

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH LỚP 12 NĂM 2019**

Môn: Toán.

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề).

Ngày thi: 22/09/2019.

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Câu 1. (4 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.
- Tìm hai điểm A, B thuộc về hai nhánh của đồ thị (C) sao cho AB ngắn nhất.

Câu 2. (6 điểm)

- Giải phương trình: $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$.
- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2xy^2 - y - \sqrt{y^2 + 1} + 2xy^2\sqrt{4x^2 + 1} = 0 \\ x^3 - 2\sqrt{2x}\sqrt{y} = 2\sqrt[3]{x+6} + 2 \end{cases}$$
- Có 27 tấm thẻ được đánh các số tự nhiên từ 1 đến 27 (mỗi thẻ đánh đúng một số). Rút ngẫu nhiên ba thẻ. Tính xác suất để rút được ba thẻ mà tổng các số trên ba thẻ chia hết cho 3.

Câu 3. (4 điểm)

- Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(-2; -1)$, $\widehat{AIB} = 90^\circ$, $H(-1; -3)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC và $K(-1; 2)$ là một điểm thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C. Biết rằng điểm A có hoành độ dương.
- Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D. Gọi E là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng AC và đường phân giác ngoài của góc A. Gọi H là giao điểm của DE và AC. Đường thẳng qua H và vuông góc với DE cắt AE tại F. Đường thẳng qua F vuông góc với AE cắt AB tại K. Chứng minh rằng KH song song BC.

Câu 4. (3 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật biết $AB = a$, $BC = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

- Tính thể tích khối chóp S.ACD.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

Câu 5. (2 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa $(a+b)(b+c)(a+c) > 0$ và $a \geq \max\{b, c\}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right) + 2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}} > \frac{15}{2}$$

Câu 6. (1 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1; u_2 = 2020; u_{n+1} = \frac{2019u_n}{n} + \left(1 + \frac{2019}{n-1}\right)u_{n-1}, \forall n \geq 2$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$.

.....**HẾT**.....

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay
- Giám thị coi thi **không** giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) .

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm hai điểm A, B thuộc về hai nhánh của đồ thị (C) sao cho AB ngắn nhất.

Lời giải

a) $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

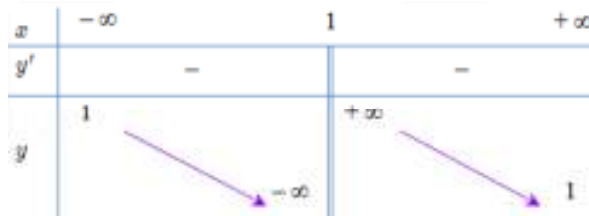
+) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

+) $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

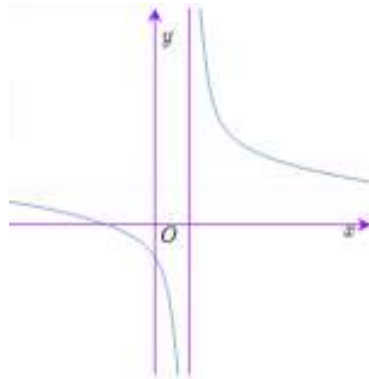
+) y' không xác định tại $x = 1$.

+) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+) $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.



+) Đồ thị



b) Giả sử $A\left(x_1; \frac{x_1+1}{x_1-1}\right); B\left(x_2; \frac{x_2+1}{x_2-1}\right)$, với $x_1 < 1 < x_2$.

Đặt $x_1 = 1 - a$; $x_2 = 1 + b$ với $a, b > 0$.

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + 4 \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_1 - 1)^2 (x_2 - 1)^2} = (a + b)^2 + 4 \frac{(a + b)^2}{(ab)^2} = (a + b)^2 \left(1 + \left(\frac{2}{ab} \right)^2 \right)$$

$$\geq 4ab \cdot \frac{4}{ab} = 16.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b \\ 1=\frac{2}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $A(1-\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$, $B(1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$.

Bài 2.

a) Giải phương trình $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy^2 - y - \sqrt{y^2 + 1} + 2xy^2\sqrt{4x^2 + 1} = 0 & (1) \\ x^3 - 2\sqrt{2x}\sqrt{y} = 2\sqrt[3]{x+6} + 2 & (2) \end{cases}$

c) Có 27 tấm thẻ được đánh các số tự nhiên từ 1 đến 27 (mỗi thẻ đánh đúng một số). Rút ngẫu nhiên ba thẻ. Tính xác suất để rút được ba thẻ mà tổng các số trên ba thẻ chia hết cho 3.

Lời giải

a)

$$(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos^2 x + \cos 2x(\cos x + 2) - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x - 1) + \cos 2x(\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x + \cos x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ (PTVN)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) ĐK: $x \geq 0; y \geq 0$.

Nhận thấy $x = 0; y = 0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình do đó ta chỉ xét $x > 0, y > 0$.

Ta có:

$$2xy^2 - y - \sqrt{y^2 + 1} + 2xy^2\sqrt{4x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 2xy^2(1 + \sqrt{4x^2 + 1}) = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2x(1 + \sqrt{4x^2 + 1}) = \frac{1}{y} + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}$$

Xét hàm số $f(t) = t(1 + \sqrt{1 + t^2})$, $t > 0$, $f'(t) = 1 + \sqrt{1 + t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} > 0$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ do đó ta có

$$2x(1 + \sqrt{4x^2 + 1}) = \frac{1}{y} + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \Leftrightarrow f(2x) = f\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$$x^3 - 2 = 2\sqrt[3]{x+6} + 2 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 2\sqrt[3]{x+6} - 4 \Leftrightarrow (x-2) \left(x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} = 0 \end{cases}$$

+ Với $x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$ thỏa mãn yêu cầu.

$$+ \text{ Với } x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 3 - \frac{2}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + \frac{(\sqrt[3]{x+6} + 1)^2 + 7}{(\sqrt[3]{x+6} + 1)^2 + 3} = 0 (*)$$

Phương trình (*) vô nghiệm.

$$\text{Vậy hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

c) Gọi Ω không gian mẫu của phép thử: “Rút 3 thẻ trong 27 thẻ”. Khi đó, $n(\Omega) = C_{27}^3 = 2925$.

Gọi biến cố A : “Rút 3 thẻ trong 27 thẻ mà tổng các số trên ba thẻ chia hết cho 3”.

Xét 3 tập hợp:

Tập B : “Các thẻ có số chia hết cho 3” $\Rightarrow B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27\}$.

Tập C : “Các thẻ có số chia cho 3 dư 1” $\Rightarrow C = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25\}$.

Tập D : “Các thẻ có số chia cho 3 dư 2” $\Rightarrow D = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26\}$.

(Nhận xét: Ba tập hợp B, C, D là đôi một rời nhau với $n(B) = n(C) = n(D) = 9$; 27 tấm thẻ đều được liệt kê 1 trong 3 tập trên, không có tấm thẻ nào được liệt kê 2 lần).

Theo tính chất đồng dư và phép chia hết cho 3, biến cố A xảy ra khi và chỉ khi một trong các khả năng sau xảy ra:

KN1. 3 thẻ rút được đều nằm trong tập B , khi đó $n_1(A) = C_9^3 = 84$.

KN2. 3 thẻ rút được đều nằm trong tập C , khi đó $n_2(A) = C_9^3 = 84$.

KN3. 3 thẻ rút được đều nằm trong tập D , khi đó $n_3(A) = C_9^3 = 84$.

KN4. 3 thẻ rút được có 1 thẻ trong tập B , 1 thẻ trong tập C , 1 thẻ trong tập D , khi đó

$$n_4(A) = C_9^1 C_9^1 C_9^1 = 729.$$

Do đó, $n(A) = n_1(A) + n_2(A) + n_3(A) + n_4(A) = 981$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\omega)} = \frac{981}{2925} = \frac{109}{325}$.

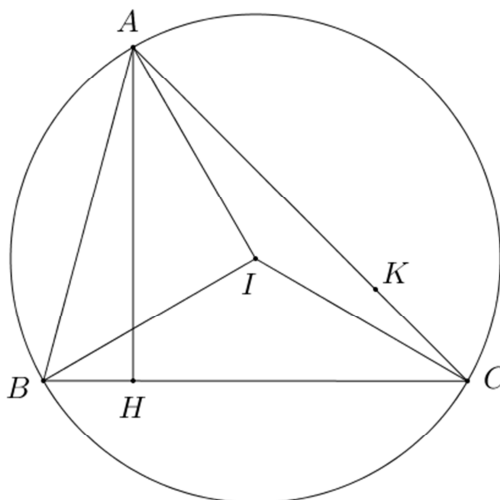
Bài 3.

a) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy . Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(-2; -1)$. Góc AIB bằng 90° , $H(-1; -3)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC và $K(-1; 2)$ thuộc đường thẳng AC . Tìm toạ độ A, B, C biết rằng A có hoành độ dương.

b) Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D . Gọi E là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng AC và đường phân giác ngoài của góc A , $H = DE \cap AC$. Đường thẳng qua H và vuông góc với DE cắt AE tại F . Đường thẳng qua F vuông góc với AE cắt AB tại K . Chứng minh rằng $KH \parallel BC$.

Lời giải

a)



Ta có $\widehat{AIB} = 90^\circ$ nên $\widehat{ACH} = 45^\circ$ suy ra tam giác AHC vuông cân tại H

Mặt khác $IA = IC$ nên $HI \perp AC$

Phương trình đường thẳng AC qua $K(-1; 2)$ và vuông góc với HI có phương trình

$$-x + 2y - 5 = 0.$$

Gọi $A(2a - 5; a) \in AC$

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{2}AH \Rightarrow AH = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2HK}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}HK = \sqrt{2}d(H; AC) = 2\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4-2a)^2 + (-3-a)^2} = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow A(-5; -1) \\ a = 3 \Rightarrow A(1; 3) \end{cases}$$

Vậy $A(1; 3)$.

Phương trình đường thẳng BC qua $H(-1; -3)$ và vuông góc với AH có phương trình

$$x + 3y + 10 = 0.$$

Gọi $B(3b - 10; b) \in BC$, ta có $\overrightarrow{IB} = (3b - 8; b + 1); \overrightarrow{IA} = (3; 4)$

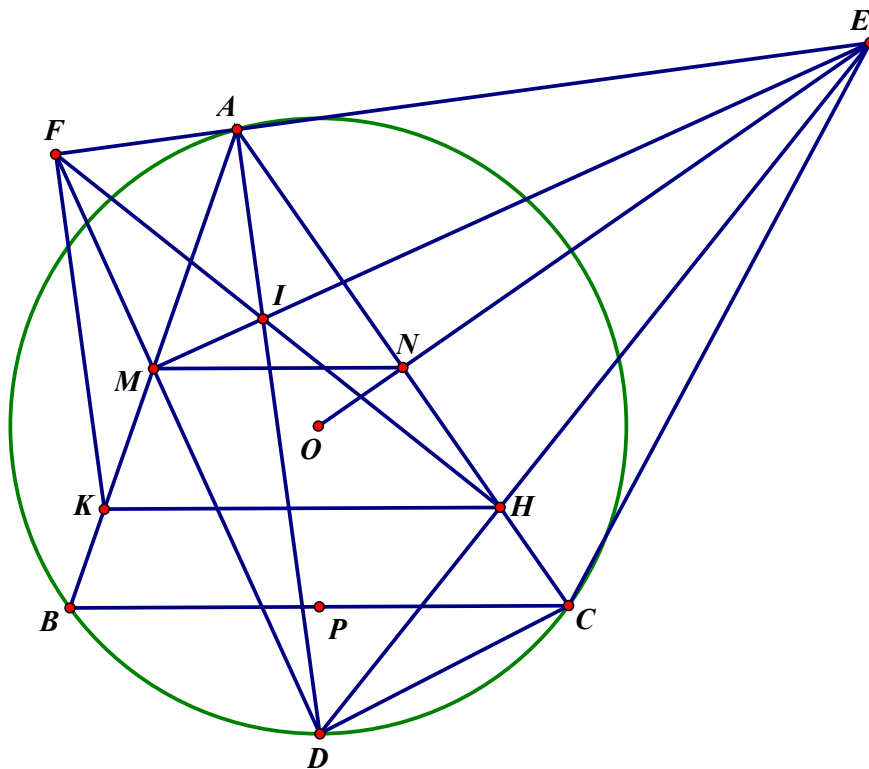
Vì tam giác AIB vuông tại I nên $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA} = 0 \Leftrightarrow 3(3b-8) + 4(b+1) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{20}{3} \Rightarrow B\left(10; \frac{20}{3}\right)$

Vì $C = AC \cap BC$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+3y+10=0 \\ -x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow C(-7; -1)$$

b)

Ta có $H = DE \cap AC$



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC .

Khi đó, ta có:

$$\frac{MN}{DC} = \frac{PC}{DC} = \cos \widehat{PCD} = \cos \frac{\widehat{BAC}}{2}; \frac{EN}{EC} = \cos \widehat{NEC} = \cos \widehat{NEA} = \cos \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \frac{NM}{CD} = \frac{NE}{CE}$$

Lại có:

$$\widehat{MNE} = 90^\circ + \widehat{ANM} = 90^\circ + \widehat{ACB}; \widehat{DCE} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{NCE} = \widehat{ACB} + \widehat{NEC} + \widehat{NCE} = \widehat{ACB} + 90^\circ$$

Suy ra

$$\widehat{MNE} = \widehat{DCE} \Rightarrow \Delta MNE \sim \Delta DCE (c.g.c) \Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{OEH} = \widehat{DEC} + \widehat{OEH}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{MEH} = \widehat{OEC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{MAD} \Rightarrow DMAE \text{ là tứ giác nội tiếp suy ra } DM \perp ME. (2)$$

Giả sử $ME \cap AD = I$, ta đi chứng minh $\overline{F, I, H}; \overline{F, M, D}$.

Có: $\widehat{IEH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{IAH} \Rightarrow IAEH$ là tứ giác nội tiếp suy ra $IH \perp DE \Rightarrow \overline{I, F, H}$ (do FH cũng vuông góc với DE) (1)

Từ (1) kết hợp với $DI \perp FE \Rightarrow I$ là trực tâm tam giác FDE suy ra $FD \perp IE$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\overline{F, M, D}$.

$$\text{Để thấy } \triangle FAM \sim \triangle HAE (g.g) \Rightarrow \frac{FA}{HA} = \frac{AM}{AE} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AH = AE \cdot AF \text{ và}$$

$$\triangle FAK \sim \triangle NAE (g.g) \Rightarrow \frac{FA}{NA} = \frac{AK}{AE} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AC \cdot AK = AE \cdot AF$$

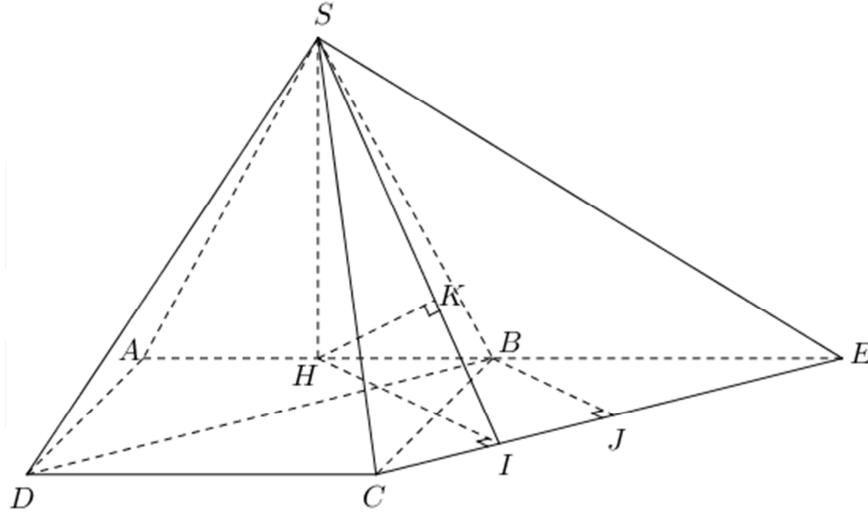
$$\text{Suy ra } AB \cdot AH = AK \cdot AC \Leftrightarrow \frac{AH}{AK} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow KH \parallel BC.$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật biết $AB = a$, $BC = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ACD$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .

Lời giải



a) Tính thể tích khối chóp $S.ACD$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB = CD = a$, $BC = AD = 2a$.

Gọi H là trung điểm của AB .

Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

$$\text{Ta có } V_{S.ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD \cdot SH = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .

Từ C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại điểm E .

Ta có $\begin{cases} BD \parallel CE \\ BE \parallel CD \end{cases} \Rightarrow BECD \text{ là hình bình hành} \Rightarrow BE = CD = a$.

Suy ra $BE = \frac{2}{3}HE$.

Khi đó $d(BD, SC) = d(BD, (SCE)) = d(B, (SCE)) = \frac{2}{3}d(H, (SCE)) (*)$.

Kẻ $HI \perp CE$ ($I \in CE$), mà $CE \perp SH \Rightarrow CE \perp (SHI) \Rightarrow (SCE) \perp (SHI)$.

Do đó $\begin{cases} (SCE) \perp (SHI) \\ (SCE) \cap (SHI) = SI \Rightarrow HK \perp (SCE) \\ HK \perp SI \text{ (} K \in SI \text{)} \end{cases}$

Suy ra $HK = d(H, (SCE))$.

Kẻ $BJ \perp CE$ ($J \in CE$) $\Rightarrow BJ \parallel HI \Rightarrow HI = \frac{3}{2}BJ$.

Xét tam giác BCE vuông tại B có $BJ = \frac{BE \cdot BC}{\sqrt{BE^2 + BC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$\Rightarrow HI = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác SHI vuông tại H có $HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{3a\sqrt{17}}{17}$.

Từ (*) $\Rightarrow d(BD, SC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{17}}{17} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa $(a+b)(b+c)(a+c) > 0$ và $a \geq \max\{b, c\}$.

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right) + 2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}} > \frac{15}{2}$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}$ và $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right) + 2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}}$.

Từ $a \geq \max\{b, c\}$ suy ra $x \leq 1, y \leq 1$.

Khi đó $P = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{11}{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} \right) + 2\sqrt{1+7(x+y)}$

Do $0 \leq x, y \leq 1$ nên

$$x(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq xy \Leftrightarrow x+y \geq y+xy \Rightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{y(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \geq \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{y}{x+1} \geq \frac{y^2}{x+y} \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{x+1}} \geq \frac{y}{\sqrt{x+y}}$$

Tương tự, ta cũng có $\sqrt{\frac{x}{y+1}} \geq \frac{x}{\sqrt{x+y}}$.

Khi đó

$$P \geq \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{11}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{x+y}} \right) + 2\sqrt{1+7(x+y)} = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{11}{2}\sqrt{x+y} + 2\sqrt{1+7(x+y)}$$

Đặt $t = \sqrt{x+y}$, ($0 < t \leq 2$) ta được

$$P \geq \frac{1}{t} + \frac{11}{2}t + 2\sqrt{1+7t^2} = f(t)$$

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{11}{2} + \frac{14t}{\sqrt{1+7t^2}} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \text{ (thỏa)}$$

$$\text{Suy ra } P \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x=0 \\ t=\frac{1}{3} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b+c=\frac{1}{9}a \\ c=a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0 \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Vậy } P > \frac{15}{2}.$$

Bài 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1; u_2 = 2020; u_{n+1} = \frac{2019u_n}{n} + \left(1 + \frac{2019}{n-1}\right)u_{n-1}, n \geq 2$.

$$\text{Tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} \right).$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } u_{n+1} &= \frac{2019u_n}{n} + \left(1 + \frac{2019}{n-1}\right)u_{n-1} = 2019 \left(\frac{u_n}{n} + \frac{u_{n-1}}{n-1} \right) + u_{n-1} \\ &= 2019 \left(\frac{u_n}{n} + \frac{u_{n-1}}{n-1} \right) + 2019 \left(\frac{u_{n-2}}{n-2} + \frac{u_{n-3}}{n-3} \right) + u_{n-3} = \dots = 2019 \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{i} + u_1. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } u_{n+2} = 2019 \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{u_i}{i} \right) + u_1 = 2019 \frac{u_{n+1}}{n+1} + u_{n+1}.$$

$$\text{Vậy } u_{n+1} = \frac{2019u_n}{n} + u_n = u_n \left(\frac{n+2019}{n} \right) \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2019}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Do đó } u_n = \frac{(2019+1)(2019+2)\dots(2019+n-1)}{(n-1)!}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} &= 1 + \frac{1}{2020} + \sum_{k=3}^n \frac{(k-1)!}{(2019+1)(2019+2)\dots(2019+k-2)} \\ &= 1 + \frac{1}{2018} \left(1 - \frac{2!}{2020} \right) + \frac{1}{2018} \sum_{k=3}^n \left[\frac{(k-1)!}{(2019+1)(2019+2)\dots(2019+k-2)} - \frac{k!}{(2019+1)(2019+2)\dots(2019+k-1)} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2018} - \frac{n!}{2018 \cdot 2020 \cdot 2021 \dots (2019+n-1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{2018.2020.2021 \dots (2019+n-1)} = 0$$

$$\text{Nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \frac{2019}{2018}.$$

----- **HẾT** -----