



MỤC LỤC

TÍCH PHÂN HÀM ẨN	1
DẠNG 1: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM	1
DẠNG 2: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, GIẢI HỆ TÍCH PHÂN	10
DẠNG 3 : TÍCH PHÂN HÀM ẨN - PP ĐỔI BIẾN	12
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1: Ta gặp ở bài toán đơn giản loại	12
TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2: Bài tập thường cho ở dạng	18
MỘT SỐ CHÚ Ý ĐẶC SẮC VỚI TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN	20
CHÚ Ý 1: Với những hàm số có tính chẵn lẻ ta cần nhớ.....	20
CHÚ Ý 2: Cách đổi biến ngược đối với hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến.....	22
CHÚ Ý 3: Bài toán tích phân có dạng sau:	23
CHÚ Ý 4: Một số bài toán không theo khuôn mẫu sẵn thì yêu cầu học sinh phải có tư duy, có kỹ năng biến đổi để đưa về dạng quen thuộc.....	26
DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN.....	31
BÀI TẬP	46



TÍCH PHÂN HÀM ẨN

DẠNG 1: ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM

Ví dụ 1: Cho $\int_2^5 f(x)dx = 10$. Kết quả $\int_5^2 [2 - 4f(x)]dx$ bằng

A. 34.

B. 36.

C. 40.

D. 32.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_5^2 [2 - 4f(x)]dx = 2 \int_5^2 dx - 4 \int_5^2 f(x)dx = -2x \Big|_5^2 + 4 \int_2^5 f(x)dx = -2 \cdot (5 - 2) + 4 \cdot 10 = 34.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x)dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9) = -6$.B. $F(9) = 6$.C. $F(9) = 12$.D. $F(9) = -12$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^9 f(x)dx = F(x) \Big|_0^9 = F(9) - F(0) = 9 \Leftrightarrow F(9) = 12.$$

Nhận xét 1: Trong hai ví dụ trên ta thấy tích phân cần tính có cùng cận với tích phân ở giả thiết bài toán nên học sinh có thể dễ dàng nhận thấy và có thể làm được ngay. Trong một số trường hợp thì học sinh cần phải dùng tính chất để biến đổi cận tích phân hoặc phải dùng đến tích phân của hàm số chẵn, hàm số lẻ.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 f(x)dx = 6$. Tính

$$\text{giá trị của biểu thức } P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx.$$

A. $P = 4$.B. $P = 16$.C. $P = 8$.D. $P = 10$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_0^6 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$$



$$\Rightarrow P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx = \int_0^6 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx = 10 - 6 = 4.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^3 + x^5}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$. Tính $f(-1) + f(2)$.

A. $f(-1) + f(2) = -a - b$.

B. $f(-1) + f(2) = a - b$.

C. $f(-1) + f(2) = a + b$. **D.** $f(-1) + f(2) = b - a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(-x) = \frac{1}{(-x)^3 + (-x)^5} = -\frac{1}{x^3 + x^5} = -f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm số lẻ.

$$\text{Do đó } \int_{-2}^2 f'(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f'(x)dx = -\int_1^2 f'(x)dx.$$

$$\text{Suy ra } f(-1) - f(-2) = -f(2) + f(1) \Rightarrow f(-1) + f(2) = f(-2) + f(1) = a + b.$$

Nhận xét 2: Trong một số trường hợp đòi hỏi học sinh phải có kỹ năng phân tích, tổng hợp, kỹ năng biến đổi và phải có cái nhìn sâu hơn về bài toán.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \cdot \cos \pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = 123$.

B. $f(4) = \frac{2}{3}$.

C. $f(4) = \frac{3}{4}$.

D. $f(4) = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } F(t) = \int f(t)dt \Rightarrow F'(t) = f(t)$$

$$\text{Đặt } G(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt = F(x^2) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = [F(x^2)]' = 2x \cdot f(x^2) \quad (\text{Tính chất đạo hàm hợp: } f'[u(x)] = f'(u) \cdot u'(x))$$

$$\text{Mặt khác, từ gt: } G(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt = x \cdot \cos \pi x$$

$$\Rightarrow G'(x) = (x \cdot \cos \pi x)' = -x\pi \sin \pi x + \cos \pi x$$



$$\Rightarrow 2x.f(x^2) = -x\pi \sin \pi x + \cos \pi x \quad (1)$$

Tính $f(4) \Rightarrow$ ứng với $x = 2$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào (1)} \Rightarrow 4.f(4) = -2\pi \sin 2\pi + \cos 2\pi = 1 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) \cdot dt$. Tính $G'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. **B.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **C.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. **D.** $G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Lời giải:

Chọn B

Cách 1: Ta có: $F(t) = \int t \cdot \cos(x-t) dt \Rightarrow F'(t) = t \cdot \cos(x-t)$

$$\text{Đặt } G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) dt = F(x) - F(0)$$

$$\Rightarrow G'(x) = [F(x) - F(0)]' = F'(x) - F'(0) = [x \cos(x-x) - 0]' = x' = 1 \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Cách 2: Ta có $G(x) = \int_0^x t \cdot \cos(x-t) dt$. Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$, $dv = \cos(x-t) dx$ chọn

$$v = -\sin(x-t)$$

$$\Rightarrow G(x) = -t \cdot \sin(x-t) \Big|_0^x + \int_0^x \sin(x-t) dt = \int_0^x \sin(x-t) dt = \cos(x-t) \Big|_0^x = \cos 0 - \cos x = 1 - \cos x$$

$$\Rightarrow G'(x) = \sin x \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1; \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \text{ Tính } \int_0^1 f(x-1) dx.$$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Lấy đạo hàm theo hàm số y

$$f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Cho } y=0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$$

$$\text{Vậy } f(x) = \int f'(x)dx = x^3 + x + C \text{ mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \text{ suy ra } f(x) = x^3 + x + 1.$$

$$\int_0^1 f(x-1)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}.$$

DẠNG SAU: $f'(x) = g(x)$, $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = g(x)$ (Trong đó $g(x)$ là hàm số đã biết, n là số dương).

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A. $S = 1$.

B. $S = \ln 2$.

C. $S = \ln 4035$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$ nên $\begin{cases} f(x) = \ln|x-1| + 2017 & \text{khi } x < 1 \\ f(x) = \ln|x-1| + 2018 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } S = f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2018 - \ln 2 - 2017 = 1.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{2} & (1) \\ f(3) - f(2) = \int_2^3 f'(x)dx = \int_2^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_2^3 = \ln 2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (1)+(2), ta được } f(3) - f(2) + f(0) - f(-1) = 0 \Rightarrow S = 1.$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$, $f(0) = 1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$.

Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $3 + 5\ln 2$.

B. $-2 + 5\ln 2$.

C. $4 + 5\ln 2$.

D. $2 + 5\ln 2$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Từ $f'(x) = \frac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{3}{3x-1} dx = \begin{cases} \ln|3x-1| + C_1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + C_2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + C_1 = 1 \\ 0 + C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|3x-1| + 1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + 2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$.

Khi đó: $f(-1) + f(3) = \ln 4 + 1 + \ln 8 + 2 = 3 + \ln 32 = 3 + 5\ln 2$.

Cách 2: Ta có $\begin{cases} f(0) - f(-1) = f(x) \Big|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{4} \quad (1) \\ f(3) - f\left(\frac{2}{3}\right) = f(x) \Big|_{\frac{2}{3}}^3 = \int_{\frac{2}{3}}^3 f'(x) dx = \int_{\frac{2}{3}}^3 \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| \Big|_{\frac{2}{3}}^3 = \ln 8 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (2) - (1), ta được: $f(3) + f(-1) - f(0) - f\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 32 \Rightarrow f(-1) + f(3) = 3 + 5\ln 2$.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $4 + \ln 15$. B. $3 + \ln 15$. C. $2 + \ln 15$. D. $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx = \int \frac{2 \cdot \frac{1}{2} d(2x-1)}{2x-1} = \ln|2x-1| + c$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln|2x-1| + 1$.

$\begin{cases} f(-1) = \ln 3 + 1 \\ f(3) = \ln 5 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(-1) + f(3) = 2 + \ln 15$.

Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$.

Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $4 + \ln 5$. B. $2 + \ln 15$. C. $3 + \ln 15$. D. $\ln 15$.

Lời giải



Chọn C

Cách 1: • Trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$: $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(2x-1) + C_1$.

Lại có $f(1) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$: $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(1-2x) + C_2$.

Lại có $f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$.

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2dx}{2x-1} = \ln|2x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{3} & (1) \\ f(3) - f(1) = \int_1^3 f'(x) dx = \int_1^3 \frac{2dx}{2x-1} = \ln|2x-1| \Big|_1^3 = \ln 5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3) - f(1) - f(0) + f(-1) = \ln 15 \Rightarrow f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$, $f(0) = 1$ và

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $3 + 5\ln 2$.

B. $-2 + 5\ln 2$.

C. $4 + 5\ln 2$.

D. $2 + 5\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Cách 1: Từ } f'(x) = \frac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{3}{3x-1} dx = \begin{cases} \ln|3x-1| + C_1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + C_2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + C_1 = 1 \\ 0 + C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|3x-1| + 1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + 2 & \text{khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}.$$

Khi đó: $f(-1) + f(3) = \ln 4 + 1 + \ln 8 + 2 = 3 + \ln 32 = 3 + 5\ln 2$.



Cách 2: Ta có
$$\begin{cases} f(0) - f(-1) = f(x) \Big|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{4} & (1) \\ f(3) - f\left(\frac{2}{3}\right) = f(x) \Big|_{\frac{2}{3}}^3 = \int_{\frac{2}{3}}^3 f'(x) dx = \int_{\frac{2}{3}}^3 \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| \Big|_{\frac{2}{3}}^3 = \ln 8 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) - (1), ta được: $f(3) + f(-1) - f(0) - f\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 32 \Rightarrow f(-1) + f(3) = 3 + 5\ln 2$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$; $f(-3) = 0$; $f(0) = 1$ và $f(3) = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = f(-4) + f(-1) + f(4)$.

A. $P = 3 + \ln \frac{3}{25}$. **B.** $P = 3 + \ln 3$. **C.** $P = 2 + \ln \frac{5}{3}$. **D.** $P = 2 - \ln \frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \Rightarrow f(x) = \int \frac{4dx}{x^2 - 4} = \int \frac{4dx}{(x-2)(x+2)} = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_2 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_3 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 5 + C_1 = 0 \\ 0 + C_2 = 1 \\ \ln \frac{1}{5} + C_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\ln 5 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 2 + \ln 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \ln 5 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 1 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 2 + \ln 5 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Khi đó $P = f(-4) + f(-1) + f(4) = \ln 3 - \ln 5 + \ln 3 + 1 + \ln \frac{1}{3} + 2 + \ln 5 = 3 + \ln 3$.

Nhận xét 3: Những bài tập kiểu này học sinh cần chú ý, nếu làm theo cách một thì hằng số ở nguyên hàm trên mỗi khoảng có thể khác nhau. Nếu làm theo cách hai thì việc chọn cận khi lấy tích phân có làm học sinh khó khăn, chắc chắn cần sự hướng dẫn tỷ mỉ của người thầy khi học.



Ví dụ 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f'(x) + 2f(x) = 0. \text{ Biết } f(1) = 1, \text{ tính } f(-1).$$

- A.** $f(-1) = e^{-2}$. **B.** $f(-1) = e^3$. **C.** $f(-1) = e^4$. **D.** $f(-1) = 3$.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi:

$$f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 -2 dx \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{df(x)}{f(x)} = -4 \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_{-1}^1 = -4$$

$$\ln \frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f(-1)} = e^{-4} \Leftrightarrow f(-1) = f(1) \cdot e^4 = e^4.$$

Ví dụ 15: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và

$$f(0) = -\frac{1}{2}. \text{ Biết rằng tổng } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b} \text{ với}$$

$(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** $\frac{a}{b} < -1$. **B.** $\frac{a}{b} > 1$. **C.** $a + b = 1010$. **D.** $b - a = 3029$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Do đó } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}.$$

$$\text{Vậy } a = -1009; b = 2020. \text{ Do đó } b - a = 3029.$$



Ví dụ 16: Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn:

$$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt, \quad g(x) = f^2(x). \text{ Tính } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx.$$

A. $\frac{1011}{2}.$

B. $\frac{1009}{2}.$

C. $\frac{2019}{2}.$

D. 505.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = 2018 f(x) = 2018 \sqrt{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = 2018 \int_0^t dx \Rightarrow 2 \left(\sqrt{g(x)} \right) \Big|_0^t = 2018x \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow 2 \left(\sqrt{g(t)} - 1 \right) = 2018t \quad (\text{do } g(0) = 1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{g(t)} = 1009t + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)} dt = \left(\frac{1009}{2} t^2 + t \right) \Big|_0^1 = \frac{1011}{2}.$$

Ví dụ 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

A. $T = 2 + 9 \ln 2.$

B. $T = 9.$

C. $T = \frac{1}{2} + 9 \ln 2.$

D. $T = 2 - 9 \ln 2.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9 \Rightarrow 9(f''(x) - 1) = -[f'(x) - x]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế } -\int \frac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} dx = \int \frac{1}{9} dx \Rightarrow \frac{1}{f'(x) - x} = \frac{x}{9} + C.$$

$$\text{Do } f'(0) = 9 \text{ nên } C = \frac{9}{9} \text{ suy ra } f'(x) - x = \frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{x+1} + x$$

$$\text{Vậy } T = f(1) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{9}{x+1} + x \right) dx = \left(9 \ln|x+1| + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 9 \ln 2 + \frac{1}{2}.$$



Nhận xét 4: ở ba ví dụ sau ta nhận thấy bài toán đã có vẻ phức tạp hơn và yêu cầu học sinh phải nhớ dạng toán và cách biến đổi để đưa về dạng này. Bài tập ở mức vận dụng.

DẠNG 2: ỨNG DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, GIẢI HỆ TÍCH PHÂN

Ví dụ 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x)dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

- A. $F(9) = -6$. B. $F(9) = 6$. C. $F(9) = 12$. D. $F(9) = -12$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^9 f(x)dx = F(x)\Big|_0^9 = F(9) - F(0) = 9 \Leftrightarrow F(9) = 12.$$

Ví dụ 19: Cho $I = \int_0^2 f(x)dx = 3$. Khi đó $J = \int_0^2 [4f(x) - 3]dx$ bằng:

- A. 2. B. 6. C. 8. D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } J = \int_0^2 [4f(x) - 3]dx = 4 \int_0^2 f(x)dx - 3 \int_0^2 dx = 4.3 - 3x\Big|_0^2 = 6.$$

Ví dụ 20: Cho $\int_2^4 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 g(x)dx = 5$. Tính $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)]dx$

- A. $I = 5$. B. $I = 15$. C. $I = -5$. D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Có: } I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)]dx = 3 \int_2^4 f(x)dx - 5 \int_2^4 g(x)dx = 5.$$

Ví dụ 21: Cho $\int_2^5 f(x)dx = 10$. Kết quả $\int_5^2 [2 - 4f(x)]dx$ bằng:

- A. 34. B. 36. C. 40. D. 32.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_5^2 [2 - 4f(x)]dx = 2 \int_5^2 dx - 4 \int_5^2 f(x)dx = -2x\Big|_5^2 + 4 \int_2^5 f(x)dx = -2.(5-2) + 4.10 = 34.$$



Ví dụ 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx = 7$ và $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx.$$

A. $P = 7$.B. $P = -4$.C. $P = 4$.D. $P = 10$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^{10} f(x)dx = 7 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = 7$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = 7 - 3 = 4.$$

Vậy $P = 4$.

Ví dụ 23: Cho $y = f(x)$, $y = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và $\int_0^2 g(x).f'(x)dx = 2$, $\int_0^2 g'(x).f(x)dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(x).g(x)]' dx$.

A. $I = -1$.B. $I = 6$.C. $I = 5$.D. $I = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét tích phân } I = \int_0^2 [f(x).g(x)]' dx = \int_0^2 [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)] dx$$

$$= \int_0^2 g'(x).f(x)dx + \int_0^2 g(x).f'(x)dx = 5.$$

Ví dụ 24: Cho $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]dx = 1$, $\int_1^2 [2f(x) - g(x)]dx = -3$. Khi đó, $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{11}{7}$.B. $-\frac{5}{7}$.C. $\frac{6}{7}$.D. $\frac{16}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } a = \int_1^2 f(x)dx, b = \int_1^2 g(x)dx, \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ 2a - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{7} \\ b = \frac{11}{7} \end{cases}$$



$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x) dx = -\frac{5}{7}.$$

DẠNG 3 : TÍCH PHÂN HÀM ẨN - PP ĐỔI BIẾN

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 1: Ta gặp ở bài toán đơn giản loại

Cho $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] \cdot dx$, tính $\int_a^b f(x) \cdot dx$. Hoặc cho $\int_a^b f(x) \cdot dx$, tính $\int_a^b u'(x) \cdot f[u(x)] \cdot dx$.

Đối với loại bài tập này chúng ta sẽ đổi biến $t = u(x)$ và lưu ý cho học sinh tích phân của hàm số thì không phụ thuộc vào biến số.

Ví dụ 25: Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$

A. 16.

B. 4.

C. 32.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $\int_0^2 f(2x) dx$ ta có

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$; khi $x = 2$ thì $t = 4$.

Do đó $\int_0^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

Ví dụ 26: Nếu $\int_0^6 f(x) dx = 12$ thì $\int_0^2 f(3x) dx$ bằng

A. 6.

B. 36.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 6$

Khi đó: $\int_0^2 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$.

Ví dụ 27: Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng:

A. 2.

B. 1.

C. -1.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$, $x = 2 \Rightarrow t = 5$.



Khi đó: $\int_1^2 f(x^2+1)xdx = \frac{1}{2} \int_2^5 f(t)dt \Rightarrow \int_2^5 f(t)dt = 2 \int_1^2 f(x^2+1)xdx = 4.$

Mà tích phân không phụ thuộc vào biến nên: $I = \int_2^5 f(x)dx = \int_2^5 f(t)dt = 4.$

Ví dụ 28: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x)dx = 9$. Tính tích phân

$$\int_0^2 [f(1-3x)+9]dx.$$

A. 27.

B. 21.

C. 15.

D. 75.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 1 - 3x \Rightarrow dt = -3dx$.

Với $x = 0 \rightarrow t = 1$ và $x = 2 \rightarrow t = -5$.

Ta có $\int_0^2 [f(1-3x)+9]dx = \int_0^2 f(1-3x)dx + \int_0^2 9dx = \int_1^{-5} [f(t)] \frac{dt}{-3} + 9x \Big|_0^2$
 $= \frac{1}{3} \int_{-5}^1 [f(x)]dx + 18 = \frac{1}{3} \cdot 9 + 18 = 21.$

Ví dụ 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)dx = 10$. Tính $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

A. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{5}{2}.$

B. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 20.$

C. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 10.$

D. $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 5.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Ta có: $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2 \cdot \int_0^1 f(t)dt = 2 \cdot 10 = 20.$

Ví dụ 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ và $\int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx = 8$. Tích phân $I = \int_1^2 xf(x)dx$

bằng:

A. $I = 16.$

B. $I = 2.$

C. $I = 8.$

D. $I = 4$



Lời giải

Chọn D

$$I = \int_0^3 f(\sqrt{x+1}) dx = 8. \text{ Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = dx;$$

$$\text{đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=3 \Rightarrow t=2.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 2t f(t) dt = 8 \Rightarrow \int_1^2 t f(t) dt = 4. \text{ Vậy } I = \int_1^2 x f(x) dx = 4.$$

Ví dụ 31: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 4$. D. $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx; \text{ đổi cận: } x=1 \Rightarrow t=1, x=4 \Rightarrow t=2$$

$$I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 f(t) 2dt = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ví dụ 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3$.

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

- A. $I = -2$. B. $I = 6$. C. $I = 9$. D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\bullet \text{ Xét } I = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 6, \text{ đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=1 \Rightarrow t=1; x=16 \Rightarrow t=4 \text{ nên } I = 2 \int_1^4 f(t) dt = 6 \Rightarrow \int_1^4 f(t) dt = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\bullet J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 3, \text{ đặt } \sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$$



Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=0$; $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1 \Rightarrow J = \int_0^1 f(u) du = 3$

Vậy $I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 3 + 3 = 6$.

Ví dụ 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x) dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x) dx = 14$. Tính

$$\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx.$$

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $\int_0^1 f(2x) dx = 2$. Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $x=0 \Rightarrow u=0$; $x=1 \Rightarrow u=2$.

Nên $2 = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) du \Rightarrow \int_0^2 f(u) du = 4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x) dx = 14$. Đặt $v = 6x \Rightarrow dv = 6dx$; $x=0 \Rightarrow v=0$; $x=2 \Rightarrow v=12$.

Nên $14 = \int_0^2 f(6x) dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v) dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v) dv = 84$.

+ Xét $\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx + \int_0^2 f(5|x|+2) dx$.

* Tính $I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx$.

Đặt $t = 5|x|+2$. Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x+2 \Rightarrow dt = -5dx$; $x=-2 \Rightarrow t=12$; $x=0 \Rightarrow t=2$.

$$I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16.$$

* Tính $I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2) dx$.

Đặt $t = 5|x|+2$. Khi $0 < x < 2$, $t = 5x+2 \Rightarrow dt = 5dx$; $x=2 \Rightarrow t=12$; $x=0 \Rightarrow t=2$.



$$I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = 32.$$

Hoặc: Do hàm $f(5|x|+2)$ là hàm số chẵn nên

$$\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = 2 \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx = 2.16 = 32.$$

Ví dụ 34: Biết $\int_{-1}^{11} f(x) dx = 18$. Tính $I = \int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1)) dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = 7$.

C. $I = 8$

D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 3x^2 - 1 \Rightarrow dt = 6x dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = -1$, $x = 2 \Rightarrow t = 11$

$$I = \int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1)) dx = \int_0^2 2x dx + \int_0^2 xf(3x^2 - 1) dx = 4 + \frac{1}{6} \int_{-1}^{11} f(t) dt = 4 + \frac{1}{6} \cdot 18 = 7$$

Ví dụ 35: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x) dx = 8$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2) dx$

A. 4.

B. 16.

C. 8.

D. 32.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x^2 = 2t \Rightarrow 2x dx = 2dt \Rightarrow x dx = dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 1$.

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 f(2t) dt = 8.$$

Ví dụ 36: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x) dx = 5$.

$$\text{Tính } I = \int_1^3 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{9}{2}$.

D. $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(a+b-x) = f(x), \forall x \in [a; b]. \text{ Khi đó } \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

Chứng minh:

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow dx = -dt$, với $x \in [a; b]$. Đổi cận: khi $x = a \Rightarrow t = b$; khi $x = b \Rightarrow t = a$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_a^b xf(x)dx &= \int_a^b xf(a+b-x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(t)dt \\ &= \int_a^b (a+b-t)f(t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \\ \Rightarrow 2 \int_a^b xf(x)dx &= (a+b) \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \boxed{\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx}. \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất trên với $a = 1, b = 3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x) = f(x)$.

$$\text{Khi đó } \int_1^3 xf(x)dx = \frac{1+3}{2} \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}.$$

Cách 2: Đổi biến trực tiếp:

Đặt $t = 4-x$, với $x \in [1; 3]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^3 xf(x)dx &= \int_1^3 xf(4-x)dx = \int_1^3 (4-t)f(t)dt = 4 \int_1^3 f(t)dt - \int_1^3 t.f(t)dt \\ \Rightarrow 5 &= 4 \int_1^3 f(t)dt - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn $f(4-x) = f(x), \forall x \in [1; 3]$ và

$$\int_1^3 xf(x)dx = -2. \text{ Giá trị } \int_1^3 f(x)dx \text{ bằng}$$

A. 2.

B. -1.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } I = \int_1^3 xf(x)dx \text{ (1).}$$

Đặt $x = 4 - t$, ta có $dx = -dt$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$, $x = 3 \Rightarrow t = 1$.

$$\text{Suy ra } I = \int_1^3 (4-t)f(4-t)dt = \int_1^3 (4-t)f(t)dt, \text{ hay } I = \int_1^3 (4-x)f(x)dx \quad (2).$$

$$\text{Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được } 2I = \int_1^3 4f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{I}{2} = -1.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN DẠNG 2: Bài tập thường cho ở dạng

Tính $\int_a^b f(x)dx$, biết hàm số $f(x)$ thỏa mãn:

$$A.f(x) + B.u'.f(u) + C.f(a+b-x) = g(x).$$

Đối với loại bài tập này, trước khi lấy tích phân hai vế ta cần chú ý rằng:

+ Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases} \text{ thì } \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x)dx.$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases} \text{ thì } \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x)dx.$$

+ Học sinh có thể nhớ công thức hoặc thực hiện hai lần đổi biến khác nhau như dạng 1.

Ví dụ 38: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính

$$\int_0^1 f(x)dx$$

A. 2.

B. 4.

C. -1.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Dùng công thức)

$$\text{Biến đổi } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x) - 2.3x^2.f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \text{ với } A=1,$$

$$B=-2.$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 \frac{-6}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi – nếu không nhớ công thức)



$$\text{Từ } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

Đặt $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$; Với $x = 0 \Rightarrow u = 0$ và $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

Khi đó $\int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx$ thay vào (*), ta được:

$$\int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Ví dụ 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(2-x) = 2x$. Tính

giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $I = -4$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: (Dùng công thức)

Với $f(x) + f(2-x) = 2x$ ta có $A = 1$; $B = 1$, suy ra:

$$I = \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_0^2 2x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) + f(2-x) = 2x \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 2x dx = 4 \quad (*)$$

Đặt $u = 2-x \Rightarrow du = -dx$; Với $x = 0 \Rightarrow u = 2$ và $x = 2 \Rightarrow u = 0$.

$$\text{Suy ra } \int_0^2 f(2-x) dx = \int_2^0 f(u) du = - \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{Thay vào } (*), \text{ ta được } 2 \int_0^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Ví dụ 40: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$.

Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = 15$.

Lời giải



Chọn C

Cách 1: (Dùng công thức – Dạng 2)

Với: $f(x) + (2x)f(x^2 - 2) + 3f(1 - x) = 4x^3$. Ta có:

$A = 1; B = 1; C = 3$ và $u = x^2 - 2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(-1) = -1 \\ u(2) = 2 \end{cases}$. Khi đó áp dụng công thức có:

$$I = \int_{-1}^2 f(x) = \frac{1}{1+1+3} \int_{-1}^2 4x^3 dx = \frac{x^4}{5} \Big|_{-1}^2 = 3.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến – nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1 - x) = 4x^3$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_{-1}^2 2x.f(x^2 - 2) dx + 3 \int_{-1}^2 f(1 - x) dx = \int_{-1}^2 4x^3 dx \quad (*)$$

+) Đặt $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x dx$; với $x = -1 \Rightarrow u = -1$ và $x = 2 \Rightarrow u = 2$.

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^2 2x.f(x^2 - 2) dx = \int_{-1}^2 f(u) du = \int_{-1}^2 f(x) dx \quad (1)$$

+) Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$; Với $x = -1 \Rightarrow t = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = -1$.

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^2 f(1 - x) dx = \int_{2}^{-1} f(t) dt = \int_{-1}^2 f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{Thay (1), (2) vào (*) ta được: } 5 \int_{-1}^2 f(x) dx = 15 \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx = 3.$$

MỘT SỐ CHÚ Ý ĐẶC SẮC VỚI TÍCH PHÂN HÀM ẨN ĐỔI BIẾN

CHÚ Ý 1: Với những hàm số có tính chẵn lẻ ta cần nhớ

Nếu hàm $f(x)$ CHẼN thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ 2. Nếu hàm $f(x)$ LẼ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Ví dụ 41: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và

$$\int_1^2 f(-2x) dx = 4 \quad I = \int_0^4 f(x) dx$$

. Tính .

A. $I = -10$.

B. $I = -6$.

C. $I = 6$.

D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn B



Cách1: Sử dụng công thức: $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} f(ax)dx$ và tính chất $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

với $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a; a]$.

Áp dụng, ta có:

$$\bullet 4 = \int_1^2 f(-2x)dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{-4} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^{-2} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x)dx = 8.$$

$$\bullet 2 = \int_{-2}^0 f(-x)dx = -\int_2^0 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 2$$

$$\text{Suy ra: } 0 = \int_{-4}^4 f(x)dx = \int_{-4}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx \\ \Leftrightarrow 0 = 8 + \left(\int_{-2}^2 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx \right) + I \Leftrightarrow 0 = 8 + (0 - 2) + I \Leftrightarrow I = -6.$$

$$\int_{-2}^0 f(-x)dx = 2$$

Cách2: Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x)dx = 2$.
Đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 0$ thì $t = 0$ do đó

$$\int_{-2}^0 f(-x)dx = -\int_2^0 f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = 2$$

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x)$.

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(-2x)dx = -\int_1^2 f(2x)dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x)dx = -4$$

$$\text{Xét } \int_1^2 f(2x)dx$$

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$. Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$ do đó

$$\int_1^2 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t)dt = -4 \Rightarrow \int_2^4 f(t)dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x)dx = -8$$

$$\text{Do } I = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = 2 - 8 = -6.$$

Ví dụ 42: Cho hàm số chẵn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+2^x}dx = 8$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_{-1}^1 \frac{f(2x)}{1+2^x}dx = 8 \Leftrightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x}dx = 16.$$



$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx, \text{ khi đó } 16 = I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{1 + \sqrt{2}^x} dx = - \int_2^{-2} \frac{f(-t)}{1 + \sqrt{2}^{-t}} dt = \int_2^{-2} \frac{\sqrt{2}^t f(t)}{1 + \sqrt{2}^t} dt.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{1 + \sqrt{2}^x} dx + \int_2^{-2} \frac{\sqrt{2}^x f(x)}{1 + \sqrt{2}^x} dx = \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx. \text{ Vậy } \int_0^2 f(x) dx = 16.$$

Ví dụ 43: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1; 1]$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$. Kết quả

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx \text{ bằng}$$

A. $I = 1$.

B. $I = 3$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = I_1 + I_2$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx. \text{ Đặt } x = -t \Rightarrow dx = -dt, \text{ đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0, x = -1 \Rightarrow t = 1$$

$$I_1 = \int_1^0 \frac{f(x)}{1 + e^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(x)}{1 + e^t} dt. \text{ Lại có } \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1 + e^t} dt = \int_0^1 \frac{e^x \cdot f(x)}{1 + e^x} dx.$$

Suy ra:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^t \cdot f(t)}{1 + e^t} dt + \int_0^1 \frac{f(t)}{1 + e^t} dt = \int_0^1 \frac{(1 + e^t) \cdot f(t)}{1 + e^t} dt = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = 1.$$

CHÚ Ý 2: Cách đổi biến ngược đối với hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến.

Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)] = x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$. Hãy tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$.

Cách giải: Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y) dy$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = a \rightarrow g(y) = a \Leftrightarrow y = \alpha \\ x = b \rightarrow g(y) = b \Leftrightarrow y = \beta \end{cases} \text{ Suy ra } I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} yg(y) dy$$

Ví dụ 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_0^2 f(x) dx$$



- A. $I = 2$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = y^3 + y \Rightarrow dx = (3y^2 + 1)dy$$

$$\begin{array}{ll} \text{Đổi cận} & \begin{cases} x=0 \rightarrow y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y=0 \\ x=2 \rightarrow y^3 + y = 2 \Leftrightarrow y=1 \end{cases} \end{array} \quad \text{Khi đó}$$

$$I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1)dy = \int_0^1 (3y^3 + y)dy = \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 45: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

tích phân $I = \int_0^5 f(x)dx$.

- A. $I = \frac{5}{4}$. B. $I = \frac{5}{2}$. C. $I = \frac{5}{12}$. D. $I = \frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = 2y^3 - 3y^2 + 6y \Rightarrow dx = 6(y^2 - y + 1)dy.$$

$$\text{Đổi cận: với } x=0 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow y=0 \text{ và } x=5 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 5 \Leftrightarrow y=1.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 y \cdot 6(y^2 - y + 1)dy = 6 \int_0^1 (y^3 - y^2 + y)dy = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x + f^3(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

tích phân $I = \int_{-2}^1 f(x)dx$.

- A. $I = \frac{7}{4}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{7}{3}$. D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = -y^3 - 2y + 1 \Rightarrow dx = (-3y^2 - 2)dy.$$

$$\text{Đổi cận: Với } x=-2 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = -2 \Leftrightarrow y=1; x=1 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow y=0.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_1^0 y(-3y^2 - 2)dy = \frac{7}{4}.$$

CHÚ Ý 3: Bài toán tích phân có dạng sau:



Bài toán: Cho $f(x) \cdot f(a+b-x) = k^2$, khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \frac{b-a}{2k}$

Chứng minh:

$$\text{Đặt } t = a+b-x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{k^2}{f(t)} \end{cases} \text{ và } x=a \Rightarrow t=b; x=b \Rightarrow t=a.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} = \int_a^b \frac{dx}{k+\frac{k^2}{f(t)}} = \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k+f(x)}.$$

$$2I = \int_a^b \frac{dx}{k+f(x)} + \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k+f(x)} = \frac{1}{k} \int_a^b dx = \frac{1}{k}(b-a) \Rightarrow I = \frac{b-a}{2k}.$$

Ví dụ 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với

$$\forall x \in [0;1]. \text{ Tính giá trị } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 1+f(x) = f(x)f(1-x) + f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{1}{f(1-x)+1}$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}.$$

$$\text{Đặt } t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt. \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_1^0 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(1-x)} = \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^1 dx = 1 \text{ hay } 2I = 1. \text{ Vậy } I = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 48: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x) > 0$ và $f(0) \cdot f(2018-x) = 1$. Giá trị của

$$\text{tích phân } I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1+f(x)}$$

A. $I = 2018$.

B. $I = 0$

C. $I = 1009$

D. 4016



Lời giải

Chọn C

$$\text{ta có } I = \int_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)} dx = \frac{2018-0}{2.1} = 1009.$$

Ví dụ 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0$ khi $x \in [0; 5]$. Biết

$$f(x) \cdot f(5-x) = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^5 \frac{dx}{1+f(x)}.$$

A. $I = \frac{5}{4}.$

B. $I = \frac{5}{3}.$

C. $I = \frac{5}{2}.$

D. $I = 10.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } x = 5 - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 5; \quad x = 5 \Rightarrow t = 0$$

$$I = -\int_5^0 \frac{dt}{1+f(5-t)} = \int_0^5 \frac{f(t)dt}{1+f(t)} \quad (\text{do } f(5-t) = \frac{1}{f(t)})$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^5 dt = 5 \Rightarrow I = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 50: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx = 5$.

$$\text{Tính tích phân } \int_1^3 f(x)dx.$$

A. $\frac{5}{2}.$

B. $\frac{7}{2}.$

C. $\frac{9}{2}.$

D. $\frac{11}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = 4 - x \Rightarrow dt = -dx \text{ và } x = 1 \Rightarrow t = 3; \quad x = 3 \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Khi đó: } 5 = \int_1^3 xf(x)dx = \int_1^3 (4-t)f(4-t)dt = \int_1^3 (4-x)f(4-x)dx = \int_1^3 (4-x)f(x)dx.$$

$$\text{Suy ra: } 10 = \int_1^3 xf(x)dx + \int_1^3 (4-x)f(x)dx = 4 \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}.$$



CHÚ Ý 4: Một số bài toán không theo khuôn mẫu sẵn thì yêu cầu học sinh phải có tư duy, có kỹ năng biến đổi để đưa về dạng quen thuộc.

Ví dụ 51: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, đồng biến trên đoạn $[1; 4]$

và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$, tính

$$I = \int_1^4 f(x) dx ?$$

A. $I = \frac{1186}{45}$.

B. $I = \frac{1174}{45}$.

C. $I = \frac{1222}{45}$.

D. $I = \frac{1201}{45}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)} = f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}, \forall x \in [1; 4].$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C. \text{ Mà } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^4 f(x) dx = \frac{1186}{45}.$$

Ví dụ 52: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ và

$$f(0) = 1. \text{ Tích phân } \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

B. $\frac{15}{4}$.

C. $\frac{45}{8}$.

D. $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3f'(x) \cdot e^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} = 2x \cdot e^{x^2 + 1}$$

$$\text{Suy ra } e^{f^3(x)} = e^{x^2 + 1} + C. \text{ Mặt khác, vì } f(0) = 1 \text{ nên } C = 0.$$

$$\text{Do đó } e^{f^3(x)} = e^{x^2 + 1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{3}{8} \left[(x^2 + 1) \sqrt[3]{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}.$$



Ví dụ 53: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$.

- A. 2. B. -2. C. $-\frac{7}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x) dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = f(0) = 1, x = 1 \Rightarrow t = f(1) = 2$.

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Ví dụ 54: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0;1)$. Biết

rằng $f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \forall x \in (0;1)$. Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx \text{ theo } a \text{ và } b.$$

- A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$. B. $I = \frac{3b+a}{4ab}$. C. $I = \frac{3b-a}{4ab}$. D. $I = \frac{3a-b}{4ab}$.

Lời giải

Chọn D

$\forall x \in (0;1)$ ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2 f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)} \right)'$$

$$\text{Tính } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 4 \sin x \cdot \cos x}{f^2(\sin x)} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx, \text{ đổi cận } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 + 4t}{f^2(t)} dt = \frac{t^2}{f(t)} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}.$$

Ví dụ 55: Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x)\sqrt{x^2+1} &= 2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} - \sqrt{f(0)+1} &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} = 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = 3. \end{aligned}$$

Ví dụ 56: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^5 f(x) dx = 4$, $f(5) = 3$, $f(2) = 2$. Tính

$$I = \int_1^2 x^3 f'(x^2+1) dx$$

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx.$$

$$x=1 \Rightarrow t=2; \quad x=2 \Rightarrow t=5. \text{ Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_2^5 (t-1) f'(t) dt.$$

$$\text{Đặt } u = t-1 \Rightarrow du = dt; \quad dv = f'(t) dt, \text{ chọn } v = f(t).$$

$$I = \frac{1}{2} (t-1) f(t) \Big|_2^5 - \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt = \frac{1}{2} (4f(5) - f(2)) - 2 = 3.$$

Ví dụ 57: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính

$$\text{tích phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$



A. $I = 3 + 2\ln^2 2$.

B. $I = 2\ln^2 2$.

C. $I = \ln^2 2$.

D. $I = 2\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right] dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Xét } K = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } 2\sqrt{x}-1=t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt.$$

$$\Rightarrow K = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Xét } M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^4 = 2\ln^2 2.$$

$$\text{Do đó } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + 2\ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x) dx = 2\ln^2 2.$$

Ví dụ 58: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$.

$$\text{Tính tích phân } \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

A. $I = 3$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = 1, I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1.$$

$$\square \text{ Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cdot \cos x dx = 2 \sin^2 x \cdot \cot x dx = 2t \cdot \cot x dx.$$

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) \cdot \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx.$$



$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx = 2I_1 = 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t dt = dx.$$

x	1	16
t	1	4

$$I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2} 2t dt = 2 \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2}$$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 59: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $I = \frac{\pi}{4}.$

B. $I = \frac{\pi}{6}.$

C. $I = \frac{\pi}{20}.$

D. $I = \frac{\pi}{16}.$

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ nên ta có

$$\int_0^1 [4x.f(x^2) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow \int_0^1 4x.f(x^2) dx + \int_0^1 3f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (1).$$

$$\text{Mà } \int_0^1 4x.f(x^2) dx = 2 \int_0^1 f(x^2) d(x^2) \xrightarrow{t=x^2} 2 \int_0^1 f(t) dt = 2I$$

$$\text{và } \int_0^1 3f(1-x) dx = -3 \int_0^1 f(1-x) d(1-x) \xrightarrow{u=1-x} 3 \int_0^1 f(u) du = 3I$$

$$\text{Đồng thời } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó, } (1) \Leftrightarrow 2I + 3I = \frac{\pi}{4} \text{ hay } I = \frac{\pi}{20}.$$



Ví dụ 60: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5} \text{ và } \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{3}{5}.$

B. $I = \frac{1}{4}.$

C. $I = \frac{3}{4}.$

D. $I = \frac{1}{5}.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2t dt$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^1 t \cdot f(t) dt = \frac{1}{5}. \text{ Do đó } \Leftrightarrow \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5}$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{x^2}{2} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{3}{5}$$

$$\text{Ta tính được } \int_0^1 (3x^2)^2 dx = \frac{9}{5}.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 3x^2 f'(x) dx + \int_0^1 (3x^2)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + C.$$

$$\text{Vì } f(1)=1 \text{ nên } f(x) = x^3$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

Tích phân từng phần với hàm ẩn thường áp dụng cho những bài toán mà giả thiết hoặc kết luận có một trong các tích phân sau

$$\int_a^b u(x) \cdot f'(x) \cdot dx \quad \text{hoặc} \quad \int_a^b u'(x) \cdot f(x) \cdot dx.$$



Ví dụ 61: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(2) = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 3$.

Tính $\int_0^2 x \cdot f'(x) dx$.

A. -3.

B. 3.

C. 0.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = \int_0^2 x d(f(x)) = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2f(2) - 3 = 3.$$

Ví dụ 62: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(1) = 2$. Biết

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx.$$

A. $I = 1$.

B. $I = -1$.

C. $I = 3$.

D. $I = -3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx, dv = f'(x) dx \text{ chọn } v = \int f'(x) dx = f(x)$$

$$\Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2 - 1 = 1$$

Chọn A

Ví dụ 63: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 8$.

B. $I = -8$.

C. $I = 4$.

D. $I = -4$.

Lời giải

$$A = \int_0^1 (x+1) f'(x) dx \text{ Đặt } u = x+1 \Rightarrow du = dx, dv = f'(x) dx \text{ chọn } v = f(x)$$

$$\Rightarrow A = (x+1) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -8$$

Chọn B



Ví dụ 64: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16$,

$$\int_0^2 f(x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx.$$

A. $I = 12$.

B. $I = 7$.

C. $I = 13$.

D. $I = 20$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f(2x)}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = \left. \frac{x \cdot f(2x)}{2} \right|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = \frac{f(2)}{2} - \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = \frac{16}{2} - \frac{1}{4} \cdot 4 = 7.$$

Ví dụ 65: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và

$$g(x) f'(x) = x(x-2)e^x. \text{ Tính giá trị của tích phân } I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx?$$

A. -4 .

B. $e-2$.

C. 4 .

D. $2-e$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g(x) f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow g(0) = g(2) = 0 \text{ (vì } f'(0) \cdot f'(2) \neq 0)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx = \int_0^2 f(x) dg(x) = \left(f(x) \cdot g(x) \right) \Big|_0^2 - \int_0^2 g(x) \cdot f'(x) dx \\ &= - \int_0^2 (x^2 - 2x) e^x dx = 4. \end{aligned}$$

Ví dụ 66: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 8$.

B. $I = -8$.

C. $I = 4$.

D. $I = -4$.

Lời giải

Chọn B

$$A = \int_0^1 (x+1) f'(x) dx \text{ Đặt } u = x+1 \Rightarrow du = dx, dv = f'(x) dx \text{ chọn } v = f(x)$$



$$\Rightarrow A = (x+1) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -8$$

Ví dụ 67: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x \cdot f'(x) dx$.

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{17}{4}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. -1761.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Từ } f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5 & (x=1) \\ f(1) = 2 & (x=0) \end{cases}, \text{ suy ra } I = 23 - \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3) dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$$

Đổi cận: Với $t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0$ và $t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Khi đó } I = 23 - \int_1^5 f(x) dx = 23 - \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3) dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{33}{4}$$

Chọn C

Ví dụ 68: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1; e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1, f(e) = 1$. Khi đó

$$I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx \text{ bằng}$$

A. $I = 4$.

B. $I = 3$.

C. $I = 1$.

D. $I = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Cách 1: Ta có } I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx = f(x) \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e f(x) \cdot \frac{1}{x} dx = f(e) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Cách 2: Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx = f(x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = f(e) - 1 = 1 - 1 = 0.$$



Ví dụ 69: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = 0. \text{ Giá trị của tích phân}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ nên

$$f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d[f(x)] = [xf(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\text{Suy ra: } I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Mặt khác, ta có:

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 70: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(0) = f(1) = 1$. Biết $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$. Tính biểu

thức $Q = a^{2018} + b^{2018}$.

A. $Q = 8$.

B. $Q = 6$.

C. $Q = 4$.

D. $Q = 2$.

Lời giải



$$A = \int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = \underbrace{\int_0^1 e^x f(x) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x) dx}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_0^1 e^x f(x) dx$$

Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$, $dv = e^x dx$ chọn $v = e^x \Rightarrow A_1 = e^x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^x f'(x) dx}_{A_2}$

Vậy $A = e^x f(x) \Big|_0^1 - A_2 + A_2 = e^x f(x) \Big|_0^1 = e \cdot f(1) - f(0) = e - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a^{2018} + b^{2018} = 1 + 1 = 2$$

Chọn D

Ví dụ 71: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2019e^{2018}$. **B.** $f(1) = 2018 \cdot e^{-2018}$. **C.** $f(1) = 2018 \cdot e^{2018}$. **D.** $f(1) = 2017 \cdot e^{2018}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot e^{2018x} \Leftrightarrow \frac{f'(x) - 2018 \cdot f(x)}{e^{2018x}} = 2018 \cdot x^{2017}$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x) - 2018 \cdot f(x)}{e^{2018x}} dx = \int_0^1 2018 \cdot x^{2017} dx \quad (1)$$

Xét $I = \int_0^1 \frac{f'(x) - 2018 \cdot f(x)}{e^{2018x}} dx = \int_0^1 f'(x) \cdot e^{-2018x} dx - \int_0^1 2018 \cdot f(x) \cdot e^{-2018x} dx$

Xét $I_1 = \int_0^1 2018 \cdot f(x) \cdot e^{-2018x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2018 \cdot e^{-2018x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -e^{-2018x} \end{cases}$.

Do đó $I_1 = f(x) \cdot (-e^{-2018x}) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x) \cdot e^{-2018x} dx \Rightarrow I = f(1) \cdot e^{-2018} - 2018$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(1) \cdot e^{-2018} - 2018 = x^{2018} \Big|_0^1 \Rightarrow f(1) = 2019 \cdot e^{2018}$.

Ví dụ 72: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$ Tính



$$Q = a^{2017} + b^{2017}.$$

A. $Q = 2^{2017} + 1.$

B. $Q = 2.$

C. $Q = 0.$

D. $Q = 2^{2017} - 1.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = ef(1) - f(0) = e - 1.$$

Do đó $a = 1, b = -1.$

$$\text{Suy ra } Q = a^{2017} + b^{2017} = 1^{2017} + (-1)^{2017} = 0. \text{ Vậy } Q = 0.$$

Ví dụ 73: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và $f(5) = 10$,

$$\int_0^5 x f'(x) dx = 30. \text{ Tính } \int_0^5 f(x) dx.$$

A. 20.

B. -30.

C. -20.

D. 70.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

$$\int_0^5 x \cdot f'(x) dx = (x \cdot f(x)) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x) dx \Leftrightarrow 30 = 5f(5) - \int_0^5 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^5 f(x) dx = 5f(5) - 30 = 20.$$

Ví dụ 74: Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1; 2]$.

Biết rằng $F(1) = 1, F(2) = 4, G(1) = \frac{3}{2}, G(2) = 2$ và $\int_1^2 f(x)G(x) dx = \frac{67}{12}$. Tính

$$\int_1^2 F(x)g(x) dx$$

A. $\frac{11}{12}.$

B. $-\frac{145}{12}.$

C. $-\frac{11}{12}.$

D. $\frac{145}{12}.$

Lời giải



Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = F(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f(x)dx \\ v = G(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 F(x)g(x)dx &= \left(F(x)G(x) \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)G(x)dx \\ &= F(2)G(2) - F(1)G(1) - \int_1^2 f(x)G(x)dx \\ &= 4 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{3}{2} - \frac{67}{12} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Ví dụ 75: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x[f'(x)-2]dx = f(1)$.

Giá trị của $I = \int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^1 x[f'(x)-2]dx &= \int_0^1 x \cdot f'(x)dx - \int_0^1 2x dx \\ &= \int_0^1 x d[f(x)] - x^2 \Big|_0^1 = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx - 1 = f(1) - I - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài } \int_0^1 x[f'(x)-2]dx = f(1) \Rightarrow I = -1.$$

Ví dụ 76: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x)dx = a$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$ theo a và $b = f(2)$.

A. $b-a$.B. $a-b$.C. $a+b$.D. $-a-b$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = x-1 \Rightarrow du = dx$; $dv = f'(x)dx$ chọn $v = f(x)$.

$$\int_1^2 (x-1)f'(x)dx = \left((x-1)f(x) \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)dx = f(2) - \int_a^b f(x)dx = b - \int_1^2 f(x)dx.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 (x-1)f'(x)dx = a \Leftrightarrow b - \int_1^2 f(x)dx = a \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = b - a.$$



Ví dụ 77: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)dx=4$. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx.$$

A. $I = 13$.

B. $I = 12$.

C. $I = 20$.

D. $I = 7$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, } I = x \cdot \frac{1}{2} f(2x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = 8 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx.$$

$$\text{Với } x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=2.$$

$$\text{Suy ra } I = 8 - \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = 8 - 1 = 7.$$

Ví dụ 78: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = f(0) = 1$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 0$.

C. $I = 2$.

D. -2 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \left(-\cos x \cdot f(x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx + \cos x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 1 = 0.$$

Ví dụ 79: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và

$$f(2)=4. \text{ Tính } J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx.$$



- A. $J = 1 + \ln 4$. B. $J = 4 - \ln 2$. C. $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. D. $J = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} \cdot f(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} f(2) - f(1) + \left(2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

$$\text{Cách 2: } J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$-1 = \left(\frac{f(x)}{x} + 2 \ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

Cách 3: (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = ax + b$. Vì $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$, suy ra $f(x) = 3x - 2$.

$$\text{Vậy } J = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - \frac{3x-1}{x^2} \right) dx = \left(2 \ln|x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 4 + \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 80: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Biết

$f(0) = 1$ và $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$, với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx.$$

- A. $I = -\frac{16}{3}$. B. $I = -\frac{16}{5}$. C. $I = -\frac{14}{3}$. D. $I = -\frac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Theo giả thiết, ta có $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$$\ln[f(x) \cdot f(2-x)] = \ln e^{2x^2-4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x.$$

Mặt khác, với $x=0$, ta có $f(0) \cdot f(2) = 1$ và $f(0) = 1$ nên $f(2) = 1$.

Xét $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$, ta có $I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x) dx \\ v = \ln f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \left[(x^3 - 3x^2) \ln f(x) \right]_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(x) dx = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(x) dx \quad (1).$$

Đến đây, đổi biến $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x=0 \rightarrow t=2$ và $x=2 \rightarrow t=0$.

$$\text{Ta có } I = - \int_2^0 (3t^2 - 6t) \cdot \ln f(2-t) (-dt) = - \int_0^2 (3t^2 - 6t) \cdot \ln f(2-t) dt$$

$$\text{Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên } I = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(2-x) dx \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được } 2I = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot [\ln f(x) + \ln f(2-x)] dx$$

$$\text{Hay } I = - \frac{1}{2} \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot (2x^2 - 4x) dx = - \frac{16}{5}.$$

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = e^{x^2-2x}$, khi đó:

$$I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) \cdot e^{x^2-2x} \cdot (2x-2)}{e^{x^2-2x}} dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) \cdot (2x-2) dx = \frac{-16}{5}.$$

Ví dụ 81: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A.** $I = 2 - e$. **B.** $I = e - 2$. **C.** $I = \frac{e}{2}$. **D.** $I = \frac{e-1}{2}$.

Lời giải



Chọn B

Xét $A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$

Suy ra $A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$

Xét $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$

Suy ra $f'(x) + xe^x = 0 \quad \forall x \in [0; 1]$ (do $(f'(x) + xe^x)^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1]$)

$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C$

Do $f(1) = 0$ nên $f(x) = (1-x)e^x$

Vậy $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x \Big|_0^1 = e - 2$.

Ví dụ 82: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn

$\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{5}$.

B. $I = -\frac{7}{5}$.

C. $I = -\frac{7}{20}$.

D. $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$, $dv = (x-1)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3} = \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{(x-1)^3}{3} \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x) dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x) dx = -14$



$$\text{Tính được } \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 7$$

$$\Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x) dx + \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_1^2 [7(x-1)^3 - f'(x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Do } f(2) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[\frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4} \right] dx = -\frac{7}{5}.$$

Ví dụ 83: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \text{ và } \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2}{3}.$

B. $\frac{5}{2}.$

C. $\frac{7}{4}.$

D. $\frac{6}{5}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \quad (1)$$

$$\text{- Tính } \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \left(\frac{x^4}{4} \cdot f(x) \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow 18 \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = -18 \quad (2)$$

$$\text{- Lại có: } \int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81 \int_0^1 x^8 dx = 9 \quad (3)$$



- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[\left[f'(x) \right]^2 + 18x^4 \cdot f'(x) + 81x^8 \right] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4 \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi \cdot \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4 \right] dx = 0$$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 9x^4$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) \cdot dx = -\frac{9}{5}x^5 + C.$$

$$\text{Lại do } f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5} \right) dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 84: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$$

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tính } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Đặt } \begin{cases} \sin 2x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos 2x dx = du \\ f(x) = v \end{cases}, \text{ khi đó}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = \sin 2x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0 \cdot f(0) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8}.$$



Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - \cos 2x]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f^2(x) - 2f(x) \cdot \cos 2x + \cos^2 2x] dx = \left(\frac{\pi}{8} - 2 \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$ nên
 $f(x) = \cos 2x$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.



BÀI TẬP

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

- A. 3. B. e^{-2} . C. e^4 . D. e^3 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 -2 dx = -4.$$

$$\text{Suy ra } \ln(f(1)) - \ln(f(-1)) = -4 \Rightarrow f(-1) = e^4.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$.

- A. $6 + \ln 4$. B. $4 + \ln 4$. C. $6 + \ln 2$. D. $2 + 2\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx + \int_1^3 (2x-1) dx$$

$$= 2 \ln|x+1| \Big|_0^1 + (x^2 - x) \Big|_1^3 = \ln 4 + 6.$$

Câu 3: Xác định số thực dương m để tích phân $\int_0^m (x - x^2) dx$ có giá trị lớn nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$P = \int_0^m (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3}.$$

$$\text{Đặt } f(m) = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3} \Rightarrow f'(m) = m - m^2 \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 1$$

Lập bảng biến thiên

m	0	1	$+\infty$
$f'(m)$		0	-
$f(m)$	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$-\infty$



Vậy $f(m)$ đạt GTLN tại $m=1$.

Câu 4: (SGD&ĐT Cao Bằng – 2018) Cho $f(x)$ là hàm liên tục và $a > 0$. Giả sử rằng với mọi $x \in [0; a]$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x)f(a-x)=1$. Tính $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$ được kết quả bằng:

A. $\frac{a}{3}$.

B. $2a$.

C. $a \ln(a+1)$.

D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } I = \int_0^a \frac{dx}{1 + \frac{1}{f(a-x)}} = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+1} dx.$$

Đặt: $a-x=t$ thì $dx=-dt$.

Đổi cận

x	0	a
t	a	0

$$\text{Ta được: } I = -\int_a^0 \frac{f(t)}{f(t)+1} dt = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+1} dx.$$

$$\text{Do đó: } I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a \frac{(1+f(x))dx}{1+f(x)} = \int_0^a dx = a. \text{ Vậy: } I = \frac{a}{2}.$$

Câu 5: [KHTN Hà Nội, Lần 3, Năm 2018] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x. \text{ Tính } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx.$$

A. $1 - \frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2} - 1$.

C. $1 + \frac{\pi}{4}$.

D. $2 - \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x \quad (1)$$

$$\text{Thay } x = -x. (1) \Rightarrow 3f(x) - 2f(-x) = \tan^2(-x) = \tan^2 x \quad (2)$$

$$(1).2 + (2).3 = 5 \tan^2 x = 5f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \tan^2 x$$



$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \tan^2 x) - 1] dx$$

$$I = 2(\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$ Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$.

B. $f^2(2) = \frac{332}{15}$.

C. $f^2(2) = \frac{324}{15}$.

D. $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^2 (x^4 + x^2) dx = \int_0^2 f'(x) \cdot f(x) dx = \int_0^2 f(x) d[f(x)] = \frac{1}{2} (f^2(2) - f^2(0))$$

$$\text{Suy ra } f^2(2) = 2 \int_0^2 (x^4 + x^2) dx + f^2(0) = \frac{332}{15}.$$

Câu 7: (Chu Văn An 2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $I = \frac{\pi}{20}$.

B. $I = \frac{\pi}{16}$.

C. $I = \frac{\pi}{6}$.

D. $I = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ nên ta có

$$\int_0^1 [4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow \int_0^1 4x \cdot f(x^2) dx + \int_0^1 3f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (1).$$

$$\text{Mà } \int_0^1 4x \cdot f(x^2) dx = 2 \int_0^1 f(x^2) d(x^2) \xrightarrow{t=x^2} 2 \int_0^1 f(t) dt = 2I$$

$$\text{và } \int_0^1 3f(1-x) dx = -3 \int_0^1 f(1-x) d(1-x) \xrightarrow{u=1-x} 3 \int_0^1 f(u) du = 3I$$

$$\text{Đồng thời } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó, } (1) \Leftrightarrow 2I + 3I = \frac{\pi}{4} \text{ hay } I = \frac{\pi}{20}.$$



Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3, a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}.$$

Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế ta được

$$\int_1^2 \left[\frac{x}{x+1}f(x) \right]' dx = \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}f(x) \right]_1^2 = \left(x - \ln|x+1| \right)_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}f(2) - \frac{1}{2}f(1) = (2 - \ln 3) - (1 - \ln 2) \Leftrightarrow \frac{2}{3}f(2) + \ln 2 = 1 - \ln 3 + \ln 2 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{3}{2} \text{ và } b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{2}.$$

Câu 9: [Chuyên Hùng Vương Bình Dương, thi lần 5, năm 2018] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x, \forall x \in [0; 1]$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(1-x^2) dx$.

A. $I = -\frac{4}{15}$.

B. $I = 1$.

C. $I = -\frac{2}{15}$.

D. $I = \frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn CĐặt $t = 1-x, \forall x \in [0; 1]$ thì $\forall t \in [0; 1]$.

$$\text{Ta có } f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \Leftrightarrow f(x) + 2f(1-x) = 3(x-1)^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow f(1-t) + 2f(t) = 3t^2 - 3 \Leftrightarrow 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 3.$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \\ 2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x \\ 4f(x) + 2f(1-x) = 6x^2 - 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3f(x) = 3x^2 + 6x - 6 \Leftrightarrow f(x) = (x+1)^2 - 3, \forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Khi đó } f(1-x^2) = (2-x^2)^2 - 3 = x^4 - 4x^2 + 1.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 f(1-x^2) dx = \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{15}.$$



Phân tích:

+ Bước 1: Từ $f(x) + 2f(1-x) = 3x^2 - 6x$ ta giải phương trình hàm tìm hàm số $f(x)$.

+ Bước 2: Xác định trực tiếp hàm $f(1-x^2)$ rồi tính $I = \int_0^1 f(1-x^2) dx$.

Câu 10: [Chuyên Hùng Vương Bình Dương, thi lần 5, năm 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục

với mọi $x \neq 1$ thỏa mãn $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x+3, x \neq 1$. Tính $I = \int_2^{e+1} f(x) dx$.

A. $I = 4e - 1$.

B. $I = e + 2$.

C. $I = 4e - 2$.

D. $I = e + 3$.

Lời giải**Chọn C**

Đặt $t = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow xt - t = x + 1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1}$, suy ra $f(t) = \frac{t+1}{t-1} + 3 = 4 + \frac{2}{t-1}$ hay

$$f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$$

$$\text{Ta có } I = \int_2^{e+1} \left(4 + \frac{2}{x-1}\right) dx = \left(4x + 2\ln|x-1|\right)\Big|_2^{e+1} = 4e - 2.$$

Câu 11: [Chuyên Hùng Vương Bình Dương, thi lần 5, năm 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục

với mọi $x \neq 0$ thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x, x \neq 0$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = \frac{9}{2}$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{4}{3}$.

Lời giải**Chọn A**

Tương tự ta xác định được $f(x) = -x + \frac{2}{x}$.

$$\text{Suy ra } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(-1 + \frac{2}{x^2}\right) dx = \left(-x - \frac{2}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}.$$

Câu 12: [THPT Chuyên Hùng Vương Phú Thọ Lần 4 - Năm 2017 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng

$(-2; 3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx$, biết $F(-1) = 1$ và $F(2) = 4$.

A. $I = 6$.

B. $I = 10$.

C. $I = 3$.

D. $I = 9$.

Câu 13: Nếu $\int_a^x \frac{f(t)dt}{t^2} + 6 = 2\sqrt{x}$ với $x > 0$ thì hệ số a bằng



A. 9.

B. 19.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $\frac{f(t)}{t^2}$, suy ra $F'(t) = \frac{f(t)}{t^2}$.

$$\text{Ta có } \int_a^x \frac{f(t)dt}{t^2} + 6 = 2\sqrt{x} \Rightarrow F(t) \Big|_a^x + 6 = 2\sqrt{x} \Rightarrow F(x) - F(a) + 6 = 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \int_a^x \frac{f(t)dt}{t^2} = \int_a^x \frac{t\sqrt{t}}{t^2} dt = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} \Big|_a^x = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a} = 2\sqrt{x} - 6 \text{ (gt)}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9.$$

Câu 14: [Sở GD & ĐT tỉnh Hưng Yên, năm 2018 - Câu 39] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và

thoả mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $\frac{3}{2}$.B. $-\frac{3}{2}$.C. $\frac{9}{2}$.D. $-\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$$

$$\text{Với } x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right], f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} + 2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 3.$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 3 dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{t} dt = \frac{1}{x} dx.$$

$$2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = 2I.$$

$$(1) \Rightarrow 3I = \int_{\frac{1}{2}}^2 3 dx \Rightarrow I = \frac{3}{2}.$$



Câu 15: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$. Tính

tích phân $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = 3$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

Xét $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx$ Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$; Đổi cận: $x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx$.

Theo giả thiết ta có:

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) + f(-x)) dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx - 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx \Leftrightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = 6.$$

Câu 16: [SỞ GD VŨNG TÀU-LẦN 2-NĂM 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thỏa

mãn $\int_0^1 (2x-1) f'(x) dx = 10$, $f(1) + f(0) = 8$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = 1$.

C. $I = -1$.

D. $I = -2$.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int_0^1 (2x-1) f'(x) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = (2x-1) \Rightarrow du = 2dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$



$$\text{ta có } 10 = \int_0^1 (2x-1) f'(x) dx = (2x-1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow 10 = f(1) + f(0) - \int_0^1 2 f(x) dx \Leftrightarrow 10 = 8 - \int_0^1 2 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 2 f(x) dx = -2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -1.$$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp hai thỏa mãn

$$\int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = 10, f(1) + f(0) = 8. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = -9.$

B. $I = 3.$

C. $I = -3.$

D. $I = 9.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } \int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (x^2 - x) \Rightarrow du = (2x - 1) dx \\ dv = f''(x) dx \Rightarrow v = f'(x) \end{cases}$$

$$\text{ta có } 10 = \int_0^1 (x^2 - x) f''(x) dx = (x^2 - x) f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x - 1) f'(x) dx = - \int_0^1 (2x - 1) f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = (2x - 1) \Rightarrow du_1 = 2 dx \\ dv_1 = f'(x) dx \Rightarrow v_1 = f(x) \end{cases}$$

$$\text{ta có } -10 = \int_0^1 (2x - 1) f'(x) dx = (2x - 1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow -10 = f(1) + f(0) - \int_0^1 2 f(x) dx.$$

$$\Leftrightarrow -10 = 8 - \int_0^1 2 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 9.$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

$$\int_0^1 f'(x^2 + x) dx = 10, f(5) - f(1) = 8. \text{ Tính } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A. $I = 2.$

B. $I = 1.$

C. $I = -1.$

D. $I = -2.$

Lời giải



Chọn C

$$\text{Xét } \int_0^1 f'(x^2 + x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + x \Rightarrow dt = (2x + 1) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(x^2 + x) dx = \int_0^2 (2t + 1) f'(t) dt = \int_0^2 (2x + 1) f'(x) dx = 10.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (2x + 1) \Rightarrow du = 2dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{ta có } 10 = \int_0^2 (2x + 1) f'(x) dx = (2x + 1) f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow 10 = f(5) - f(1) - \int_0^2 2 f(x) dx \Leftrightarrow 10 = 8 - \int_0^2 2 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 2 f(x) dx = -1.$$

Câu 19: [SỞ GD VŨNG TÀU-LẦN 2-NĂM 2018] Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 2018]$ và:

$$f(2018 - x) = f(x) \quad \forall x \in [1; 2018], \quad \int_1^{2017} f(x) dx = 10. \text{ Tính } I = \int_1^{2017} x \cdot f(x) dx.$$

A. $I = 10100.$

B. $I = 20170.$

C. $I = 20180.$

D. $I = 10090.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 2018 - x \Rightarrow dt = -dx.$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 2017, x = 2017 \Rightarrow t = 1$$

$$I = - \int_{2017}^1 (2018 - t) f(2018 - t) dt = \int_1^{2017} (2018 - t) f(t) dt$$

$$= 2018 \int_1^{2017} f(x) dx - \int_1^{2017} x f(x) dx$$

$$\Rightarrow I = 2018 \cdot 10 - I \Rightarrow I = 10090.$$

Câu 20: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và: $f(a + b - x) = f(x) \quad \forall x \in [a; b]$; $\int_a^b f(x) dx = a + b$ Tính

$$I = \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

A. $I = \frac{(a+b)}{2}.$

B. $I = \frac{(a+b)^2}{4}.$

C. $I = \frac{(a+b)}{4}.$

D. $I = \frac{(a+b)^2}{2}.$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Đặt } t = a + b - x \Rightarrow dt = -dx.$$

$$x = a \Rightarrow t = b, x = b \Rightarrow t = a.$$

$$I = - \int_b^a (a+b-t) f(a+b-t) dt$$

$$= \int_a^b (a+b-t) f(t) dt$$

$$= (a+b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^b x f(x) dx$$

$$\Rightarrow I = (a+b).(a+b) - I \Rightarrow I = \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Câu 21: Giả sử hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn: $f(3) = \frac{2}{3}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1).f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2613 < f^2(8) < 2614.$

B. $2614 < f^2(8) < 2615.$

C. $2618 < f^2(8) < 2619.$

D. $2616 < f^2(8) < 2617.$

Lời giải

Chọn A

Vì $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và $[f'(x)]^2 = (x+1).f(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1).f(x)} \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \int \frac{1}{2} \sqrt{x+1} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C. \text{ Vì } f(3) = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8}{3} + C \Rightarrow \frac{\sqrt{6}-8}{3} = C$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{6}-8}{3} \right)^2 \Rightarrow f^2(8) = \left(\frac{19+\sqrt{6}}{3} \right)^4 \approx 2613,261.$$

Vậy $2613 < f^2(8) < 2614.$

Câu 22: [SGD Thanh Hóa- KSCL 14/4- Mã đề 101] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa

$$\text{mãn } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x . f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1. \text{ Tính tích phân } I = \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

A. $I = 3.$

B. $I = \frac{3}{2}.$

C. $I = 2.$

D. $I = \frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx \Rightarrow \frac{dt}{2t} = \cot x dx$$

$$1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} 2t dt = dx \\ x = t^2 \end{cases}$$

$$1 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2} 2t dt = 2 \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt } t = 4x \Rightarrow dt = 4dx$$

$$I = \int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} \frac{dt}{4} = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{5}{2}$$

Phân tích:

Dạng bài này là dạng bài toán tìm tích phân của hàm $f(x)$ nào đó không biết, nhưng sẽ cho thêm điều kiện, mỗi 1 điều kiện là 1 đoạn trong cận tích phân cần tìm, yêu cầu là đưa các tích phân đã biết về giống dạng chưa biết.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x \ln x} dx = 1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\cos x) \tan x dx = 2$.

$$\text{Tính } \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx.$$

A. 3.

B. $\frac{5}{2}$.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$1 = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\cos x) \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx$$

Do đó



$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = 3$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0) = 0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx ?$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) d(f(x)) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) d(\cos x) = -\cos x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos x dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Mặt khác ta tính được: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \cos x]^2 dx = 0$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x + C.$$

$$\text{Do } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$. Tìm a và b biết rằng $f'(0) = -22$

$$\text{và } \int_0^1 f(x) dx = 5.$$

A. $a = -2, b = -8$.B. $a = 2, b = 8$.C. $a = 8, b = 2$.D. $a = -8, b = -2$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{3a}{(x+1)^4} + b(x+1)e^x$$

$$\text{Suy ra } f'(0) = -22 \Leftrightarrow -3a + b = -22 \quad (1)$$



$$\text{Ta có } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[\frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x \right] dx = \left[-\frac{a}{2(x+1)^2} + b(x-1)e^x \right]_0^1 = \frac{3}{8}a + b.$$

$$\text{Theo bài ra } \int_0^1 f(x)dx = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{8}a + b = 5 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} -3a + b = -22 \\ \frac{3}{8}a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$, biết $\int_{-2}^0 f(-x)dx = 2$ và

$$\int_1^2 f(-2x)dx = 4. \text{ Tính } I = \int_0^4 f(x)dx.$$

A. $I = -10.$

B. $I = -6.$

C. $I = 6.$

D. $I = 10.$

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x)$ là hàm lẻ nên ta có $f(-x) = -f(x)$.

$$\text{Ta có: } \int_{-2}^0 f(-x)dx = 2 \xrightarrow{t=-x} -\int_2^0 f(t)dt = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(t)dt = 2 = \int_0^2 f(x)dx.$$

$$\int_1^2 f(-2x)dx = -\int_1^2 f(2x)dx \xrightarrow{u=2x} -\frac{1}{2} \int_2^4 f(u)du = 4 \Leftrightarrow \int_2^4 f(u)du = -8 \Leftrightarrow \int_2^4 f(x)dx = -8.$$

$$\text{Do đó: } \int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = 2 - 8 = -6.$$

Câu 27: Cho hàm số $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$, trong đó hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $[-1; 1]$. Tính

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx.$$

A. 2.

B. 16.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = -1$.

$$\text{Ta được: } I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2^x} f(x)dx = -\int_1^{-1} \frac{1}{1+2^{-t}} f(-t)dt = \int_{-1}^1 \frac{2^t}{1+2^t} f(t)dt = \int_{-1}^1 \frac{2^x}{1+2^x} f(x)dx.$$



$$\text{Do đó: } 2I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2^x} f(x) dx + \int_{-1}^1 \frac{2^x}{1+2^x} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 4 \Rightarrow I = 2.$$

Cách 2.

$$\text{Chọn } h(x) = x^2 \text{ là hàm số chẵn. Ta có: } \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}. \text{ Do đó: } f(x) = \frac{4}{2} h(x) = 6x^2.$$

$$\text{Khi đó: } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{6x^2}{2^x + 1} dx = 2.$$

Lời bình: Với cách làm này, chỉ cần học sinh nắm rõ nguyên tắc tìm một hàm số đại diện cho lớp hàm số thỏa mãn giả thiết bài toán là có thể dễ dàng tìm được kết quả bài toán bằng máy tính hoặc bằng phương pháp cơ bản với hàm số $y = f(x)$ khá đơn giản. Đối với bài toán này ta có thể chọn hàm số $h(x) = 1$ cho đơn giản.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_3^8 (x+3) f'(x) dx = 25$ và $33f(8) - 18f(3) = 83$.

Giá trị $\int_3^8 f(x) dx$ là:

A. $I = 83$.

B. $I = 38$.

C. $I = \frac{8}{3}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_3^8 (x+3) f'(x) dx = 25.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+3 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = (x+3) f(x) \Big|_3^8 - \int_3^8 f(x) dx = 11f(8) - 6f(3) - \int_3^8 f(x) dx$$

$$\text{Ta có } 33f(8) - 18f(3) = 83 \Rightarrow 11f(8) - 6f(3) = \frac{83}{3}.$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{83}{3} - \int_3^8 f(x) dx. \text{ Mà } A = 25 \Rightarrow \int_3^8 f(x) dx = \frac{83}{3} - 25 = \frac{8}{3}.$$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ dương có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ biết rằng

$$f'(x) - f(x)\sqrt{x^2+1} = 0 \text{ và } f(\sqrt{3}) = e^3. \text{ Tính } I = \int_0^{\sqrt{3}} \ln[f(x)] dx$$

A. $2\sqrt{3}$.

B. $3\sqrt{3} - \frac{7}{3}$.

C. $3\sqrt{3} + \frac{7}{3}$.

D. $3\sqrt{3} - 2$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $f'(x) - \sqrt{x^2 + 1} f(x) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$

Đặt $\begin{cases} u = \ln[f(x)] \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ v = x \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}} \ln[f(x)] dx = x \ln[f(x)] \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x f'(x)}{f(x)} dx = x \ln[f(x)] \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{x^2 + 1} dx \\ &= x \ln[f(x)] \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + 1} d(x^2 + 1) \\ &= x \ln[f(x)] \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Câu 30: [THPT QUỲNH LƯU 2_NGHỆ AN_LẦN 1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{5}{4}$

D. $-\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = f(x) \Rightarrow t^3 + t = x \Rightarrow dx = (3t^2 + 1) dt$

x	0	2
t	0	1

Suy ra $I = \int_0^1 t(3t^2 + 1) dt = \frac{5}{4}$.

Câu 31: [THPT QUỲNH LƯU 2, NGHỆ AN, lần 1, 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và

liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

A. e .

B. $\frac{1}{e}$.

C. $\frac{2}{e}$.

D. $-\frac{2}{e}$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot f'(x) + 2xe^{x^2} \cdot f(x) = 2x \Leftrightarrow (e^{x^2} \cdot f(x))' = 2x$.



Lấy tích phân cả hai vế ta được:

$$\int_0^1 (e^{x^2} \cdot f(x))' dx = \int_0^1 2x dx \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot f(x) \Big|_0^1 = x^2 \Big|_0^1 \Leftrightarrow e \cdot f(1) - f(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow e \cdot f(1) = 2 \Leftrightarrow f(1) = \frac{2}{e}.$$

Câu 32: (SGD&ĐT Cao Bằng – 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + x \cdot f'(x) \geq x^{2018}$ với mọi $x \in [0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2019 \cdot 2021}$

B. $\frac{1}{2018 \cdot 2021}$

C. $\frac{1}{2018 \cdot 2019}$

D. $\frac{1}{2021 \cdot 2022}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3f(x) + x \cdot f'(x) \geq x^{2018}$ với mọi $x \in [0;1]$.

Nhân thêm cả 2 vế cho x^2 để đưa về dạng $[f(x) \cdot g(x)]'$.

Ta được: $3x^2 f(x) + x^3 f'(x) \geq x^{2020}$

$$\Rightarrow \int_0^1 [3x^2 f(x) + x^3 f'(x)] dx \geq \int_0^1 x^{2020} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [x^3 \cdot f(x)]' dx \geq \int_0^1 x^{2020} dx \Rightarrow f(1) \geq \frac{1}{2021}.$$

Mặt khác: $3f(x) + x \cdot f'(x) \geq x^{2018}$

$$\Rightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx \geq - \int_0^1 x f'(x) dx + \int_0^1 x^{2018} dx$$

$$\Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx \geq -x \cdot f(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x^{2018} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2019} - f(1) \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2021} \right) = \frac{1}{2019 \cdot 2021}.$$

Câu 33: (THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH - PHÚ YÊN – 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0;1]$ thỏa $(f(x))^4 (f'(x))^2 (x^2 + 1) = 1 + (f(x))^3$ và $f(x) > 0, \forall x \in [0;1]$. Biết $f(0) = 2$, hãy chọn khẳng định đúng trong những khẳng định dưới đây.

A. $2 < f(1) < \frac{5}{2}$.

B. $\frac{5}{2} < f(1) < 3$.

C. $\frac{3}{2} < f(1) < 2$.

D. $3 < f(1) < \frac{7}{2}$.

Lời giải



Chọn B

Nhận xét: Từ giả thiết bài toán ta biến đổi về công thức đạo hàm và sử dụng định nghĩa tích phân.

Phân tích: Từ giả thiết $(f(x))^4 (f'(x))^2 (x^2 + 1) = 1 + (f(x))^3$ và

$$f(x) > 0; f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1] \text{ suy ra: } \frac{(f(x))^2 (f'(x))}{\sqrt{1 + (f(x))^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

trên $[0; 1]$ ta được: $\int_0^1 \frac{f^2(x) f'(x)}{\sqrt{1 + f^3(x)}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$

Ta có: $\int_0^1 \frac{f^2(x) f'(x)}{\sqrt{1 + f^3(x)}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(1 + f^3(x))}{\sqrt{1 + f^3(x)}}$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{1 + f^3(x)} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (\sqrt{1 + f^3(1)} - \sqrt{1 + f^3(0)}) = \frac{2}{3} (\sqrt{1 + f^3(1)} - 3).$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}). \text{ Từ đó } \Rightarrow f(1) \approx 2.6 \Rightarrow \frac{5}{2} < f(1) < 3.$$

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm không âm trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn

$$f(x) > 0, \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]; (f(x))^2 (f'(x))^2 (1 - x^2) = (f(x))^2 + 1 \text{ và } f(0) = 1. \text{ Chọn khẳng định}$$

đúng bằng:

A. $2 < f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < 3$. **C.** $\frac{3}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < 2$. **D.** $3 < f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $(f(x))^2 (f'(x))^2 (1 - x^2) = (f(x))^2 + 1$ và $f(x) > 0; f'(x) \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ suy ra:

$$\frac{(f(x))(f'(x))}{\sqrt{1 + (f(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \text{ Lấy tích phân hai vế trên } \left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ ta được:}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x) f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x) f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1 + f^2(x))}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = \left(\sqrt{1 + f^2\left(\frac{1}{2}\right)} - \sqrt{1 + f^2(0)} \right) = \left(\sqrt{1 + f^2\left(\frac{1}{2}\right)} - \sqrt{2} \right).$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}. \quad (x = \sin t). \text{ Từ đó } \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.66 \Rightarrow \frac{3}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < 2.$$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x^2 + 1) f'(x) + 2xf(x) = xe^x$ và $f(0) = 1$. Giá trị $f(1)$ bằng:



A. e .B. **1.**C. $\ln 2$.D. 0 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết } (x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = xe^x \Rightarrow ((x^2 + 1)f(x))' = xe^x$$

Suy ra

$$\int_0^1 ((x^2 + 1)f(x))' dx = \int_0^1 xe^x dx.$$

$$\Leftrightarrow ((x^2 + 1)f(x)) \Big|_0^1 = \int_0^1 xde^x \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$\Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = e - e^x \Big|_0^1 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Câu 36: [Sở Bắc Ninh Lần 2-2018] Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x \text{ và } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4. \text{ Khi đó, } f(\pi) \text{ nằm trong khoảng}$$

nào?

A. $(6; 7)$.B. **$(5; 6)$.**C. $(12; 13)$.D. $(11; 12)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết: } f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x \Leftrightarrow f(x) = x \sin x + x f'(x) + \cos x$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot x - x' \cdot f(x) = -x \sin x - \cos x \Leftrightarrow f'(x) \cdot x - x' \cdot f(x) = (\cos x)' x - x' \cos x \quad (*)$$

Vì $x \in (0; +\infty)$, ta chia 2 vế của (*) cho x^2 ta được

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot x - x' \cdot f(x)}{x^2} = \frac{(\cos x)' x - x' \cos x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(\frac{\cos x}{x} \right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{\cos x}{x} + c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \cos x + cx.$$

$$\text{Mặt khác lại có } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4.$$

$$\text{Xét } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x \sin x + c x \sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x d(\cos x) + c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$= - \left(\frac{\cos^2 x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + c \left(x \cos x + \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -2c.$$



$$\text{Mà } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4 \Leftrightarrow -2c = -4 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = \cos x + 2x.$$

Ta có: $f(\pi) = -1 + 2\pi \approx 5,28$.

Tổng quát:

Gặp những bài toán mà giả thiết cho dạng $a(x) \cdot f(x) + b(x) \cdot f'(x) = g(x)$ (1)

Ta sẽ nhân một lượng thích hợp để đưa (1) về dạng $u'(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot f'(x) = h'(x)$ (2)

Với $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{a(x)}{b(x)}$, kết hợp với giả thiết ta tìm được $u(x)$ suy ra biểu thức nhân thêm là $\frac{u(x)}{b(x)}$. Khi có (2) ta sẽ tìm được $f(x)$.

Câu 37: (Đề HK2 Sở GD Nam Định – 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên

đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx.$$

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = 2$.

D. $I = 1$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x df(x) = \left[f(x) \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) d \sin 2x$$

$$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - f(0) \sin(2 \cdot 0) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx$$

$$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx.$$

$$\text{Do đó } 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Mặt khác: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x) dx = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

Bởi vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$



$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f^2(x) - 2f(x)\cos 2x + \cos^2 2x] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - \cos 2x]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \cos 2x.$$

$$\text{Nên: } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}.$$

Câu 38: [THPT Chuyên Hùng Vương Phú Thọ Lần 4 - Năm 2017 - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$

xác định trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} \cdot f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}$. Tính

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Ta có } 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right] dx = \left[x - \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{2}.$$

$+) \text{ Từ đó}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} \cdot f(x) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} \cdot f(x) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{2-\pi}{2} + \frac{\pi-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 dx = 0.$$

$$\text{Do } \left[f(x) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ nên } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 dx \geq 0.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$+) \text{ Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Nhận xét: để đảm bảo tính khả tích, ta cần thêm điều kiện “ $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ” ở đề bài. Khi đó điều kiện “xác định” không cần nữa.



Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 [f^2(x) - 6 \cdot f(x) \cdot e^x] dx = \frac{9(1-e^2)}{2}$.

Tính $\int_0^1 (x+1) f(x) dx$.

A. $e-1$.

B. $2e+5$.

C. e .

D. $3e$.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có

$$\int_0^1 [f^2(x) - 6 \cdot f(x) \cdot e^x] dx = \frac{9(1-e^2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f^2(x) - 6 \cdot f(x) \cdot e^x] dx + \int_0^1 9e^{2x} dx = \frac{9(1-e^2)}{2} + \int_0^1 9e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f(x) - 3e^x]^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3e^x.$$

$$+) \text{ Vậy } \int_0^1 (x+1) f(x) dx = \int_0^1 3(x+1)e^x dx = 3xe^x \Big|_0^1 = 3e.$$

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2 \cdot f(x) \cdot (3-x)] dx = -\frac{109}{12}. \text{ Tính } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1} dx.$$

A. $\ln \frac{2}{9}$.

B. $\ln \frac{5}{9}$.

C. $\ln \frac{7}{9}$.

D. $\ln \frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2 \cdot f(x) \cdot (3-x)] dx = -\frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2 \cdot f(x) \cdot (3-x)] dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3-x)^2 dx = -\frac{109}{12} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3-x)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x) - (3-x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3-x.$$

$$+) \text{ Vậy } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x^2-1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx = (\ln|x-1| - 2\ln|x+1|) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{2}{9}.$$



Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) - f(0) = 1$

và $\int_0^1 f'(x)[f^2(x)+1]dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$. Tính $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{5\sqrt{33}-27}{18}$.

C. $\frac{5\sqrt{33}}{18}$.

D. $\frac{5\sqrt{33}+54}{18}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 f'(x)[f^2(x)+1]dx = \int_0^1 f'(x)f^2(x)dx + \int_0^1 f'(x)dx$$

$$= \int_0^1 f'(x)f^2(x)dx + f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)f^2(x)dx + \int_0^1 dx = \int_0^1 [f'(x)f^2(x)+1]dx.$$

$$\int_0^1 f'(x)[f^2(x)+1]dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)f^2(x)+1]dx - 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [\sqrt{f'(x)} f(x) - 1]^2 dx \leq 0 \Rightarrow \sqrt{f'(x)} f(x) = 1 \Rightarrow f'(x)f^2(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} f^3(x) = x + C$$

$$\Rightarrow f^3(x) = 3x + C \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{3x+C} \text{ và } f(x) > 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow C > -3.$$

$$\text{Mà } f(1) - f(0) = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{C+3} - \sqrt[3]{C} = 1 \Leftrightarrow 3 - 3\sqrt[3]{C+3} + 3\sqrt[3]{C}(\sqrt[3]{C+3} - \sqrt[3]{C}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{C+3}\sqrt[3]{C} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C^2 + 3C - \frac{8}{27} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{-27 \pm 5\sqrt{33}}{18} \xrightarrow{C > -3} C = \frac{-27 + 5\sqrt{33}}{18}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 \left(3x + \frac{-27 + 5\sqrt{33}}{18} \right) dx = \frac{5\sqrt{33}}{18}.$$

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên $[0;1]$. Đặt

$g(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$. Biết $g(x) \geq [f(x)]^3$ với mọi $x \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\int_0^1 \sqrt[3]{[g(x)]^2} dx.$$

A. 2.

B. $\frac{7}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Cách 1.



Ta có $g(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(x) = 2f(x) \end{cases}$.

Do $g(x) \geq [f(x)]^3 \Rightarrow g(x) \geq \left[\frac{g'(x)}{2} \right]^3 \Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt[3]{g(x)}} \leq 2$.

$\forall t \in [0;1]$ ta có $\int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt[3]{g(x)}} dx \leq \int_0^t 2 dx \Leftrightarrow \frac{3}{2} \sqrt[3]{[g(x)]^2} \Big|_0^t \leq 2x \Big|_0^t \Leftrightarrow \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{[g(t)]^2} - \sqrt[3]{[g(0)]^2} \right] \leq 2t$
 $\Leftrightarrow \frac{3}{2} \sqrt[3]{[g(t)]^2} \leq 2t + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{[g(t)]^2} \leq \frac{4}{3}t + 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt[3]{[g(x)]^2} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x + 1 \right) dx = \frac{5}{3}$.

Cách 2.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa $F(0) = 0$. Ta có $F'(x) = f(x)$.

Ta có $g(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt = 1 + 2F(x) \geq f^3(x)$, với mọi $x \in [0;1]$.

$\Rightarrow 1 + 2F(x) \geq [F'(x)]^3, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \frac{F'(x)}{\sqrt[3]{1 + 2F(x)}} - 1 \leq 0, \forall x \in [0;1]$

Đặt $h(t) = \int_0^t \left(\frac{F'(x)}{\sqrt[3]{1 + 2F(x)}} - 1 \right) dx \Rightarrow h(t) = \frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{1 + 2F(x)}^2 \right]_0^t - x \Big|_0^t = \frac{3}{4} \sqrt[3]{1 + 2F(t)}^2 - t - \frac{3}{4}$

là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$, vì $h'(t) = \frac{F'(t)}{\sqrt[3]{1 + 2F(t)}} - 1 \leq 0$.

$\Rightarrow h(x) \leq h(0), \forall x \in [0;1] \Rightarrow \frac{3}{4} \sqrt[3]{1 + 2F(x)}^2 \leq x + \frac{3}{4}, \forall x \in [0;1]$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{[g(x)]^2} \leq \frac{4}{3}x + 1, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 \sqrt[3]{[g(x)]^2} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x + 1 \right) dx = \frac{5}{3}$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$. Biết $f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1$,

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ và $f(0) = 1$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx$.

A. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết: $f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\cos x} + \frac{f(x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$



$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \left(\frac{f(x)}{\cos x} \right)' dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\cos x} = \tan x + C \Rightarrow f(x) = \sin x + C \cdot \cos x.$$

$$\text{Do } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \sin x + \cos x.$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(0)=1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30}, \int_0^1 (2x-1)f(x)dx = -\frac{1}{30}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng:}$$

A. $\frac{11}{30}$.

B. $\frac{1}{30}$.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $\frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^1 (2x-1)f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(x^2-x) = (x^2-x)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2-x)f'(x)dx = \frac{-1}{30}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(x)(x^2-x)dx = \frac{1}{30}.$$

$$\text{Mà } \int_0^1 (x^2-x)^2 dx = \frac{1}{30} \text{ nên suy ra } \int_0^1 ([f'(x)]^2 - 2f'(x)(x^2-x) + (x^2-x)^2) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) - (x^2-x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2-x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Vì } f(0)=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x)dx = \frac{11}{12}. \text{ Chọn D}$$

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn

$$\text{các điều kiện sau: } g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t)dt; g(x) = f^2(x). \text{ Tính } \int_0^1 \sqrt{g(x)}dx.$$

A. $\frac{1011}{2}$.

B. $\frac{1009}{2}$.

C. $\frac{2019}{2}$.

D. 505.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết ta có $g'(x) = 2018f(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$. Vì $f(x) > 0$ trên đoạn $[0;1]$

$$\Rightarrow f'(x) = 1009 \Rightarrow f(x) = 1009x + C \text{ và } g(x) = (1009x + C)^2.$$

Mặt khác $g(0) = 1$ và $f(x) > 0$ trên đoạn $[0;1]$ suy ra $C = 1$.

$$\text{Vậy } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx = \int_0^1 (1009x + 1) dx = \frac{1011}{2}.$$

Câu 46: Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \int_1^{x^3+1} (\sqrt{t^2+12}-4)^{2017} dt$ là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Giả sử là một nguyên hàm của $g(t) = (\sqrt{t^2+12}-4)^{2017} \Rightarrow F'(t) = g(t)$.

$$\text{Khi đó } f(x) = F(x^3+1) - F(1) \Rightarrow f'(x) = [F(x^3+1)]' = 3x^2 g(x^3+1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \left(\sqrt{(x^3+1)^2+12}-4 \right)^{2017}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{(x^3+1)^2+12} = 4 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x^3+1)^2+12} = 4 \Leftrightarrow (x^3+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1 = 2 \\ x^3+1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\sqrt[3]{3} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{3}$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(0) = f'(0) = 1, f(x) + 2f'(x) + f''(x) = x^3 + 2x^2 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng.}$$

A. $\frac{107}{12} - \frac{21}{e}$.

B. $\frac{107}{21} - \frac{12}{e}$.

C. $\frac{107}{12} + \frac{21}{e}$.

D. $\frac{107}{21} + \frac{12}{e}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } (e^x \cdot f(x))' = e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x)$$

$$(e^x \cdot f(x))'' = 2e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) + e^x \cdot f(x)$$

$$= e^x (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) = e^x (x^3 + 2x^2)$$

$$\text{Lại có: } (e^x \cdot f(x))' = \int (x^3 + 2x^2) e^x dx = (x^3 - x^2 + 2x - 2)e^x + C_1$$

$$\Rightarrow e^x \cdot f(x) = \int ((x^3 - x^2 + 2x - 2)e^x + C_1) dx$$

$$\Rightarrow e^x \cdot f(x) = (x^3 - 4x^2 + 10x - 12)e^x + C_1 x + C_2 (*)$$

$$f'(0) = f(0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 = -12 + C_2 \\ 2 = -12 + 10 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 10x - 12 + \frac{4x + 13}{e^x}$$

Bấm máy ta có kết quả là A

Câu 48: [Sở GD & ĐT tỉnh Hưng Yên, năm 2018 - Câu 49] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên

tục trên $[0; \frac{\pi}{2}]$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}$. Tích phân

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng:

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = -\cos x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx = \frac{\pi}{4}, \text{ ta tính được}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx - 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \cos x]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = \cos x \quad f(x) = \sin x + C \text{ vì } f(0) = 0 \text{ nên } C = 0. \text{ Vậy}$$

$$f(x) = \sin x \text{ suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

Câu 49: [Sở GD&ĐT Hà Tĩnh - Lần 1 - năm 2018] Cho

$$\int_0^2 (1-2x)f(x) dx = 3f(2) + f(0) = 2016. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(2x) dx \text{ bằng}$$

A. 4032.

B. 1008.

C. 0.

D. 2016.

Lời giải



Chọn B

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^2 (1-2x)f'(x)dx = (1-2x) \cdot f(x) \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 f(x)dx = -3f(2) - f(0) + 2 \int_0^2 f(x)dx.$$

Mà $\int_0^2 (1-2x)f'(x)dx = 2016$ và $3f(2) + f(0) = 2016$ nên

$$2 \int_0^2 f(x)dx = 2 \times 2016 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = 2016.$$

Mặt khác $I = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt$ (Ở đây đổi biến $t = 2x$).

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \times 2016 = 1008.$$

Câu 50: [Sở GD&ĐT Phú Thọ, lần 1 năm 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên

đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, $f(1) = 1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 28$. Tính $I = \int_0^1 [f(x)]^2 dx$.

A. $I = \frac{37}{9}$.

B. $I = -\frac{37}{9}$.

C. $I = -\frac{9}{5}$.

D. $I = \frac{9}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ } \int_0^1 x^2 f(x)dx = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{(x)^3}{3} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (x)^3 f'(x)dx = -\frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 (x)^3 f'(x)dx = 2 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \left(\int_0^1 (x)^3 f'(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 (x)^6 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7} \cdot 28 = 4 \Rightarrow -2 \leq \int_0^1 (x)^3 f'(x)dx \leq 2.$$

Do đó từ (1) suy ra dấu đẳng thức xảy ra $\Rightarrow f'(x) = k \cdot (x)^3$. Thay vào (1) tính được $k = 14$.

$$\text{Từ đó } f(x) = \frac{7}{2}(x)^4 + C. \text{ Mà } f(1) = 1 \Rightarrow C = -\frac{5}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{7}{2}x^4 - \frac{5}{4}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{7}{2}x^4 - \frac{5}{4} \right)^2 dx = \frac{37}{9}.$$

Câu 51: [Chuyên ĐH Vinh lần 2 – 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$\int_0^1 xf(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]} |f(x)| = 1$. Tích phân $I = \int_0^1 e^x f(x)dx$ thuộc khoảng nào trong các

khoảng sau đây?



A. $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{2}; e-1\right)$.

C. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

D. $(e-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Chú ý rằng $e^x \geq 1+x$ với $x \geq 0$. Thật vậy, xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1$ với $x \geq 0$, ta có $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$ nên hàm đồng biến, do đó $f(x) \geq f(0) = 0$, suy ra $e^x \geq 1+x$.

Vì $\max_{[0;1]} |f(x)| = 1$ nên suy ra $f(x) + 1 \geq 0$ và $f(x) - 1 \leq 0$.

Ta có

$$\bullet (e^x - x - 1)(f(x) - 1) \leq 0 \text{ suy ra } e^x f(x) \leq e^x - x + xf(x) + f(x) - 1 \leq e^x - x + xf(x), \text{ do đó}$$

$$I = \int_0^1 e^x f(x) dx \leq \int_0^1 (e^x - x + xf(x)) dx = \int_0^1 (e^x - x) dx = e - \frac{3}{2} \approx 1,21828.$$

$$\bullet (e^x - x - 1)(f(x) + 1) \geq 0 \text{ suy ra } e^x f(x) \geq x - e^x + xf(x) + f(x) + 1 \geq x - e^x + xf(x), \text{ do đó}$$

$$I = \int_0^1 e^x f(x) dx \geq \int_0^1 (x - e^x + xf(x)) dx = \int_0^1 (x - e^x) dx = \frac{3}{2} - e \approx -1,21828.$$

Câu 52: [Chuyên Lê Hồng Phong - TP HCM - năm 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên

$\mathbb{R}$ thỏa $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính $f(2)$?

A. $f(2) = \frac{e}{3}$.

B. $f(2) = \frac{e}{6}$.

C. $f(2) = \frac{e^2}{3}$.

D. $f(2) = \frac{e^2}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)(x+2) + f'(x)(x+1) = e^x \Leftrightarrow e^x f(x)(x+2) + e^x f'(x)(x+1) = (e^x)^2$

$$\Leftrightarrow [f(x)(x+1)e^x]' = (e^x)^2.$$

$$\text{Do đó } \int_0^2 [f(x)(x+1)e^x]' dx = \int_0^2 (e^x)^2 dx \Leftrightarrow f(x)(x+1)e^x \Big|_0^2 = \int_0^2 e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow 3e^2 f(2) - f(0) = \frac{e^4 - 1}{2} \Rightarrow f(2) = \frac{e^2}{6}.$$

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $[(2x+1) \ln 2 + 2] f(x) + (2x+1) f'(x) = 2^x$ và $f(0) = 1$. Tính $f(3)$?

A. $f(3) = \frac{9}{14}$.

B. $f(3) = \frac{30}{\ln 2}$.



C. $f(3) = \frac{15}{56\ln 2} + \frac{1}{56}$. D. $f(3) = \frac{15}{28\ln 2} + \frac{3}{28}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$[(2x+1) \cdot \ln 2 + 2] f(x) + (2x+1) f'(x) = 2^x$$

$$\Leftrightarrow 2^x [(2x+1) \cdot \ln 2 + 2] f(x) + 2^x (2x+1) f'(x) = (2^x)^2$$

$$\Leftrightarrow [f(x)(2x+1)2^x]' = 2^{2x}$$

$$\text{Do đó: } \int_1^3 [f(x)(2x+1)2^x]' dx = \int_1^3 2^{2x} dx \Leftrightarrow f(x)(2x+1)2^x \Big|_1^3 = \int_1^3 2^{2x} dx$$

$$\Rightarrow 56f(3) - 6f(1) = \frac{2^{2 \cdot 3} - 2^{2 \cdot 1}}{2\ln 2} \Rightarrow f(3) = \frac{15}{28\ln 2} + \frac{3}{28}.$$

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa: $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x, \forall x \neq \{0; -1\}$ và $f(1) = -2\ln 2$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $a^2 + b^2 = ?$

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x(x+1)f'(x) + f(x) = x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \frac{f(x)}{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow f'(x) \frac{x}{x+1} + \frac{f(x)}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right)' = \frac{x}{x+1}$$

$$\text{Do đó } \int_1^2 \left(f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right)' dx = \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx \Rightarrow \left(f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right) \Big|_1^2 = \left(x - \ln|x+1| \right) \Big|_1^2$$

$$\Rightarrow f(2) \cdot \frac{2}{3} - f(1) \cdot \frac{1}{2} = 1 + \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}(a + b\ln 3) - \frac{1}{2}(-2\ln 2) = 1 + \ln \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b\ln 3 = 1 - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{2}.$$



Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx.$$

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = 2$.

D. $I = 1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta thấy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x d[f(x)] = [\sin 2x \cdot f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) 2 \cos 2x dx = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) 2 \cos 2x dx = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Do } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x) dx = \frac{\pi}{8} \text{ nên: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cdot \cos(2x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x) dx = 0.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - \cos(2x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \cos 2x + C.$$

$$\text{Do } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow C = 0, \text{ nên } f(x) = \cos 2x.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(4x) dx = \frac{1}{4}.$$

Cách 2: Dùng bất đẳng thức Holder.

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow f(x) = k \cdot g(x), \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Theo cách thứ nhất, ta đã có: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos(2x) dx = \frac{\pi}{8}.$$

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cdot \cos(2x) dx \right)^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x) dx = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{64}.$$



Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = k \cdot \cos 2x, k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Với } f(x) = k \cdot \cos 2x, k \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} (k \cdot \cos 2x \cdot \cos 2x) dx = \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow k \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)^2 dx = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \cos 2x.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx = I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(4x) dx = \frac{1}{4}.$$

Câu 56: (PTNK-HCM LẦN 1) Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ và

$$\text{thỏa mãn hệ thức } \begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -x \cdot f'(x); f(x) = -x \cdot g'(x) \end{cases}. \text{ Tính } I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx.$$

A. $8\ln 2$

B. $3\ln 2$

C. $6\ln 2$

D. $4\ln 2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) + g(x) = -x[f'(x) + g'(x)] \Rightarrow \int [f(x) + g(x)] dx = \int -x[f'(x) + g'(x)] dx.$$

$$= -x[f(x) + g(x)] + \int [f(x) + g(x)] dx \Rightarrow -x[f(x) + g(x)] = C \Rightarrow f(x) + g(x) = -\frac{C}{x}$$

$$\text{Vì } f(1) + g(1) = -C \Rightarrow C = -4$$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^4 \frac{4}{x} dx = 8\ln 2.$$

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. π .

B. $\frac{1}{\pi}$.

C. $\frac{2}{\pi}$.

D. $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \int_0^1 \cos(\pi x) df(x) = f(x) \cos(\pi x) \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx$$

$$= -f(1) - f(0) + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$ ta có:

$$\frac{1}{4} = \left[\int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx \right]^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \cdot \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2\pi x}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$



Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = k \sin \pi x$.

Từ đó ta có:

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 f(x) \sin \pi x dx = \int_0^1 k \sin^2(\pi x) dx = k \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} dx = \frac{k}{2} \left(x - \frac{\sin 2\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 1.$$

Suy ra $f(x) = \sin \pi x$.

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin \pi x dx = -\frac{\cos \pi x}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Câu 58: [Thi thử THPT Gia Bình - Bắc Ninh] Gọi $\frac{m}{n}$ là giá trị lớn nhất của a để bất phương trình $\sqrt{a^3}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{a}}{(x-1)^2} \leq \sqrt[4]{a^3} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$ có ít nhất một nghiệm, ở đó m, n là những số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $P = 22m + n$.

A. 46.

B. 38.

C. 24.

D. 35.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \neq 1$. Biến đổi tương đương bất phương trình ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{a^3}(x-1)^4 - \sqrt[4]{a^3} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| (x-1)^2 + \sqrt{a} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{a^3}(x-1)^2 - \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \right)^2 + \sqrt{a} - \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Nếu $a > \frac{1}{16}$ thì $\sqrt{a} - \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) > 0, \forall x$ nên bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $a = \frac{1}{16}$ thì bất phương trình trở thành

$$\left(\frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \right)^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi x}{2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi x}{2} = 1 \\ \frac{1}{8}(x-1)^2 = \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, x = -1$$

Vậy $a = \frac{1}{16}$ là giá trị lớn nhất để bất phương trình có nghiệm.

Suy ra $m = 1; n = 16 \Rightarrow P = 22m + n = 22 \cdot 1 + 16 = 38$.

Câu 59: (THPT Quảng Xương - Thanh Hoá - Lần 2 - Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn:

$$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt, g(x) = f^2(x). \text{ Tính } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx.$$

A. $\frac{1011}{2}$

B. $\frac{1009}{2}$

C. $\frac{2019}{2}$

D. 505

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(0) = 1$

$$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2018 f(x) = 2018 \sqrt{g(x)} \Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \Rightarrow \int_0^x \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = 2018 \int_0^x dx.$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{g(t)} - 1) = 2018t \Rightarrow \sqrt{g(t)} = 1009t + 1 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(t)} dt = \frac{1011}{2}.$$

Câu 60: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

+) Đặt $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx$. Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2} f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

+) Có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x) dx = \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - 2}{2}$

+) Mà $I = \frac{2-\pi}{2}$ suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 dx = 0$ (1).



+) Áp dụng kết quả: Nếu $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a; b]$.

Từ (1) suy ra $f(x) - \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hay $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

+) Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. **Chọn B**

Câu 61: (Đề tham khảo của BGD năm 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$.

B. 1.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

+) Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}$, khi đó $\int_0^1 3x^2 f(x) dx = x^3 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 f'(x) dx$

+) Ta có $1 = f(1) - \int_0^1 x^3 f'(x) dx$ suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$.

+) Áp dụng bất đẳng thức tích phân $\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = kg(x)$ với k là hằng số.

Ta có $1 = \left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^6 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7}$. Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = kx^3$ với k là hằng số. Mà $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$ hay $\int_0^1 kx^6 dx = -1$ suy ra $k = -7$.

+) Vậy $f'(x) = -7x^3$ nên $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + c$ mà $f(1) = 0$ nên $f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4)$ suy ra

$\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}$. **Chọn A**



Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và

$$2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \geq 3 \int_0^1 \left[f'(x) f^2(x) + \frac{1}{9} \right] dx. \text{ Tích phân } \int_0^1 f^3(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{8}{5}$.

D. $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D

+) Áp dụng bất đẳng thức tích phân phân $\int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = kg(x)$ với k là hằng số.

+) Ta có $\int_0^1 dx \cdot \int_0^1 f'(x) f^2(x) dx \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \right)^2$ (1) nên từ giả thiết suy ra

$$2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \geq 3 \int_0^1 \left[f'(x) f^2(x) \right] dx + \frac{1}{3} \geq 3 \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \right)^2 + \frac{1}{3}$$

hay $3 \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx - \frac{1}{3} \right)^2 \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx = \frac{1}{3}$ và dấu "=" ở (1) xảy ra, tức là ta

có $\begin{cases} \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx = \frac{1}{3} \\ \sqrt{f'(x)} f(x) = k \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$. Từ đó tính được $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{3}}$ suy ra $\int_0^1 f^3(x) dx = \frac{7}{6}$.

Chọn D

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11} \text{ và } \int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ là}$$

A. $\frac{35}{11}$.

B. $\frac{65}{21}$.

C. $\frac{23}{7}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Cách1: Xét $A = \int_0^1 x^4 f(x) dx$, Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^4 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{5} x^5 \end{cases}$

$$A = \frac{1}{5} x^5 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \int_0^1 x^5 f'(x) dx = \frac{7}{11} \Leftrightarrow \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \int_0^1 x^5 f'(x) dx = \frac{7}{11} \Leftrightarrow \int_0^1 x^5 f'(x) dx = \frac{-2}{11}$$

Lại có $\int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{11}$ nên:



$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 x^5 f'(x) dx + 4 \int_0^1 x^{10} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + 2x^5)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2x^5$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-x^6}{6} + C \Rightarrow C = \frac{10}{3} \text{ (do } f(1) = 0)$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^1 \left(\frac{-x^6}{6} + \frac{10}{3} \right) dx = \frac{23}{7}$$

Cách 2: Trắc nghiệm

$$\text{Từ } \begin{cases} \int_0^1 f'(x)^2 dx = \frac{4}{11} \\ \int_0^1 x^5 f'(x) dx = \frac{-2}{11} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f'(x) [f'(x) + 2x^5] dx = 0.$$

$$\text{Chọn } f'(x) = -2x^5 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^6}{6} + \frac{10}{3} \Rightarrow I = \frac{23}{7}.$$

Câu 64: Cho $f(x) \neq 0$ biết $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} \cdot f^2(x)$ và $f(1) = -\frac{1}{3}$. Cho biết giá trị của

$$8f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} - 1 \right), \text{ với } \frac{b}{a} \text{ là phân số tối giản. Tính } a + b.$$

A. 4070307.

B. 4070308.

C. 4066273.

D. 40662241.

Lời giải

Chọn B

Có

$$f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} \cdot f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^3 + x + \frac{1}{x} + C.$$

$$f(1) = -\frac{1}{3} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^3 + x + \frac{1}{x} = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{x}{x^4 + x^2 + 1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x(x+1)+1} - \frac{1}{x(x-1)+1} \right)$$



$$S = \sum_{x=1}^{2017} f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2+1} - \frac{1}{0.1+1} + \frac{1}{2.3+1} - \frac{1}{1.2+1} + \dots + \frac{1}{2017.2018+1} - \frac{1}{2016.2017+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2017.2018+1} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{b}{a} \right)$$

$$\Rightarrow a = 2017.2018 + 1, b = 1 \Rightarrow a + b = 4070308.$$

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 2019e^{2018}$. **B.** $f(1) = 2019e^{-2018}$. **C.** $f(1) = 2018e^{2018}$. **D.** $f(1) = 2017.e^{2018}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) - 2018f(x) = 2018.x^{2017}.e^{2018x} \Leftrightarrow \frac{f'(x) - 2018f(x)}{e^{2018x}} = 2018.x^{2017}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x) - 2018f(x)}{e^{2018x}} dx = \int_0^1 2018.x^{2017} dx \quad (1).$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 \frac{f'(x) - 2018f(x)}{e^{2018x}} dx = \int_0^1 f'(x).e^{-2018x} dx - \int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x} dx$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2018.e^{-2018x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -e^{-2018x} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I_1 = f(x).(-e^{-2018x}) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x).e^{-2018x} dx \Rightarrow I = f(1).e^{-2018} - 2018.$$

$$\text{Khi đó từ (1) suy ra } I = f(1).e^{-2018} - 2018 = x^{2018} \Big|_0^1 \Leftrightarrow f(1) = 2019.e^{2018}.$$

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và

$$3 \int_0^1 \left[f'(x) [f(x)]^2 + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng BĐT Holder ta có:

$$9 \left[\int_0^1 \left(f'(x) [f(x)]^2 + \frac{1}{9} \right) dx \right]^2 \leq 4 \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_0^1 f'(x) f^2(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 9 \left[\int_0^1 \left(f'(x) f^2(x) + \frac{1}{9} \right) dx \right]^2 - 4 \int_0^1 f'(x) f^2(x) dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \left[\int_0^1 f'(x) f^2(x) dx - \frac{1}{9} \right]^2 \leq 0 \Rightarrow f'(x) f^2(x) = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{f^3(x)}{3} = \frac{1}{9} x + C$$



Vì $f(0)=1$ nên $C=\frac{1}{3}$. Khi đó $f^3(x)=\frac{1}{3}x+1$.

$$\text{Vậy } \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x+1\right) dx = \frac{7}{6}.$$

Câu 67: [Phạm Minh Tuấn, lần 3, năm 2018- Câu 49] Cho hàm số $f(x)$ dương và có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0)=4f(1)=\frac{1}{16}$, $f'(x)<0 \forall x \in [0; 1]$ và

$$\int_0^1 (x+1)^3 \cdot f'(x) dx = -\frac{1}{8}, \int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} dx = \frac{1}{64}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{1}{24}$.

B. $\frac{1}{32}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\int_0^1 (x+1)^3 f'(x) dx = (x+1)^3 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 3(x+1)^2 f(x) dx$$

$$\text{mà } f(0)=4f(1)=\frac{1}{16}, \int_0^1 (x+1)^3 \cdot f'(x) dx = -\frac{1}{8}$$

$$\text{Nên } \int_0^1 (x+1)^2 f(x) dx = \frac{1}{16}.$$

$$\text{Vì } f(x)>0, f'(x)<0 \forall x \in [0; 1] \text{ nên } \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} > 0; -(x+1)f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0; 1]$$

$$\frac{1}{16} = \int_0^1 (x+1)^2 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{f(x)}{\sqrt[3]{[f'(x)]^2}} \right) \left((x+1)^2 \cdot \sqrt[3]{[f'(x)]^2} \right) dx$$

$$\leq \sqrt[3]{\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} dx} \cdot \sqrt[3]{\int_0^1 -(x+1)^3 f'(x) dx} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} = k(x+1)^3 f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \ln[f(x)] = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \ln(x+1) + C$$

$$\text{Do } f(0)=\frac{1}{4}, f(1)=\frac{1}{16} \text{ nên } C = \ln \frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{32}.$$



Câu 68: [THPT ĐẶNG THỨC HỮA LẦN 1- 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên

$[0; 1]$ thỏa mãn $f(1)=1, f'(x)<0 \forall x \in [0; 1]$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}, \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}$. Tính

tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{3}{5}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{3}{4}$.

D. $I = \frac{1}{5}$.

Câu 69: (THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Lần 1 - 2018) Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn hệ thức hệ thức sau với mọi $x \in [1; 4]$

$$\begin{cases} f(1) = 2g(1) = 2 \\ f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{g(x)}; g'(x) = -\frac{2}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{f(x)} \end{cases} \text{ Tính } I = \int_1^4 [f(x) \cdot g(x)] dx.$$

A. $4\ln 2$.

B. 4.

C. $2\ln 2$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có $f'(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ và $g'(x) \cdot f(x) = -\frac{2}{x\sqrt{x}}$, suy ra

$$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}}, \text{ hay } [f(x) \cdot g(x)]' = -\frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Do đó $f(x) \cdot g(x) = -\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{x}} + C$. Lại có $f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 1 = 2$ nên $C = 0$.

$$\Rightarrow I = \int_1^4 [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4.$$

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 2 - e$.

B. $I = e - 2$.

C. $I = \frac{e}{2}$.

D. $I = \frac{e-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$$



$$\text{Suy ra } A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$$

$$\text{Xét } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$$

$$\text{Suy ra } f'(x) + xe^x = 0, \forall x \in [0;1] \text{ (do } (f'(x) + xe^x)^2 \geq 0, \forall x \in [0;1])$$

$$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C$$

$$\text{Do } f(1) = 0 \text{ nên } f(x) = (1-x)e^x$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x \Big|_0^1 = e - 2.$$

Câu 71: (THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh lần 3-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo

hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0, f'(1) = \frac{9}{2}, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{39}{4}, \int_0^1 (x^2 + x) f''(x) dx = \frac{5}{2}$. Tính

tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{14}{3}$.

B. 14.

C. $\frac{7}{3}$.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Chọn } f(x) = ax^2 + bx, f(0) = 0; f'(x) = 2ax + b, f'(1) = \frac{9}{2} \Rightarrow 2a + b = \frac{9}{2} \quad (1)$$

$$[f'(x)]^2 = (ax + b)^2 \Rightarrow \int_0^1 (ax + b)^2 dx = \frac{4}{3} a^2 + 2ab + b^2 = \frac{39}{4} \quad (2)$$

$$\text{Lại có: } f''(x) = 2a \Rightarrow \int_0^1 (x^2 + x) f''(x) dx = 2a \int_0^1 (x^2 + x) dx = \frac{5a}{3} \Rightarrow \frac{5a}{3} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được $b = \frac{9}{2}$. Từ đây thay a, b vào (2) kiểm chứng (2) đúng.

$$\text{Vậy ta tìm được } f(x) = \frac{3}{2}(x^2 + x). \text{ Vậy } I = \int_0^2 f(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^2 (x^2 + x) dx = 7$$



Câu 72: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x) \geq x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ và $f(1) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

A. 3.

B. 2.

C. $\frac{5}{2} + \ln 2$.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $f'(x) \geq x + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ nên lấy tích phân hai vế với cận từ 1 đến 2 ta được: $\int_1^2 f'(x) dx \geq \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2} + \ln 2$.

Mà $\int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = f(2) - 1$ nên $f(2) - 1 \geq \frac{3}{2} + \ln 2$.

Suy ra $f(2) \geq \frac{5}{2} + \ln 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$.

Suy ra $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + C$, mà $f(1) = 1$ nên $C = \frac{1}{2}$.

Do đó $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(2) = \frac{5}{2} + \ln 2$ khi $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2}$.

Câu 73: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $\begin{cases} f'(1) = g(1) = 1; f(2)g(2) = f(1) \\ 1 - f'(x)g'(x) = g(x) \cdot \left[f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) \right] \end{cases} \quad \forall x \neq 0$

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)g'(x)$

A. $I = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.B. $I = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.C. $I = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.D. $I = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

Lời giải

Chọn D

$$1 - f'(x)g'(x) = g(x) \cdot \left[f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) \right]$$

$$\Leftrightarrow x - xf'(x)g'(x) = g(x) \cdot [xf''(x) + f'(x)]$$



$$\Leftrightarrow g(x)[xf'(x)]' + xf'(x)g'(x) = x$$

$$\Leftrightarrow [xf'(x)g(x)]' = x$$

$$\Leftrightarrow xf'(x)g(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

Do $f'(1) = g(1) = 1$ nên $xf'(x)g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ hay $f'(x)g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$

Lấy tích phân cận từ 1 đến 2 ta được

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) dx = \int_1^2 f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - I$$

$$\Rightarrow I = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$,

$\forall x \in \mathbb{R}^*$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = 4 \ln 2 - \frac{15}{8}$.

D. $I = 4 \ln 2 + \frac{15}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$

Đổi cận:

x	$\frac{1}{2}$	2
t	2	$\frac{1}{2}$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$\Rightarrow 3I = 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \left[2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right] dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{3}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}.$$

Câu 75: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$, $\forall x \in [0;1]$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{1}{2019.2021}$. **B.** $I = \frac{1}{2018.2019}$. **C.** $I = \frac{1}{2018.2020}$. **D.** $I = \frac{1}{2019.2020}$.

Lời giải

Chọn A

Nhân x^2 vào hai vế của giả thiết ta được $3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^{2020} \Leftrightarrow [x^3 \cdot f(x)]' = x^{2010}$.

$$\text{Suy ra } \int [x^3 \cdot f(x)]' dx = \int x^{2010} dx \Rightarrow x^3 f(x) = \frac{x^{2021}}{2021} + c \Rightarrow f(x) = \frac{x^{2018}}{2021} + \frac{c}{x^3}.$$

Chọn $f(x) = \frac{x^{2018}}{2021}$ ta có

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \frac{x^{2019}}{2019.2021} \Big|_0^1 = \frac{1}{2019.2021}.$$

