^2$. D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4$.

Câu 40. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$.

- A. $\int f(x) dx = 2^x + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.
C. $\int f(x) dx = 2^x \ln 2 + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 41. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 42. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Hàm số nào trong các hàm số sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = e^x$?

- A. $y = \frac{1}{x}$. B. $y = e^x$. C. $y = e^{-x}$. D. $y = \ln x$.

Câu 43. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tính $F(x) = \int e^2 dx$, trong đó e là hằng số và $e \approx 2,718$.

- A. $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$. B. $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$. C. $F(x) = e^2 x + C$. D. $F(x) = 2ex + C$.

Câu 44. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

- A. $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$. B. $\frac{1}{2} \ln(1-2x) + C$. C. $-\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$. D. $\ln|2x-1| + C$.

Câu 45. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Nguyên hàm của hàm số $x^3 + x^2$?

A. $3x^2 + 2x + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. C. $x^4 + x^3 + C$. D. $4x^4 + 3x^3 + C$.

Câu 46. (CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

A. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C$. B. $2^x + x^2 + C$. C. $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$. D. $2^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 47. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$

A. $1 + \cos x + C$. B. $1 - \cos x + C$. C. $x + \cos x + C$. D. $x - \cos x + C$.

Câu 48. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$ là

A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$. B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$.
C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$. D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C$.

Câu 49. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $t(x) = 2^x - x^2$ là

A. $\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^3}{3} + C$. B. $2^x - 2x + C$. C. $2^x \ln 2 - \frac{x^3}{3} + C$. D. $\frac{2^x}{\ln 2} - 2x + C$.

Câu 50. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là:

A. $\frac{1}{3} \ln(3x-1) + C$ B. $\ln(1-3x) + C$ C. $\frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$ D. $\ln(3x-1) + C$

Câu 51. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$. B. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.
C. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. D. $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \quad (\forall x \neq -1)$.

Câu 52. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

$$A. \int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C.$$

$$B. \int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$$

$$C. \int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$$

$$D. \int f(x)dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C.$$

Câu 53. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Tìm $\int f(x)dx$.

$$A. \int f(x)dx = 2^x + x^2 + x + C.$$

$$B. \int f(x)dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$C. \int f(x)dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$D. \int f(x)dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

Câu 54. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

$$A. \int f(x)dx = 3x^2 + \cos x + C.$$

$$B. \int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$$

$$C. \int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$$

$$D. \int f(x)dx = 3 + \cos x + C.$$

Câu 55. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

$$A. f(x) = 2xe^{x^2}. \quad B. f(x) = x^2 e^{x^2} - 1. \quad C. f(x) = e^{2x}. \quad D. f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

Câu 56. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

$$A. -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$$

$$B. -3^{-x} + C$$

$$C. 3^{-x} \ln 3 + C$$

$$D. \frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$$

Câu 57. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

$$A. \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$$

$$B. x^4 + x^3 + C.$$

$$C. 3x^2 + 2x + C.$$

$$D. \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{4} + C$$

Câu 58. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$?

$$A. \frac{x^{2020}}{2020} + 1.$$

$$B. \frac{x^{2020}}{2020}.$$

$$C. y = 2019x^{2018}.$$

$$D. \frac{x^{2020}}{2020} - 1.$$

Câu 59. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Tìm họ nguyên hàm của hàm số

$$y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}.$$

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

C. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$

Câu 60. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right).$$

A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

Câu 61. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C$

B. $2e^x - \tan x + C$

C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$

D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Câu 62. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-1}}$ có dạng:

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Câu 63. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)?$$

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$

B. $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

D. $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

Câu 64. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng

$(2; +\infty)$ là

A. $3 \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$

B. $3 \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$

C. $3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$

D. $3 \ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$

Câu 65. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$

B. $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$

C. $2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$

D. $2 \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$

Câu 66. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cdot e^{2x}$.

A. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -x^2 + x + C$

B. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C$

C. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C$

D. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C$

Dạng 1.2 Tìm nguyên hàm cơ bản có điều kiện

Câu 67. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Câu 68. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Câu 69. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$

B. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$

C. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$

D. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$

Câu 70. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1, f(1) = 2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1) + f(3) \text{ bằng}$$

A. $2 + \ln 15$

B. $3 + \ln 15$

C. $\ln 15$

D. $4 + \ln 15$

Câu 71. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$ Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1) + 2$

B. $\ln(x-1) + 3$

C. $4\ln(x-1)$

D. $\ln(x-1) - 3$

Câu 72. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 2x + 5\cos x + 3$.

B. $f(x) = 2x - 5\cos x + 15$.

C. $f(x) = 2x + 5\cos x + 5$.

D. $f(x) = 2x - 5\cos x + 10$.

Câu 73. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

Câu 74. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Hàm số $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = \frac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

B. $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}$.

C. $f(x) = \frac{x^2(\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x}$.

D. $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

Câu 75. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{6}$

B. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{6}$

C. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$

D. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{6}$

Câu 76. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x(2^{-x} + 5)$ là

A. $x + 5\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$. B. $x + 5 \cdot 2^x \ln 2 + C$.

C. $\frac{2^x}{\ln 2} \left(-\frac{2^x}{\ln 2} x + 5x\right) + C$. D. $1 + 5\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$.

Câu 77. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

A. $\frac{1}{2}e + 200$ B. $2e + 100$ C. $\frac{1}{2}e + 50$ D. $\frac{1}{2}e + 100$

Câu 78. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hàm số $F(x)$ nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot g(x)$, biết $F(1) = 3$,

$\int f(x) dx = x + C_1$ và $\int g(x) dx = x^2 + C_2$.

A. $F(x) = x^2 + 1$ B. $F(x) = x^2 + 3$ C. $F(x) = x^2 + 2$ D. $F(x) = x^2 + 4$

Câu 79. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$, biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(0)$ bằng

A. $2 + \ln 2$. B. $\ln 2$. C. $2 + \ln(-2)$. D. $\ln(-2)$.

Câu 80. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$. B. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$.

C. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$. D. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$.

Câu 81. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. B. $F(1) = \ln 3 + 2$. C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2$. D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.

Câu 82. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = -\cos x$ và $f(0) = 2019$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = -\sin x + 2019$. B. $f(x) = 2019 + \cos x$.
C. $f(x) = \sin x + 2019$. D. $f(x) = 2019 - \cos x$.

Câu 83. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{6}$ B. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{6}$ C. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$ D. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{6}$

Câu 84. (CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \forall x \in (-\infty; 0)$
B. $F(x) = \ln|x| + C \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.
C. $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \forall x \in (-\infty; 0)$.
D. $F(x) = \ln(-x) + C \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Câu 85. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

A. $y = 2e^x + 2x$. B. $y = 2e^x + 2$. C. $y = e^{2x} + x + 2$. D. $y = e^{2x} + x + 1$.

Câu 86. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

A. $F(x) = x^2 + e^x + 2018$. B. $F(x) = x^2 + e^x - 2018$.
C. $F(x) = x^2 + e^x + 2017$. D. $F(x) = e^x - 2019$.

Câu 87. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

- A. $S = \ln 4035$. B. $S = 4$. C. $S = \ln 2$. D. $S = 1$.

Câu 88. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a + 2b = 8$. B. $a + b = 8$. C. $2a - b = 8$. D. $a - b = 8$.

Câu 89. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho biết $\int \frac{1}{x^3 - x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P = 2a + b$.

- A. 0. B. -1. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 90. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P = a^2 + ab + b^2$.

- A. 12. B. 13. C. 14. D. 15.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a + b$ bằng

- A. $-\frac{3}{2}$. B. 0. C. 5. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 92. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

- A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$. B. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$.
C. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$. D. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

Câu 93. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

- A. 55. B. 44. C. 45. D. 0.

Dạng 2. Sử dụng phương pháp VI PHẦN để tìm nguyên hàm

Dạng 2.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

Câu 94. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sin^2 x \cos x$ là

- A. $\sin^3 x + C$. B. $-\sin^3 x + C$. C. $\cos^3 x + C$. D. $-\cos^3 x + C$.

Câu 95. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$. B. $\int f(x) dx = \ln|1 + 3 \cos x| + C$.
C. $\int f(x) dx = 3 \ln|1 + 3 \cos x| + C$. D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$.

Câu 96. (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $\int f(x) dx = 4x^3 + 2x + C_0$. Tính $I = \int x f(x^2) dx$.

- A. $I = 2x^6 + x^2 + C$. B. $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$.
C. $I = 4x^6 + 2x^2 + C$. D. $I = 12x^2 + 2$.

Câu 97. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$.

- A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$. B. $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C$.
C. $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$. D. $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C$.

Câu 98. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$. B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.
C. $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$.

Câu 99. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là:

A. $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C$. B. $\ln|5x+4| + C$. C. $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$. D. $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$.

Câu 100. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$ B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$ D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

Câu 101. (Mã 102 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c$. B. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c$.

C. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + c$. D. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + c$.

Câu 102. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x - 1} + C$. B. $\frac{e^{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x + 1} + C$. C. $e^{\sin^2 x} + C$. D. $\frac{e^{\sin^2 x - 1}}{\sin^2 x - 1} + C$.

Dạng 2.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 103. (THPT QUANG TRUNG ĐÔNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2$. B. $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2$. C. $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2$. D. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2$.

Câu 104. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$ và $F(0) = 1$.

A. $F(x) = \ln(x^4+1) + 1$. B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + \frac{3}{4}$.

C. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1.$

D. $F(x) = 4 \ln(x^4 + 1) + 1.$

Câu 105. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2$ là:

A. $S = \{3\}$

B. $S = \{2; 3\}$

C. $S = \{-2; 3\}$

D. $S = \{-3; 3\}$

Câu 106. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^b + C, x \neq -1$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$

. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = 2b.$

B. $b = 2a.$

C. $a = 2018b.$

D. $b = 2018a.$

Câu 107. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \frac{313}{15}.$

B. $f^2(2) = \frac{332}{15}.$

C. $f^2(2) = \frac{324}{15}.$

D. $f^2(2) = \frac{323}{15}.$

Câu 108. (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - 2018) Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m = -\frac{1}{2}.$

B. $m = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}.$

C. $m = \frac{1 + 2^{2017}}{2^{2018}}.$

D. $m = \frac{1}{2}.$

Dạng 3. Sử dụng phương pháp ĐỔI BIẾN để tìm nguyên hàm

Dạng 3.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

Câu 109. (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

A. $\int f(x) dx = (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$

Câu 110. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+3)^5$ là

A. $F(x) = \frac{(2x+3)^6}{12} + C.$

B. $F(x) = \frac{(2x+3)^6}{6} + C.$

C. $F(x) = 10(2x+3)^4 + C.$

D. $F(x) = 5(2x+3)^4 + C.$

Câu 111. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+2}$ là

$$\text{A. } \frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C \quad \text{B. } \frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$$

$$\text{C. } \frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C \quad \text{D. } \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}} + C$$

Câu 112. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

$$\text{A. } -\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{B. } \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{C. } \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{D. } \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

Câu 113. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Đổi biến $t = x-1$ thì

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \text{ trở thành}$$

$$\text{A. } \int \frac{t-1}{t^4} dt.$$

$$\text{B. } \int \frac{(t+1)^4}{t} dt.$$

$$\text{C. } \int \frac{t+1}{t^4} dt.$$

$$\text{D. } \int \frac{t+1}{t} dt.$$

Câu 114. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Khi tính nguyên hàm

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx, \text{ bằng cách đặt } u = \sqrt{x+1} \text{ ta được nguyên hàm nào?}$$

$$\text{A. } \int 2(u^2-4) du.$$

$$\text{B. } \int (u^2-4) du.$$

$$\text{C. } \int (u^2-3) du.$$

$$\text{D. } \int 2u(u^2-4) du.$$

Câu 115. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Biết

$$\int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C. \text{ Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.}$$

$$\text{A. } \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C$$

$$\text{B. } \int f(3x) dx = 9x \cos(6x-5) + C$$

$$\text{C. } \int f(3x) dx = 9x \cos(2x-5) + C$$

$$\text{D. } \int f(3x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$$

Câu 116. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = x^3(x^2+1)^{2019} \text{ là}$$

$$\text{A. } \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right].$$

$$\text{B. } \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}.$$

$$\text{C. } \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C.$$

$$\text{D. } \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C.$$

Câu 117. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Biết

$\int f(x)dx = 3x \cos(2x-5) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x)dx = 3x \cos(6x-5) + C$

B. $\int f(3x)dx = 9x \cos(6x-5) + C$

C. $\int f(3x)dx = 9x \cos(2x-5) + C$

D. $\int f(3x)dx = 3x \cos(2x-5) + C$

Câu 118. (Mã 103 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là

A. $2 \ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$.

B. $2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.

C. $2 \ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$.

D. $2 \ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$.

Câu 119. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1+\ln x}{x \ln x}$ là:

A. $\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx = \ln|\ln x| + C$.

B. $\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx = \ln|x^2 \ln x| + C$.

C. $\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx = \ln|x + \ln x| + C$.

D. $\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx = \ln|x \ln x| + C$.

Câu 120. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A. $\int f(x)dx = e^{x^3+1} + C$.

B. $\int f(x)dx = 3e^{x^3+1} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C$.

Câu 121. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$.

B. $\int f(x)dx = \sqrt{2x+1} + C$.

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x+1} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C$.

Câu 122. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

Câu 123. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN - 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \sqrt{x^2 + 1} + C.$ B. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$ D. $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$

Câu 124. (THPT NGÔ QUYỀN - HẢI PHÒNG - 2018) Biết $\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x$. Tìm nguyên hàm $\int f(x) dx$.

A. $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C.$ B. $\int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C.$

C. $\int f(x) dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x - \ln 2 + C.$ D. $\int f(x) dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x - \ln 2 + C.$

Dạng 3.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 125. (HỒNG BÀNG - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$ B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$ C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi.$ D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi.$

Câu 126. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

A. $\frac{2019}{2020}.$ B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}.$ C. $2018 \frac{1}{2020}.$ D. $-\frac{2019}{2020}.$

Câu 127. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM - 2018) Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}.$ B. $ab = \frac{1}{4}.$ C. $ab = -\frac{1}{8}.$ D. $ab = -\frac{1}{4}.$

Câu 128. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 2 - 2018) Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số

$f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

A. 4. B. 3. C. 5. D. 6.

Câu 129. Giả sử $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

- A. -1. B. 1. C. 3. D. -3.

Câu 130. (THPT NAM TRỰC - NAM ĐỊNH - 2018) Cho $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx$

$= \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$. Khi đó $S = a + b + c$ bằng

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. 2.

Dạng 4. Nguyên hàm từng phần

Dạng 4.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

Câu 131. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là:

- A. $2x^2 \ln x + 3x^2$. B. $2x^2 \ln x + x^2$.
C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Câu 132. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

- A. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$. B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.
C. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$. D. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

Câu 133. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là :

- A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$
C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$ D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

Câu 134. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)e^x$ là

- A. $(2x-3)e^x + C$. B. $(2x+3)e^x + C$.
C. $(2x+1)e^x + C$. D. $(2x-1)e^x + C$.

Câu 135. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x - 2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x}(x - 2) + C.$

D. $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$

Câu 136. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

A. $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C.$

B. $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

C. $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$

D. $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$

Câu 137. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + e^x)$ là

A. $(2x - 1)e^x + x^2.$ B. $(2x + 1)e^x + x^2.$ C. $(2x + 2)e^x + x^2.$ D. $(2x - 2)e^x + x^2.$

Câu 138. Họ nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là kết quả nào sau đây?

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x + C.$

Câu 139. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \ln x.$

A. $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

B. $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

C. $\int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

D. $\int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

Câu 140. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C.$

B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C.$

C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C.$ D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C.$

Câu 141. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

A. $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$

B. $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$

C. $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$

D. $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$

Câu 142. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$. B. $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$.

C. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$. D. $4x^3 + (x+1)e^x + C$.

Câu 143. Cho hai hàm số $F(x), G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x), g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ và $F(x).g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Họ nguyên hàm của $f(x).G(x)$ là

A. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$.

B. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$.

C. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C$.

D. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C$.

Câu 144. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C$.

B. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$.

C. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$.

D. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + C$.

Câu 145. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hai hàm số $F(x), G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x), g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ và $F(x)g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Tìm họ nguyên hàm của $f(x)G(x)$.

A. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$.

B. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$.

C. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C$.

D. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C$.

Câu 146. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

- A. $x \sin x - \cos x + C$ B. $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$
 C. $x \sin x + \cos x + C$ D. $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

Câu 147. (TT THANH TUỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$ là

- A. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$. B. $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.
 C. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. D. $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 148. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$ B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$
 C. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$ D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

Câu 149. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$

- A. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$ B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$
 C. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$ D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Câu 150. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}dx = (4-2x)e^x + C$

B. $\int f'(x)e^{2x}dx = (x-2)e^x + C$

C. $\int f'(x)e^{2x}dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$

D. $\int f'(x)e^{2x}dx = (2-x)e^x + C$

Câu 151. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ và $f(0) = 2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = 3$.

B. $f(1) = e$.

C. $f(1) = 5 - e$.

D. $f(1) = 8 - 2e$.

Câu 152. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x + e^x + C$

B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$

C. $(x-1)e^x + C$

D. $(x+1)e^x + C$

Câu 153. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x, f(0) = 0$ và $\int f(x)dx = (ax+b)e^x + c$ với a, b, c là các hằng số. Khi đó:

A. $a + b = 2$.

B. $a + b = 3$.

C. $a + b = 1$.

D. $a + b = 0$.

Câu 154. (THPT NGUYỄN THỊ MINH KHAI - HÀ TĨNH - 2018) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

B. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

C. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$.

D. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

Câu 155. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM - 2018) Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$.

B. $ab = \frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Câu 156. (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3 - 2018) Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$.

B. 0.

C. $\frac{7}{3} \ln 2$.

D. $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$.

Câu 157. (THCS&THPT NGUYỄN KHUYẾN - BÌNH DƯƠNG - 2018) Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x-1)$. Cho biết $g(2) = 1$ và $g(3) = a \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của $T = 3a^2 - b^2$

A. $T = 8$.

B. $T = -17$.

C. $T = 2$.

D. $T = -13$.

Dạng 5. Sử dụng nguyên hàm để giải toán

Câu 158. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{391}{400}$ B. $-\frac{1}{40}$ C. $-\frac{41}{400}$ D. $-\frac{1}{10}$

Câu 159. (THPT NGUYỄN TRÃI - ĐÀ NẴNG - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$ thì giá trị $f(2)$ là

- A. e^2 . B. $2e$. C. $e+1$. D. e^3 .

Câu 160. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$, $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$. Biết $f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \frac{a}{b} - 1$ với $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $a - b = 2019$. B. $ab > 2019$. C. $2a + b = 2022$. D. $b \leq 2020$.

Câu 161. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$. Tính $f(4)$?

- A. 24. B. 14. C. 4. D. 16.

Câu 162. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) < 2$ B. $2 < f(x) < 4$ C. $f(x) > 6$ D. $4 < f(x) < 6$

Câu 163. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$. Biết $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4], f(2) = \frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

- A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. B. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. C. $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. D. $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 164. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

- A. $\frac{2}{e}$. B. $\frac{1}{e}$. C. e . D. $\frac{e}{2}$.

Câu 165. (THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2) = \sqrt{2 \ln 2 + 2}$. B. $f^2(2) = 2 \ln 2 + 2$.

C. $f^2(2) = \ln 2 + 1$. D. $f^2(2) = \sqrt{\ln 2 + 1}$.

Câu 166. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$

A. $\frac{43}{30}$

B. $\frac{16}{15}$

C. $\frac{43}{15}$

D. $\frac{26}{15}$

Câu 167. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b \ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P = a + b$ bằng

A. $\frac{14}{9}$

B. $-\frac{2}{9}$

C. $\frac{7}{9}$

D. $-\frac{4}{9}$

Câu 168. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TÔ NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + (2x + 4)f^2(x) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Tính tổng $S = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $b - a = ?$

A. -1.

B. 1011.

C. 1.

D. 2018.

Câu 169. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1) \cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8) = 49$.

B. $f(8) = 256$.

C. $f(8) = \frac{1}{16}$.

D. $f(8) = \frac{49}{64}$.

Câu 170. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$

B. $-\frac{2}{5}$

C. $-\frac{5}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

Câu 171. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+1)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0$, $\forall x > 0$ và $f(2) = \frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \dots + f(2019)$.

- A. $\frac{2021}{2020}$. B. $\frac{2020}{2019}$. C. $\frac{2019}{2020}$. D. $\frac{2018}{2019}$.

Câu 172. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ là

- A. $2\sqrt[3]{42}$. B. $2\sqrt[3]{15}$. C. $\sqrt[3]{42}$. D. $\sqrt[3]{15}$.

Câu 173. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. 5. B. 10. C. 20. D. 15.

Câu 174. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0) = 2\sqrt{2}$, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) \cdot f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

- A. $\sqrt{26}$. B. $\sqrt{24}$. C. $\sqrt{15}$. D. $\sqrt{23}$.

Câu 175. (SGD&ĐT CẦN THƠ - HKII - 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

- A. 28. B. 22. C. $\frac{19}{2}$. D. 10.

Câu 176. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - TPHCM - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính $f(2)$.

- A. $f(2) = \frac{e}{3}$. B. $f(2) = \frac{e}{6}$. C. $f(2) = \frac{e^2}{3}$. D. $f(2) = \frac{e^2}{6}$.

Câu 177. (LIÊN TRƯỜNG - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 178. (THPT LÊ XOAY - LẦN 3 - 2018) Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2 < f(5) < 3$. B. $1 < f(5) < 2$. C. $4 < f(5) < 5$. D. $3 < f(5) < 4$.

Câu 179. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $3 < f(5) < 4$. B. $1 < f(5) < 2$. C. $4 < f(5) < 5$. D. $2 < f(5) < 3$.

Câu 180. (THPT QUỲNH LƯU - NGHỆ AN - 2018) Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $\frac{a}{b} > 1$. C. $a + b = 1010$. D. $b - a = 3029$.

Câu 181. (THPT NAM TRỰC - NAM ĐỊNH - 2018) Cho hàm số $f(x) \neq 0$, $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x)$ và $f(1) = -\frac{1}{3}$. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(80)$.

- A. $-\frac{3240}{6481}$. B. $\frac{6480}{6481}$. C. $-\frac{6480}{6481}$. D. $\frac{3240}{6481}$.

Câu 182. (SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH - 2018) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

- A. $e^{\frac{3}{2}}$. B. e^3 . C. $e^{\frac{5}{2}}$. D. e^2 .

Dạng 6. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm

Câu 183. (THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG ĐIỀU - ĐỒNG THÁP - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$.

- A. $S = 1$. B. $S = 1 + \ln^2 2$. C. $S = 2 \ln 2$. D. $S = \ln^2 2$.

Câu 184. (KIM LIÊN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{e\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$ và $f(e^2) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$ bằng

- A. $3 \ln 2 + 1$. B. $2 \ln 2$. C. $3(\ln 2 + 1)$. D. $\ln 2 + 3$.

Câu 185. (QUẢNG XƯƠNG - THANH HÓA - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

- A. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$. B. $\ln 80 + 1$. C. $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$. D. $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$.

Câu 186. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, $f(-2) + f(2) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $f(-3) + f(0) + f(4)$ được kết quả

- A. $\ln \frac{6}{5} + 1$. B. $\ln \frac{6}{5} - 1$. C. $\ln \frac{4}{5} + 1$. D. $\ln \frac{4}{5} - 1$.

Câu 187. [KIM LIÊN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{e\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$ và $f(e^2) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$ bằng

- A. $3 \ln 2 + 1$. B. $2 \ln 2$. C. $3(\ln 2 + 1)$. D. $\ln 2 + 3$.

Câu 188. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ - 2018) Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x - 3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Tính $T = a + b + c$.

- A. $T = 8$. B. $T = 5$. C. $T = 6$. D. $T = 7$.

Câu 189. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Gọi $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^x$. Tính $S = a + 2b + c$.

- A. $S = 3$. B. $S = -2$. C. $S = 0$. D. $S = 4$.

Câu 190. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$, ta có $\int f(x) dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$. Giá trị của biểu thức $m + n + p$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$ B. 2 C. $\frac{13}{6}$ D. $\frac{7}{6}$

Câu 191. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết rằng hàm số $F(x) = mx^3 + (3m + n)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = 3x^2 + 10x - 4$. Tính mn .

- A. $mn = 1$. B. $mn = 2$. C. $mn = 0$. D. $mn = 3$.

Câu 192. Biết $F(x) = -\frac{(x-a)\cos 3x}{b} + \frac{1}{c}\sin 3x + 2019$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-2)\sin 3x$, (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$). Giá trị của $ab + c$ bằng

A. 14.

B. 15.

C. 10.

D. 18.

Câu 193. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x) = 2x^2e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$, ta có $\int f(x)dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$. Giá trị của biểu thức $m+n+p$ bằng

A. $\frac{1}{3}$

B. 2

C. $\frac{13}{6}$ D. $\frac{7}{6}$

Câu 194. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 8$.B. $T = 5$.C. $T = 6$.D. $P = 7$.

Câu 195. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2019^x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 196. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 197. (CỤM 8 TRƯỜNG CHUYÊN LẦN 1) Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $f(F(0))$ bằng:

A. $\frac{-1}{e}$.B. $3e$.C. $20e^2$.D. $9e$.

Câu 198. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho $F(x) = \int \frac{(1 + \cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0; 4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $(6\pi; 9\pi)$.B. $(2\pi; 4\pi)$.C. $(4\pi; 6\pi)$.D. $(0; 2\pi)$.

Câu 199. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$ B. $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ D. $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$

PHẦN B. ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản (dùng bảng nguyên hàm)

Dạng 1.1 Tìm nguyên hàm cơ bản không có điều kiện

Câu 1. Chọn A

$$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Câu 2. Chọn D

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (2x + 4) dx = x^2 + 4x + C.$$

Câu 3.

Lời giải

Chọn B

$$\int (2x + 6) dx = x^2 + 6x + C$$

Câu 4. Chọn A

Câu 5. Chọn A

$$\int (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 6. Chọn A

$$\text{Ta có } \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C.$$

Câu 7. Chọn B

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) \\ &= \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C \end{aligned}$$

Câu 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$$

Câu 9. Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \ (a \neq 0) \text{ ta được } \int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C.$$

Câu 10. Chọn B

Ta có: $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 11. Chọn A

Câu 12. Chọn C

Câu 13. Chọn B

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là $F(x) = x^2 + 5x + C$.

Câu 14. Chọn A

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, ($0 < a \neq 1$) ta được đáp án B

Câu 15. Chọn C

Áp dụng công thức $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ với $a \neq 0$; thay $a = 2$ và $b = 0$ để có kết quả.

Câu 16. Chọn C

Ta có $\int (x^4 + x) dx = \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{2} x^2 + C$.

Câu 17. Chọn D

$\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C$.

Câu 18. Chọn D

$\int x(x^2 + 7)^{15} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 7)^{15} d(x^2 + 7) = \frac{1}{32} (x^2 + 7)^{16} + C$

Câu 19. Ta có: $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$, với C là hằng số bất kì.

Câu 20. Ta có $\int (x - \sin 2x) dx = \int x dx - \int \sin 2x dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Câu 21. Ta có: $\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$.

Câu 22.

Câu 23. Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 24. $\int \sin 3x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$

Câu 25. Ta có $\int (3x^2 + \sin x) \, dx = x^3 - \cos x + C$.

Câu 26. Ta có: $\int \ln x \, dx = \frac{1}{x} + C$ sai.

Câu 27. Có $f'(x) = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x$.

Câu 28. Ta có: $\int e^x \, dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ sai vì $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Câu 29. Do theo bảng nguyên hàm: $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Câu 30.

Lời giải

Chọn B.

Câu 31. Ta có $\int f(x) \, dx = \int (3x - \sin x) \, dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$.

Câu 32. Chọn C

Theo bảng nguyên hàm cơ bản

Câu 33. Ta có $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

Câu 34. Ta có $\int f(x) \, dx = \int (x^4 + x^2) \, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 35. Ta có: $\int (e^x - 2x) \, dx = e^x - x^2 + C$

Câu 36. $\int (\cos x + x) \, dx = \sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 37. Ta có:

$$\int (x^2 - 3x + \frac{1}{x}) \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Câu 38. Ta có $\int f(x) \, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx + \int \sin x \, dx = \ln|x| - \cos x + C$.

Câu 39. Gọi $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Suy ra $F'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = x^2$.

Câu 40. Ta có: $\int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Câu 41. Ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{x^4 + 2}{x^2} dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

Câu 42. Ta có: $(e^x)' = e^x \Rightarrow y = e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = e^x.$

Câu 43. Ta có: $F(x) = \int e^2 dx = e^2 x + C.$

Câu 44. Trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-2x} d(1-2x) = -\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$

Câu 45. Chọn B

Câu 46. Ta có $\int (2^x + x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{2} x^2 + C.$

Câu 47. Ta có $\int f(x) dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C.$

Câu 48. Sử dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ta được:

$$\int \left(\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + x - 2019 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2019x + C = \frac{1}{12} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2019x + C.$$

Câu 49. Ta có $\int f(x) dx = \int (2^x - x^2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^3}{3} + C.$

Câu 50. Ta có: $\int \frac{1}{3x-1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C = \frac{1}{3} \ln(1-3x) + C$ (do $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$)

Câu 51. Chọn A

Ta có: $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Câu 52. Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{2x^4 + 3}{x^2} dx = \int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

Câu 53. Ta có: $\int (2^x + x + 1) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$

Câu 54. Chọn C

Ta có $\int f(x)dx = \int (3x - \sin x)dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$.

Câu 55. Chọn A

Ta có $f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

Câu 56. Chọn A

Ta có $\int f(x)dx = \int 3^{-x} dx = -\int 3^{-x} d(-x) = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Câu 57. Chọn A

$\int f(x)dx = \int (x^3 + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$.

Câu 58. Ta có: $\int x^{2019} dx = \frac{x^{2020}}{2020} + C$, C là hằng số. Nên các phương án A, B, D đều là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$.

Câu 59. Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 60. $\int f(x)dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$

Câu 61. Ta có: $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) = 2e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$

$\int y dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2e^x + \tan x + C$.

Câu 62. Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C$.

Câu 63. Ta có: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \Rightarrow F(x) = \int (x^3 + 6x^2 + 11x + 6) dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$.

Câu 35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

A. $\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$. B. $2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$.

C. $2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$. D. $-\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$. Ta có

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Suy ra họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

{ Các chữ d trong vì phân chưa đúng chuẩn }

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$$

Câu 64. Chọn C

Ta có $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$. Do đó

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$$

Câu 65. Chọn B

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

Câu 66. Chọn D

$$\text{Ta có } f(x).e^{2x} = F'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{e^{2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^{2x} - 4xe^{2x}}{e^{4x}} = \frac{2-4x}{e^{2x}}$$

$$\text{Suy ra } f'(x)e^{2x} = 2-4x \text{ nên } \int f'(x).e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C.$$

Dạng 1.2 Tìm nguyên hàm cơ bản có điều kiện

Câu 67. Chọn C

$$\text{Có } F(x) = \int f(x)dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$$

Câu 68. Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Câu 69. Chọn C

Ta có $f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

Câu 70. Chọn C

$$\int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = f(x)$$

Với $x < \frac{1}{2}$, $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ nên $f(-1) = 1 + \ln 3$

Với $x > \frac{1}{2}$, $f(1) = 2 \Rightarrow C = 2$ nên $f(3) = 2 + \ln 5$

Nên $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$

Câu 71.

Lời giải

Chọn B

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx + C = \ln|x-1| + C$$

$F(e+1) = 4$. Ta có $1 + C = 4 \Rightarrow C = 3$

Câu 72. Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 5 \sin x) dx = 2x + 5 \cos x + C$.

Mà $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

Câu 73. $F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$; $F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}$.

Khi đó $F(\ln 3) = \frac{1}{2} e^{2 \ln 3} - \frac{1}{2} = 4$.

Câu 74. Ta có đáp án là đạo hàm của hàm số $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$

Đạo hàm của hàm số $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$ là:

$$F'(x) = f(x) = (x^2)' \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot [\ln(\sin x - \cos x)]' = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}.$$

$\Rightarrow$ Đáp án B.

Câu 75. $F(x) = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 3x}{3} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}.$$

Câu 76. Ta có $\int f(x) dx = \int 2^x (2^{-x} + 5) dx = \int (1 + 5 \cdot 2^x) dx = x + 5 \left(\frac{2^x}{\ln 2} \right) + C.$

Câu 77. Chọn D

Ta có $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C.$

Theo đề ra ta được: $F(0) = \frac{201}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^0 + C = \frac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100.$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + 100 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot \frac{1}{2}} + 100 = \frac{1}{2} e + 100.$

Câu 78. Chọn C

Theo giả thiết ta có: $f(x) = 1$ và $g(x) = 2x$ nên $f(x) \cdot g(x) = 2x.$

$F(x) = \int 2x dx = x^2 + C.$ Vì $F(1) = 3 \Rightarrow C = 2.$ Vậy một nguyên hàm $F(x)$ cần tìm của hàm số $f(x) \cdot g(x)$, là $F(x) = x^2 + 2.$

Câu 79.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + C, C \in \mathbb{R}.$

Giả sử $F(x) = \ln|x-2| + C_0$ là một nguyên hàm của hàm số đã cho thỏa mãn $F(1) = 2.$

Do $F(1) = 2 \Rightarrow C_0 = 2 \Rightarrow F(x) = \ln|x-2| + 2.$ Vậy $F(0) = 2 + \ln 2.$

Câu 80. Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} ax^2 - \frac{b}{x} + C.$

$$\text{Theo bài ra } \begin{cases} F(-1)=1 \\ F(1)=4 \\ f(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a+b+C=1 \\ \frac{1}{2}a-b+C=4 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{3}{2} \\ C=\frac{7}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

Câu 81. Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

$$\text{Do } F(0) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 0 + 1| + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

Câu 82. Chọn A

$$f'(x) = -\cos x \Rightarrow \int f(x) dx = \int (-\cos x) dx = -\sin x + C.$$

$$f(0) = 2019 \Leftrightarrow -\sin 0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2019. \text{ Vậy } f(x) = -\sin x + 2019.$$

Câu 83. Chọn C

$$F(x) = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 3x}{3} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}+6}{6}.$$

Câu 84. Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$ với $\forall x \in (-\infty; 0)$.

$$\text{Lại có } F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2. \text{ Do đó } F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0).$$

Câu 85. Ta có: $\int f'(x) dx = \int (2e^{2x} + 1) dx = e^{2x} + x + C.$

Suy ra $f(x) = e^{2x} + x + C$.

Theo bài ra ta có: $f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy: $f(x) = e^{2x} + x + 1$.

Câu 86. Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C$.

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2019$.

Suy ra $\begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2019 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018$.

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2018$.

Câu 87. Trên khoảng $(1; +\infty)$ ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x-1) + C_1$.

Mà $f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$.

Trên khoảng $(-\infty; 1)$ ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(1-x) + C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x) + C_2$.

Mà $f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2018 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 2017 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Suy ra $f(3) - f(-1) = 1$.

Câu 88. Ta có: $\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-3 \end{cases}$$

Khi đó: $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 5 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + C$.

Suy ra $a = 5$; $b = -3$ nên $a - b = 8$.

Câu 89. Ta có: $\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Dx(x-1)}{x^3 - x}$
 $= \frac{(A+B+D)x^2 + (B-D)x - A}{x^3 - x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó: $\int \frac{1}{x^3-x} dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |(x-1)(x+1)| - \ln |x| + C.$

Suy ra $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$ nên $P = 2a + b = 0.$

Câu 90. Ta có: $\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}.$$

Khi đó: $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = 3 \ln |x+2| + \ln |x+3| + C.$

Suy ra $a = 3$; $b = 1$ nên $P = a^2 + ab + b^2 = 13.$

Câu 91. Ta có $f'(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \quad (1).$

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, các điểm $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ đều thuộc $(0; +\infty)$ nên

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(ax^2 + \frac{b}{x^3} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C.$$

$$+ f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \quad (2).$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} a+b=3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ C=\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow 2a+b = 2.2+1=5.$$

Câu 92. Ta có $\int f(x)dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, ta có $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$

$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

Câu 93. Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

Suy ra $F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44$.

Dạng 2. Sử dụng phương pháp VI PHÂN để tìm nguyên hàm

Dạng 2.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

Câu 94. $\int f(x)dx = \int 3\sin^2 x \cos x dx = \int 3\sin^2 x d(\sin x) = \sin^3 x + C$.

Câu 95. Ta có: $\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + 3\cos x} d(1 + 3\cos x) = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3\cos x| + C$.

Câu 96. Ta có: $I = \int x f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int f(x^2) dx^2 = \frac{1}{2} \left(4(x^2)^3 + 2(x^2) \right) + C = 2x^6 + x^2 + C$.

Câu 97. Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx = \int \frac{d(2 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$.

Câu 98. $\int f(x)dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$

Câu 99. Ta có $\int \frac{1}{5x+4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{5x+4} d(5x+4) = \frac{1}{5} \ln|5x+4| + C.$

Câu 100. Chọn A

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{1}{x^9+3x^5} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2(x^4+3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2(x^4+3)} = \frac{1}{12} \int \frac{(x^4+3)-x^4}{(x^4)^2(x^4+3)} dx^4 \\ &= \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2} - \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{x^4(x^4+3)} = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln\left(\frac{x^4}{x^4+3}\right) + C \end{aligned}$$

Câu 101. Chọn C

Ta có $f(x) = \frac{3x-3+2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

Vậy $\int f(x)dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx = 3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 2 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2}$

$$= 3 \ln|x-1| + 2 \int (x-1)^{-2} d(x-1) = 3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C \text{ vì } x > 1.$$

Câu 102. Ta có $\int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x} dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$

Dạng 2.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 103. Ta có $F(x) = \int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{3\cos x+1} = -\frac{1}{3} \ln|3\cos x+1| + C.$

mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \ln\left|3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right| + C = 2 \Rightarrow C = 2.$

Do đó, $F(0) = -\frac{1}{3} \ln|3\cos(0)+1| + 2 = -\frac{1}{3} \ln 4 + 2 = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$

Vậy $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$

Câu 104. Chọn C

Ta có: $F(x) = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^4+1} d(x^4+1) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + C.$

Do $F(0) = 1$ nên $\frac{1}{4} \ln(0+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$

Vậy: $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1$.

Câu 105. Chọn A.

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx = x - \ln(e^x + 1) + C$

$F(0) = -\ln 2 + C = -\ln 2e \Rightarrow C = -1$ PT: $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2 \Leftrightarrow x - \ln(e^x + 1) - 1 + \ln(e^x + 1) = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 106. Ta có:

$$\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017} d\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{4036} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018} + C.$$

$\Rightarrow a = 4036, b = 2018$

Do đó: $a = 2b$.

Câu 107. Ta có $\int f'(x) \cdot f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx + C \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C$.

Do $f(0) = 2$ nên suy ra $C = 2$.

Vậy $f^2(2) = 2 \left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{332}{15}$.

Câu 108. Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2 + 1)^{-2018} d(x^2 + 1) = \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{-2017}}{-2017} + C$
 $= -\frac{1}{2(x^2 + 1)^{2017}} + C = F(x)$

Mà $F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$

Do đó $F(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}}$ suy ra

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{2(x^2 + 1)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (x^2 + 1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}$.

Dạng 3. Sử dụng phương pháp ĐỔI BIẾN để tìm nguyên hàm

Dạng 3.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

Câu 109. Ta có $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} d(3x+1) = \frac{1}{4} (3x+1)^{\frac{4}{3}} + C$.

Câu 110. $F(x) = \int (2x+3)^5 dx = \int \frac{(2x+3)^5}{2} d(2x+3) = \frac{(2x+3)^6}{12} + C$

Câu 111. Chọn C

Do $\int \sqrt{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int (3x+2)^{\frac{1}{2}} d(3x+2) = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C$

Câu 112. Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \Rightarrow t dt = dx$

$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \sqrt{2x+1} dx = \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C$.

49: (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$ B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$ D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$ Chọn A

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$.

Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Vậy $F(x) = 2 \ln 2 \cdot \int 2^u \cdot du = 2 \ln 2 \cdot \frac{2^u}{\ln 2} + C = 2^{\sqrt{x}+1} + C$.

Phương án B: $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} - 2 + C$ thỏa.

Phương án C: $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + 2 + C$ thỏa.

Câu 113. $t = x-1 \Rightarrow dt = dx$. Vậy $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx = \int \frac{t+1}{t^4} dt$.

Câu 114. Chọn A

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u du.$$

$$\text{Khi đó } \int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx \text{ trở thành } \int \frac{u^2-4}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2-4) du.$$

Câu 115. Cách 1:

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$$

$$\Rightarrow \left(\int f(x) dx \right)' = (3x \cos(2x-5) + C)'$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cos(2x-5) - 6x \sin(2x-5)$$

$$\Rightarrow f(3x) = 3 \cos(6x-5) - 18x \sin(6x-5)$$

$$\text{Xét } \int f(3x) dx = \int (3 \cos(6x-5) - 18x \sin(6x-5)) dx$$

$$= \int 3 \cos(6x-5) dx - \int 18x \sin(6x-5) dx \quad (1).$$

$$\text{Xét } I = \int 18x \sin(6x-5) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 3x = u \\ 6 \sin(6x-5) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3dx = du \\ -\cos(6x-5) = v \end{cases}.$$

$$I = -3x \cos(6x-5) + 3 \int \cos(6x-5) dx, \text{ thay vào (1) ta được } \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

Cách 2:

$$\text{Đặt } x = 3t \Rightarrow dx = 3dt.$$

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C \Leftrightarrow 3 \int f(3t) dt = 3 \cdot (3t) \cos(2 \cdot 3t - 5) + C$$

$$\Leftrightarrow \int f(3t) dt = 3t \cos(6t-5) + C \Leftrightarrow \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

Câu 116. Xét $\int f(x) dx = \int x^3 (x^2+1)^{2019} dx = \int x^2 (x^2+1)^{2019} x dx.$

$$\text{Đổi biến } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx, \text{ ta có:}$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \int (t-1) t^{2019} dt = \frac{1}{2} \int (t^{2020} - t^{2019}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^{2021}}{2021} - \frac{t^{2020}}{2020} \right] + C = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C. \end{aligned}$$

Câu 117. Chọn A

Cách 1:

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$$

$$\Rightarrow \left(\int f(x) dx \right)' = (3x \cos(2x-5) + C)'$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cos(2x-5) - 6x \sin(2x-5)$$

$$\Rightarrow f(3x) = 3 \cos(6x-5) - 18x \sin(6x-5)$$

$$\text{Xét } \int f(3x) dx = \int (3 \cos(6x-5) - 18x \sin(6x-5)) dx$$

$$= \int 3 \cos(6x-5) dx - \int 18x \sin(6x-5) dx \quad (1).$$

$$\text{Xét } I = \int 18x \sin(6x-5) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 3x = u \\ 6 \sin(6x-5) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 dx = du \\ -\cos(6x-5) = v \end{cases}.$$

$$I = -3x \cos(6x-5) + 3 \int \cos(6x-5) dx, \text{ thay vào (1) ta được } \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

Cách 2:

$$\text{Đặt } x = 3t \Rightarrow dx = 3dt.$$

$$\text{Khi đó: } \int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C \Leftrightarrow 3 \int f(3t) dt = 3 \cdot (3t) \cos(2 \cdot 3t - 5) + C$$

$$\Leftrightarrow \int f(3t) dt = 3t \cos(6t-5) + C \Leftrightarrow \int f(3x) dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

Câu 118. Chọn B

$$\text{Đặt } x+2=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt \text{ với } t>0$$

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2t-1}{t^2} dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = 2 \ln t + \frac{1}{t} + C$$

$$\text{Hay } \int f(x) dx = 2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$$

$$\text{Câu 119. Ta có } I = \int f(x) dx = \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx.$$

$$\text{Đặt } x \ln x = t \Rightarrow (\ln x + 1) dx = dt. \text{ Khi đó ta có } I = \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|x \cdot \ln x| + C.$$

$$\text{Câu 120. Đặt } t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

Do đó, ta có $\int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$.

Vậy $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$.

Câu 121. Đặt $\sqrt{2x+1} = t \Rightarrow 2x+1 = t^2 \Rightarrow dx = t dt$.

Khi đó ta có $\int \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C$.

Câu 122. $I = \int f(x) dx = \int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$
 $= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ $I = \int \frac{(1-t^2) \cdot (1-t^2)}{t^5} (-dt) = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} (-dt)$

$= \int \left(-\frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C$

$= \frac{1}{4} \cos^4 x - \cos^2 x - \ln|\cos x| + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C$

$= \frac{1}{4} \cdot (\tan^2 x + 1)^2 - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C$

$= \frac{1}{4} (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C$

$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + \frac{1}{4} + C$

$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.

Câu 123. Đặt $t = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})(x - \sqrt{x^2+1})}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{1}{t} = \sqrt{x^2+1} - x$.

$t - \frac{1}{t} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt; t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{x^2+1}$

$\int f(x) dx = \int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \ln t dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \ln t dt = I$.

Đặt $u = \ln t \rightarrow du = \frac{1}{t} dt$

$dv = \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \rightarrow v = t - \frac{1}{t};$

$I = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \left(t - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) + C$

$$= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Câu 124. Câu này đề chưa chặt, phải là “Biết một nguyên hàm của hàm số $y = f(2x)$ là”

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = \frac{dx}{2}.$$

$$\begin{aligned} \int f(2x) dx &= \sin^2 x + \ln x + C \Rightarrow \frac{1}{2} \int f(t) dt = \sin^2 \frac{t}{2} + \ln \frac{t}{2} + C \Rightarrow \int f(t) dt = 2 \sin^2 \frac{t}{2} + 2 \ln t - 2 \ln 2 + C \\ &\Rightarrow \int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C. \end{aligned}$$

Dạng 3.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 125. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 \pi}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{1}{4} + \pi.$$

Câu 126. Ta có $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.$

$$\text{Đặt } t = x(x+1) = x^2 + x \Rightarrow dt = (2x+1)dx.$$

$$\text{Khi đó } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C.$$

$$\text{Mặt khác, } F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) = -\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2020}\right) + 2019 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) + 2019 = -\left(1 - \frac{1}{2020}\right) + 2019 \\ &= 2018 + \frac{1}{2020} = 2018 \frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Câu 127. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 128. Đặt $t = \sqrt{2x-3} \Rightarrow t^2 = 2x-3 \Rightarrow dx = t dt$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2+3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt = t^5 + 5t^3 + 7t + C \\ &= \sqrt{(2x-3)^5} + 5\sqrt{(2x-3)^3} + 7\sqrt{2x-3} + C = (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + 5(2x-3)\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x-3} + C \\ &= (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C \end{aligned}$$

Vậy $F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S = a + b + c = 3$.

Câu 129. Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = [(x^2+3x)+1]^2$.

Đặt $t = x^2 + 3x$, khi đó $dt = (2x+3)dx$.

Tích phân ban đầu trở thành $\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C$.

Trở lại biến x , ta có $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$.

Vậy $g(x) = x^2 + 3x + 1$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -3 .

Câu 130. $I = \int \frac{x}{x^4(1+x^2)} dx$

$$t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t-1)^2} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t| \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\ln|x^2| - \frac{1}{x^2} + \ln|1+x^2| \right) + C = -\frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = \frac{7}{4}.$$

Dạng 4. Nguyên hàm từng phần

Dạng 4.1 Tìm nguyên hàm không có điều kiện

Câu 131. Chọn D

Ta có $f(x) = 4x(1 + \ln x) \Rightarrow F(x) = \int (4x(1 + \ln x)) dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \\ dv = 4x \Rightarrow v = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = 2x^2(1 + \ln x) - \int 2x dx = 2x^2(1 + \ln x) - x^2 + C = 2x^2 \ln x + x^2 + C$$

$$\text{Câu 132. Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

Suy ra $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$

Câu 133.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

Câu 134. Gọi $I = \int (2x-1)e^x dx.$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = (2x-1)e^x - 2 \int e^x dx = (2x-1)e^x - 2e^x + C = (2x-3)e^x + C.$$

Câu 135. Ta có $F(x) = \int x e^{2x} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

Câu 136. Ta có: $\int f(x) dx = \int x(1 + \sin x) dx = \int x dx + \int x \sin x dx = \int x dx - \int x d(\cos x)$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(x \cos x - \int \cos x dx \right) = \frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 137. Ta có $\int 2x(1 + e^x) dx = 2 \int x dx + 2 \int x e^x dx.$

$$\text{Gọi } I = 2 \int x \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = 2 x e^x - 2 \int e^x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int 2x(1 + e^x) dx &= 2 \int x dx + x e^x - 2 \int e^x dx = x^2 + x e^x - 2x + C \\ &= (2x - 2) e^x + x^2 + C. \end{aligned}$$

Câu 138. Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int x \ln x dx.$ Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Câu 139. Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int (3x^2 + 1) \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (3x^2 + 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = (x^3 + x) \ln x - \int (x^3 + x) \frac{1}{x} dx = x(x^2 + 1) \ln x - \int (x^2 + 1) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$$

Câu 140. Chọn A

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cdot \cot x + \int \cot x dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$= -x \cdot \cot x + \ln|\sin x| + C. \text{ Với } x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x).$$

$$\text{Vậy } F(x) = -x \cot x + \ln(\sin x) + C.$$

Câu 141. Chọn A

$$\text{Ta có: } \int 3x(x + \cos x) dx = \int 3x^2 dx + \int 3x \cos x dx$$

$$\bullet \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$$

$$\bullet \int 3x \cos x dx = \int 3x \cdot d(\sin x) = 3x \cdot \sin x - \int 3 \sin x dx = 3x \cdot \sin x + 3 \cos x + C_2$$

$$\text{Vậy } \int 3x(x + \cos x) dx = x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$$

$$\text{Câu 142. Ta có: } \int (x^4 + xe^x) dx = \int x^4 dx + \int xe^x dx.$$

$$+) \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C_1.$$

$$+) \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_2 = (x-1)e^x + C_2.$$

$$\text{Vậy } \int (x^4 + xe^x) dx = \frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C.$$

Câu 143. Chọn C

Ta có

$$F(x) \cdot G(x) = \int (F(x) \cdot G(x))' dx = \int (F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)) dx.$$

$$\Rightarrow \int (F'(x) \cdot G(x)) dx = F(x) \cdot G(x) - \int (F(x) \cdot G'(x)) dx$$

$$= x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \left(\frac{2x^3}{x^2 + 1} \right) dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - (x^2 + 1) + \ln(x^2 + 1) + C$$

$$= (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$$

Câu 33. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$ B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x - 2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x}(x - 2) + C.$ D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$

$$F(x) = x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Câu 144. Sử dụng công thức: $\int u dv = u.v - \int v du.$

Ta có: $\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$

Câu 145. Ta có:

$$\int f(x)G(x)dx = \int G(x)d(F(x))$$

$$= G(x).F(x) - \int F(x)d(G(x)) = G(x).F(x) - \int F(x)g(x)dx.$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)G(x)dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^3}{x^2 + 1} dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \left(2x - \frac{2x}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \int \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \ln(x^2 + 1) + C = (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$$

Câu 146.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2}.$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$ nên $a = 1.$

$$\int g(x)dx = \int x \cos x dx$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\int g(x)dx = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Câu 147. Ta có: $\int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = \int (2x + 1) \ln x dx + \int \frac{1}{x} dx = I_1 + I_2$.

$$I_1 = \int (2x + 1) \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x + 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 + x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= (x^2 + x) \ln x - \int (x^2 + x) \frac{1}{x} dx = (x^2 + x) \ln x - \int (x + 1) dx \\ &= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx &= I_1 + I_2 \\ &= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1 + \ln x + C_2 = (x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 148. Chọn C

Ta có: $\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2}$. Chọn $f(x) = \frac{-1}{x^2}$.

$$\text{Suy ra } \int f'(x) \ln x dx = \int \frac{2}{x^3} \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2}{x^3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x^2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \int f'(x) \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \int \frac{1}{x^3} dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$$

Câu 149. Chọn C

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = x.F'(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{3} x^{-3}\right)' = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} \Rightarrow f'(x) \ln x = -3x^{-4} \ln x$$

$$\text{Vậy } \int f'(x) \ln x dx = \int (-3x^{-4} \ln x) dx = -3 \int \ln x \cdot x^{-4} dx$$

$$\text{Đặt } u = \ln x; dv = x^{-4} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^{-3}}{-3}$$

$$\text{Nên } \int f'(x) \ln x dx = -3 \int \ln x \cdot x^{-4} dx = -3 \left(\frac{\ln x}{-3x^3} + \int \frac{x^{-4}}{3} dx \right) = \frac{\ln x}{x^3} - \int x^{-4} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

Câu 150. Chọn D

$$\text{Theo đề bài ta có } \int f(x) \cdot e^{2x} dx = (x-1)e^x + C, \text{ suy ra } f(x) \cdot e^{2x} = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1) \cdot e^x$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x} + (x-1) \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$$

$$\text{Suy ra } K = \int f'(x) e^{2x} dx = \int (1-x) e^x dx = \int (1-x) d(e^x) = e^x(1-x) + \int e^x dx = (2-x)e^x + C.$$

Câu 151. Ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x \cdot e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \rightarrow f(x) = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$$\text{Theo đề: } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -1 + C \Leftrightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x \cdot e^x - e^x + 3$$

$$\Rightarrow f(1) = 3.$$

Câu 152. Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C_1.$$

$$\text{Vì } f(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x \Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.$$

Câu 153. Theo đề: $f'(x) = (x+1)e^x$. Nguyên hàm 2 vế ta được

$$\int f'(x) dx = \int (x+1)e^x dx \Leftrightarrow f(x) = (x+1)e^x - \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow 0 \cdot e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = xe^x.$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

$$\text{Suy ra } a=1; b=-1 \Rightarrow a+b=0.$$

Câu 154. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$.

Do đó $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = F(x; C)$.

$F(0) = 1 \Leftrightarrow -e^0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$. Vậy $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

Câu 155. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

Khi đó $\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$.

Vậy $ab = \frac{1}{8}$.

Câu 156. Tính $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+3} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \int \frac{dx}{x(x+3)} = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C = F(x, C)$.

Lại có $F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \ln 2 + C \right) + \left(-\ln 4 + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} + C \right) = 0 \Leftrightarrow 2C = \frac{7}{3} \ln 2$.

Suy ra $F(-1) + F(2) = \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + 2C = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$.

Câu 157. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} \\ v = x-1 \end{cases}$

$g(x) = \int \ln(x-1) dx = (x-1) \ln(x-1) - \int \frac{x-1}{x-1} dx = (x-1) \ln(x-1) - x + C$

Do $g(2) = 1 \Leftrightarrow 1 \ln 1 - 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow g(x) = (x-1) \ln(x-1) - x + 3$

Suy ra: $g(3) = 2 \ln 2 - 3 + 3 = 2 \ln 2 = \ln 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow 3a^2 - b^2 = -13$

Dạng 5. Sử dụng nguyên hàm để giải toán

Câu 158. Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{25}, \text{ nên ta có } C = -9. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}.$$

$$\text{Câu 159. Ta có } y' = xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + C}.$$

$$\text{Theo giả thiết } f(-1) = 1 \text{ nên } e^{\frac{-1}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } y = f(x) = e^{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}}. \text{ Do đó } f(2) = e^3.$$

$$\text{Câu 160. } f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C \quad (1) \text{ (Với } C \text{ là hằng số thực).}$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào (1) được } 2+C = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

$$T = f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2019} \right) = -1 + \frac{1}{2020}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a=1 \\ b=2020 \end{cases} \Rightarrow a-b = -2019 \text{ (Chọn đáp số sai).}$$

Câu 161. Chọn D

$$\text{Trên khoảng } (0; +\infty) \text{ ta có: } 2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^2.$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} \cdot f(x) \right)' = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \int \left(\sqrt{x} \cdot f(x) \right)' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx.$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C. (*)$$

Mà $f(1) = \frac{1}{2}$ nên từ (*) có: $\sqrt{1} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x}}{2}$.

Vậy $f(4) = \frac{4^2 \sqrt{4}}{2} = 16$.

Câu 162. Ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) = 2\sqrt{x+1} + C$

Mà $f(0) = 1$ nên $C = -2 \Rightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow f(3) = e^2 > 6$

Câu 163. Ta có: $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[2; 4] \Rightarrow f(x) \geq f(2)$ mà $f(2) = \frac{7}{4}$. Do đó: $f(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 [4f(x) + 1] = [f'(x)]^3$

$$\Leftrightarrow x \sqrt[3]{4f(x)+1} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}} = x.$$

Suy ra: $\int \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}} dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} \int \frac{d[4f(x)+1]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \frac{3}{8} \sqrt[3]{[4f(x)+1]^2} = \frac{x^2}{2} + C$.

$$f(2) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2 + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy: } f(x) = \frac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}(x^2-1)\right]^3} - 1}{4} \Rightarrow f(4) = \frac{40\sqrt{5}-1}{4}.$$

Câu 164. $f(x) + f'(x) = x$ (1).

Nhân 2 vế của (1) với e^x ta được $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = x \cdot e^x$.

Hay $[e^x \cdot f(x)]' = x \cdot e^x \Rightarrow e^x \cdot f(x) = \int x \cdot e^x dx$.

Xét $I = \int x \cdot e^x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$I = \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$. Suy ra $e^x f(x) = x \cdot e^x - e^x + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 1$ nên $C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x + 2}{e^x} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{e}$.

Câu 165. Ta có: $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]; x > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot [f'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x) \cdot f''(x)]$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x) \cdot f''(x)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó: } \int [f(x) \cdot f'(x)]' \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \frac{1}{x} + c_1.$$

$$\text{Vì } f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

$$\text{Nên } \int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) dx \Leftrightarrow \int f(x) \cdot d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + c_2. \text{ Vì } f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2 \ln 2 + 2.$$

Câu 166. Có $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x \Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = x^3 - 2x$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = \int (x^3 - 2x) dx = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$$

$$\text{Từ } f(0) = f'(0) = 1. \text{ Suy ra } C = 1. \text{ Vậy } f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$$

$$\text{Tiếp, có } 2f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Leftrightarrow (f^2(x))' = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2\right) dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

$$\text{Từ } f(0) = 1. \text{ Suy ra } C = 1. \text{ Vậy } f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1.$$

$$\text{Do đó } T = \frac{43}{15}$$

Câu 167. Chọn D

$$f(x) + \tan x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\Leftrightarrow [\sin x \cdot f(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Do đó } \int [\sin x \cdot f(x)]' dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow \sin x \cdot f(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Tính } I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} dx = x \tan x + \ln |\cos x|.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{x \cdot \tan x + \ln |\cos x|}{\sin x} = \frac{x}{\cos x} + \frac{\ln |\cos x|}{\sin x}.$$

$$a\pi\sqrt{3} + b \ln 3 = \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2 \ln 2}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + 2 \ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{5\pi\sqrt{3}}{9} - \ln 3. \text{ Suy ra } \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = a + b = -\frac{4}{9}.$$

Câu 168. Chọn E không có đáp án đúng

$$\text{Xét } f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-f'(x)}{f^2(x)} = 2x+4 \Rightarrow \int \frac{-f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+4) dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + 4x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right).$$

$$\text{Vậy } S = [f(0) + f(2) + \dots + f(2018)] + [f(1) + f(3) + \dots + f(2017)]$$

$$S = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2020}{2021} + \frac{1009}{2 \cdot 2020} \right].$$

Câu 169. Chọn A

Ta có với $\forall x \in (0; +\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x+1 > 0$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } [f'(x)]^2 = (x+1)f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1}.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{x+1} dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C.$$

$$\text{Vì } f(3) = \frac{4}{9} \text{ nên } C = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -2.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2 \right)^2, \text{ suy ra } f(8) = 49.$$

Câu 170. Chọn D

$$\text{Từ giả thiết ta có: } f'(x) = [f(x)]^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \text{ với mọi } x \in (1; 2].$$

$$\text{Do đó } f(x) \geq f(1) = 1 > 0 \text{ với mọi } x \in [1; 2].$$

Xét với mọi $x \in [1; 2]$ ta có:

$$(x^2 + 1)f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{x + \frac{1}{x}} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2}.$$

Câu 171. TH1: $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ trái giả thiết.

$$\text{TH2: } f(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) = -(2x+1) \cdot f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x+1) \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = -(x^2 + x + C).$$

$$\text{Ta có: } f(2) = \frac{1}{6} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2020} = \frac{2019}{2020}.$$

Câu 172. Ta có: $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ (*)

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$$\int (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Leftrightarrow \int (f(x))^2 d(f(x)) = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + C) \quad (1)$$

Theo đề bài $f(0) = 3$ nên từ (1) ta có $(f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9$

$$\Rightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)}.$$

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$.

CÁCH 1:

Vì $x^3 + 2x^2 + 2x + 9 = x^2(x+2) + 2(x+2) + 5 > 0, \forall x \in [-2; 1]$ nên $f(x)$ có đạo hàm trên $[-2; 1]$ và

$$f'(x) = \frac{3(3x^2 + 4x + 2)}{3\sqrt[3]{[3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)]^2}} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{\sqrt[3]{[3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)]^2}} > 0, \forall x \in [-2; 1].$$

$$\Rightarrow \text{Hàm số } y = f(x) \text{ đồng biến trên } [-2; 1] \Rightarrow \max_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}.$$

CÁCH 2:

$$f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)} = \sqrt[3]{3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}}.$$

Vì các hàm số $y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3$, $y = 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số

$y = \sqrt[3]{3\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{223}{9}}$ cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[-2; 1]$.

Vậy $\max_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{42}$.

Câu 173. $f(x) - xf'(x) = -2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 2x + 3$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2x + 3$.

Ta có $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C_1$, (1) với $C_1 \in \mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1) = 4$ theo giả thiết, nên thay $x = 1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1 = 0$, từ đó $f(x) = x^3 + 3x^2$. Vậy $f(2) = 20$.

Câu 174. Ta có $f(x) \cdot f'(x) = (2x + 1)\sqrt{1 + f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = (2x + 1)$.

Suy ra $\int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \int (2x + 1)dx \Leftrightarrow \int \frac{d(1 + f^2(x))}{2\sqrt{1 + f^2(x)}} = \int (2x + 1)dx \Leftrightarrow \sqrt{1 + f^2(x)} = x^2 + x + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = C \Leftrightarrow C = 3$.

Với $C = 3$ thì $\sqrt{1 + f^2(x)} = x^2 + x + 3 \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 3)^2 - 1}$. Vậy $f(1) = \sqrt{24}$.

Câu 175. Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$.

Suy ra $f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$. Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 3$ suy ra $C = 9$.

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$. Suy ra

$f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C$, cũng vì $f(0) = 3$ suy ra

$$f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9. \text{ Do đó } [f(1)]^2 = 28.$$

Câu 176. Ta có

$$\begin{aligned}(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) &= e^x \Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = e^x \\ \Leftrightarrow [(x+1)f(x)]' + [(x+1)f(x)]' &= e^x \Leftrightarrow e^x [(x+1)f(x)] + e^x [(x+1)f(x)]' = e^{2x} \\ \Leftrightarrow [e^x(x+1)f(x)]' &= e^{2x} \Rightarrow \int [e^x(x+1)f(x)]' dx = \int e^{2x} dx \Leftrightarrow e^x(x+1)f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C\end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$$

$$\text{Khi đó } f(2) = \frac{e^2}{6}.$$

Câu 177. Từ giả thiết, ta có $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx \text{ hay } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } f(1) = -2 \ln 2 \text{ nên } C = -1. \text{ Do đó } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| - 1.$$

$$\text{Với } x = 2 \text{ thì } \frac{2}{3} \cdot f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3. \text{ Suy ra } a = \frac{3}{2} \text{ và } b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = \frac{9}{2}.$$

Câu 178. Ta có $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C}$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \text{ nên } e^{\frac{4}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}. \text{ Suy ra } f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,794.$$

Câu 179. Từ $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$ ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}.$

Suy ra: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C.$

Ta có $\ln f(1) = \frac{2}{3} \sqrt{3 \cdot 1 + 1} + C \Leftrightarrow \ln 1 = \frac{4}{3} + C \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}.$

Nên $\ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}}.$

Vậy $f(5) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} - \frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}} \in (3; 4).$

Câu 180. Ta có $f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$

$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C.$

Vì $f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$

Vậy $f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$

Do đó $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}.$

Vậy $a = -1009; b = 2020.$ Do đó $b - a = 3029.$

Câu 181. $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2}.$

$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} dx \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} dx. \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} \right) dx \Leftrightarrow$
 $\frac{-1}{f(x)} = x^3 + x + \frac{1}{x} + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x^3 + x + \frac{1}{x}} + C.$

Do $f(1) = -\frac{1}{3} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 - x + 1} \right).$

$f(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1} \right); f(2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} \right); f(3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{7} \right); \dots; f(80) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6481} - \frac{1}{6321} \right).$

$f(1) + f(2) + \dots + f(80) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6481} = -\frac{3240}{6481}.$

Câu 182. Theo đề bài, ta có $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Rightarrow \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

Mà $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0 \end{cases}$. Suy ra: $f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}$.

Dạng 6. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm

Câu 183. Ta có $f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Lại có $f(0) = 2017 \Rightarrow \ln(1-0) + C_2 = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$.

$f(2) = 2018 \Rightarrow \ln(2-1) + C_1 = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$.

Do đó $S = [\ln(3-1) + 2018 - 2018][\ln(1-(-1)) + 2017 - 2017] = \ln^2 2$.

Câu 184. Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx = \int \frac{1}{\ln x - 1} d(\ln x) = \ln|\ln x - 1| + C$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|\ln x - 1| + C_1 & \text{khi } 0 < x < e \\ \ln|\ln x - 1| + C_2 & \text{khi } x > e \end{cases}$$

Do $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left|\ln \frac{1}{e^2} - 1\right| + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow \ln 3 + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$

Đồng thời $f(e^2) = 3 \Rightarrow \ln|\ln e^2 - 1| + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Khi đó: $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = \ln\left|\ln \frac{1}{e} - 1\right| + \ln 2 + \ln|\ln e^3 - 1| + 3 = 3(\ln 2 + 1)$.

Câu 185. $f(x) = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1, \forall x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_2, \forall x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_3, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$

Ta có $f(-3) = \frac{1}{3} \ln 4 + C_1, \forall x \in (-\infty; -2), f(0) = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2, \forall x \in (-2; 1),$

$f(3) = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + C_3, \forall x \in (1; +\infty),$

Theo giả thiết ta có $f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3}(1 + \ln 2)$.

$\Rightarrow f(-1) = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$.

Và $f(-3) - f(3) = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{10}$.

Vậy $f(-4) + f(-1) - f(4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - C_2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$.

Câu 186. Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x < -1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases} f(-2) + f(2) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 3 + C_1 + \ln \frac{1}{3} + C_3 = 0 \\ \ln 3 + C_2 + \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

Do đó $f(-3) + f(0) + f(4) = \ln 2 + C_1 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_3 = \ln \frac{6}{5} + 1$.

Câu 187. Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx = \int \frac{1}{\ln x - 1} d(\ln x) = \ln |\ln x - 1| + C$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln |\ln x - 1| + C_1 & \text{khi } 0 < x < e \\ \ln |\ln x - 1| + C_2 & \text{khi } x > e \end{cases}$.

Do $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln \left| \ln \frac{1}{e^2} - 1 \right| + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow \ln 3 + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$

Đồng thời $f(e^2) = 3 \Rightarrow \ln |\ln e^2 - 1| + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Khi đó: $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = \ln \left| \ln \frac{1}{e} - 1 \right| + \ln 2 + \ln |\ln e^3 - 1| + 3 = 3(\ln 2 + 1)$.

Câu 188. Ta có $F'(x) = f(x)$.

Tính $F'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$
 $= \frac{(2ax + b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}$.

Do đó $\frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$

$\Rightarrow 5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c = 20x^2 - 30x + 11$

$\Rightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ -3b + c = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 7$.

Câu 189. Ta có $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (ax^2 + bx + c + 2ax + b) \cdot e^x = (x-1)^2 \cdot e^x \forall x \in \mathbb{R}$.

Đồng nhất hệ số hai vế ta có:
$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-2 \\ c+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=5 \end{cases}$$
. Từ đó $S = a + 2b + c = 1 - 8 + 5 = -2$.

Câu 190. Ta có $f(x) = \left(\int f(x) dx \right)' \Rightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = (me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C)'$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = 3mx^2 e^{x^3+2} + ne^{2x} + 2nxe^{2x} - 2pe^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = 3mx^2 e^{x^3+2} + (n-2p)e^{2x} + 2nxe^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m=2 \\ 2n=2 \\ n-2p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{2}{3} \\ n=1 \\ p=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m+n+p = \frac{13}{6}.$$

Câu 191. Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 3mx^2 + 2(3m+n)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m=3 \\ 2(3m+n)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}.$$

Vậy $m.n = 2$.

Câu 192. Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$f(x) = F'(x) = -\frac{1}{b} [\cos 3x - 3(x-a)\sin 3x] + \frac{3}{c} \cos 3x = \frac{3}{b}(x-a)\sin 3x + \left(\frac{3}{c} - \frac{1}{b} \right) \cos 3x.$$

Đồng nhất hai vế của $f(x)$ ta được

$$\begin{cases} a=2 \\ \frac{3}{b}=1 \\ \frac{3}{c} - \frac{1}{b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=9 \end{cases}.$$

Vậy $ab+c = 2.3+9=15$.

Câu 193. Ta có $f(x) = \left(\int f(x) dx \right)' \Rightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = (me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C)'$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = 3mx^2 e^{x^3+2} + ne^{2x} + 2nxe^{2x} - 2pe^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x} = 3mx^2 e^{x^3+2} + (n-2p)e^{2x} + 2nxe^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m = 2 \\ 2n = 2 \\ n - 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = 1 \\ p = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m + n + p = \frac{13}{6}.$$

Câu 194. Ta có

$$F'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c) \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{(2ax + b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x + c-3b}{\sqrt{2x-3}}$$

$$\text{Vì } F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 5ax^2 + (3b-6a)x + c-3b = 20x^2 - 30x + 11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b-6a = -30 \\ c-3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } T = a + b + c = 4 - 2 + 5 = 7.$$

Câu 195. Chọn A

$$\int f(x) = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 2019^x (x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2019^x (x-2)^2 (x-1)(x+2) = 0$$

Vậy số điểm cực trị của $F(x)$ là 2.

Câu 196. Ta có $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow F'(x^2 + x) = f(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' = (2x+1)(x^2 + x)e^{(x^2+x)^2} ((x^2 + x)^2 - 4)$$

$$= (2x+1)x(x+1)e^{(x^2+x)^2} (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$$

$$= (2x+1)x(x+1)(x+2)(x-1)(x^2 + x + 2)e^{(x^2+x)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; -1; \frac{-1}{2}; 0; 1\right\}$$

$F'(x^2 + x) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên $F(x^2 + x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 197. + Tính $(F(x))' = ((ax^2 + bx + c)e^{-x})' = [-ax^2 + (2a-b)x + b-c]e^{-x} = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}.$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = -2 \\ 2a-b = -5 \\ b-c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ nên } F(x) = (-2x^2 + x - 1)e^{-x}.$$

+ Tính $F(0) = -1$ suy ra $f(F(0)) = f(-1) = 9e.$

Câu 198. Chọn

Ta có:
$$F(x) = \int \frac{(1 + \cos^2 x)(\sin x + \cot x)}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx + \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx$$

Gọi $A = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx$ và $B = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{(1 + \cos^2 x)\cot x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + 2\cot^2 x)\cot x}{\sin^2 x} dx = -\int (\cot x + 2\cot^3 x) \cdot d(\cot x) \\ &= -\left(\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2}\right) + C_1. \end{aligned}$$

$$B = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 + \cos^2 x)\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx$$

Đặt $t = \cos x$, suy ra $dt = -\sin x \cdot dx$. Khi đó:

$$\begin{aligned} B &= -\int \frac{1+t^2}{(t^2-1)^2} dt = -\int \frac{1+t^2}{(t-1)^2 \cdot (t+1)^2} dt = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right) + C_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) + C_2 \end{aligned}$$

Do đó:

$$F(x) = A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) - \left(\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2} \right) + C$$

Suy ra:

$$F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} \right) - \left(\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^4 x}{2} \right) + C = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} - \cot^2 x - \cot^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} = 0$$

Với điều kiện $\sin x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 + \cos x + \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2(1 - \cos^2 x) + \cos x(1 - \cos^2 x) + \cos^3 x = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ -2\cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Theo giả thiết $x \in (0; 4\pi)$ nên $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi;$

$$x = \alpha; x = \alpha + 2\pi;$$

$$x = \beta; x = \beta + 2\pi.$$

Khi đó tổng các nghiệm này sẽ lớn hơn 9π .

Câu 199. Ta có:

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} dx = 2 \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\
 &= 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C
 \end{aligned}$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$ với mọi $x \in (0; \pi)$.

Xét hàm số $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$ xác định và liên tục trên $(0; \pi)$.

$$F'(x) = f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$$

$$\text{Xét } F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên khoảng $(0; \pi)$, phương trình $F'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x		0	$\frac{\pi}{3}$	π
$F'(x)$		$+$	0	$-$
$F(x)$		$-\sqrt{3}+C$		

$$\max_{(0;\pi)} F(x) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + C$$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$.