

Câu 1 (1,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Tính diện tích tam giác có các đỉnh là các điểm cực trị của đồ thị (C) .

Câu 2 (1,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho ΔPAB đều, biết $P(2;5)$.

Câu 3 (1,0 điểm). Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25m$, chiều rộng $AD = 20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được $15m$ và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30m$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tổng các nghiệm $x \in [-\pi; \pi]$ của phương trình:

$$2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1.$$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong cuộc thi: "Thiết kế và trình diễn các trang phục dân tộc" do Đoàn trường THPT Đồng Đậu tổ chức vào tháng 11 năm 2019 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục. Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó có 4 tiết mục khối 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục biểu diễn chào mừng 26 tháng 3. Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho dãy số (u_n) với $u_n = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}}$. Tính $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_{2019}$.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh $AB = AD = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1D_1 và A_1B_1 .

Chứng minh rằng AC_1 vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$.

Câu 8 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 3$, $BC = 6$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, các mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ các góc bằng nhau. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{6}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BD .

Câu 9 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy) , cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2;1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình: $2x + y - 10 = 0$ và $D(2;-4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.

Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

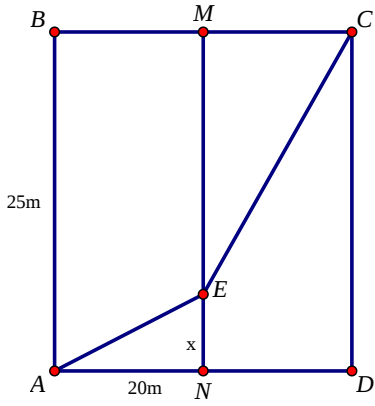
của biểu thức

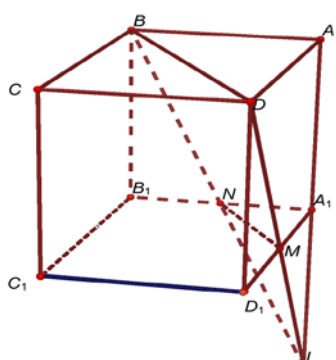
$$P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_{\frac{b}{a}} a - 1.$$

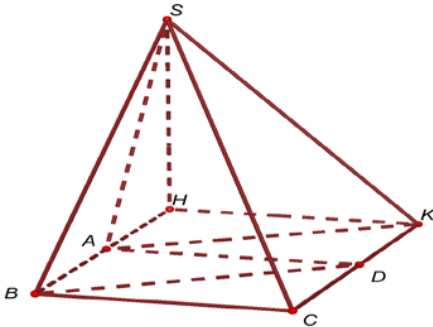
----- HẾT -----

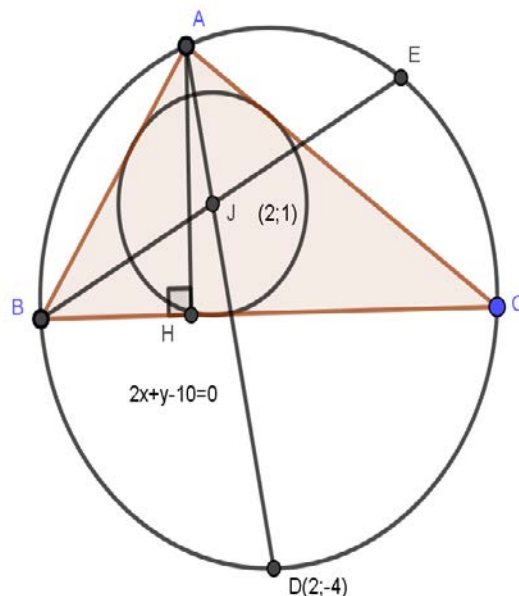
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và không được sử dụng máy tính cầm tay.

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Tính diện tích tam giác có các đỉnh là các điểm cực trị của đồ thị (C).	1,0
	Ta có $y' = x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.	0.25
	Suy ra 3 điểm cực trị là $A(-2; -3)$; $B(0; 1)$; $C(2; -3)$.	
	Các điểm cực trị tạo thành tam giác ABC cân tại B. Gọi H là trung điểm của AC $\Rightarrow H(0; -3)$ và $BH \perp AC$.	0.25
	Ta có $\overrightarrow{BH}(0; -4) \Rightarrow BH = 4$; $\overrightarrow{AC}(4; 0) \Rightarrow AC = 4$.	0.25
	Vậy diện tích cần tìm: $S = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ (đvdt).	0.25
2	Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho ΔPAB đều, biết $P(2; 5)$.	1,0
	Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là nghiệm phương trình $\frac{2x-1}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x - m - 1 = 0$ (1) ($x = -1$ không là nghiệm của (1)).	0,25
	Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 13 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.	0,25
	Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$ Giả sử $A(x_1; -x_1 + m)$, $B(x_2; -x_2 + m)$ Khi đó ta có: $AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2}$ $PA = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (-x_1 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2}$, $PB = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (-x_2 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2}$ Suy ra ΔPAB cân tại P.	0,25
	Do đó ΔPAB đều $\Leftrightarrow PA^2 = AB^2$ $\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) - 6x_1 x_2 - 8 = 0$ $\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$. Vậy giá trị cần tìm là $m = 1, m = -5$.	0,25
3	Một mảnh đất hình chữ nhật ABCD có chiều dài $AB = 25m$, chiều rộng $AD = 20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch	1,0

	chấn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được $15m$ và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30m$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .	
	 Giả sử con đường đi từ A đến C gặp vạch chấn MN tại E đặt $NE = x(m) (x \in [0; 25]) \Rightarrow AE = \sqrt{x^2 + 10^2};$ $CE = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}$	0,25
	Thời gian làm đường đi từ A đến C là $t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{CE}{30} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2 + 100}}{30} (h)$	0,25
	$t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{(25-x)}{30\sqrt{(25-x)^2 + 100}};$ $t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2 + 100} = (25-x)\sqrt{x^2 + 100}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(25-x) \geq 0 \\ 4x^2[(25-x)^2 + 100] = (25-x)^2(x^2 + 100) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x^2 - 25) + x^2[400 - (25-x)^2] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ (x-5)[4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)] = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = 5;$	0,25
	$t(0) = \frac{20 + \sqrt{725}}{30}, t(25) = \frac{10 + 2\sqrt{725}}{30}, t(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow$ Thời gian ngắn nhất làm con đường từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (giờ).	0,25
4	Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$	0,5
	Vì $x \in [-\pi; \pi]$ nên $x_1 = 0; x_2 = \frac{2\pi}{3}; x_3 = \frac{-2\pi}{3}$ thỏa mãn. Vậy tổng các nghiệm $x \in [-\pi; \pi]$ của phương trình đã cho là $S = 0$.	0,5
5	Trong cuộc thi: "Thiết kế và trình diễn các trang phục dân tộc" do Đoàn trường THPT tổ chức vào tháng 3 năm 2018 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục. Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó có 4 tiết mục khối 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục biểu diễn chào mừng 26 tháng 3. Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12.	1,0
	Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^5 = 792$.	0,25
	Gọi A là biến cố "Chọn 5 tiết mục sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12". Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là: + 2 tiết mục khối 12, hai tiết mục khối 10, một tiết mục khối 11. + 2 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 2 tiết mục khối 11.	0,25

	+ 3 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11.	
	Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^1 + C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2 + C_4^3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1 = 330$.	0,25
	Xác suất cần tìm là $P = \frac{330}{792} = \frac{5}{12}$.	0,25
6	Cho dãy số (u_n) với $u_n = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}}$. Tính $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_{2019}$.	1,0
	Ta có: $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}}$ $= \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (do \ n \in N^*)$	0.25
	Khi đó ta có $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_{2019} = e^{2019 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019}}$	0.25
	$= e^{2019 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}}$	0.25
	$= e^{2019 - \frac{1}{2019}} = e^{\frac{2018 \cdot 2019}{2019}}$.	0.25
7	Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh $AB = AD = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1D_1 và A_1B_1 . Chứng minh rằng AC_1 vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$.	1,0
		
	Ta có: $BD \perp AC, BD \perp AA_1 \Rightarrow BD \perp mp(ACC_1A_1) \Leftrightarrow AC_1 \perp BD$.	0,5
	Mặt khác: $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}) \left(\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \right) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}^2 = -2 - 1 + 3 = 0$. Suy ra $\overrightarrow{AC_1} \perp \overrightarrow{BN}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC_1 \perp (BCMN)$.	0,5
8	Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 3, BC = 6$, mặt	

	phẳng (SAB) vuông góc với đáy, các mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng ($ABCD$) các góc bằng nhau. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{6}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BD.	1,0
		
	Hạ $SH \perp AB (H \in AB) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Kẻ $HK \perp CD (K \in CD) \Rightarrow$ tứ giác $HCKB$ là hình chữ nhật. Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (SBC) và ($ABCD$) là: $\widehat{SBH}$. $CD \perp (SHK) \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (SCD) và ($ABCD$) là: $\widehat{SKH}$	0.25
	Theo giả thiết: $\widehat{SBH} = \widehat{SKH} \Rightarrow \triangle SHB = \triangle SHK (g - c - g) \Rightarrow HK = HB = BC = 6$. Do đó A là trung điểm của HB. Ta thấy $\square ABCK$ là hình bình hành $\Rightarrow BD // AK \Rightarrow BD // (SAK)$ mà $SA \in (SAK)$ Suy ra $d(BD, SA) = d(BD, (SAK)) = d(D, (SAK)) = d(H, (SAK)) = h = \sqrt{6}$.	0.25
	Do tam diện $H.SAK$ vuông tại H nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}$ $\Rightarrow SH = 6$ Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = 36$ (dvtt).	0.25
	Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và $BD \Rightarrow \alpha = (BD, SA) = (AK, SA)$ Ta có: $SA = 6\sqrt{2}$, $SA = AK = 3\sqrt{5}$. Trong tam giác SAK có: $\cos \widehat{SAK} = \frac{AS^2 + AK^2 - SK^2}{2 \cdot AS \cdot AK} = \frac{45 + 45 - 72}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{1}{5}.$ Vậy $\alpha = \widehat{SAK} = \arccos \frac{1}{5}$.	0.25
9	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy), cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(2;1)$. Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình: $2x + y - 10 = 0$ và $D(2;-4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.	1,0



AJ đi qua $J(2;1)$ và $D(2;-4)$ nên AJ có phương trình : $x-2=0$
 Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A . Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases} x-2=0 \\ 2x+y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow A(2;6).$$

Gọi E là giao điểm thứ hai của BJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
Ta có $\widehat{DB} = \widehat{DC} \Rightarrow DB = DC$ và $\widehat{EA} = \widehat{EC}$
 $\widehat{DBJ} = \frac{1}{2}(\widehat{sd EC} + \widehat{sd DC}) = \frac{1}{2}(\widehat{sd EA} + \widehat{sd DB}) = \widehat{DJB} \Rightarrow \Delta DBJ$ cân tại D .
 $DB = DC = DJ$ hay D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC .

Suy ra B, C nằm trên đường tròn tâm $D(2; -4)$ bán kính $JD = \sqrt{0+5^2} = 5$ có phương trình $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$. Khi đó tọa độ B là hệ của nghiệm:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ x+y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(-3; -4) \\ B(2; -9) \end{cases}$$

Do B có hoành độ âm nên $B(-3; -4)$.

BC đi qua $B(-3;-4)$ và vuông góc AH nên có phương trình: $x-2y-5=0$.

Khi đó C là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ x-2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$$

Vậy $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$.

10	Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 1.$
-----------	---

$$\begin{aligned} \text{C\'o } P &= \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_{\frac{a}{b}}^2 a - 1 \\ &= \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + \frac{8}{(\log_a b - 1)^2} - 1 \end{aligned}$$

	Ta có $\frac{4(3b-1)}{9} = \frac{4}{3}b - \frac{4}{9}$	
	$(b - \frac{2}{3})^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{4}{9} \leq b^2 - \frac{4}{3}b$ $\Rightarrow \frac{4(3b-1)}{9} = \frac{4}{3}b - \frac{4}{9} \leq \frac{4}{3}b + b^2 - \frac{4}{3}b = b^2$ Vì $0 < a < 1$ nên $\log_a \frac{4(3b-1)}{9} \geq \log_a b^2 = 2\log_a b$	0,25
	Đặt $\log_a b = t$ ($t \in (1; +\infty)$) $\Rightarrow P \geq 2t + \frac{8}{(t-1)^2} - 1$ Xét hàm số: $f(t) = 2t + \frac{8}{(t-1)^2} - 1$ trên $(1; +\infty)$ Có $f'(t) = 2 - \frac{16}{(t-1)^3}$; $f'(t) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{16}{(t-1)^3} = 0$ $\Leftrightarrow t = 3 \in (1; +\infty)$	0,25
	Ta có $\min f(t) = f(3) = 7 \Rightarrow P \geq 7$ Dấu “=” xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ \log_a b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \end{cases}.$	0,25

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.