

Mục lục

Trang

A. Đặt vấn đề

B. Nội dung và phương pháp

I .Tình hình chung

II .Những vấn đề được giải quyết

III .Phương pháp tiến hành

1. Cơ sở lí thuyết

2. Các dạng bài tập

2.1. Dạng 1: Tìm số chưa biết

2.1.1. Tìm cơ số, thành phần cơ số của lũy thừa

2.1.2. Tìm số mũ, thành phần số mũ của lũy thừa

2.1.3. Một số trường hợp khác

2.2. Dạng 2 : Tìm chữ số tận cùng của giá trị lũy thừa

2.2.1. Tìm một chữ số tận cùng

2.2.2. Tìm 2 chữ số tận cùng

2.2.3. Tìm 3 chữ số tận cùng trở lên

2.3. Dạng 3: So sánh hai lũy thừa

2.4. Dạng 4. Tính toán trên các lũy thừa

2.5. Dạng 5: Toán đố với lũy thừa

3. Kết quả thực hiện

VI. Những vấn đề hạn chế và hướng tiếp tục nghiên cứu

V. Điều kiện áp dụng

C. Kết luận

Tài liệu tham khảo

A. Đặt vấn đề

Phải nói rằng: Toán học là một môn khoa học tự nhiên lý thú. Nó cuốn hút con người ngay từ khi còn rất nhỏ. Chính vì vậy, mong muốn nắm vững kiến thức về toán học để học khá và học giỏi môn toán là nguyện vọng của rất nhiều học sinh. Trong giảng dạy môn toán, việc giúp học sinh nắm vững kiến thức cơ bản, biết khai thác và mở rộng kiến thức, áp dụng vào giải được nhiều dạng bài tập là điều hết sức quan trọng. Từ đó giáo viên giúp cho học sinh phát triển tư duy, óc sáng tạo, sự nhanh nhạy khi giải toán ngay từ khi học môn số học lớp 6. Đó là tiền đề để các em học tốt môn Đại Số sau này.

Trong toán học, “Toán lũy thừa” là một mảng kiến thức khá lớn, chứa đựng rất nhiều các bài toán hay và khó. Để làm được các bài toán về lũy thừa không phải là việc dễ dàng kể cả đối với học sinh khá và giỏi, nhất là đối với học sinh lớp 6, lớp 7, các em mới được làm quen với môn đại số và mới được tiếp cận với toán lũy thừa nên chưa có công cụ phổ biến để thực hiện các phép biến đổi đại số, ít phương pháp, kỹ năng tính toán... Để học tốt bộ môn toán nói chung và “Toán lũy thừa” nói riêng, điều quan trọng là luôn biết rèn nếp suy nghĩ qua việc học lý thuyết, qua việc giải từng bài tập... qua sự suy nghĩ, tìm tòi lời giải. Đứng trước một bài toán khó, chưa tìm ra cách giải, học sinh thực sự lúng túng, hoang mang và rất có thể sẽ bỏ qua bài toán đó, nhưng nếu có được sự giúp đỡ, gợi mở thì các em sẽ không sợ mà còn thích thú khi làm những bài toán như vậy.

Để nâng cao và mở rộng kiến thức phần lũy thừa cho học sinh lớp 6, lớp 7, bằng kinh nghiệm giảng dạy của mình kết hợp với sự tìm tòi, học hỏi các thầy cô giáo đồng nghiệp, tôi muốn trình bày một số ý kiến về chuyên đề “Toán lũy thừa trong Q” nhằm cung cấp những kiến thức cơ bản, cần thiết và những kinh nghiệm cụ thể về phương pháp giải toán lũy thừa cho các đối tượng học sinh. Bên cạnh đó giúp học sinh rèn luyện các thao tác tư duy, phương pháp suy luận logic.... tạo sự say mê cho các bạn yêu toán nói chung và toán lũy thừa nói riêng.

B. Nội dung và phương pháp

I. Tình hình chung

Thông qua giảng dạy, tôi thấy hầu hết học sinh cứ thấy bài toán liên quan đến lũy thừa là sợ, đặc biệt là lũy thừa với số mũ lớn, số mũ tổng quát. Như đã nói ở trên, học sinh lớp 6, lớp 7 mới được tiếp xúc với toán lũy thừa, trong sách giáo khoa yêu cầu ở mức độ vừa phải, nhẹ nhàng. Chính vì thế mà khi giáo viên chỉ cần thay đổi yêu cầu của đề bài là học sinh đã thấy khác lạ, khi nâng cao lên một chút là các em gặp khăn chồng chất: Làm bằng cách nào? làm như thế nào? ...chứ chưa cần trả lời các câu hỏi: làm thế nào nhanh hơn, ngắn gọn hơn, độc đáo hơn?

Tôi chọn chuyên đề này với mong muốn giúp học sinh học tốt hơn phần toán lũy thừa, giúp các em không còn thấy sợ khi gặp một bài toán lũy thừa hay và khó. Hy vọng rằng đây sẽ

là tài liệu tham khảo bổ ích cho học sinh lớp 6, lớp 7 khi học và đào sâu kiến thức toán lũy thừa dưới dạng các bài tập.

II. Những vấn đề được giải quyết.

1. Kiến thức cơ bản
2. Kiến thức bổ sung
3. Các dạng bài tập và phương pháp chung

3.1. Dạng 1: Tìm số chưa biết

- 3.1.1. Tìm cơ số, thành phần trong cơ số của lũy thừa
- 3.1.2. Tìm số mũ, thành phần trong số mũ của lũy thừa
- 3.1.3. Một số trường hợp khác

3.2. Dạng 2. Tìm chữ số tận cùng của giá trị lũy thừa

- 3.2.1. Tìm một chữ số tận cùng
- 3.2.2. Tìm hai chữ số tận cùng
- 3.2.3. Tìm 3 chữ số tận cùng trở lên

3.3. Dạng 3. So sánh hai lũy thừa

3.4. Dạng 4. Tính toán trên các lũy thừa

3.5. Dạng 5. Toán đố với lũy thừa

III. Phương pháp tiến hành.

1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

a. Định nghĩa lũy thừa với số mũ tự nhiên

$$a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

n thừa số

b. Một số tính chất :

Với $a, b, m, n \in \mathbb{N}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p} \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$$

$$(a.b)^m = a^m \cdot b^m \quad (m \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m.n} \quad (m, n \neq 0)$$

Quy ước:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

❖ Với $x, y \in \mathbb{Q}; m, n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{Z}$

$$x^n = \underbrace{x.x.\dots.x}_n \quad (x \in \mathbb{N}^*)$$

n thừa số

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0, n \neq 0)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x \neq 0)$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0)$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

$$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$$

c. Kiến thức bổ sung

* Với mọi $x, y, z \in Q$:

$$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$$

$$\text{Với } z > 0 \text{ thì: } x < y \Leftrightarrow x \cdot z < y \cdot z$$

$$z < 0 \text{ thì: } x < y \Leftrightarrow x \cdot z > y \cdot z$$

* Với $x \in Q, n \in N$:

$$(-x)^{2n} = x^{2n} \quad (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$$

* Với $a, b \in Q$:

$$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$$

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$$

$$a > 1, m > n > 0 \Rightarrow a^m > a^n$$

$$0 < a < 1, m > n > 0 \Rightarrow a^m > a^n$$

2. Các dạng bài tập

1. Dạng 1: Tìm số chưa biết

2.1.1. Tìm cơ số, thành phần của cơ số trong lũy thừa

***Phương pháp:** Đưa về hai lũy thừa cùng số mũ

Bài 1: Tìm x biết rằng:

$$a, x^3 = -27$$

$$b, (2x - 1)^3 = 8$$

$$c, (x - 2)^2 = 16$$

$$d, (2x - 3)^2 = 9$$

Đối với bài toán này, học sinh chỉ cần nắm vững kiến thức cơ bản là có thể dễ dàng làm được, lưu ý với số mũ chẵn, học sinh cần xét hai trường hợp.

$$a, x^3 = -27$$

$$x^3 = (-3)^3$$

$$\Rightarrow x = -3$$

$$\text{Vậy } x = -3$$

$$b, (2x - 1)^3 = 8$$

$$(2x - 1)^3 = (-2)^3$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = -2$$

$$2x = -2 + 1$$

$$2x = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-1}{2}$$

$$c, (2x - 3)^2 = 9 \Rightarrow (2x - 3)^2 = (-3)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 3 \quad \text{hoặc} \quad 2x - 3 = -3$$

$$2x = 6$$

$$2x = 0$$

$$x = 3$$

$$x = 0$$

$$\text{Vậy } x = 3 \text{ hoặc } x = 0.$$

$$d, (x - 2)^2 = 16 \Rightarrow (x - 2)^2 = (-4)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x - 2 = -4 \quad \text{hoặc} \quad x - 2 = 4$$

$$x = -2$$

$$x = 6$$

$$\text{Vậy } x = -2 \text{ hoặc } x = 6$$

Bài 2. Tìm số hữu tỉ x biết : $x^2 = x^5$

Nếu ở bài 1 học sinh làm thấy nhẹ nhàng thì đến bài 2 này không tránh khỏi băn khoăn, lúng túng : hai lũy thừa đã cùng cơ số- chưa biết, số mũ- đã biết- lại khác nhau. Vậy phải làm cách nào đây ? Nhiều học sinh sẽ “ tìm mò ” để được $x = 0$ hoặc $x = 1$, nhưng cách này sẽ không thuyết phục lắm bởi biết đâu còn số x thỏa mãn đề bài thì sao ?

Giáo viên có thể gợi ý :

$$x^2 = x^5 \Rightarrow x^5 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Đến đây giáo viên có thể cho học sinh làm bài tập sau :

Bài 3. Tìm số hữu tỉ y biết : $(3y - 1)^{10} = (3y - 1)^{20}$ (*)

Hướng dẫn : Đặt $3y - 1 = x$. Khi đó (*) trở thành : $x^{10} = x^{20}$

$$\text{Giải tương tự bài 2 ở trên ta được : } \begin{cases} x^{10} = 0 \\ x^{10} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^{10} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Rất có thể học sinh dừng lại ở đây, vì đã tìm được x. Nhưng đề bài yêu cầu tìm y nên ta phải thay trở lại điều kiện đặt để tìm y.

$$+) \text{ Với } x = 0 \text{ ta có : } 3y - 1 = 0 \Rightarrow 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$+) \text{ Với } x = 1 \text{ ta có : } 3y - 1 = 1 \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$+) \text{ Với } x = -1 \text{ ta có : } 3y - 1 = -1 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{Vậy } y = \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0$$

Bài 3 : Tìm x biết : $(x - 5)^2 = (1 - 3x)^2$

Bài này ngược với bài trên , hai lũy thừa đã có số mũ - đã biết- giống nhau nhưng cơ số – chưa biết – lại khác nhau . Lúc này ta cần sử dụng tính chất : bình phương của hai lũy thừa bằng nhau khi hai cơ số bằng nhau hoặc đối nhau .

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } (x - 5)^2 &= (1 - 3x)^2 \Rightarrow x - 5 = 1 - 3x & \text{ hoặc } & x - 5 = 3x - 1 \\ \Rightarrow 4x &= 6 & & 2x = -4 \\ \Rightarrow x &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} & & x = -2 \end{aligned}$$

Bài 4 : Tìm x và y biết : $(3x - 5)^{100} + (2y + 1)^{200} \leq 0$ (*)

Với bài toán này , cơ số và số mũ của hai lũy thừa không giống nhau , lại phải tìm hai số x và y bên cạnh đó là dấu ‘ $\leq$ ’ , thật là khó ! Lúc này chỉ cần gợi ý nhỏ của giáo viên là các em có thể giải quyết được vấn đề : hãy so sánh $(3x - 5)^{100}$ và $(2y + 1)^{200}$ với 0 .

$$\begin{aligned} \text{Ta thấy : } (3x - 5)^{100} &\geq 0 & \forall x \in \mathbb{Q} \\ (2y + 1)^{200} &\geq 0 & \forall x \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Biểu thức (*) chỉ có thể bằng 0 , không thể nhỏ hơn 0

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } (3x - 5)^{100} + (2y + 1)^{200} &= 0 & \text{ khi } & (3x - 5)^{100} = (2y + 1)^{200} = 0 \\ & & & 3x - 5 = 2y + 1 = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{5}{3} & \text{ và } & y = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Bài 5 : Tìm các số nguyên x và y sao cho : $(x + 2)^2 + 2(y - 3)^2 < 4$

$$\text{Theo bài 3 , học sinh sẽ nhận ra ngay : } (x + 2)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$2(y - 3)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Nhưng nảy sinh vấn đề ở “ < 4 ” , học sinh không biết làm thế nào. Giáo viên có thể gợi ý :

Từ (1) và (2) suy ra, để : $(x + 2)^2 + 2(y - 3)^2 < 4$ thì chỉ có thể xảy ra những trường hợp sau :

$$\begin{aligned} +) \text{ Trường hợp 1 : } (x + 2)^2 &= 0 & \text{ và } & (y - 3)^2 = 0 \\ \Rightarrow x &= -2 & \Rightarrow & y = 3 \end{aligned}$$

$$+) \text{ Trường hợp 2 : } (x + 2)^2 = 0 \quad \text{ và } \quad (y - 3)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = -2 \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

+) Trường hợp 3 : $(x + 2)^2 = 1$ và $(y - 3)^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

+) Trường hợp 4 : $(x + 2)^2 = 1$ và $(y - 3)^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy ta có bảng giá trị tương ứng của x và y thỏa mãn đề bài là :

x	-2	-2	-2	-1	-3	-1	-3	-3	-1
y	3	4	2	3	3	4	2	4	2

Thật là một bài toán phức tạp ! Nếu không cẩn thận sẽ xét thiếu trường hợp ,bỏ sót những cặp giá trị của x và y thỏa mãn điều kiện đề bài .

Bây giờ giáo viên có thể cho học sinh làm các bài toán tương tự sau :

1 . Tìm x biết :

a, $(2x - 1)^4 = 81$

b, $(x - 2)^2 = 1$

c, $(x - 1)^5 = -32$

d, $(4x - 3)^3 = -125$

2 . Tìm y biết :

a, $y^{200} = y$

b, $y^{2008} = y^{2010}$

c, $(2y - 1)^{50} = 2y - 1$

d, $(\frac{y}{3} - 5)^{2000} = (\frac{y}{3} - 5)^{2008}$

3 . Tìm a , b ,c biết :

a, $(2a + 1)^2 + (b + 3)^4 + (5c - 6)^2 \leq 0$

b, $(a - 7)^2 + (3b + 2)^2 + (4c - 5)^6 \leq 0$

c, $(12a - 9)^2 + (8b + 1)^4 + (c + 19)^6 \leq 0$

d, $(7b - 3)^4 + (21a - 6)^4 + (18c + 5)^6 \leq 0$

3.1.2 Tìm số mũ , thành phần trong số mũ của lũy thừa.

Phương pháp : Đưa về hai lũy thừa có cùng cơ số

Bài 1 : Tìm n $\in \mathbb{N}$ biết :

a, $2008^n = 1$

c, $32^{-n} \cdot 16^n = 1024$

$$b, 5^n + 5^{n+2} = 650$$

$$d, 3^{-1} \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} = 162$$

Đọc đề bài học sinh có thể dễ dàng làm được câu a,

$$a, 2008^n = 1 \Rightarrow 2008^n = 2008^0 \Rightarrow n = 0$$

Nhưng đến câu b, thì các em vấp ngay phải khó khăn : tổng của hai lũy thừa có cùng cơ số nhưng không cùng số mũ . Lúc này rất cần có gợi ý của giáo viên :

$$b, 5^n + 5^{n+2} = 650$$

$$5^n + 5^n \cdot 5^2 = 650$$

$$5^n \cdot (1 + 25) = 650$$

$$\Rightarrow 5^n = 650 : 26$$

$$5^n = 25 = 5^2$$

$$\Rightarrow n = 2$$

Theo hướng làm câu b, học sinh có ngay cách làm câu c, và d,

$$c, 32^{-n} \cdot 16^n = 1024$$

$$(2^5)^{-n} \cdot (2^4)^n = 1024$$

$$2^{-5n} \cdot 2^{4n} = 2^{10}$$

$$2^{-n} = 2^{10}$$

$$\Rightarrow n = -10$$

$$d, 3^{-1} \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} = 162$$

$$3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} = 162$$

$$\Rightarrow 6 \cdot 3^{n-1} = 162$$

$$3^{n-1} = 27 = 3^3$$

$$\Rightarrow n - 1 = 3$$

$$n = 4$$

Bài 2 : Tìm hai số tự nhiên m , n biết :

$$2^m + 2^n = 2^{m+n}$$

Học sinh thực sự thấy khó khi gặp bài này , không biết phải làm như thế nào để tìm được hai số mũ m và n . Giáo viên gợi ý :

$$2^m + 2^n = 2^{m+n}$$

$$2^{m+n} - 2^m - 2^n = 0$$

$$\Rightarrow 2^m \cdot 2^n - 2^m - 2^n + 1 = 1$$

$$2^m(2^n - 1) - (2^n - 1) = 1$$

$$(2^m - 1)(2^n - 1) = 1 \quad (*)$$

$$\text{Vì } 2^m \geq 1, 2^n \geq 1 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Nên từ (*)} \Rightarrow \begin{cases} 2^m - 1 = 1 \\ 2^n - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^m = 2 \\ 2^n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy : $m = n = 1$

Bài 3 : Tìm các số tự nhiên n sao cho :

a, $3 < 3^n \leq 234$

b, $8.16 \geq 2^n \geq 4$

Đây là dạng toán tìm số mũ của lũy thừa trong điều kiện kép. Giáo viên hướng dẫn học sinh đưa các số về các lũy thừa có cùng cơ số .

a, $3 < 3^n \leq 234$

$$3^1 < 3^n \leq 3^5$$

$$\Rightarrow n \in \{2;3;4;5\}$$

b, $8.16 \geq 2^n \geq 4$

$$2^3.2^4 \geq 2^n \geq 2^2$$

$$2^7 \geq 2^n \geq 2^2$$

$$\Rightarrow n \in \{2;3;4;5;6;7\}$$

Bài 4 : Tìm số tự nhiên n biết rằng :

$$4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16}$$

Với bài này , giáo viên gợi ý học sinh quan sát , nhận xét về số mũ của các lũy thừa trong một tích thì học sinh sẽ nghĩ ngay ra hướng giải bài toán :

$$4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16}$$

$$(4 \cdot 9)^{15} < (2 \cdot 3)^n < (18 \cdot 2)^{16}$$

$$36^{15} < 6^n < 36^{16}$$

$$6^{30} < 6^n < 6^{32}$$

$$\Rightarrow n = 31$$

Bây giờ, học sinh không những biết làm các bài toán tương tự mà còn có thể tự ra các bài toán dạng tương tự.

1. Tìm các số nguyên n sao cho

a. $9 \cdot 27^n = 3^5$

b. $(2^3 : 4) \cdot 2^n = 4$

c. $3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 3^n = 3^7$

d. $2^{-1} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5$

2. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho :

a. $125.5 \geq 5^n \geq 5.25$

b. $(n^{54})^2 = n$

c. $243 \geq 3^n \geq 9.27$

d. $2^{n+3} \cdot 2^n = 144$

3. Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng

a. $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

b. $10^x : 5^y = 20^y$

4. Tìm số tự nhiên n biết rằng

$$a. 4^{11} \cdot 25^{11} \leq 2^n \cdot 5^n \leq 20^{12} \cdot 5^{12}$$

$$b. \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^n$$

Hướng dẫn:

$$3. \quad a. \quad 2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$$

$$2^{x+1} \cdot 3^y = 2^{2x} \cdot 3^x$$

$$\Rightarrow \frac{3^y}{3^x} = \frac{2^{2x}}{2^{x+1}}$$

$$3^{y-x} = 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow y-x = x+1 = 0$$

$$\text{Hay } x = y = 1$$

$$b. \quad 10^x : 5^y = 20^y$$

$$10^x = 20^y \cdot 5^y$$

$$10^x = 100^y$$

$$10^x = 100^{2y}$$

$$\Rightarrow x = 2y$$

$$4 b. \quad \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^n$$

$$\frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 2^n$$

$$\frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^n$$

$$\Rightarrow 4^6 = 2^n \Rightarrow 2^{12} = 2^n \Rightarrow n = 12$$

3.1.3. Một số trường hợp khác

Bài 1: Tìm x biết:

$$(x-1)^{x+2} = (x-1)^{x+4} \quad (1)$$

Thoạt nhìn ta thấy đây là một bài toán rất phức tạp, vì số cần tìm có mặt cả trong số mũ và cơ số. Vì thế, học sinh rất khó xác định cách giải. Nhưng chúng ta có thể đưa về bài toán quen thuộc bằng một phép biến đổi sau:

$$\text{Đặt } x-1 = y \text{ ta có: } x+2 = y+3$$

$$x+4 = y+5$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } y^{y+3} = y^{y+5}$$

$$y^{y+5} - y^{y+3} = 0$$

$$y^{y+3}(y^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow y^{y+3} = 0 \text{ hoặc } y^2 - 1 = 0.$$

* Nếu: $y^{+3} = 0 \Rightarrow y = 0$

Khi đó: $x - 1 = 0$ hay $x = 1$.

* Nếu: $y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow y^2 = (\pm 1)^2 \Rightarrow y = 1$ hoặc $y = -1$

Với $y = 1$ ta có: $x - 1 = 1$ hay $x = 2$

Với $y = -1$ ta có: $x - 1 = -1$ hay $x = 0$

Vậy: $x \in \{0; 1; 2\}$

Bài 2 : Tìm x biết :

$$x(6-x)^{2003} = (6-x)^{2003}$$

Với bài này, x xuất hiện cả trong cơ số và cả ở ngoài (không phải ở trong số mũ như bài trên). Học sinh sẽ lúng túng và gặp khó khăn khi tìm lời giải, khi đó giáo viên hướng dẫn.

$$x \cdot (6-x)^{2003} = (6-x)^{2003}$$

$$x \cdot (6-x)^{2003} - (6-x)^{2003} = 0$$

$$(6-x)^{2003} (x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (6-x)^{2003} = 0 \text{ hoặc } (x-1) = 0$$

* Nếu $(6-x)^{2003} = 0 \Rightarrow (6-x) = 0$

$$x = 6$$

* Nếu $(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy: $x \in \{1; 6\}$

Bài 3 : Tìm các số tự nhiên a, b biết :

a. $2^a + 124 = 5^b$

b. $10^a + 168 = b^2$

Với bài toán này, nếu học sinh sử dụng các cách làm ở trên sẽ đi vào con đường bế tắc không có lời giải. Vậy phải làm bằng cách nào và làm như thế nào? Ta cần dựa vào tính chất đặc biệt của lũy thừa và tính chất chia hết của một tổng để giải bài toán này :

a) $2^a + 124 = 5^b \quad (1)$

* Xét $a = 0$, khi đó (1) trở thành

$$2^0 + 124 = 5^b$$

$$\text{Hay } 5^b = 125$$

$$5^b = 5^3$$

$$\text{Do đó } a = 0 \text{ và } b = 3$$

* Xét $a \geq 1$. Ta thấy vế trái của (1) luôn là số chẵn và vế phải của (1) luôn là số lẻ với mọi $a \geq 1$, $a, b \in \mathbb{N}$, điều này vô lý.

Kết luận : Vậy : $a = 0$ và $b = 3$.

$$b) \quad 10^a + 168 = b^2 \quad (2)$$

Tương tự câu a

* Xét $a = 0$, khi đó (2) trở thành

$$10^0 + 168 = b^2$$

$$169 = b^2$$

$$(\pm 13)^2 = b^2 \Rightarrow b = 13 \quad (\text{vì } b \in \mathbb{N})$$

Do đó $a = 0$ và $b = 13$.

* Xét $a \geq 1$.

Chúng ta đều biết với mọi số tự nhiên $a \geq 1$ thì 10^a có chữ số tận cùng là 0 nên suy ra $10^a + 168$ có chữ số tận cùng là 8, theo (2) thì b^2 có chữ số tận cùng là 8. Điều này vô lý.

Kết luận : Vậy : $a = 0$ và $b = 13$.

Giáo viên có thể cho học sinh làm một số bài tập tương tự sau :

Tìm các số tự nhiên a, b để :

$$a. \quad 3^a + 9b = 183$$

$$b. \quad 5^a + 323 = b^2$$

$$c. \quad 2^a + 342 = 7^b$$

$$d. \quad 2^a + 80 = 3^b$$

3.2. Dạng 2 : Tìm chữ số tận cùng của một giá trị lũy thừa

3.2.1 Tìm một chữ số tận cùng

* **Phương pháp** : cần nắm được một số nhận xét sau :

+) Tất cả các số có chữ số tận cùng là : 0 ; 1 ; 5 ; 6 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng có chữ số tận cùng là chính những số đó .

+) Để tìm chữ số tận cùng của một số ta thường đưa về dạng các số có chữ số tận cùng là một trong các chữ số đó .

+) Lưu ý : những số có chữ số tận cùng là 4 nâng lên lũy thừa bậc chẵn sẽ có chữ số tận cùng là 6 và nâng lên lũy thừa bậc lẻ sẽ có chữ số tận cùng là 4 .

những số có chữ số tận cùng là 9 nâng lên lũy thừa bậc chẵn sẽ có chữ số tận cùng là 1 và nâng lên lũy thừa bậc lẻ sẽ có chữ số tận cùng là 9

$$+) \text{ Chú ý : } \quad 2^4 = 16 \qquad 7^4 = 2401 \qquad 3^4 = 81 \qquad 8^4 = 4096$$

Bài 1 : Tìm chữ số tận cùng của các số : 2000^{2008} , 1111^{2008} , 98765^{4321} , 2046^{81012} .

Dựa vào những nhận xét trên học sinh có thể dễ dàng tìm được đáp án :

2000^{2008} có chữ số tận cùng là chữ số 0

1111^{2008} có chữ số tận cùng là chữ số 1

98765^{4321} có chữ số tận cùng là chữ số 5

2046^{81012} có chữ số tận cùng là chữ số 6.

Bài 2 : Tìm chữ số tận cùng của các số sau :

2007^{2008} , 1358^{2008} , 2^{3456} , 52^{35} , 204^{208} , 2003^{2005} , 9^{9^9} , $4^{5^6^7}$, 9^{96} , 8^{1975} , 2007^{2007} , 1023^{1024} .

Hướng dẫn : Đưa các lũy thừa trên về dạng các lũy thừa của số có chữ số tận cùng là : 0 ; 1 ; 5 ; 6 .

+) $2007^{2008} = (2007^4)^{502} = (\overline{\dots\dots 1})^{502} = \overline{\dots\dots 1}$ nên 2007^{2008} chữ số tận cùng là 1 .

+) $13\ 57^{25} = 1357^{24} \cdot 1357 = (1357^4)^6 \cdot 1357 = \overline{\dots\dots 1} \cdot 1357 = \overline{\dots\dots 7}$

$\Rightarrow 13\ 57^{25}$ có chữ số tận cùng là 7 .

+) $2007^{2007} = 2007^{2004} \cdot 2007^3 = (2007^4)^{501} \cdot \overline{\dots\dots 3} = (\overline{\dots\dots 1})^{501} \cdot \overline{\dots\dots 3} = \overline{\dots\dots 1} \cdot \overline{\dots\dots 3}$

$\Rightarrow 2007^{2007}$ có chữ số tận cùng là 3 .

+) $2^{3456} = (2^4)^{864} = 16^{864} = \overline{\dots\dots 6} \Rightarrow 2^{3456}$ có chữ số tận cùng là 6 .

+) $52^{35} = 52^{32} \cdot 52^3 = (52^4)^8 \cdot \overline{\dots\dots 8} = (\overline{\dots\dots 6})^8 \cdot \overline{\dots\dots 8} = \overline{\dots\dots 6} \cdot \overline{\dots\dots 8} = \overline{\dots\dots 8}$

$\Rightarrow 52^{35}$ có chữ số tận cùng là 8 .

+) $1023^{1024} = (1023^4)^{256} = (\overline{\dots\dots 1})^{256} = \overline{\dots\dots 1} \Rightarrow 1023^{1024}$ có chữ số tận cùng là 1 .

+) $2003^{2005} = 2003^{2004} \cdot 2003 = (2003^4)^{501} \cdot 2003 = (\overline{\dots\dots 1})^{501} \cdot 2003 = \overline{\dots\dots 1} \cdot 2003$

$\Rightarrow 2003^{2005}$ có chữ số tận cùng là 3 .

+) $204^{208} = (204^2)^{104} = (\overline{\dots\dots 6})^{104} = \overline{\dots\dots 6} \Rightarrow 204^{208}$ có chữ số tận cùng là 6.

+) Ta thấy 5^{6^7} là một số lẻ nên $4^{5^{6^7}}$ có chữ số tận cùng là 4

+) $1358^{2008} = (1358^4)^{502} = (\overline{\dots\dots 6})^{502} = \overline{\dots\dots 6} \Rightarrow 1358^{2008}$ có chữ số tận cùng là 6.

+) $8^{1975} = 8^{1972} \cdot 8^3 = (8^4)^{493} \cdot \overline{\dots\dots 2} = \overline{\dots\dots 6} \cdot \overline{\dots\dots 2} \Rightarrow 8^{1975}$ có chữ số tận cùng là 2 .

+) $9^{96} = (9^4)^{24} = (\overline{\dots\dots 1})^{24} = \overline{\dots\dots 1} \Rightarrow 9^{96}$ có chữ số tận cùng là 1 .

+) Ta thấy 9^9 là một số lẻ nên 9^{9^9} có chữ số tận cùng là 9 .

Bài 3 : Cho $A = 17^{2008} - 11^{2008} - 3^{2008}$. Tìm chữ số hàng đơn vị của A .

Đây là dạng toán tìm chữ số tận cùng của một tổng, ta phải tìm chữ số tận cùng của từng số hạng, rồi cộng các chữ số tận cùng đó lại .

Hướng dẫn : Tìm chữ số tận cùng của 17^{2008} ; 11^{2008} ; 3^{2008} ta có :

$$A = 17^{2008} - 11^{2008} - 3^{2008} = \overline{\dots\dots 1} - \overline{\dots\dots 1} - \overline{\dots\dots 1} = \overline{\dots\dots 0} - \overline{\dots\dots 1} = \overline{\dots\dots 9}$$

Vậy A có chữ số tận cùng là 9 .

Bài 4 : Cho $M = 17^{25} + 24^4 - 13^{21}$. Chứng tỏ rằng : $M : 10$

Ta thấy một số chia hết cho 10 khi có chữ số tận cùng là 0 nên để chứng tỏ $M : 10$ ta chứng tỏ M có chữ số tận cùng là 0.

$$\text{Giải : } 17^{25} = 17^{24} \cdot 17 = (17^4)^6 \cdot 17 = (\overline{\dots\dots 1})^6 \cdot 17 = \overline{\dots\dots 1} \cdot 17 = \overline{\dots\dots 7}$$

$$24^4 = (24^2)^2 = 576^2 = \overline{\dots\dots 6}$$

$$13^{21} = (13^4)^5 \cdot 13 = (\overline{\dots\dots 1})^5 \cdot 13 = \overline{\dots\dots 1} \cdot 13 = \overline{\dots\dots 3}$$

$$\text{Vậy } M = \overline{\dots\dots 7} + \overline{\dots\dots 6} - \overline{\dots\dots 3} = \overline{\dots\dots 0} \Rightarrow M : 10$$

Đến đây, sau khi làm bài 2, bài 3, giáo viên có thể cho học sinh làm các bài toán tổng quát sau :

Bài 5: Tìm chữ số tận cùng của các số có dạng:

a. $A = 2^{4n} - 5 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

b. $B = 2^{4n+2} + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

c. $C = 7^{4n} - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

Hướng dẫn : a, Có : $2^{4n} = (2^4)^n = 16^n$ có chữ số tận cùng bằng 6

$$\Rightarrow 2^{4n} - 5 \text{ có chữ số tận cùng bằng 1}$$

b, $B = 2^{4n+2} + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

Ta có $2^{4n+2} = 2^2 \cdot 2^{4n} = 4 \cdot 16^n$ có chữ số tận cùng là 4

$$\Rightarrow B = 2^{4n+2} + 1 \text{ có chữ số tận cùng là 5}$$

c, $C = 7^{4n} - 1$

Ta có $7^{4n} = (7^4)^n = (2401)^n$ có chữ số tận cùng là 1

Vậy $7^{4n} - 1$ có chữ số tận cùng bằng 0.

Bài 6 : Chứng tỏ rằng, các số có dạng:

a, $A = 2^{2^n} - 1$ chia hết cho 5 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

b, $B = 2^{4^n} + 4$ chia hết cho 10 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

c, $H = 9^{2^n} + 3$ chia hết cho 2 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

Với dạng bài này, học sinh phải dựa vào dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5, cho cả 2 và 5. Đọc đầu bài, học sinh sẽ định hướng được phải tìm chữ số tận cùng như bài 5, nhưng khi bắt tay vào làm thì gặp khó khăn lớn với các lũy thừa 2^{2^n} , 2^{4^n} , 9^{2^n} , học sinh không biết phải tính như thế nào, rất có thể học sinh sẽ nhầm:

$$a^{2^n} = 2^{2^n}, 2^{4^n} = 2^{4^n}, 9^{2^n} = 9^{2^n}$$

Khi đó giáo viên hướng dẫn như sau :

a) Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ta có :

$$2^{2^n} = 2^{2^2 \cdot 2^{n-2}} = (2^4)^{2^{n-2}} = 16^{2^{n-2}} \quad \text{có chữ số tận cùng là 6}$$

$$\Rightarrow A = 2^{2^n} - 1 \text{ có chữ số tận cùng là 5}$$

Vậy A : 5

b) Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, ta có :

$$2^{4^n} = 2^4 \cdot 4^{n-1} = (2^4)^{4^{n-1}} = 16^{4^{n-1}} \text{ có chữ số tận cùng là } 6$$

$$\Rightarrow B = 2^{4^n} + 4 \text{ có chữ số tận cùng là } 0$$

Vậy B : 10

c) Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, ta có :

$$9^{2^n} = 9^2 \cdot 9^{2^{n-1}} = (9^2)^{2^{n-1}} = 81^{2^{n-1}} \text{ có chữ số tận cùng là } 1$$

$$\Rightarrow H = 9^{2^n} + 3 \text{ có tận cùng là } 4$$

Vậy H : 2

Bài tập luyện tập :

1, Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

$$\begin{array}{cccccc} 2222^{2003}; & 2008^{2004}; & 2005^{2005}; & 2006^{2006} & 999^{2003}; \\ 2004^{2004}; & 7777^{2005}; & 111^{2006}; & 2000^{2000}; & 2003^{2005} \end{array}$$

2, Chứng tỏ rằng, với mọi số tự nhiên n :

a, $3^{4n+1} + 2$ chia hết cho 5

b, $2^{4n+1} + 3$ chia hết cho 5

c, $9^{2n+1} + 1$ chia hết cho 10

3, Chứng tỏ rằng các số có dạng:

a, $2^{2^n} + 1$ có chữ số tận cùng bằng 7 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

b, $2^{4^n} + 1$ có chữ số tận cùng bằng 7 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

c, $3^{2^n} + 4$ chia hết cho 5 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

d, $3^{4^n} - 1$ chia hết cho 10 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

4, Tìm chữ số hàng đơn vị của :

a, $A = 6666^{1111} + 1111^{1111} - 66^{5555}$

b, $B = 10^n + 555^n + 666^n$

c, $H = 9999^{2n} + 999^{2n+1} + 10^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

d, $E = 2008^{4n} + 2009^{4n} + 2007^{4n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

5. Trong các số sau số nào chia hết cho 2, cho 5, cho 10 ?

a, $3^{4n+1} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$)

b, $2^{4n+1} - 2$ ($n \in \mathbb{N}$)

c, $2^{2^n} + 4$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

d, $9^{4^n} - 6$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

6. Tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên a để $a^2 + 1 : 5$

7. Tìm số tự nhiên n để $n^{10} + 1 : 10$

8. Chứng tỏ rằng, với mọi số tự nhiên n thì :

$$a, 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10 \quad (n > 1)$$

$$b, 3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} : 6$$

Hướng dẫn :

$$6. a^2 + 1 : 5 \Rightarrow a^2 + 1 \text{ phải có chữ số tận cùng là } 0 \text{ hoặc } 5$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ phải có chữ số tận cùng là } 9 \text{ hoặc } 4$$

$$\Rightarrow a \text{ phải có chữ số tận cùng là } 3 \text{ hoặc } 7 \text{ hoặc } 2 \text{ hoặc } 8$$

$$7. n^{10} + 1 : 10 \Rightarrow n^{10} + 1 \text{ phải có chữ số tận cùng là } 0$$

$$\Rightarrow n^{10} = (n^2)^5 \text{ phải có chữ số tận cùng là } 9$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ phải có chữ số tận cùng là } 9$$

$$\Rightarrow n \text{ phải có chữ số tận cùng là } 3 \text{ hoặc } 7.$$

$$8. a, 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^{n-1} \cdot (2^3 + 2) \\ = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b, 3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} = 3^n \cdot (3^3 + 3) + 2^{n+1} \cdot (2^2 + 2) \\ = 3^n \cdot 30 + 2^{n+1} \cdot 6 = 6 \cdot (5 \cdot 3^n + 2^{n+1}) : 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3.2.2 Tìm hai chữ số tận cùng của một lũy thừa.

* **Phương pháp** : Để tìm hai chữ số tận cùng của một lũy thừa, ta cần chú ý những số đặc biệt sau :

+) Các số có tận cùng là 01, 25, 76 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng chính nó.

+) Để tìm hai chữ số tận cùng của một lũy thừa ta thường đưa về dạng các số có hai chữ số tận cùng là : 01 ; 25 hoặc 76.

+) các số $2^{10}; 4^{10}; 16^5; 6^5; 18^4; 24^2; 68^4; 74^2$ có tận cùng bằng 76.

+) các số $3^{20}; 9^{10}; 81^5; 7^4; 51^2; 99^2$ có tận cùng là 01.

+) Số 26^n ($n \in \mathbb{N}, n > 1$)

Bài 1 : Tìm hai chữ số tận cùng của : $2^{100}; 3^{100}$

Dựa vào nhận xét ở trên học sinh có thể dễ dàng làm được bài này :

$$2^{100} = (2^{20})^5 = (\overline{.....76})^5 = \overline{.....76}$$

$$3^{100} = (3^{20})^5 = (\overline{.....01})^5 = \overline{.....01}$$

Bài 2 : Tìm hai chữ số tận cùng của :

$$a, 51^{51}$$

$$b, 99^{99}$$

$$c, 6^{666}$$

$$d, 14^{101} \cdot 16^{101}$$

Hướng dẫn :Đưa về dạng các số có hai chữ số tận cùng là : 01 ; 25 hoặc 76.

$$a, 51^{51} = (51^2)^{25} \cdot 51 = (\overline{.....01})^{25} \cdot 51 = \overline{.....01} \cdot 51 = \overline{.....51}$$

$\Rightarrow 51^{51}$ có 2 chữ số tận cùng là 51

Tương tự :

$$b, 99^{99} = (99^2)^{49} \cdot 99 = (\overline{.....01})^{49} \cdot 99 = \overline{.....01} \cdot 99 = \overline{.....99}$$

$$c, 6^{666} = (6^5)^{133} \cdot 6 = (\overline{.....76})^{133} \cdot 6 = \overline{.....76} \cdot 6 = \overline{.....56}$$

$$d, 14^{101} \cdot 16^{101} = (14 \cdot 16)^{101} = 224^{101} = (224^2)^{50} \cdot 224 = (\overline{.....76})^{50} \cdot 224 = \overline{.....76} \cdot 224 = \overline{.....24}$$

Từ bài toán 2, cho học sinh làm bài toán tổng quát:

Bài 3: Tìm hai chữ số tận cùng của:

$$a, 51^{2k}; \quad 51^{2k+1} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$b, 99^{2n}; \quad 99^{2n+1}; \quad 99^{99^{99}}; \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$c, 6^{5n}; \quad 6^{5n+1}; \quad 6^{66^{66}}; \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Gợi ý:

$$a, 51^{2k} = (51^2)^k = (\overline{.....01})^k$$

$$51^{2k+1} = 51 \cdot (51^2)^k = 51 \cdot (\overline{.....01})^k$$

$$b, 99^{2n} = (99^2)^n = (\overline{.....01})^n$$

$$99^{2n+1} = 99 \cdot (99^2)^n = 99 \cdot (\overline{.....01})^n$$

$$99^{99^{99}}, \text{ ta có } 99^{99} \text{ là một số lẻ } \Rightarrow 99^{99^{99}} \text{ có dạng } 99^{2n+1} \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$\Rightarrow 99^{99^{99}} = 99 \cdot (99^2)^n = 99 \cdot (\overline{.....01})^n \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$c, 6^{5n} = (6^5)^n = (\overline{.....76})^n$$

$$6^{5n+1} = 6 \cdot (6^5)^n = 6 \cdot (\overline{.....76})^n$$

$$6^{66^{66}}, \text{ ta có } 66^{66} \text{ là một số có tận cùng là 6, } \Rightarrow 6^{66^{66}} \text{ có dạng } 6^{5n+1} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$\Rightarrow 6^{66^{66}} = 6 \cdot (\overline{.....76})^n$$

Bài tập luyện tập:

1. Tìm hai chữ số tận cùng của :

$$a, 7^{2003}$$

$$b, 9^{9^9}$$

$$c, 74^{2003}$$

$$d, 18^{2004}$$

$$e, 68^{2005}$$

$$f, 74^{2004}$$

2. Tìm hai chữ số tận cùng của :

$$a, 49^{2n}; 49^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b, 2^{4n} \cdot 3^{8n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$c, 2^{3n} \cdot 3^n; 2^{3n+3} \cdot 3^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$d, 74^{2n}; 74^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

3. Chứng tỏ rằng :

$$a, A = 26^{2n} - 26 : 5 \text{ và } : 10 \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$b, B = 24^{2n+1} + 76 : 100 \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N})$$

$$c, M = 51^{2000} \cdot 74^{2000} \cdot 99^{2000} \text{ có 2 chữ số tận cùng là 76.}$$

3.2.3. Tìm 3 chữ số tận cùng trở lên.

***Phương pháp :** Chú ý một số điểm sau.

+) Các số có tận cùng 001, 376, 625 nâng lên lũy thừa (khác 0) cũng có tận cùng bằng chính số đó.

+) Số có tận cùng 0625 nâng lên lũy thừa (khác 0) cũng có tận cùng bằng 0625.

Bài 1. Tìm 3 chữ số tận cùng, 4 chữ số tận cùng của 5^{2000} .

Học sinh có thể làm phần này không mấy khó khăn nhờ kĩ năng đã có từ các phần trước.

$$5^{2000} = (5^4)^{500} = 625^{500} = (0625)^{500}$$

Vậy : 5^{2000} có ba chữ số tận cùng là 625.

có bốn chữ số tận cùng là 0625.

Bài 2 : Tìm ba chữ số tận cùng của:

$$a, 2^{3n} \cdot 47^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$b, 2^{3n+3} \cdot 47^{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Để tìm được ba chữ số cuối của một lũy thừa đã là khó với học sinh., bài này lại yêu cầu tìm ba chữ số cuối của một tích các lũy thừa thì quả thật là rất khó. Đối với học sinh khá, giỏi cũng cần tới sự gợi ý của giáo viên.

$$a, 2^{3n} \cdot 47^n = (2^3)^n \cdot 47^n = (8 \cdot 47)^n = 376^n$$

$$376^n \text{ có tận cùng là } 376 \Rightarrow 2^{3n} \cdot 47^n \text{ có tận cùng là } 376.$$

$$b, 2^{3n+3} \cdot 47^{n+2}.$$

Dù đã làm được câu a, đến câu b học sinh cũng không tránh khỏi lúng túng ở số mũ.

Giáo viên có thể hướng dẫn :

$$\begin{aligned} 2^{3n+3} \cdot 47^{n+2} &= 2^{3(n+1)} \cdot 47^{n+1} \cdot 47 \\ &= (2^3)^{(n+1)} \cdot 47^{n+1} \cdot 47 \\ &= (8 \cdot 47)^{n+1} \cdot 47 \\ &= 47 \cdot 376^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có : } 376^{n+1} \text{ có các chữ số tận cùng là } 376 \Rightarrow 47 \cdot 376^{n+1} \text{ có chữ số tận cùng là } 672$$

Bài 3: Chứng tỏ rằng:

$$a. 5^{4^n} + 375 : 1000 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

$$b. 5^{2^n} - 25 : 100 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

$$c. 2001^n + 2^{3n} \cdot 47^n + 25^{2n} \text{ có tận cùng bằng } 002$$

Nếu học sinh làm tốt các phần trước thì khi gặp bài này sẽ không gặp nhiều khó khăn, tuy

nhiên, rất cần đến sự tư duy logic, liên hệ đến kiến thức liên quan và kĩ năng biến đổi.

a. Ta có: $5^{4^n} = 5^{4 \cdot 4^{n-1}} = 625^{4^{n-1}}$ tận cùng là 625 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

$\Rightarrow 5^{4^n} + 375$ có tận cùng 000.

Vậy: $5^{4^n} + 375 : 1000$

b. Ta có $5^{2^n} = 5^{2^2 \cdot 2^{n-2}} = (5^4)^{2^{n-2}} = 625^{2^{n-2}}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Vậy $5^{2^n} - 25$ có 2 chữ số tận cùng là 00.

Do đó: $5^{2^n} - 25 : 100$

c. $2001^n + 2^{3n} \cdot 47^n + 25^{2n}$

Ta thấy: 2001^n có tận cùng là 001

$2^{3n} \cdot 47^n = (8 \cdot 47)^n = 376^n$ có tận cùng là 376

$25^{2n} = (25^2)^n = 625^n$ có tận cùng là 625

Vậy: $2001^n + 2^{3n} \cdot 47^n + 25^{2n}$ có tận cùng là 002.

3.3 Dạng 3 : So sánh hai lũy thừa

* **Phương pháp** : để so sánh hai lũy thừa ta thường biến đổi về hai lũy thừa có cùng cơ số hoặc có cùng số mũ (có thể sử dụng các lũy thừa trung gian để so sánh)

+) Lưu ý một số tính chất sau :

Với $a, b, m, n \in \mathbb{N}$, ta có: $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$m > n \Leftrightarrow a^m > a^n \quad (a > 1)$

$a = 0$ hoặc $a = 1$ thì $a^m = a^n$ ($m, n \neq 0$)

Với A, B là các biểu thức ta có :

$A^n > B^n \Leftrightarrow A > B > 0$

$A^m > A^n \Rightarrow m > n$ và $A > 1$

$m < n$ và $0 < A < 1$

Bài 1 : So sánh :

a, 333^{17} và 333^{23}

b, 2007^{10} và 2008^{10}

c, $(2008-2007)^{2009}$ và $(1998-1997)^{1999}$

Với bài này học sinh có thể nhìn ngay ra cách giải vì các lũy thừa đã có cùng cơ số hoặc có cùng số mũ.

a, Vì $1 < 17 < 23$ nên $333^{17} < 333^{23}$

b, Vì $2007 < 2008$ nên $2007^{10} < 2008^{10}$

c, Ta có: $(2008-2007)^{2009} = 1^{2009} = 1$

$(1998-1997)^{1999} = 1^{1999} = 1$

$$\text{Vậy } (2008-2007)^{2009} = (1998 - 1997)^{1999}$$

Bài 2 : So sánh

a, 2^{300} và 3^{200}

e, 99^{20} và 9999^{10}

b, 3^{500} và 7^{300}

f, 11^{1979} và 37^{1320}

c, 8^5 và 3.4^7

g, 10^{10} và 48.50^5

d, 202^{303} và 303^{202}

h, $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}

Để làm được bài này học sinh cần sử dụng linh hoạt các tính chất của lũy thừa để đưa các lũy thừa về cùng cơ số hoặc cùng số mũ .

Hướng dẫn :

a, Ta có : $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$

$$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$$

$$\text{Vì } 8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$$

b, Tương tự câu a, ta có : $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$

$$7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$$

$$\text{Vì } 243^{100} < 343^{100} \text{ nên } 3^{500} < 7^{300}$$

c, Ta có : $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14} < 3.2^{14} = 3.4^7 \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$

d, Ta có : $202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101)^{101}$

$$303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$$

$$\text{Vì } 808.101^2 > 9.101^2 \text{ nên } 202^{303} > 303^{202}$$

e, Ta thấy : $99^2 < 99.101 = 9999 \Rightarrow (99^2)^{10} < 9999^{10} \text{ hay } 99^{20} < 9999^{10} \quad (1)$

f, ta có : $11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660} \quad (2)$

$$37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } 11^{1979} < 37^{1320}$$

g, Ta có : $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} \quad (*)$

$$48 \cdot 50^5 = (3 \cdot 2^4) \cdot (2^5 \cdot 5^{10}) = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) } \Rightarrow 10^{10} < 48 \cdot 50^5$$

h, Có : $1990^{10} + 1990^9 = 1990^9 \cdot (1990+1) = 1991 \cdot 1990^9$

$$1991^{10} = 1991 \cdot 1991^9$$

$$\text{Vì } 1990^9 < 1991^9 \text{ nên } 1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$$

Bài 3 . Chứng tỏ rằng : $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Với bài này , học sinh lớp 6 sẽ không định hướng được cách làm , giáo viên có thể gợi ý :
hãy chứng tỏ $2^{63} > 5^{27}$ và $2^{63} < 5^{28}$

Ta có : $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$

$$5^{27} = (5^3)^9 = 125^9$$

$$\Rightarrow 2^{63} > 5^{27} \quad (1)$$

$$\text{Lại có : } 2^{63} = (2^9)^7 = 512^7$$

$$5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$$

Bài 4 . So sánh :

$$\text{a, } 107^{50} \text{ và } 73^{75}$$

$$\text{b, } 2^{91} \text{ và } 5^{35}$$

Nếu ở bài trước có thể so sánh trực tiếp các lũy thừa cần so sánh hoặc chỉ sử dụng một lũy thừa trung gian thì bài này nếu chỉ áp dụng cách đó thì khó tìm ra lời giải cho bài toán . Với bài này ta cần so sánh qua hai lũy thừa trung gian :

$$\text{a, Ta thấy : } 107^{50} < 108^{50} = (4 \cdot 27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150} \quad (1)$$

$$73^{75} > 72^{75} = (8 \cdot 9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow 107^{50} < 2^{100} \cdot 3^{150} < 2^{225} \cdot 3^{150} < 73^{75}$$

$$\text{Vậy } 107^{50} < 73^{75}$$

$$\text{b, } 2^{91} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18}$$

$$5^{35} < 5^{36} = (5^2)^{18} = 25^{18}$$

$$\Rightarrow 2^{91} > 32^{18} > 25^{18} > 5^{35}$$

$$\text{Vậy } 2^{91} > 5^{35}$$

Bài 5 . So sánh :

$$\text{a, } (-32)^9 \text{ và } (-16)^{13}$$

$$\text{b, } (-5)^{30} \text{ và } (-3)^{50}$$

$$\text{c, } (-32)^9 \text{ và } (-18)^{13}$$

$$\text{d, } \left(\frac{-1}{16}\right)^{100} \text{ và } \left(\frac{-1}{2}\right)^{500}$$

Hướng dẫn : Đưa về so sánh hai lũy thừa tự nhiên

$$\text{a, } (-32)^9 = -32^9 = -(2^5)^9 = -2^{45}$$

$$(-16)^{13} = -16^{13} = -(2^4)^{13} = -2^{52}$$

$$\text{Vì } 2^{45} < 2^{52} \text{ nên } -2^{45} > -2^{52}$$

$$\text{Vậy } (-32)^9 > (-16)^{13}$$

$$\text{b, } (-5)^{30} = 5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$$

$$(-3)^{50} = 3^{50} = (3^5)^{10} = 243^{10}$$

$$\text{Vì } 125^{10} < 243^{10} \text{ nên } (-5)^{30} < (-3)^{50}$$

$$\text{c, } (-32)^9 = -32^9 = -(2^5)^9 = -2^{45}$$

$$\text{mà } 2^{45} < 2^{52} = 16^{13} < 18^{13}$$

$$\Rightarrow -2^{45} > -18^{13} = (-18)^{13}$$

$$\text{Vậy } (-32)^9 > (-18)^{13}$$

$$\text{d, Ta có : } \left(\frac{-1}{16}\right)^{100} = \frac{-1^{100}}{16^{100}} = \frac{1}{16^{100}} = \frac{1}{2^{400}} \quad \text{còn} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^{500} = \frac{(-1)^{500}}{2^{500}} = \frac{1}{2^{500}}$$

$$\text{Vì } 2^{400} < 2^{500} \text{ nên } \frac{1}{2^{400}} > \frac{1}{2^{500}}$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{-1}{16}\right)^{100} > \left(\frac{-1}{2}\right)^{500}$$

$$\text{Bài 6 . So sánh A và B biết : } A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} \quad ; \quad B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}$$

Trước khi tìm lời giải bài này giáo viên có thể cung cấp cho học sinh tính chất sau :

* Với mọi số tự nhiên a , b , c khác 0 , ta chứng minh được :

$$\text{+) Nếu } \frac{a}{b} > 1 \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$$

$$\text{+) Nếu } \frac{a}{b} < 1 \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

Áp dụng tính chất trên vào bài 6 , ta có :

$$\text{Vì } A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < 1 \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008 + 2008}{2008^{2009} + 2008} = \frac{2008 \cdot (2008^{2007} + 1)}{2008 \cdot (2008^{2009} + 1)} \\ &= \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1} = B \end{aligned}$$

Vậy $A < B$.

Giáo viên cũng có thể hướng dẫn học sinh giải bài toán theo những cách sau :

$$\text{Cách 1: Ta có : } 2008.A = \frac{(2008^{2008} + 1) \cdot 2008}{2008^{2009} + 1} = \frac{2008^{2009} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1} = 1 + \frac{2007}{2008^{2009} + 1}$$

$$2008.B = \frac{2008^{2007} + 1) \cdot 2008}{2008^{2008} + 1} = \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2008} + 1} = 1 + \frac{2007}{2008^{2008} + 1}$$

$$\text{Vì } 2008^{2009} + 1 > 2008^{2008} + 1 \text{ nên } \frac{2007}{2008^{2009} + 1} < \frac{2007}{2008^{2008} + 1}$$

$$\Rightarrow 2008.A < 2008.B$$

$$\Rightarrow A < B$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} &= \frac{2008^{2009} + 1}{2008^{2008} + 1} = \frac{2008^{2009} + 2008 - 2007}{2008^{2008} + 1} = \frac{2008.(2008^{2008} + 1) - 2007}{2008^{2008} + 1} \\ &= 2008 - \frac{2007}{2008^{2008} + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{B} &= \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2007} + 1} = \frac{2008^{2008} + 2008 - 2007}{2008^{2007} + 1} = \frac{2008.(2008^{2007} + 1) - 2007}{2008^{2007} + 1} \\ &= 2008 - \frac{2007}{2008^{2007} + 1}\end{aligned}$$

Vì $2008^{2008} + 1 > 2008^{2007} + 1$ nên $\frac{2007}{2008^{2008} + 1} < \frac{2007}{2008^{2007} + 1}$

$$\Rightarrow 2008 - \frac{2007}{2008^{2008} + 1} > 2008 - \frac{2007}{2008^{2007} + 1}$$

Vậy $\frac{1}{A} > \frac{1}{B} \Rightarrow A < B$ (vì $A, B > 0$)

Bài 8 . So sánh M và N biết: $M = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$; $N = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1}$

Hướng dẫn :

Cách 1 : $N = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1} > 1$

$$\Rightarrow N = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1} > \frac{100^{101} + 1 + 99}{100^{100} + 1 + 99} = \frac{100^{101} + 100}{100^{100} + 100} = \frac{(100^{100} + 1).100}{(100^{99} + 1).100} = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} = M$$

Vậy $M < N$.

Cách 2 : $M = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} = \frac{100^{100} + 100 - 99}{100^{99} + 1} = \frac{(100^{99} + 1).100 - 99}{100^{99} + 1} = 100 - \frac{99}{100^{99} + 1}$

$$N = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1} = \frac{100^{101} + 100 - 99}{100^{100} + 1} = \frac{(100^{100} + 1).100 - 99}{100^{100} + 1} = 100 - \frac{99}{100^{100} + 1}$$

Vì $100^{99} + 1 < 100^{100} + 1$ nên $\frac{99}{100^{99} + 1} > \frac{99}{100^{100} + 1} \Rightarrow 100 - \frac{99}{100^{99} + 1} < 100 - \frac{99}{100^{100} + 1}$

Vậy $M < N$.

Bây giờ giáo viên có thể cho học sinh làm một số bài tập tương tự sau :

1 . So sánh :

a, 5^{28} và 26^{14}

b, 5^{21} và 124^{10}

c, 31^{11} và 17^{14}

d, 4^{21} và 64^7

e, 2^{91} và 5^{35}

g, 54^4 và 21^{12}

h, $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và $3 \cdot 24^{10}$

2. So sánh :

a, $\frac{1}{2^{300}}$ và $\frac{1}{3^{200}}$

b, $\frac{1}{5^{199}}$ và $\frac{1}{3^{300}}$

c, $\left(-\frac{1}{4}\right)^8$ và $\left(\frac{1}{8}\right)^5$

d, $\left(\frac{1}{10}\right)^{15}$ và $\left(\frac{3}{10}\right)^{20}$

3. So sánh :

a, $A = \frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1}$ và

$B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1}$

b, $A = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{1998} + 1}$ và

$B = \frac{1999^{2000} + 1}{1999^{1999} + 1}$

c, $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$ và

$B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$

Gợi ý :

c, $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$ và

$B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$

Bài này không giống bài 7 và bài 8. Học sinh sẽ lúng túng khi bắt tay làm bài, giáo viên cần hướng dẫn : Quy đồng mẫu A và B , ta có :

$$A = \frac{(100^{100} + 1) \cdot (100^{68} + 1)}{(100^{99} + 1) \cdot (100^{68} + 1)} \quad \text{và} \quad B = \frac{(100^{69} + 1) \cdot (100^{99} + 1)}{(100^{68} + 1) \cdot (100^{99} + 1)}$$

Để so sánh A và B lúc này ta có thể so sánh tử số của A và tử số của B.

Xét hiệu tử số của A trừ tử số của B:

$$(100^{100} + 1) \cdot (100^{68} + 1) - (100^{69} + 1) \cdot (100^{99} + 1)$$

$$= 100^{68} + 100^{100} + 100^{68} + 1 - 100^{168} - 100^{99} - 100^{69} - 1$$

$$= 100^{100} - 100^{99} - 100^{69} + 100^{68}$$

$$= 100 \cdot 100^{99} - 100^{99} - 100 \cdot 100^{68} + 100^{68}$$

$$= 99 \cdot 100^{99} - 99 \cdot 100^{68}$$

$$= 99 \cdot (100^{99} - 100^{68}) > 0 \quad \text{vì } 100^{99} > 100^{68}$$

Vậy $A > B$.

3.4. Dạng 4: Tính toán trên các lũy thừa.

***Phương pháp:** Vận dụng linh hoạt các công thức, phép tính về lũy thừa để tính cho

hợp lí và nhanh. Biết kết hợp hài hòa một số phương pháp trong tính toán khi biến đổi.

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a, \quad A = \frac{2^{30} \cdot 5^7 + 2^{13} \cdot 5^{27}}{2^{27} \cdot 5^7 + 2^{10} \cdot 5^{27}}$$

$$b, \quad M = (x-4)^{(x-5)(x-6)(x+6)(x+5)} \quad \text{với } x = 7$$

Hướng dẫn :

Với bài này, học sinh không nên tính giá trị của từng lũy thừa rồi thực hiện các phép tính khác theo thứ tự thực hiện phép tính, mà nếu làm như vậy thì rất khó có thể đưa ra đáp án đúng. Giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tìm thừa số chung và đưa ra ngoài ngoặc ở cả tử và mẫu số, sau đó thực hiện việc rút gọn thì việc tìm kết quả của bài toán nhanh đến bất ngờ.

$$a, \quad A = \frac{2^{30} \cdot 5^7 + 2^{13} \cdot 5^{27}}{2^{27} \cdot 5^7 + 2^{10} \cdot 5^{27}} = \frac{2^{13} \cdot 5^7 (2^{17} + 5^{20})}{2^{10} \cdot 5^7 (2^{17} + 5^{20})} = 2^3 = 8$$

$$b, \quad M = (x-4)^{(x-5)(x-6)(x+6)(x+5)}$$

Học sinh dễ phát hoảng khi nhìn thấy câu b vì số mũ của lũy thừa cứ cao dần mà số lại chưa cụ thể. Nhưng khi thay giá trị của x vào thì M lại tìm được một cách dễ dàng.

$$M = (x-4)^{(x-5)(x-6)(x+6)(x+5)} = (7-4)^{(7-5)(7-6)(7+6)(7+5)}$$

$$M = 3^{2^{13} \cdot 12} = 3^{2^1} = 3^2 = 9$$

Bài 2: Chứng tỏ rằng:

$$a, \quad A = 10^{2008} + 125 : 45$$

$$b, \quad B = 5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006} : 31$$

$$c, \quad M = 8^8 + 2^{20} : 17$$

$$d, \quad H = 313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36 : 7$$

Với bài toán này, học sinh phải huy động kiến thức về dấu hiệu chia hết, kĩ năng và phương pháp biến đổi, lưu ý rằng: Nếu $a : m, a : n, (m;n) = 1$ thì $a : m \cdot n$ ($a, m, n \in \mathbb{N}^*$)

$$a, \quad A = 10^{2008} + 125 : 45$$

$$\text{Ta có: } 10^{2008} + 125 = \overbrace{100 \dots 0}^{2008 \text{ số } 0} + 125 = \overbrace{100 \dots 0125}^{2005 \text{ số } 0}$$

$$A \text{ có tận cùng là } 5 \Rightarrow A : 5$$

$$\text{Tổng các chữ số của } A \text{ là: } 1+1+2+5 = 9 \Rightarrow A : 9.$$

$$\text{Mà } (5;9) = 1 \Rightarrow A : 5.9 \text{ hay } A : 45$$

$$\text{b, } B = 5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006} : 31$$

Ta không thể tính giá trị cụ thể của từng lũy thừa rồi thực hiện phép chia. Giáo viên có thể gợi ý đặt thừa số chung.

$$B = 5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006}$$

$$B = 5^{2006} \cdot (5^2 + 5^1 + 1)$$

$$B = 5^{2006} \cdot 31 : 31$$

$$\text{c, } M = 8^8 + 2^{20} : 17$$

Cách làm tương tự như câu b, nhưng trước tiên phải đưa về hai lũy thừa có cùng cơ số:

$$M = 8^8 + 2^{20} = (2^3)^8 + 2^{20} = 2^{24} + 2^{20}$$

$$M = 2^{20} (2^4 + 1) = 2^{20} (16 + 1) = 2^{20} \cdot 17 : 17$$

$$\text{d, } H = 313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36 : 7$$

Với câu này, học sinh cũng phải nhận ra cần đặt thừa số chung, nhưng đặt thừa số chung nào lại là một vấn đề. Nếu đặt 313^5 làm thừa số chung thì buộc phải tính kết quả trong ngoặc, và như vậy thì rất lâu và dễ nhầm. Khi đó, giáo viên có thể hướng dẫn.

$$H = 313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36$$

$$H = 313^5 \cdot 299 - 313^6 - 35 \cdot 313^6$$

$$H = 313^5 \cdot (299 - 313) - 35 \cdot 313^6$$

$$H = 313^5 \cdot 14 - 35 \cdot 313^6$$

$$H = 7 \cdot (313^5 \cdot 2 - 5 \cdot 313^6) : 7$$

$$\text{Bài 3. Cho } A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$$

$$\text{Chúng ta chứng tỏ rằng: } A : 3, A : 7, A : 5$$

Với bài này, giáo viên hãy hướng dẫn các em đi nhóm các lũy thừa thành từng nhóm $2/3/4/\dots$ lũy thừa sao cho sau khi đặt thừa số chung ở mỗi nhóm thì xuất hiện số cần chứng tỏ A chia hết cho nó.

$$\text{Ví dụ: } A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$$

$$= (2+2^2) + (2^3+2^4) + (2^5+2^6) + \dots + (2^{57}+2^{58}) + (2^{59}+2^{60})$$

$$= 2 \cdot (1+2) + 2^3 \cdot (1+2) + 2^5 \cdot (1+2) + \dots + 2^{57} \cdot (1+2) + 2^{59} \cdot (1+2)$$

$$= (1+2) \cdot (2+2^3+2^5+\dots+2^{57}+2^{59})$$

$$= 3 \cdot (2+2^3+2^5+\dots+2^{57}+2^{59})$$

$$\Rightarrow A : 3$$

$$\text{Tương tự, ta có: } A = (2+2^2+2^3) + (2^4+2^5+2^6) + \dots + (2^{58}+2^{59}+2^{60})$$

$$= 2.(1+2+2^2)+2^4.(1+2+2^2)+.....+2^{58}.(1+2+2^2)$$

$$= (1+2+2^2).(2+2^4+2^7+.....+2^{58})$$

$$= 7.(2+2^4+2^7+.....+2^{58})$$

$$\Rightarrow A : 7$$

$$A = (2+2^3)+(2^2+2^4)+.....+(2^{57}+2^{59})+(2^{58}+2^{60})$$

$$A = 2(1+2^2)+2^2(1+2^2)+.....+2^{57}(1+2^2)+2^{58}(1+2^2)$$

$$= (1+2^2).(2+2^2+2^5+2^6+.....+2^{57}+2^{58})$$

$$= 5.(2+2^2+2^5+2^6+.....+2^{57}+2^{58})$$

$$\Rightarrow A : 5$$

Bài 4: Chứng tỏ rằng :

a, $D = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + + 3^{2007} : 13$

b, $E = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + + 7^{4n-1} + 7^{4n} : 400$

Hướng dẫn :

a, Ta thấy : $13 = 1 + 3 + 3^2$ nên ta sẽ nhóm 3 số hạng liên tiếp của tổng thành một nhóm như sau :

$$D = (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) + + (3^{2005} + 3^{2006} + 3^{2007})$$

$$= 3.(1 + 3 + 3^2) + 3^4.(1 + 3 + 3^2) + + 3^{2005}.(1 + 3 + 3^2)$$

$$= 3.13 + 3^4.13 + + 3^{2005}.13$$

$$= (3 + 3^4 + + 3^{2005}).13$$

$$\Rightarrow D : 13$$

b, Tương tự câu a, có : $400 = 1 + 7 + 7^2 + 7^3$ nên :

$$E = (7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^4.(7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + ... + 7^{4n-4}.(7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4)$$

$$= (7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4).(1+7^4+7^8+...+7^{4n-4})$$

$$= 7.(1 + 7^1 + 7^2 + 7^3).(1+7^4+7^8+...+7^{4n-4})$$

$$= 7.(1 + 7 + 49 + 343).(1+7^4+7^8+...+7^{4n-4})$$

$$= 7.400.(1+7^4+7^8+...+7^{4n-4}) : 400$$

$$\Rightarrow E : 400$$

Bài 4 : a, Tính tổng : $S_n = 1 + a + a^2 + .. + a^n$

b, áp dụng tính các tổng sau:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2008}$$

$$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + + 2^{1982}$$

$$C = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + + 7^{n-1} + 7^n$$

a, Đây là một bài toán tổng quát , giáo viên có thể gợi ý trực tiếp cho học sinh cách làm
Để thu gọn các tổng lũy thừa này , ta nhân cả hai vế của biểu thức với cơ số của các lũy thừa.

$$* \text{ Xét } a = 1 \text{ ta có: } S_n = 1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^n = (n+1).1 = n+1$$

$$* \text{ Xét } a \neq 1 \text{ ta có: } S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$$

$$a. S_n = a + a^2 + \dots + a^{n+1}$$

$$a. S_n - S_n = a^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

b, Học sinh dễ dàng tính được tổng A, B, C nhờ công thức S_n

$$A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2008} = \frac{3^{2009} - 1}{2}$$

$$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1982} = 2^{1983} - 1$$

$$C = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{n-1} + 7^n = \frac{7^{n+1} - 7}{6}$$

Bài 5 : Thu gọn tổng sau : $M = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008}$

Mặc dù đã có công thức tính tổng các lũy thừa viết theo quy luật ở bài 4 nhưng khi tính tổng M thì học sinh không tránh khỏi sự lúng túng với những dấu '+', '-' xen kẽ. Nếu vận dụng máy móc cách tính tổng B ở câu b, bài 4: lấy $2M - M$ thì sẽ không thu gọn được tổng M. Giáo viên cần giải thích cho học sinh hiểu được : câu b-bài 4, ta tính hiệu hai biểu thức vì hai biểu thức có những số hạng giống nhau ; còn bài 5 này hai tổng $2M$ và M lại có những số hạng đối nhau nên ta sẽ xét hiệu của chúng :

$$M = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008}$$

$$2M = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2009}$$

$$\Rightarrow 2M + M = 2^{2009} + 1$$

$$\Rightarrow M = \frac{2^{2009} + 1}{3}$$

Bài 6 . Tính :

$$a, A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$$

$$b, B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{500}}$$

Hướng dẫn : làm tương tự bài 4

$$a, \quad A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Rightarrow 2A - A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right)$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$b, \quad B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{500}}$$

$$5B = 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{499}}$$

$$\Rightarrow 5B - B = \left(5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{499}}\right) - \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{499}}\right)$$

$$= 5 + 1 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{499}} - \frac{1}{5^{499}} - \frac{1}{5^{500}}$$

$$4B = 5 - \frac{1}{5^{500}}$$

$$B = \left(5 - \frac{1}{5^{500}}\right) : 4$$

Bài 7 . Tính : $B = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1$

Với bài này rất có thể học sinh nghĩ tới việc nhóm các số $100^2, 98^2, \dots, 2^2$ thành một nhóm và các số còn lại thành một nhóm . Nhưng nếu nhóm như vậy thì sẽ không tính được nhanh.

để làm bài này giáo viên có thể cho học sinh chứng tỏ đẳng thức sau :

Với mọi số tự nhiên a và b , ta có : $(a - b).(a+b) = a^2 + b^2$

Thật vậy , ta có : $(a - b).(a+b) = (a-b).a + (a-b).b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 + b^2$

Vậy : $(a - b).(a+b) = a^2 + b^2$

Áp dụng đẳng thức trên vào bài 6 ta được :

$$B = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1$$

$$= (100-99).(100+99) + (98-97).(98+97) + \dots + (2-1).(2+1)$$

$$= 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1$$

$$= 100.(100+1) : 2$$

$$= 5050$$

Bài 8: Chứng tỏ rằng.

$$a, H = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2007^2} + \frac{1}{2008^2} < 1$$

$$b, K = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} < \frac{1}{2}$$

Để làm được câu a, học sinh phải nắm được các kiến thức liên quan. Những bài toán dạng này thực sự rất khó với học sinh. Để học sinh hiểu được phụ thuộc hoàn toàn vào sự dẫn dắt, gợi mở của giáo viên.

$$\text{Lưu ý: } \frac{1}{n.(n-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}, \quad \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}, \dots, \quad \frac{1}{2008^2} < \frac{1}{2007.2008}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2007^2} + \frac{1}{2008^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2007.2008} \quad (*)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2007.2008} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} = 1 - \frac{1}{2008} < 1$$

$$\text{Nên, từ } (*) \Rightarrow H < 1$$

Qua bài toán trên, giáo viên có thể cho học sinh làm bài toán tổng quát sau :

Bài 9. Chứng tỏ :

$$a, H = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2003^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*, n \neq 1)$$

$$b, K = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} < \frac{1}{2}$$

Hướng dẫn :

$$a, H < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\text{Nên } H < 1$$

$$b, K = \frac{1}{2^2} (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}) < \frac{1}{2^2} (1+1) = \frac{1}{2^2} . 2 = \frac{1}{2}$$

$$(\text{Vì theo câu a, } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < 1)$$

Vậy $K < \frac{1}{2}$.

Bây giờ giáo viên có thể cho học sinh làm một số bài tập luyện tập sau :

1. Chứng tỏ rằng các biểu thức sau đều viết được dưới dạng số chính phương :

$$M = 1^3 + 2^3$$

$$Q = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

$$N = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

$$R = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$$

$$P = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

$$K = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$$

2. Tính A và B bằng hai cách trở lên:

$$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$B = 7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

3. Viết tổng sau dưới dạng một lũy thừa của 2;

$$T = 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{2008}$$

4. So sánh :

$$a, A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{2008} \text{ và } B = 2^{2009} - 1$$

$$b, P = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{200} \text{ và } Q = 3^{201}$$

$$c, E = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2008} \text{ và } F = x^{2009} \quad (x \in \mathbb{N}^*)$$

5. Chứng tỏ rằng :

$$a, 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 : 2^3$$

$$b, 3 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{2n+1} : 30 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$c, 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{403} + 5^{404} : 31$$

$$d, 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{99} \text{ và } B = 4^{100}$$

6. Tìm số dư khi chia A cho 7, biết rằng

$$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008} + 2^{2002}$$

7. Tính:

$$a, 3S - 2^{2003} \text{ biết } S = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2002}$$

$$b, E = 2^{100} - 2^{99} - 2^{98} - 2^{97} - \dots - 2^2 - 2 - 1$$

$$c, H - K \text{ biết: } H = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20} \\ K = 3^{21} : 2$$

8. Tìm :

$$a, \text{ Số tự nhiên } n \text{ biết: } 2A + 3 = 3^n$$

$$\text{Với } A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$$

$$b, \text{ Chữ số tận cùng của } M \text{ biết: } M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$$

9. Chứng tỏ rằng :

$$a, 8^7 - 2^{18} : 14$$

$$h, 12^{2n+1} + 11^{n+2} : 133$$

c, $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 405$

i, $70 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{101} : 8$

b, $10^6 - 57 : 59$

k, $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{16} : 5$

d, $10^{99} + 2^3 : 9$

l, $2000 + 2000^2 + 2000^3 + \dots + 2000^{2008} : 2001$

e, $10^{28} + 8 : 72$

m, $3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{1991} : 13$ và $: 41$

g, $4^{39} + 4^{40} + 4^{41} : 28$

10. Chứng tỏ rằng

a, $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

b, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

c, $A > B$ với:

$$A = \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^9}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^8}$$

$$B = \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^9}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^8}$$

3.5. Dạng 5: Toán đố với lũy thừa

Dạng toán đố với lũy thừa có một số bài chủ yếu liên quan đến số chính phương. Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.

***Phương pháp:** Cần nắm được một số kiến thức sau.

+) Số chính phương chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 và không thể tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

+) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, không chứa thừa số nguyên tố với số mũ lẻ.

+) Số lượng các ước của một số chính phương là một số lẻ. Ngược lại một số có số lượng các ước là một số lẻ thì số đó là số chính phương.

Bài 1: Trong buổi họp mặt đầu xuân Tân Mùi 1991, bạn Thủy đố các bạn điền các chữ số vào dòng chữ sau để được phép tính đúng

$$\text{Mùi} \cdot \text{mùi} = \text{tân mùi} \quad (*)$$

Bạn hãy trả lời giúp.

Phân tích đề bài :

Đề bài rất hay, nhưng khi tìm câu trả lời thì thật là khó. Ta phải tìm câu trả lời thích hợp thay cho dòng chữ (*)

Mùi là số có 3 chữ số

Theo (*) thì $(\text{Mùi})^2$ có tận cùng là mùi và có 6 chữ số.

Đi tìm đáp án:

Gọi Mùi = a. Ta có:

$$a^2 = 1000. \text{ TÂN} + a \quad \text{hay} \quad a^2 - a = 1000. \text{ TÂN} \\ \Rightarrow a.(a-1) \vdots 1000$$

Ta thấy a-1 và a là hai số liên tiếp

$$1000 = 125 \cdot 8 \quad \text{với} \quad (125; 8) = 1$$

Vậy có thể xảy ra :

$$+) a \vdots 125 \text{ và } a-1 \vdots 8 \quad \Rightarrow a = 625$$

$$+) a \vdots 8 \text{ và } a-1 \vdots 125 \quad \Rightarrow a = 376$$

$$\text{Do đó:} \quad 625 \cdot 625 = 390625 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$376 \cdot 376 = 141376 \quad (\text{không thỏa mãn, vì chữ T khác chữ N})$$

$$\text{Vậy Mùi} \cdot \text{mùi} = \text{tân mùi} \quad \text{chính là} \quad 625 \cdot 625 = 390625$$

Bài 2: Đồ bạn: số chính phương nào có 4 chữ số được viết bởi các chữ số: 3, 6, 8, 8.

Với bài toán này, ta phải sử dụng phương pháp loại trừ để tìm ra đáp án:

Gọi số chính phương phải tìm là n^2

Số chính phương không tận cùng bằng 3, 8 nên n^2 có tận cùng là 6

Số tận cùng là 86 thì chia hết cho 2, không chia hết cho 4 nên không phải là số chính phương. Vậy n^2 có tận cùng là 36.

Do đó số chính phương cần tìm là 8836

Bài 3.

Bạn hãy tìm số chính phương có 4 chữ số sao cho hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

Gợi ý : Gọi số cần tìm là n $\Rightarrow n^2 = \overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b}$

$$\Rightarrow \overline{a0b} = 11k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{Ta có } 100 \leq 11k^2 \leq 909 \Rightarrow 4 \leq k \leq 9$$

Thử các giá trị của k chỉ có số 704 có chữ số hàng chục bằng 0.

Vậy k = 8 và số cần tìm là 7744.

3. Kết quả thực hiện

Trong năm học vừa qua, kết hợp với công tác giảng dạy chuyên đề cho học sinh khá giỏi, tôi đã hướng dẫn các em học sinh khối 6 học chuyên đề này, Kết quả cho thấy các em không những đã giải tốt các bài toán về lũy thừa mà còn rất hào hứng với chuyên đề này, giúp các em cảm thấy yêu thích môn toán nói chung và phần toán lũy thừa nói riêng.

Tôi đã cho 50 em học sinh khá, giỏi khối lớp 6 làm bài kiểm tra khảo sát trước và sau khi thực hiện chuyên đề này, kết quả cho thấy:

Khi không áp dụng chuyên đề	Khi áp dụng chuyên đề

Các em học sinh sau khi được học chuyên đề đã nắm vững được các dạng bài tập về lũy thừa để tìm ra phương pháp giải hợp lý nhất cho các bài tập nâng cao bồi dưỡng học sinh giỏi. Đặc biệt một số em trong đội tuyển học sinh giỏi các em đã giải và vận dụng rất linh hoạt, nhanh và chọn được phương pháp tối ưu khi giải toán.

IV. Những vấn đề hạn chế và hướng tiếp tục nghiên cứu

1. Hạn chế.

- Do thời gian nghiên cứu hạn chế, kinh nghiệm còn chưa nhiều nên chuyên đề của tôi chắc chắn sẽ còn nhiều những chỗ thiếu sót. Mặt khác, phạm vi nghiên cứu chuyên đề tương đối rộng nên gặp khó khăn cho việc phân loại kiến thức, phân dạng bài tập, hệ thống bài tập... chưa tốt, chưa sâu, chưa kĩ, chưa khoa học.

- Do yêu cầu giảm tải kiến thức đối với học sinh hiện nay của Bộ GD - ĐT nên có rất nhiều kiến thức nâng cao phục vụ việc học chuyên đề này chưa được giới thiệu tới học sinh nên việc tiếp thu chuyên đề ban đầu gặp khó khăn với các em học sinh.

2. Hướng tiếp tục nghiên cứu.

Do những hạn chế nêu trên, đề tài này được hoàn chỉnh hơn, tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu kỹ lưỡng hơn, hệ thống kiến thức khoa học hơn....để đạt hiệu quả giảng dạy cao nhất. Tôi rất mong nhận được sự ủng hộ, đóng góp ý kiến quý báu của hội đồng khoa học, các đồng nghiệp và các em học sinh để trong quá trình giảng dạy sau này tôi sẽ giúp các em học sinh của mình được nhiều hơn nữa trong việc tìm tòi, khám phá môn toán học nói chung, chuyên đề “toán lũy thừa trong Q” nói riêng.

V. Điều kiện áp dụng

Để thực hiện đề tài này:

- Giáo viên cần soạn bài chu đáo, chọn lọc những kiến thức, những bài tập phù hợp với mức độ tiếp thu của từng đối tượng học sinh, để có thể gây được hứng thú cho học sinh với chuyên đề này. Giáo viên cần hướng dẫn học sinh khai thác kiến thức từ những kiến thức cơ bản, đơn giản mà các em được học trên lớp thì các em mới dễ dàng tiếp thu kiến thức nâng cao.

- Học sinh cần nắm vững kiến thức cơ bản về lũy thừa nắm được một số kiến thức mở rộng về lũy thừa, luôn có ý thức tìm tòi, học hỏi.

C. Kết luận.

Như đã giới thiệu, “Toán lũy thừa trong Q” là một mảng kiến thức khá rộng, chứa

đựng rất nhiều những bài toán hay và lí thú. Để chiếm lĩnh được nó không phải là việc dễ làm. Với hệ thống bài tập từ dễ đến khó trong từng dạng toán, tôi muốn cung cấp một số phương pháp làm bài tập có liên quan đến lũy thừa, giúp các em yêu thích toán đào sâu kiến thức về mảng lũy thừa dưới dạng các bài tập. Tùy theo khả năng và mức độ nhận thức của học sinh mà giáo viên truyền thụ kiến thức, phương pháp làm bài tập cho phù hợp với từng đối tượng

Tuy đã rất cố gắng trong công việc nghiên cứu, nhưng do vấn đề thời gian, kinh nghiệm hạn chế nên chuyên đề này không thể tránh khỏi thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự tham gia đóng góp ý kiến từ các đồng nghiệp để chuyên đề này được hoàn chỉnh hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Văn Giang 20.04.2008

Người viết.

Đàm Thị