

NHÓM TOÁN VDC
ĐỀ THI THỬ QUỐC GIA LẦN 2



ĐỀ THI THỬ THPT QG NĂM 2020

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút

(không kể thời gian giao đề)

Mã Đề:

(Đề gồm 06 trang)

Họ và tên: SBD:

Câu 1: Cho dãy số $u_n = a\sqrt{n} + b$ (a, b là các tham số thực). Biết $u_1 + u_9 = 10$, tính u_4 .

- A. $u_4 = 5$. B. $u_4 = 4$. C. $u_4 = 8$. D. $u_5 = 10$.

Câu 2: Xét các mệnh đề sau:

(i): Nếu $mp(\alpha)$ vuông góc với $mp(\beta)$ thì mọi đường thẳng trong (α) đều vuông góc với (β) .

(ii): Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(iii): Nếu đường thẳng a và $mp(\alpha)$ cùng vuông góc với $mp(\beta)$ thì đường thẳng a song song với $mp(\alpha)$.

Số mệnh đề đúng là:

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2AD = 2a$, $\angle BAD = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC .

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số phân biệt $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ thỏa mãn $a_k > k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 6$.

- A. 3^6 . B. $6.6!$. C. 3.2^6 . D. A_9^5 .

Câu 5: Có 6 bi đỏ, 7 bi xanh và 10 bi vàng được đánh số khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một dãy sao cho mỗi bi đỏ ở giữa một bi xanh và một bi vàng, không có bi xanh nào xếp kề bi vàng?

- A. $(C_6^3 C_9^2 + C_9^3 C_6^2).6!.7!.10!$. B. $C_6^3 C_9^2 + C_9^3 C_6^2$.
C. $(C_7^3 C_{10}^2 + C_{10}^3 C_7^2).6!.7!.10!$. D. $2.6!.7!.10!$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d song song với hai mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z + 1 = 0$. Một véc tơ chỉ phương của d có tọa độ là:

- A. $(1; 3; 2)$. B. $(0; 1; 1)$. C. $(1; -3; 2)$. D. $(0; 1; -1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

- A. $M(-1; 2; -1)$. B. $M(-1; 1; 1)$. C. $M(-1; 3; -3)$. D. $M(-1; 0; 3)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. Đường thẳng d thay đổi đi qua $I(1; 1; 2)$ và tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 các góc bằng nhau. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ $A(4; 0; 0)$ đến đường thẳng d .

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{34}}{17}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{26}}{13}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2; 1; 7)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Oy có tọa độ là

- A. $(0; 1; 0)$. B. $(2; 0; 0)$. C. $(0; 0; 7)$. D. $(7; 1; 2)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $A(2; 1; -3)$ và song song với mặt phẳng (Oxz) là

- A. $z-1=0$. B. $y-1=0$. C. $x-2=0$. D. $y-3=0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 0)$. Giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng khoảng cách từ B đến Oy bằng

- A. $m=2$. B. $m=-2$. C. $m=-3$. D. $m=\pm 2$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho $d_1: \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -10 + 3t \\ z = 14 - 4t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = -s \\ y = 3 \\ z = -1 + 4s \end{cases}$. Mặt phẳng

$(P): 2x + 3y - 4z + m = 0$ cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N . Mặt cầu (S) qua M, N cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B ($A \neq M, B \neq N$) sao cho $AB = 13$. Tâm I của mặt cầu (S) chạy trên

- A. $(Q): x - 4z + 3 = 0$. B. $(Q): x - 4z - 3 = 0$.

- C. $\Delta: \begin{cases} x = 6 - u \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + 4u \end{cases}$. D. $\Delta: \begin{cases} x = 6 + 2u \\ y = 1 + 3u \\ z = \frac{1}{2} - 4u \end{cases}$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 2)$, $B(0; 1; 0)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$. B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 2$.
C. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{3}$. D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 12$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Số đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên là

- A. Vô số B. 12. C. 4. D. 6.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus 1$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình

$$m^3 f^3(x) + 3mf(x) = (12m^2 + 7)\sqrt{12m^2 + 1} + 36m^2 + 7 \text{ có hai nghiệm phân biệt?}$$

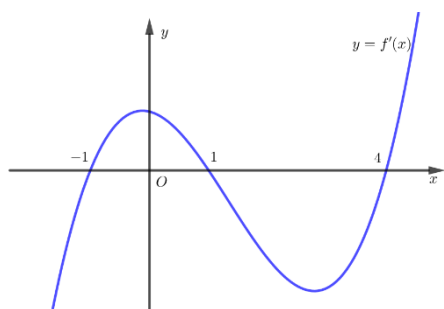
- A. 4041. B. 2019. C. 2010. D. 2021.

Câu 16: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c < -1 \\ 4a-2b+c > 8 \\ bc < 0 \end{cases}$. Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Số điểm cực

trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ lớn nhất có thể có là

- A. 2. B. 12. C. 5. D. 7.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Bất phương trình $\log_5[f(x) + m + 2] + f(x) > 4 - m$ đúng với mọi $x \in (-1; 4)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq 4 - f(-1)$. B. $m \geq 3 - f(1)$. C. $m < 4 - f(-1)$. D. $m \geq 3 - f(4)$.

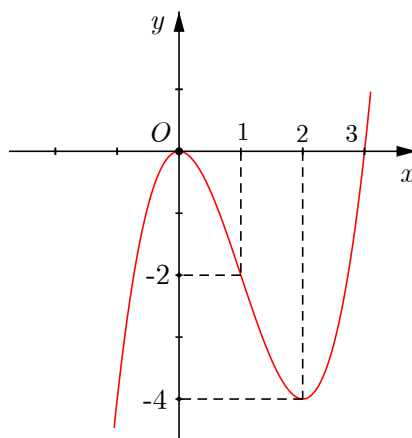
Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$							$+\infty$
				</				

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x) - 2020}$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

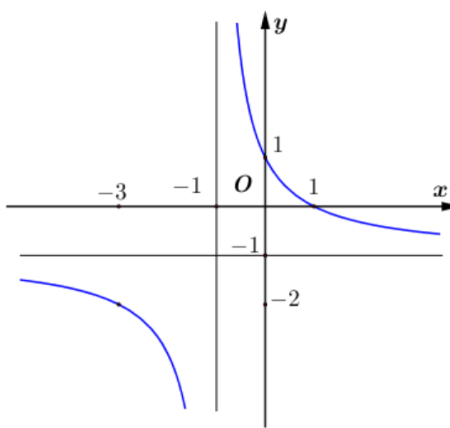
Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Với giá trị nào của m thì giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f(x)| + m$ trên đoạn $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ bằng -2 .

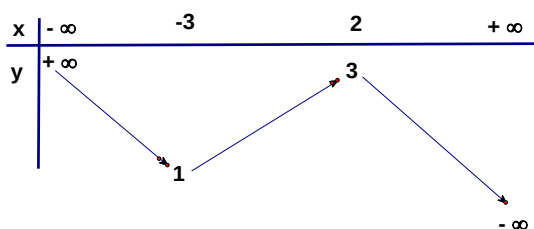
- A. $m = -4$. B. $m = -5$. C. $m = 0$. D. $m = -6$.

Câu 20: Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



- A. $y = \frac{-x}{x+1}$. B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.
C. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$. D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cực đại là đường thẳng có phương trình

A. $y = 2x - 1$

B. $x = 2$

C. $y = 3$

D. $y = 1$

Câu 22: Cho hàm số $y = (x-3)^2 |x-m|$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ hơn 2020.

A. 2019

B. 4041

C. 2022

D. 2021

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x + x$ có đồ thị (C) , gọi (S) là tập hợp các điểm cực trị của (C) với hoành độ các điểm cực trị thuộc $[0; 10\pi]$. Có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh thuộc (S) .

A. 900

B. 1140

C. 120

D. 720

Câu 24: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \log_2 x$.

B. $y = x^3 - 3x + 1$.

C. $y = x^4 + x^2 - 1$.

D. $y = 2^x$.

Câu 25: Cho các số thực $a, b, c, d, a \neq 0$. Xét hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = x^3 + ax^2 - bx + c$. Hỏi có bao nhiêu bộ số nguyên (a, b, c, d) để các điều kiện sau đây đồng thời xảy ra:

1) $4x^3 - 12x^2 + 12x - 3 \leq f(x) \leq 2019(x^3 - 3x^2 + 3x) - 2018, \forall x \geq 1$.

2) Hàm số $y = g(f(\tan x))$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. 6.

B. 9.

C. 2016.

D. Vô số.

Câu 26: Cho khối nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 12π .

B. 36π .

C. 48π .

D. 24π .

Câu 27: Cho hình trụ có diện tích xung quanh là 16π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. 16π .

B. 8π .

C. 32π .

D. $\frac{16\pi}{3}$.

Câu 28: Cho hình trụ có bán kính $2a$, chiều cao là a . Hai đỉnh A, B thuộc hai đường tròn đáy sao cho góc tạo bởi AB và trục của hình trụ là 60° . Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng

A. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

B. $a\sqrt{13}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$.

Câu 29: Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$.

B. $1 < \log_a b < \log_b a$.

C. $\log_b a < \log_a b < 1$.

D. $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Câu 30: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

A. $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

B. $D = [-1; 3]$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

D. $D = (-1; 3)$.

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$.

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

D. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Câu 32: Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+2)=3$ là

A. $\{-4; 4\}$.

B. $\{-5; 5\}$.

C. $\{\pm\sqrt{7}\}$.

D. $\{5\}$.

Câu 33: Gọi S là tập các giá trị thực của x để $\log_3(x-3)-1; 1; \log_3(7x-1)$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Tích các phần tử của S bằng

A. $-\frac{6}{7}$.

B. $\frac{24}{7}$.

C. $-\frac{24}{7}$.

D. 4.

Câu 34: Cho số phức $z=1-2i$. Phần ảo của số phức $w=z-i$ là

A. -3.

B. -2.

C. -1.

D. 1.

Câu 35: Trên tập số phức, phương trình $\frac{1}{z-1}=2+i$ có nghiệm là

A. $z=2+i$.

B. $z=3+i$.

C. $z=\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$.

D. $z=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i$.

Câu 36: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|=\sqrt{13}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+3|^2-|z-2i|^2$. Tính $M+m$.

A. 3.

B. -2.

C. 13.

D. 2.

Câu 37: Biết $\int_1^3 f(x)dx=6$ và $\int_1^5 f(x)dx=5$ khi đó $\int_3^5 f(x)dx$ bằng

A. 11.

B. 7.

C. -1.

D. 1.

Câu 38: Cho $\int_1^3 f(x)dx=16$. Khi đó $I=\int_0^1 f(-2x+3)dx$ bằng:

A. $I=8$.

B. $I=4$.

C. $I=32$.

D. $I=16$.

Câu 39: Biết tích phân $I=\int_1^e \frac{x \ln^2 x - 1}{x \ln x + 1} dx = x + \ln \frac{y.e+z}{u.e+v}$ trong đó $x, y, u, v \in \mathbb{Q}$. Khi đó giá trị của

$x + \frac{y+z}{u+v}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{7}{2}$.

D. 4.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và đồng biến trên $[-1;0]$. Biết

$[f'(x)]^2 = (x+2).e^{-2f(x)}, \forall x \in [-1;0]$. Biết giá trị $f(0) = \frac{3}{2} \ln 2$, khi đó giá trị $f(-1)$ bằng

A. 0.

B. $\ln 3$.

C. 1.

D. $\ln 2$.

Câu 41: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + C.$

B. $\int 0dx = 0.$

C. $\int f(x)dx = f'(x) + C.$

D. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

Câu 42: Cho $I = \int x(1-x^2)^{2020} dx$. Đặt $u = 1-x^2$, khi đó viết I theo u và du ta được

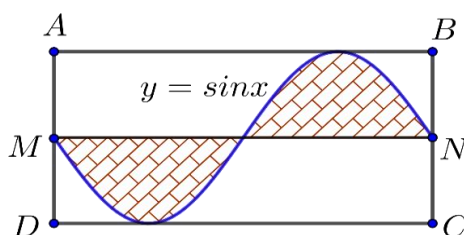
A. $I = \int 2u^{2020} du.$

B. $I = -2 \int u^{2020} du.$

C. $I = \frac{1}{2} \int u^{2020} du.$

D. $I = -\frac{1}{2} \int u^{2020} du.$

Câu 43: Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$. Người ta trồng hoa vào phần đất được gạch sọc được giới hạn bởi cạnh AB , CD , đường trung bình MN và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi(m)$ và $AD = 2(m)$.



Diện tích phần còn lại là

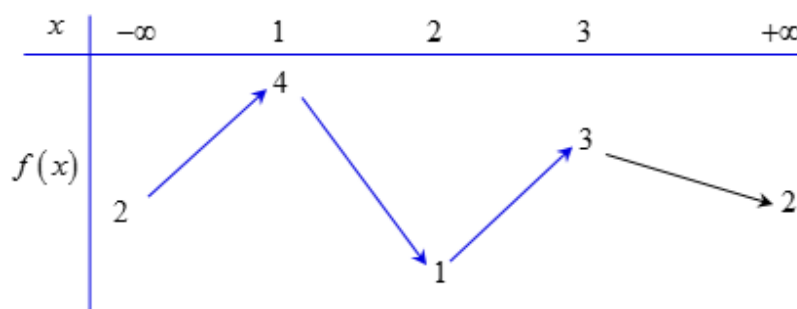
A. $4\pi - 1 (m^2)$

B. $4(\pi - 1) (m^2)$

C. $4\pi - 2 (m^2).$

D. $2\pi - 1 (m^2)$

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên R và có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2^{f(x) + \frac{4}{f(x)}} + \log_2 [f^2(x) - 4f(x) + 5] = m$ có nghiệm?

A. 2.

B. 18.

C. 19.

D. 3.

Câu 45: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2019^{\frac{2x}{1-x^2}} + \frac{x^2 + 2x - 1}{1 - x^2} = \log_{2019} \left(\frac{1 + 4036x - x^2}{1 - x^2} \right)^{2019}$. Khi

đó tập S có bao nhiêu tập con

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 16.

Câu 46: Cho số phức $z = 2i - 1$. Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. $M(2; -1).$

B. $N(-1; 2).$

C. $P(2; 1).$

D. $Q(1; 2).$

Câu 47: Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - i| \cdot \left| \frac{(i-1)z}{i+1} + 1 \right| = 4$ là một đường tròn. Tâm I và bán kính R của đường tròn này là

- A. $I(1;0); R=2$. B. $I(-1;0); R=4$. C. $I(0;1); R=2$. D. $I(0;-1); R=4$.

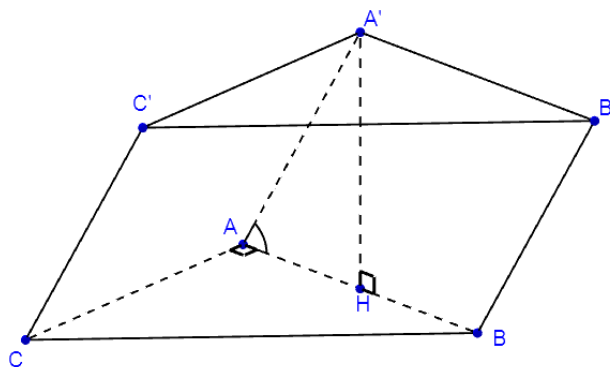
Câu 48: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Khi đó khối chóp $A'.B'C'CB$ có thể tích bằng

- A. $\frac{2V}{3}$ B. $\frac{V}{3}$ C. $\frac{3V}{4}$ D. $\frac{V}{2}$

Câu 49: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{6}a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD , G là trung điểm MN . Khi đó tứ diện $GBNC$ có thể tích bằng

- A. $\sqrt{3}a^3$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$ C. $2\sqrt{3}a^3$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

Câu 50: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của AB , $A'AB = \alpha$ sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt phẳng (P) đi qua H vuông góc với AA' và chia khối lăng trụ thành hai phần, gọi phần chứa điểm A có thể tích là V_1 , lăng trụ đã cho có thể tích là V .



- A. $V_1 = \frac{5V}{12}$. B. $V_1 = \frac{5V}{36}$. C. $V_1 = \frac{V}{9}$. D. $V_1 = \frac{2V}{9}$.

===== Hết =====

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.A	5.A	6.A	7.A	8.B	9.A	10.B
11.A	12.C	13.A	14.D	15.D	16.D	17.D	18.A	19.D	20.B
21.C	22.D	23.A	24.D	25.A	26.A	27.A	28.A	29.D	30.C
31.A	32.B	33.D	34.A	35.D	36.B	37.C	38.A	39.A	40.A
41.D	42.D	43.B	44.C	45.A	46.B	47.C	48.A	49.A	50.B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho dãy số $u_n = a\sqrt{n} + b$ (a, b là các tham số thực). Biết $u_1 + u_9 = 10$, tính u_4 .

A. $u_4 = 5$.

B. $u_4 = 4$.

C. $u_4 = 8$.

D. $u_5 = 10$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_1 + u_9 = (a+b) + (3a+b) = 4a+2b = 2(2a+b) = 10$

Từ đây ta suy ra $u_4 = 2a+b = 5$.

Câu 2: Xét các mệnh đề sau:

(i): Nếu $mp(\alpha)$ vuông góc với $mp(\beta)$ thì mọi đường thẳng trong (α) đều vuông góc với (β) .

(ii): Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(iii): Nếu đường thẳng a và $mp(\alpha)$ cùng vuông góc với $mp(\beta)$ thì đường thẳng a song song với $mp(\alpha)$.

Số mệnh đề đúng là:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

+) Mệnh đề (i) sai vì nếu gọi Δ là giao tuyến của (α) và (β) thì chỉ những đường thẳng nằm trong (α) và vuông góc với Δ mới vuông góc với (β) , các đường thẳng trong (α) mà không vuông góc với Δ thì cũng không vuông góc với (β) .

+) Mệnh đề (ii) sai vì hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng có thể cắt nhau, lấy ví dụ như trong hình lăng trụ đứng thì các mặt bên đều vuông góc với đáy nhưng các mặt bên cắt nhau theo giao tuyến là các đường thẳng chứa các cạnh bên.

+) Mệnh đề (iii) sai vì đường thẳng a có thể nằm trong $mp(\alpha)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2AD = 2a$, $\angle BAD = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC .

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

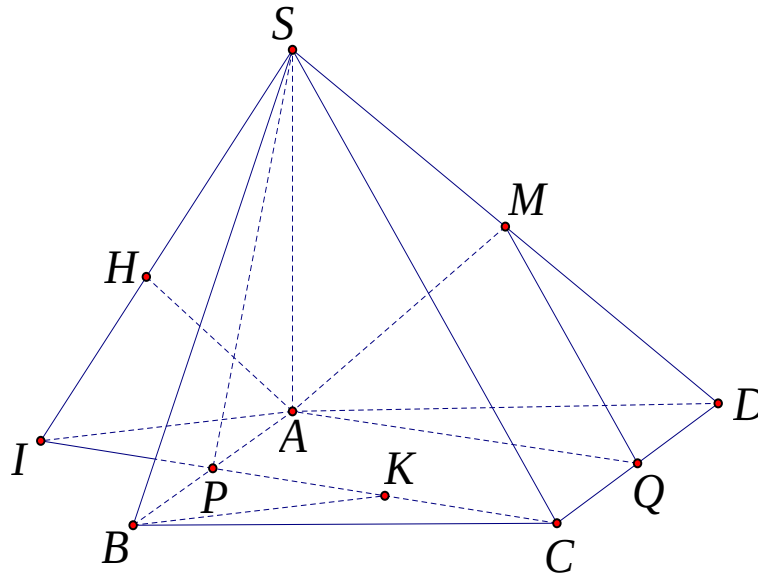
B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Ta có: $(SPC) // (AMQ) \Rightarrow d_{(AM; SC)} = d_{(A; (SPC))}$.

Dựng $AI \perp CP$ tại I ; $AH \perp SI$ tại $H \Rightarrow AH = d_{(A; (SPC))}$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AS^2}.$$

$\triangle BCP$ có $BP = BC = a$ và $\angle BPC = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

$$\text{Gọi } K \text{ là trung điểm } CP \Rightarrow \begin{cases} BK \perp CP \\ BK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta thấy } AI = BK \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

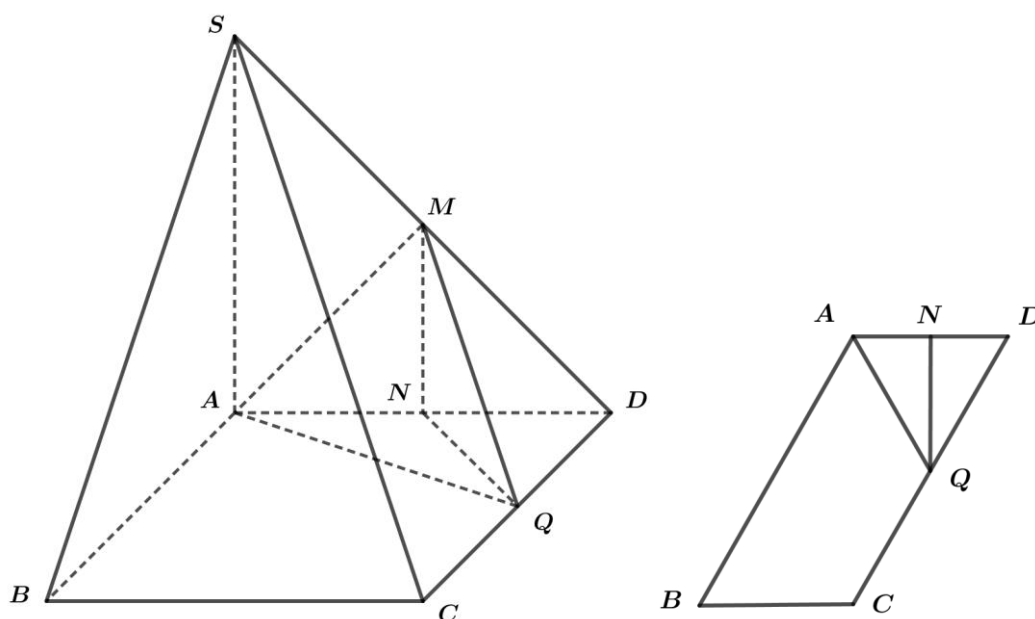
$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d_{(SC;AM)} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Cách 2: Gọi N là trung điểm của AD , suy ra $MN \parallel SA$ hay $MN \perp (ABCD)$. Dễ thấy tam giác ADQ đều cạnh a ($QN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$) và $N.AMQ$ là tam diện vuông đỉnh N .

$$\text{Ta có: } d[SC;AM] = d[SC;(AMQ)] = d[C;(AMQ)] = d[D;(AMQ)]$$

$$= 2d[N;(AMQ)] = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{AN^2} + \frac{1}{QN^2} + \frac{1}{MN^2}}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$



Câu 4: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số phân biệt $(\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6})$ thỏa mãn $a_k > k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 6$.

A. 3^6 .

B. $6.6!$.

C. 3.2^6 .

D. A_9^5 .

Lời giải

Chọn A

Do $a_6 > 6$ nên a_6 có 3 cách chọn là số 7, 8, 9.

Do $a_5 > 5$ và khác a_6 nên a_5 cũng có 3 cách chọn.

Tương tự a_4, a_3, a_2, a_1 cũng có 3 cách chọn.

Vậy có: 3^6 số tự nhiên thỏa mãn.

Câu 5: Có 6 bi đỏ, 7 bi xanh và 10 bi vàng được đánh số khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một dãy sao cho mỗi bi đỏ ở giữa một bi xanh và một bi vàng, không có bi xanh nào xếp kề bi vàng?

A. $(C_6^3 C_9^2 + C_9^3 C_6^2) \cdot 6! \cdot 7! \cdot 10!$

B. $C_6^3 C_9^2 + C_9^3 C_6^2$

C. $(C_7^3 C_{10}^2 + C_{10}^3 C_7^2) \cdot 6! \cdot 7! \cdot 10!$

D. $2 \cdot 6! \cdot 7! \cdot 10!$

Lời giải:

Chọn A

Trường hợp 1: Bi xanh đứng đầu

Khi đó các bi được xếp là $X\bar{d}V\bar{d}X\bar{d}V\bar{d}X\bar{d}V\bar{d}X$ trong đó ký hiệu X, V là một số bi xanh và vàng xếp cạnh nhau, $\bar{d}$ là vị trí bi đỏ.

Ta chia các bi xanh thành 4 nhóm và các bi vàng thành 3 nhóm sau đó xếp xen kẽ các bi đỏ xen kẽ ở giữa.

Số cách chọn số bi xanh cho 4 nhóm là: C_6^3 .

Số cách chọn số bi vàng cho 3 nhóm là: C_9^2 .

Số cách xếp 6 bi đỏ vào các chỗ đã chọn là: $6!$.

Số cách xếp 7 bi xanh vào các chỗ đã chọn là: $7!$.

Số cách xếp 10 bi vàng vào các chỗ đã chọn là: $10!$.

Suy ra số cách xếp thỏa bi xanh đứng đầu là $C_6^3 C_9^2 6! \cdot 7! \cdot 10!$.

Trường hợp 2: Bi vàng đứng đầu

Khi đó các bi được xếp là $V\bar{d}X\bar{d}V\bar{d}X\bar{d}V\bar{d}X\bar{d}V$ trong đó ký hiệu X, V là một số bi xanh và vàng xếp cạnh nhau, $\bar{d}$ là vị trí bi đỏ.

Ta chia các bi xanh thành 3 nhóm và các bi vàng thành 4 nhóm sau đó xếp xen kẽ các bi đỏ xen kẽ ở giữa.

Số cách chọn số bi vàng cho 4 nhóm là: C_9^3 .

Số cách chọn số bi xanh cho 3 nhóm là: C_6^2 .

Số cách xếp 6 bi đỏ vào các chỗ đã chọn là: $6!$.

Số cách xếp 7 bi xanh vào các chỗ đã chọn là: $7!$.

Số cách xếp 10 bi vàng vào các chỗ đã chọn là: $10!$.

Suy ra số cách xếp thỏa bi xanh đứng đầu là $C_9^3 C_6^2 6! \cdot 7! \cdot 10!$.

Vậy số cách chia thỏa yêu cầu $(C_6^3 C_9^2 + C_9^3 C_6^2) \cdot 6! \cdot 7! \cdot 10!$.

- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d song song với hai mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z + 1 = 0$. Một véc tơ chỉ phương của d có tọa độ là:
- A.** $(1; 3; 2)$. **B.** $(0; 1; 1)$. **C.** $(1; -3; 2)$. **D.** $(0; 1; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Vì đường thẳng d song song với hai mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z + 1 = 0$ nên một véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (-1; -3; -2)$.

- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

- A.** $M(-1; 2; -1)$. **B.** $M(-1; 1; 1)$. **C.** $M(-1; 3; -3)$. **D.** $M(-1; 0; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta có: $d(I, d) = 2 > R = \sqrt{2}$ nên d không cắt mặt cầu S .

Xét điểm M ở ngoài mặt cầu: qua M ta kẻ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu. Tập hợp các tiếp điểm là đường tròn có bán kính r với $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{IM^2 - R^2}$.

Gọi A, B là các tiếp điểm, ta có $\triangle MAB$ vuông cân tại M

$$\Leftrightarrow 2MA^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2(IM^2 - R^2) = AB^2$$

$$\Leftrightarrow 2(IM^2 - R^2) \leq 4r^2 \Leftrightarrow IM^2 - R^2 \leq 2r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{IM^2 - R^2} \geq \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow \frac{2}{IM^2 - R^2} \geq \frac{1}{R^2} + \frac{1}{IM^2 - R^2} \Leftrightarrow IM^2 - R^2 \leq R^2 \Leftrightarrow IM \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow IM \leq 2.$$

Mà $d(I; (d)) = 2$ nên M là hình chiếu của I lên $d \Rightarrow M(-1; 2; -1)$.

- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. Đường thẳng d thay đổi đi qua $I(1; 1; 2)$ và tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 các góc bằng nhau. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ $A(4; 0; 0)$ đến đường thẳng d .

A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{\sqrt{34}}{17}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{26}}{13}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: d_1 nhận $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$ làm một vector chỉ phương d_2 nhận $\vec{u}_2 = (2; 1; 2)$ làm một vector chỉ phương.Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 2; -3) \neq \vec{0}$ và $I \in d_1, I \in d_2$ nên d_1 cắt d_2 .Đặt $(P) = (d_1, d_2) \Rightarrow (P)$ nhận $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 2; -3)$ làm một vector pháp tuyến.Gọi Δ_1 là đường phân giác thứ nhất của góc tạo bởi d_1 và d_2 . $\Rightarrow \Delta_1$ nhận $\frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1 + \frac{1}{|\vec{u}_2|} \vec{u}_2 = \frac{1}{3}(1; 2; 2) + \frac{1}{3}(2; 1; 2) = \frac{1}{3}(3; 3; 4)$ làm một vector chỉ phương. Δ_1 đi qua $I(1; 1; 2)$ và nhận $\vec{u} = (3; 3; 4)$ làm một vector chỉ phương nên có pt tham số

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua Δ_1 và vuông góc với (P) .Để thấy Δ_1 chứa các điểm $I(1; 1; 2)$ và $K(4; 4; 6) \Rightarrow I, K \in (Q)$. (Q) đi qua $I(1; 1; 2)$ và nhận $[\vec{IK}, \vec{n}] = (-17; 17; 0) = -17(1; -1; 0)$ làm một vector pháp tuyến. $\Rightarrow (Q): 1(x-1) - 1(y-1) + 0(z-2) = 0 \Rightarrow (Q): x - y = 0$.Theo đề bài, d tạo với d_1, d_2 các góc bằng nhau $\Rightarrow d \subset (Q)$.Từ đó, $d(A, d)$ ngắn nhất chính là $d(A, (Q)) = \frac{|4-0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.Gọi Δ_2 là đường phân giác thứ hai của góc tạo bởi d_1 và d_2 . $\Rightarrow \Delta_2$ nhận $\frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1 - \frac{1}{|\vec{u}_2|} \vec{u}_2 = \frac{1}{3}(1; 2; 2) - \frac{1}{3}(2; 1; 2) = \frac{1}{3}(-1; 1; 0)$ làm một vector chỉ phương.

Δ_2 đi qua $I(1;1;2)$ và nhận $\vec{u} = (-1;1;0)$ làm một vectơ chỉ phương nên có pt tham số

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

Gọi (Q') là mặt phẳng đi qua Δ_2 và vuông góc với (P) . Phương trình

$$(Q'): 3x + 3y + 4z - 14 = 0$$

Theo đề bài, d tạo với d_1, d_2 các góc bằng nhau $\Rightarrow d \subset (Q')$.

Từ đó, $d(A, d)$ ngắn nhất chính là $d(A, (Q')) = \frac{\sqrt{34}}{17}$.

So sánh hai trường hợp ta kết luận khoảng cách $d(A, d)$ ngắn nhất chính là $d(A, (Q')) = \frac{\sqrt{34}}{17}$.

Cách 2:

Gọi $K(x; y; z)$ là điểm bất kì thuộc d $K \neq I \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (x-1; y-1; z-2)$.

Vì $d, d_1 = d, d_2$ nên:

$$\cos d, d_1 = \cos d, d_2 \Leftrightarrow |x+2y+2z-7| = |2x+y+2z-7|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 3y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng d nằm trong mặt phẳng $Q: x - y = 0$ hoặc mặt phẳng

$$Q': 3x + 3y + 4z - 14 = 0.$$

$$\text{Suy ra } \min d(A, d) = \min d(A, Q), d(A, Q') = \frac{\sqrt{34}}{17}.$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;1;7)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Oy có tọa độ là

A. $(0;1;0)$.

B. $(2;0;0)$.

C. $(0;0;7)$.

D. $(7;1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $A(2;1;-3)$ và song song với mặt phẳng (Oxz) là

A. $z - 1 = 0$.

B. $y - 1 = 0$.

C. $x - 2 = 0$.

D. $y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxz)

Nên (P) có dạng: $y + c = 0$ với $c \neq 0$

$A \in (P)$ nên ta có $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình mặt phẳng (P) : $y - 1 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 0)$. Giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng khoảng cách từ B đến Oy bằng

A. $m = 2$.

B. $m = -2$.

C. $m = -3$.

D. $m = \pm 2$.

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu vuông góc của B đến trục Oy là $H(0; 4; 0)$. Suy ra $d(B, Oy) = 3$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là $d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + m \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}}$

Đề $d(B, Oy) = d(A, (P)) \Rightarrow 3 = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \Leftrightarrow 9(5 + m^2) = 9(m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho $d_1: \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -10 + 3t \\ z = 14 - 4t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = -s \\ y = 3 \\ z = -1 + 4s \end{cases}$. Mặt phẳng

$(P): 2x + 3y - 4z + m = 0$ cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N . Mặt cầu (S) qua M, N cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B ($A \neq M, B \neq N$) sao cho $AB = 13$. Tâm I của mặt cầu (S) chạy trên

A. $(Q): x - 4z + 3 = 0$. **B.** $(Q): x - 4z - 3 = 0$.

C. $\Delta: \begin{cases} x = 6 - u \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + 4u \end{cases}$

D. $\Delta: \begin{cases} x = 6 + 2u \\ y = 1 + 3u \\ z = \frac{1}{2} - 4u \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Ta có khoảng cách giữa d_1, d_2 bằng 13 nên AB là đoạn vuông góc chung của d_1, d_2

Do $d_1 \perp (P)$ nên $MN \perp d_1$.

Suy ra tâm I là trung điểm AN nên chạy trên đường thẳng Δ qua trung điểm AB và song song d_2 .

Tìm được $A(12; -1; 2), B(0; 3; -1)$ nên trung điểm của AB là $L\left(6; 1; \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Vậy } \Delta: \begin{cases} x = 6 - u \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + 4u \end{cases}.$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 2), B(0; 1; 0)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$.

B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 2$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{3}$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 12$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm của AB thì I là tâm của mặt cầu đường kính AB .

Tọa độ điểm $I(1; 0; 1)$. Bán kính $IA = IB = \frac{AB}{2} = \sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm I là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Số đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên là

A. Vô số

B. 12.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

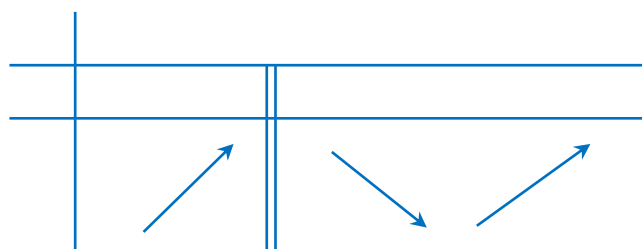
TXĐ: $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$. Ta có $y = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$.

Do $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $(x+1)$ là ước số của 2

$$\Rightarrow (x+1) \in \{1; 2; -1; -2\} \Rightarrow x \in \{0; 1; -2; -3\} \Rightarrow (x; y) = (0; -1); (1; 0); (-2; 3); (-3; 2)$$

$\Rightarrow$ Trên (C) có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Suy ra có $C_4^2 = 6$ đường thẳng thỏa mãn điều kiện bài ra.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus 1$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $m^3 f^3(x) + 3mf(x) = (12m^2 + 7)\sqrt{12m^2 + 1} + 36m^2 + 7$ có hai nghiệm phân biệt ?

A. 4041.

B. 2019.

C. 2010.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $m^3 f^3(x) + 3mf(x) = (12m^2 + 7)\sqrt{12m^2 + 1} + 36m^2 + 7$

$$\Leftrightarrow m^3 f^3(x) + 3mf(x) = \left[\left(\sqrt{12m^2 + 1} \right)^3 + 3(12m^2 + 1) + 3\sqrt{12m^2 + 1} + 1 \right] + 3(\sqrt{12m^2 + 1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow m^3 f^3(x) + 3mf(x) = \left(\sqrt{12m^2 + 1} + 1 \right)^3 + 3(\sqrt{12m^2 + 1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow g[mf(x)] = g(\sqrt{12m^2 + 1} + 1) \quad (1)$$

Với $g(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$.

Vì $g'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow mf(x) = \sqrt{12m^2 + 1} + 1 \quad (2)$$

- Với $m = 0$ thì (2) vô nghiệm.

$$\text{- Với } m \neq 0 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{12m^2 + 1}}{m}.$$

$$\text{Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{12m^2 + 1} + 1}{m} = -4 \\ \frac{\sqrt{12m^2 + 1} + 1}{m} \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \frac{\sqrt{12m^2 + 1} + 1}{m} = -4 \Leftrightarrow \sqrt{12m^2 + 1} = -1 - 4m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 4m > 0 \\ 12m^2 + 1 = 1 + 8m + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

$$\text{TH2: } \frac{\sqrt{12m^2 + 1} + 1}{m} \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \sqrt{12m^2 + 1} > 2m - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ 12m^2 + 1 \geq 4m^2 - 4m + 1 \end{cases} \quad (\text{vì } \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1 \text{ và } m \geq 1 \Rightarrow 2m - 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ 8m^2 + 4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Kết hợp điều kiện m nguyên và $m \in [-2020; 2020]$ suy ra $m \in \{-2; 1; 2; \dots; 2020\}$ Vậy có 2021 giá trị m thỏa mãn.

Câu 16: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c < -1 \\ 4a-2b+c > 8 \\ bc < 0 \end{cases}$. Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Số điểm cực

trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ lớn nhất có thể có là

A. 2.

B. 12.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(1) = a + b + c + 1 < 0$; $f(-2) = 4a - 2b + c - 8 > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên $\exists p > 1$ sao cho $f(p) > 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên $\exists q < -2$ sao cho $f(q) < 0$.

Suy ra $\begin{cases} f(q).f(-2) < 0 \\ f(-2).f(1) < 0 \\ f(1).f(p) < 0 \end{cases}$. Mà hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít

nhất 3 nghiệm phân biệt.

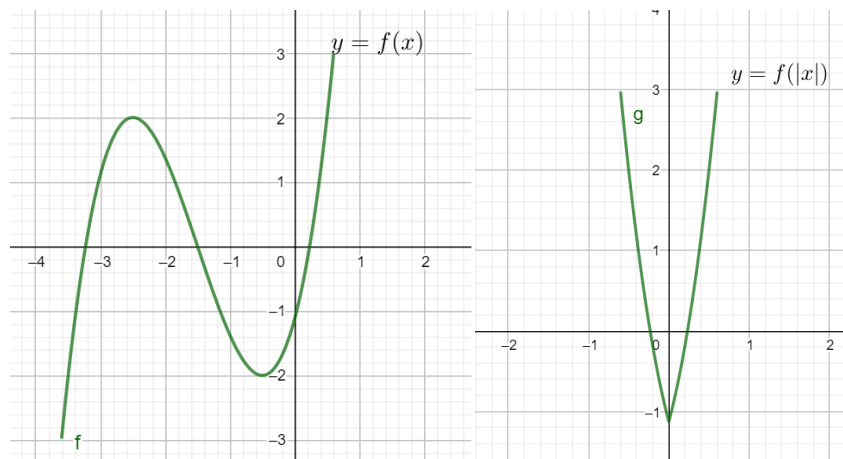
Mặt khác $f(x) = 0$ là phương trình bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt α, β, γ với $\alpha \in (q; -2)$, $\beta \in (-2; 1)$ và $\gamma \in (1; p)$.

Vậy $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

* Trường hợp 1: $b > 0, c < 0$

Ta có $c < 0 \Rightarrow f(0) < 0 \Rightarrow f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow \beta \in (-2; 0)$ và $x_1.x_2 = \frac{b}{3} > 0$

Nên ta có đồ thị minh họa cho trường hợp này như sau:

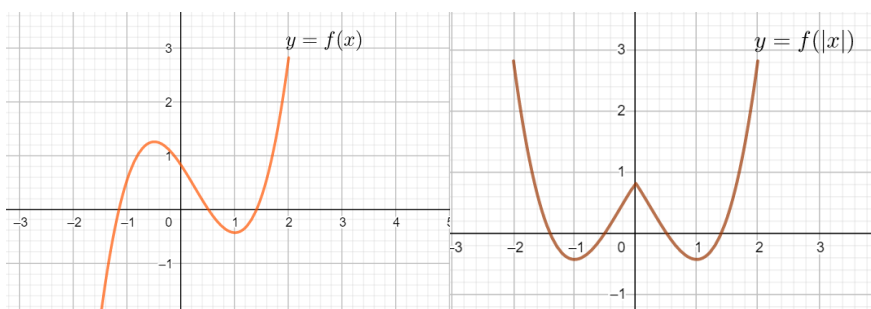


Suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có 3 điểm cực trị.

* Trường hợp 2: $b < 0, c > 0$

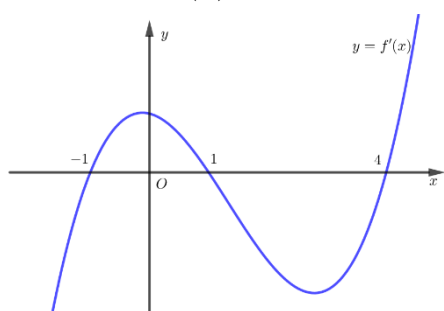
Ta có $c > 0 \Rightarrow f(0) > 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \beta \in (0; 1)$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{3} < 0$

Đồ thị minh họa cho trường hợp này là :



Suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên.

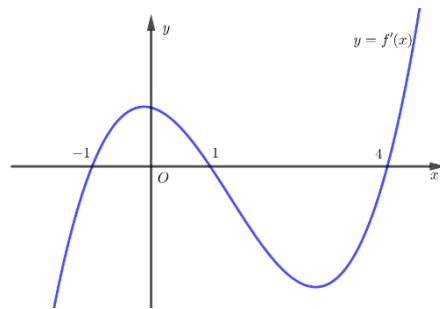


Bất phương trình $\log_5 [f(x) + m + 2] + f(x) > 4 - m$ đúng với mọi $x \in (-1; 4)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq 4 - f(-1)$. **B.** $m \geq 3 - f(1)$. **C.** $m < 4 - f(-1)$. **D.** $m \geq 3 - f(4)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có:

$$\log_5 [f(x) + m + 2] + f(x) > 4 - m \Leftrightarrow \log_5 [f(x) + m + 2] + f(x) + m + 2 > \log_5 5 + 5 (*)$$

Xét hàm số $y = g(t) = \log_5 t + t$ ($t > 0$).

Ta có $g'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0, \forall t > 0$ suy ra hàm số $y = g(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(x) + m + 2 > 5 \Leftrightarrow f(x) > 3 - m$.

Xét hàm số $y = f(x)$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	-1	1			4	
$f'(x)$		+	0	-		
$f(x)$		$f(-1)$ $f(1)$ $f(4)$				

Từ đồ thị hàm số, suy ra $\int_{-1}^1 |f'(x)| dx < \int_1^4 |f'(x)| dx \Rightarrow \int_{-1}^1 f'(x) dx < -\int_1^4 f'(x) dx$

$$\Rightarrow f(x) \Big|_{-1}^1 < -f(x) \Big|_1^4 \Rightarrow f(-1) > f(4).$$

Bất phương trình $(*)$ đúng với mọi $x \in (-1; 4)$ khi và chỉ khi $f(4) \geq 3 - m \Leftrightarrow m \geq 3 - f(4)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-6	-5	-6	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x) - 2020}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

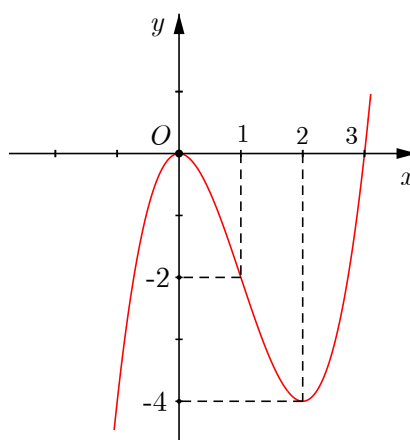
Chọn A

Dựa vào BBT, ta có $f(x) = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = a$ và $x = b$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x) - 2020} = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có tất cả 3 đường tiệm cận (ngang và đứng).

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Với giá trị nào của m thì giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f(x)| + m$ trên đoạn $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ bằng -2 .

A. $m = -4$.

B. $m = -5$.

C. $m = 0$.

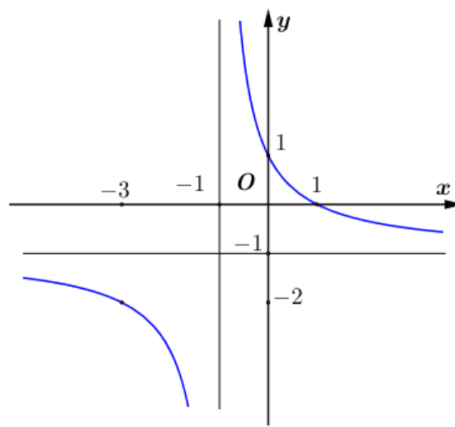
D. $m = -6$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ bằng 4. Vậy từ yêu cầu bài toán ta có: $4 + m = -2 \Leftrightarrow m = -6$.

Câu 20: Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



A. $y = \frac{-x}{x+1}$.

B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$.

D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn B

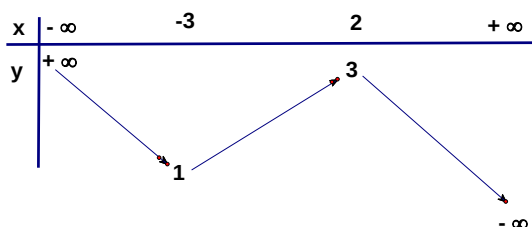
Dựa vào hình vẽ:

+) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$. Vậy loại phương án C.

+) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1$. Vậy loại phương án A, D.

Vậy ta chọn phương án B.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cực đại là đường thẳng có phương trình

A. $y = 2x - 1$

B. $x = 2$

C. $y = 3$

D. $y = 1$

Lời giải

Chọn C

Do hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, nên tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cực đại là đường thẳng cùng phương với trục hoành.

Điểm cực đại của đồ thị là $A(2;3)$, nên đường thẳng qua A và cùng phương với Ox có phương trình là $y = 3$.

Câu 22: Cho hàm số $y = (x-3)^2 |x-m|$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ hơn 2020.

A. 2019

B. 4041

C. 2022

D. 2021

Lời giải

Chọn D

Xét đồ thị $y = (x-3)^2(x-m)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ $x=3$; $x=m$

+) Nếu $m=3$ khi đó hàm số $y = (x-3)^2|x-m|$ trở thành $y = |x-3|^3$ có duy nhất điểm cực tiểu $x=3$ (không thỏa điều kiện đề bài)

+) Nếu $m \neq 3$ ta có đồ thị $y = (x-3)^2(x-m)$, tiếp xúc với Ox tại điểm $x=3$ và cắt Ox hoành độ $x=m$. Suy ra đồ thị $y = (x-3)^2|x-m|$ có hai điểm cực tiểu $A(3;0)$, $B(m;0)$ và $AB = |m-3|$

ĐK đề bài suy ra $|m-3| < 2020 \Leftrightarrow -2017 < m < 2023$.

Do m nguyên dương, $m \neq 3$ suy ra $m \in \{1; 2; 4; 5; \dots; 2022\}$ nên có 2021 giá trị của tham số m .

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x + x$ có đồ thị (C) , gọi (S) là tập hợp các điểm cực trị của (C) với hoành độ các điểm cực trị thuộc $[0; 10\pi]$. Có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh thuộc (S) .

A. 900

B. 1140

C. 120

D. 720

Lời giải

Chọn A

$f(x) = \sin 2x + x$ có TXĐ: $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2\cos 2x + 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + m\pi \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$f''(x) = -4\sin 2x$$

Ta có $f''\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0$, hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và các điểm cực đại thuộc

đường thẳng $y = x + \frac{\sqrt{3}}{2}$, với $x \in [0; 100\pi]$ nên $k \in [0; 9]$. Vậy (S) có 10 điểm cực đại cùng

thuộc đường thẳng $y = x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tương tự, hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\frac{\pi}{3} + m\pi$, (S) có 10 điểm cực tiểu cùng thuộc

đường thẳng $y = x - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hai đường thẳng $y = x + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ song song với nhau.

Số tam giác có 3 đỉnh thuộc (S) bằng $2C_{10}^1 \cdot C_{10}^2 = 900$

Câu 24: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \log_2 x$.

B. $y = x^3 - 3x + 1$.

C. $y = x^4 + x^2 - 1$.

D. $y = 2^x$.

Lời giải

Chọn D

Câu 25: Cho các số thực $a, b, c, d, a \neq 0$. Xét hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = x^3 + ax^2 - bx + c$. Hỏi có bao nhiêu bộ số nguyên (a, b, c, d) để các điều kiện sau đây đồng thời xảy ra:

1) $4x^3 - 12x^2 + 12x - 3 \leq f(x) \leq 2019(x^3 - 3x^2 + 3x) - 2018, \forall x \geq 1$.

2) Hàm số $y = g(f(\tan x))$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. 6.

B. 9.

C. 2016.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Từ (1), ta có:

$$4x^3 - 12x^2 + 12x - 3 \leq f(x) \leq 2019(x^3 - 3x^2 + 3x) - 2018, \forall x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow f_1(x) = 4(x-1)^3 + 1 \leq f(x) \leq 2019(x-1)^3 + 1 = f_2(x), \forall x \geq 1 \quad (*)$$

Từ (*), cho $x = 1$ ta được: $1 \leq f(1) \leq 1$ nên $f(1) = 1$.

Mặt khác $(1; 1)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ và 2 hàm số này luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên từ (*) suy ra $f(x) = a(x-1)^3 + 1$, với $4 \leq a \leq 2019$ và $f(x)$ cũng là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đồng nhất hệ số, suy ra: $b = -3a, c = 3a, d = -a + 1$. (**)

Mặt khác, ta có:

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ ta có } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \text{ và } \tan x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, điều kiện (2) tương đương hàm số $y = g(f(x))$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì $y = g(x)$, $y = f(x)$ là hai hàm số bậc 3, có hệ số của số hạng bậc cao nhất dương nên hàm hợp $y = g(f(x))$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y = g(x)$, $y = f(x)$ cùng đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ Hàm số $g(x) = x^3 + ax^2 - bx + c$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a^2 + 3b \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 9a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 9 \Leftrightarrow 0 < a \leq 9$.

Kết hợp với $a \in \mathbb{R}$, $4 \leq a \leq 2019$, suy ra $a \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Do đó có 6 giá trị a nguyên.

Vậy từ $(**)$, suy ra có 6 bộ số nguyên (a, b, c, d) .

- Câu 26:** Cho khối nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Thể tích của khối nón đã cho bằng
A. 12π . **B.** 36π . **C.** 48π . **D.** 24π .

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 12\pi$

- Câu 27:** Cho hình trụ có diện tích xung quanh là 16π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. 16π . **B.** 8π . **C.** 32π . **D.** $\frac{16\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vì thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông $\Rightarrow l = 2r$

Ta có $S_{xq} = 2\pi r l = 4\pi r^2 = 16\pi \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2$

Suy ra $l = 4$

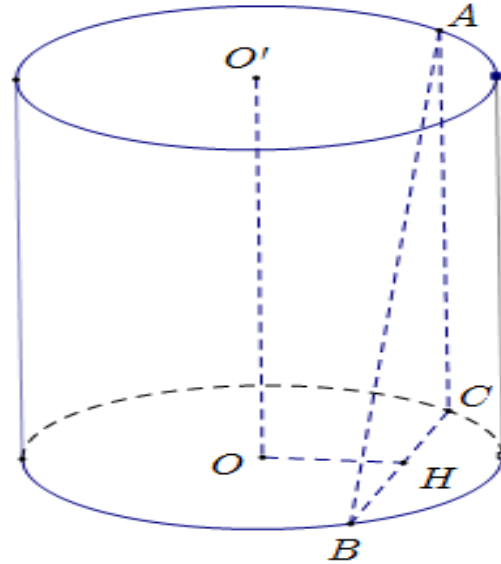
Vậy $V = \pi r^2 h = 16\pi$

- Câu 28:** Cho hình trụ có bán kính $2a$, chiều cao là a . Hai đỉnh A, B thuộc hai đường tròn đáy sao cho góc tạo bởi AB và trục của hình trụ là 60° . Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng

A. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. **B.** $a\sqrt{13}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng AC song song với trục, góc tạo bởi AB và trục OO' là góc $\angle BAC = 60^\circ$

Ta có $BC = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} OH \perp BC \\ OH \perp AC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$

Ta có $d(OO', AB) = d(O, (ABC)) = OH$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{r^2 - HB^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Câu 29: Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$. **B.** $1 < \log_a b < \log_b a$.

C. $\log_b a < \log_a b < 1$. **D.** $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $b > a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a b > \log_a a \\ \log_b b > \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b > 1 \\ 1 > \log_b a \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$.

Câu 30: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

A. $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

B. $D = [-1; 3]$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

D. $D = (-1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

+ Hàm số đã cho xác định khi $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

+ Vậy TXĐ của hàm số đã cho là: $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$.

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

D. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= \left(\frac{x+1}{4^x} \right)' = \frac{(x+1)' \cdot 4^x - (x+1)(4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{4^x - (x+1)(4^x \cdot \ln 4)}{(4^x)^2} = \frac{4^x(1-x\ln 4 - \ln 4)}{(4^x)^2} \\ &= \frac{1-2x\ln 2 - 2\ln 2}{4^x} = \frac{1-2\ln 2(x+1)}{2^{2x}} = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}. \end{aligned}$$

Câu 32: Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+2)=3$ là

A. $\{-4; 4\}$.

B. $\{-5; 5\}$.

C. $\{\pm\sqrt{7}\}$.

D. $\{5\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_3(x^2+2)=3 \Leftrightarrow x^2+2=27 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5.$$

Tập nghiệm của phương trình là $\{-5; 5\}$.

Câu 33: Gọi S là tập các giá trị thực của x để $\log_3(x-3)-1$; 1 ; $\log_3(7x-1)$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Tích các phần tử của S bằng

A. $-\frac{6}{7}$.

B. $\frac{24}{7}$.

C. $-\frac{24}{7}$.

D. 4 .

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 3$

Do $\log_3(x-3)-1$; 1 ; $\log_3(7x-1)$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng nên ta có

$$\log_3(x-3)-1+\log_3(7x-1)=2 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_3(x-3)(7x-1)=3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(7x-1)=27 \Leftrightarrow 7x^2-22x-24=0 \quad (2)$$

Giải (2) ta được 2 nghiệm là $x=4$ và $x=-\frac{7}{6}$. Kết hợp điều kiện ta nhận $x=4$.

Câu 34: Cho số phức $z=1-2i$. Phần ảo của số phức $w=z-i$ là

A. -3 .

B. -2 .

C. -1 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

$$w=z-i=1-2i-i=1-3i.$$

Câu 35: Trên tập số phức, phương trình $\frac{1}{z-1} = 2+i$ có nghiệm là

- A. $z = 2+i$. B. $z = 3+i$. C. $z = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$. D. $z = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{1}{z-1} = 2+i \Leftrightarrow z-1 = \frac{1}{2+i} \Leftrightarrow z = 1 + \frac{1}{2+i} \Leftrightarrow z = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Câu 36: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+3i| = \sqrt{13}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+3|^2 - |z-2i|^2$. Tính $M+m$.

- A. 3. B. -2. C. 13. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Sử dụng lượng giác

Gọi $z = x + yi$ với $(x, y \in \mathbb{R})$. Điểm biểu diễn số phức z là $A(x; y)$

$$|z-1+3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 13$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 1 + \sqrt{13} \sin t \\ y = -3 + \sqrt{13} \cos t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$P = |z+3|^2 - |z-2i|^2 = (x+3)^2 + y^2 - x^2 - (y-2)^2 = 6x + 4y + 5$$

$$= 6(1 + \sqrt{13} \sin t) + 4(-3 + \sqrt{13} \cos t) + 5 = 6\sqrt{13} \sin t + 4\sqrt{13} \cos t - 1$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{13} \sin t + 4\sqrt{13} \cos t = P + 1 \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (6\sqrt{13})^2 + (4\sqrt{13})^2 \geq (P+1)^2 \Leftrightarrow -27 \leq P \leq 25.$$

$$\text{Vậy } M = 25, m = -27 \Rightarrow M + m = -2.$$

Cách 2. Sử dụng hình học

Gọi $z = x + yi$ với $(x, y \in \mathbb{R})$. Điểm biểu diễn số phức z là $A(x; y)$

$|z-1+3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 13$. Suy ra A thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$.

$$P = |z+3|^2 - |z-2i|^2 = (x+3)^2 + y^2 - x^2 - (y-2)^2 = 6x + 4y + 5$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4y + 5 - P = 0 \quad (\Delta)$$

$$\Delta \text{ và } (C) \text{ có điểm chung} \Leftrightarrow d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|P+1|}{2\sqrt{13}} \leq \sqrt{13} \Leftrightarrow -27 \leq P \leq 25.$$

$$\text{Vậy } M = 25, m = -27 \Rightarrow M + m = -2.$$

Câu 37: Biết $\int_1^3 f(x)dx = 6$ và $\int_1^5 f(x)dx = 5$ khi đó $\int_3^5 f(x)dx$ bằng

A. 11.

B. 7.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^5 f(x)dx = 5 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = 5 \Leftrightarrow \int_3^5 f(x)dx = -1.$$

Câu 38: Cho $\int_1^3 f(x)dx = 16$. Khi đó $I = \int_0^1 f(-2x+3)dx$ bằng:

A. $I = 8$.

B. $I = 4$.

C. $I = 32$.

D. $I = 16$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = -2x + 3 \Rightarrow dt = -2dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 3, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^1 f(-2x+3)dx = \int_3^1 f(t) \frac{-1}{2} dt \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt = 2I = 16.$$

$$\text{Vậy } \int_1^3 f(x)dx = 8.$$

Câu 39: Biết tích phân $I = \int_1^e \frac{x \ln^2 x - 1}{x \ln x + 1} dx = x + \ln \frac{y.e + z}{u.e + v}$ trong đó $x, y, u, v \in \mathbb{Q}$. Khi đó giá trị của

$$x + \frac{y+z}{u+v} \text{ bằng}$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{7}{2}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_1^e \frac{x \ln^2 x - 1}{x \ln x + 1} dx = \int_1^e \frac{x \ln x (\ln x + 1) - (x \ln x + 1)}{x \ln x + 1} dx = \int_1^e \frac{x \ln x (\ln x + 1)}{x \ln x + 1} dx - \int_1^e dx = I_1 - (e - 1).$$

Xét $I_1 = \int_1^e \frac{x \ln x (\ln x + 1)}{x \ln x + 1} dx.$

Đặt $t = x \ln x + 1 \Rightarrow dt = (\ln x + 1) dx.$

Đổi cận: Với $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = e + 1$

Khi đó: $I_1 = \int_1^{e+1} \frac{t-1}{t} dt = \int_1^{e+1} \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \left(t - \ln|t|\right)\Big|_1^{e+1} = e - \ln(e+1).$

Thay vào ta được $I = 1 - \ln(e+1) = 1 + \ln \frac{1}{e+1}$. Vậy $x + \frac{y+z}{u+v} = \frac{3}{2}$.

- Câu 40:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và đồng biến trên $[-1; 0]$. Biết $[f'(x)]^2 = (x+2)e^{-2f(x)}, \forall x \in [-1; 0]$. Biết giá trị $f(0) = \frac{3}{2} \ln 2$, khi đó giá trị $f(-1)$ bằng
- A.** 0. **B.** $\ln 3$. **C.** 1. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số đồng biến nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 0]$. Giả thiết suy ra

$$f'(x) = \sqrt{x+2} e^{-f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{-f(x)}} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow f'(x) e^{f(x)} = \sqrt{x+2}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 f'(x) e^{f(x)} dx = \int_{-1}^0 \sqrt{x+2} dx$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} \Big|_{-1}^0 = \left(\sqrt{(x+2)^3} \right) \Big|_{-1}^0 = 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow e^{f(0)} - e^{f(-1)} = 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow f(-1) = 0.$$

- Câu 41:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

- A.** $\int f(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} + C.$ **B.** $\int 0 dx = 0.$
- C.** $\int f(x) dx = f'(x) + C.$ **D.** $\int f'(x) dx = f(x) + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$ nên họ tất cả các nguyên hàm của $f'(x)$ là $f(x) + C$ do đó $\int f'(x) dx = f(x) + C.$

- Câu 42:** Cho $I = \int x(1-x^2)^{2020} dx$. Đặt $u = 1-x^2$, khi đó viết I theo u và du ta được

- A.** $I = \int 2u^{2020} du.$ **B.** $I = -2 \int u^{2020} du.$ **C.** $I = \frac{1}{2} \int u^{2020} du.$ **D.** $I = -\frac{1}{2} \int u^{2020} du.$

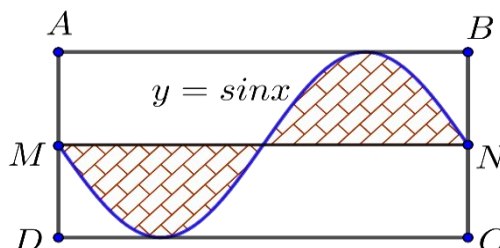
Lời giải

Chọn D

Đặt $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} du$

Khi đó $I = -\frac{1}{2} \int u^{2020} du$.

Câu 43: Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$. Người ta trồng hoa vào phần đất được gạch sọc được giới hạn bởi cạnh AB , CD , đường trung bình MN và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi(m)$ và $AD = 2(m)$.



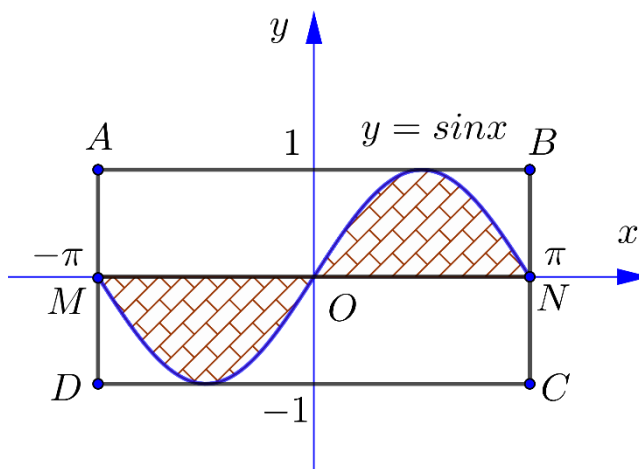
Diện tích phần còn lại là

- A.** $4\pi - 1 (m^2)$ **B.** $4(\pi - 1) (m^2)$ **C.** $4\pi - 2 (m^2)$ **D.** $2\pi - 1 (m^2)$

Lời giải

Chọn B

Ta gán hệ trục tọa độ như hình vẽ:



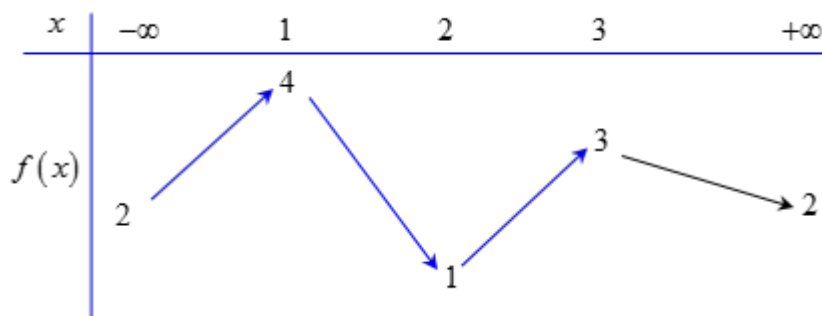
+ Diện tích hình chữ nhật là $S = AB \cdot CD = 4\pi (m^2)$.

+ Diện tích phần trồng hoa là diện tích hình phẳng giới hạn bởi AB , CD , đường trung bình MN và đồ thị hàm số $y = \sin x$ nên diện tích phần trồng hoa là: $2 \int_0^{\pi} \sin x dx$.

Diện tích phần còn lại bằng diện tích hình chữ nhật trừ đi diện tích phần trồng hoa.

Diện tích phần còn lại: $S = 4\pi - 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 4(\pi - 1) (m^2)$.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}} + \log_2[f^2(x) - 4f(x) + 5] = m$ có nghiệm?

A. 2.

B. 18.

C. 19.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

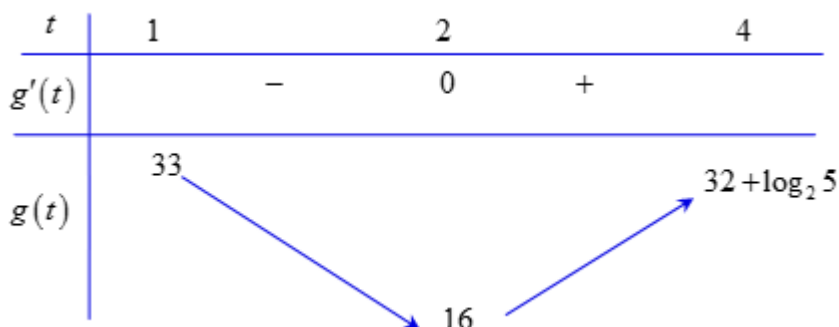
Đặt $t = f(x) \Rightarrow t \in [1; 4]$ (dựa vào BBT của $f(x)$).

Phương trình đã cho trở thành $2^{t+\frac{4}{t}} + \log_2[t^2 - 4t + 5] = m$ (*)

Xét hàm số $g(t) = 2^{t+\frac{4}{t}} + \log_2[t^2 - 4t + 5]$, với $t \in [1; 4]$.

Ta có $g'(t) = (t-2) \left(\frac{t+2}{t^2} 2^{t+\frac{4}{t}} \ln 2 + \frac{2}{(t^2-4t+5)\ln 2} \right) \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

BBT của $g(t)$



Từ BBT ta thấy

+ Với mỗi giá trị của $t \in [1; 4]$ thì phương trình $f(x) = t$ luôn có nghiệm.

Nên để phương trình ban đầu có nghiệm thì $16 \leq m \leq 32 + \log_2 5$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{16; 17; \dots; 34\} \Rightarrow$ có 19 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 45: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2019^{\frac{2x}{1-x^2}} + \frac{x^2 + 2x - 1}{1 - x^2} = \log_{2019} \left(\frac{1 + 4036x - x^2}{1 - x^2} \right)^{2019}$. Khi

đó tập S có bao nhiêu tập con

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \frac{1+4036x-x^2}{1-x^2} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{2x}{1-x^2}. \text{ Phương trình trở thành: } 2019^u + u - 1 = 2019 \log_{2019}(1+2018u) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2019^u + 2019u = 2018u + 1 + \log_{2019}(2018u + 1). \text{ Đặt } v = \log_{2019}(1+2018u)$$

$$\text{Ta có } 2019^u + 2019u = 2019^v + 2019v$$

$$\text{Xét hàm đặc trưng } f(t) = 2019^t + 2019t, \text{ với } \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2019^t \ln 2019 + 2019 > 0, \text{ với } \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy hàm số } f(t) = 2019^t + 2019t \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \Rightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

$$\text{Khi } u = v \text{ ta có: } 2019^u + u - 1 = 2019u \Leftrightarrow 2019^u - 2018u - 1 = 0.$$

$$\text{Xét hàm số } g(u) = 2019^u - 2018u - 1 \Rightarrow g'(u) = 2019^u \ln 2019 - 2018.$$

Ta có $\Rightarrow g''(u) = 2019^u \ln^2 2019 > 0$, với $\forall u \in \mathbb{R}$. Do đó phương trình $g(u) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm. Mặt khác $g(0) = g(1) = 0$. Nên phương trình $g(u) = 0$ có đúng hai nghiệm $u = 0$ và $u = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2} = 0 \\ \frac{2x}{1-x^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S = \{0; -1 \pm \sqrt{2}\}. \text{ Vậy } S \text{ có 3 tập con.}$$

Câu 46: Cho số phức $z = 2i - 1$. Điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy có tọa độ là

- A.** $M(2; -1)$. **B.** $N(-1; 2)$. **C.** $P(2; 1)$. **D.** $Q(1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Do $z = -1 + 2i$ nên z có điểm biểu diễn là $N(-1; 2)$.

Câu 47: Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - i| \cdot \left| \frac{(i-1)z}{i+1} + 1 \right| = 4$

là một đường tròn. Tâm I và bán kính R của đường tròn này là

- A.** $I(1; 0); R = 2$. **B.** $I(-1; 0); R = 4$. **C.** $I(0; 1); R = 2$. **D.** $I(0; -1); R = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |z - i| \cdot \left| \frac{(i-1)z}{i+1} + 1 \right| = 4 \Leftrightarrow |z - i| \cdot |iz + 1| = 4 \Leftrightarrow |z - i| \cdot |i| \cdot |z - i| = 4$$

$$\Leftrightarrow |z - i|^2 = 4 \Leftrightarrow |z - i| = 2$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 2$.

Câu 48: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Khi đó khối chóp $A'.B'C'CB$ có thể tích bằng

A. $\frac{2V}{3}$

B. $\frac{V}{3}$

C. $\frac{3V}{4}$

D. $\frac{V}{2}$

Lời giải

Chọn A

Câu 49: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{6}a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD , G là trung điểm MN . Khi đó tứ diện $GBNC$ có thể tích bằng

A. $\sqrt{3}a^3$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$

C. $2\sqrt{3}a^3$

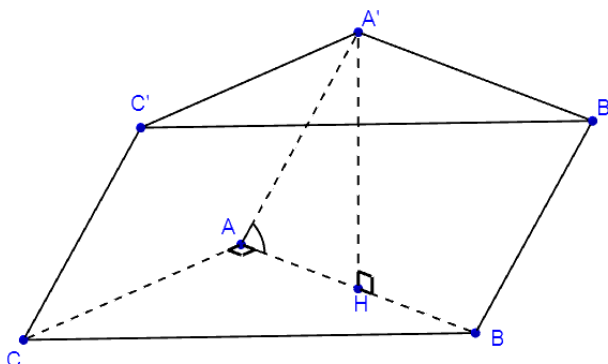
D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A

$$\Rightarrow V_{GBNC} = \frac{1}{8}V_{ABCD} = \frac{1}{8} \frac{(2\sqrt{6}a)^3 \sqrt{2}}{12} = \sqrt{3}a^3$$

Câu 50: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của AB , $\angle A'AB = \alpha$ sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt phẳng (P) đi qua H vuông góc với AA' và chia khối lăng trụ thành hai phần, gọi phần chứa điểm A có thể tích là V_1 , lăng trụ đã cho có thể tích là V .



A. $V_1 = \frac{5V}{12}$

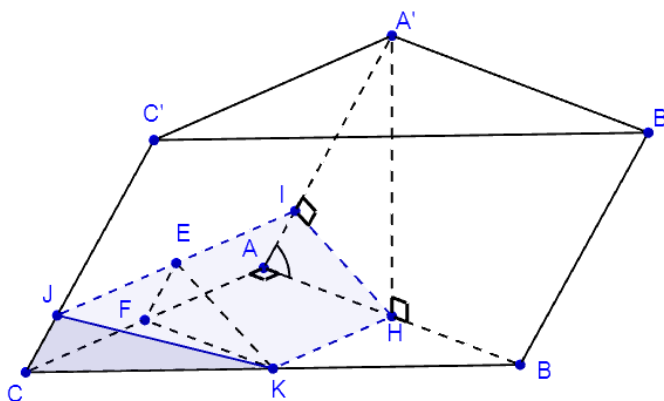
B. $V_1 = \frac{5V}{36}$

C. $V_1 = \frac{V}{9}$

D. $V_1 = \frac{2V}{9}$

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \begin{cases} CA \perp AB \\ CA \perp A'H \end{cases} \Rightarrow CA \perp (A'ABB') \Rightarrow CA \perp AA' \Rightarrow CA // (P)$$

Từ đó ta được thiết diện của lăng trụ bị cắt bởi (P) là hình thang vuông $HIJK$.

$$V_1 = V_{K.EFCJ} + V_{EFK.IAH} = \frac{2}{3}V_{EFK.IAH} + V_{EFK.IAH} = \frac{5}{3}V_{EFK.IAH} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \frac{1}{2} AI \cdot IH = \frac{5}{12} \cdot AC \cdot AI \cdot IH$$

$$V = A'H \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} A'H \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} d(B, AA') \cdot AA' \cdot AC = IH \cdot AA' \cdot AC$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{5}{12} \frac{AI}{AA'} = \frac{5}{12} \frac{AI \cdot AA'}{(AA')^2} = \frac{5}{12} \frac{AH^2}{(AA')^2} = \frac{5}{12} \left(\frac{AH}{AA'} \right)^2 = \frac{5}{12} \cos^2 \alpha = \frac{5}{36}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{5V}{36}.$$

===== Hết =====

