

CÁC DẠNG TOÁN VỀ DÃY SỐ VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Các kiến thức cần nhớ:

Trong dãy số tự nhiên liên tiếp cứ một số chẵn lại đến một số lẻ rồi lại đến một số chẵn... Vì vậy, nếu:

- Dãy số bắt đầu từ số lẻ và kết thúc là số chẵn thì số lượng các số lẻ bằng số lượng các số chẵn.
- Dãy số bắt đầu từ số chẵn và kết thúc cũng là số lẻ thì số lượng các số chẵn bằng số lượng các số lẻ.
- Nếu dãy số bắt đầu từ số lẻ và kết thúc cũng là số lẻ thì số lượng các số lẻ nhiều hơn các số chẵn là 1 số.
- Nếu dãy số bắt đầu từ số chẵn và kết thúc cũng là số chẵn thì số lượng các số chẵn nhiều hơn các số lẻ là 1 số.

a. Trong dãy số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ số 1 thì số lượng các số trong dãy số chính bằng giá trị của số cuối cùng của số ấy.

b. Trong dãy số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ số khác số 1 thì số lượng các số trong dãy số bằng hiệu giữa số cuối cùng của dãy số với số liền trước số đầu tiên.

2. Các loại dãy số:

- + Dãy số cách đều:
 - Dãy số tự nhiên.
 - Dãy số chẵn, lẻ.
 - Dãy số chia hết hoặc không chia hết cho một số tự nhiên nào đó.
- + Dãy số không cách đều.
 - Dãy Fibonacci hay tribonacci.
 - Dãy có tổng (hiệu) giữa hai số liên tiếp là một dãy số.
- + Dãy số thập phân, phân số:

3. Cách giải các dạng toán về dãy số:

Dạng 1: Điền thêm số hạng vào sau, giữa hoặc trước một dãy số

Trước hết ta cần xác định lại quy luật của dãy số:

- + Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 2) bằng số hạng đứng trước nó cộng (hoặc trừ) với một số tự nhiên a .
- + Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 2) bằng số hạng đứng trước nó nhân (hoặc chia) với một số tự nhiên q khác 0.
- + Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 3) bằng tổng 2 số hạng đứng liền trước nó.
- + Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 4) bằng tổng của số hạng đứng trước nó cộng với số tự nhiên d rồi cộng với số thứ tự của số hạng ấy.
- + Số hạng đứng sau bằng số hạng đứng trước nhân với số thứ tự của nó.
- + Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 2) trở đi đều bằng a lần số liền trước nó.
- + Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 2) trở đi, mỗi số liền sau bằng a lần số liền trước nó cộng (trừ) n (n khác 0).

Các ví dụ:

Bài 1: Điền thêm 3 số hạng vào dãy số sau:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.....

Muốn giải được bài toán trên trước hết phải xác định quy luật của dãy số như sau:

$$\begin{array}{ll} \text{Ta thấy: } 1 + 2 = 3 & 3 + 5 = 8 \\ & 2 + 3 = 5 & 5 + 8 = 13 \end{array}$$

Dãy số trên được lập theo quy luật sau: Kể từ số hạng thứ 3 trở đi mỗi số hạng bằng tổng của hai số hạng đứng liền trước nó.

Ba số hạng tiếp theo là: $21 + 34 = 55$; $34 + 55 = 89$; $55 + 89 = 144$

Vậy dãy số được viết đầy đủ là: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 34, 55, 89, 144

Bài 2: Viết tiếp 3 số hạng vào dãy số sau: 1, 3, 4, 8, 15, 27

$$\begin{array}{ll} \text{Ta nhận thấy: } 8 = 1 + 3 + 4 & 27 = 4 + 8 + 15 \\ & 15 = 3 + 4 + 8 \end{array}$$

Từ đó ta rút ra được quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 4) bằng tổng của ba số hạng đứng liền trước nó.

Viết tiếp ba số hạng, ta được dãy số sau: 1, 3, 4, 8, 15, 27, 50, 92, 169.

Bài 3: Tìm số hạng đầu tiên của các dãy số sau biết rằng mỗi dãy số có 10 số hạng.

a) ..., ..., 32, 64, 128, 256, 512, 1024

b) ..., ..., 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110

Giải:

a). Ta nhận xét :

$$\text{Số hạng thứ 10 là : } 1024 = 512 \times 2$$

$$\text{Số hạng thứ 9 là : } 512 = 256 \times 2$$

$$\text{Số hạng thứ 8 là : } 256 = 128 \times 2$$

$$\text{Số hạng thứ 7 là : } 128 = 64 \times 2$$

.....

Từ đó ta suy luận ra quy luật của dãy số này là: mỗi số hạng của dãy số gấp đôi số hạng đứng liền trước đó.

$$\text{Vậy số hạng đầu tiên của dãy là: } 1 \times 2 = 2.$$

b). Ta nhận xét :

$$\text{Số hạng thứ 10 là : } 110 = 11 \times 10$$

$$\text{Số hạng thứ 9 là : } 99 = 11 \times 9$$

$$\text{Số hạng thứ 8 là : } 88 = 11 \times 8$$

$$\text{Số hạng thứ 7 là : } 77 = 11 \times 7$$

.....

Từ đó ta suy luận ra quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng bằng số thứ tự của số hạng ấy nhân với 11.

$$\text{Vậy số hạng đầu tiên của dãy là : } 1 \times 11 = 11.$$

Bài 4: Tìm các số còn thiếu trong dãy số sau :

a. 3, 9, 27, ..., ..., 729.

b. 3, 8, 23, ..., ..., 608.

Giải :

Muốn tìm được các số còn thiếu trong mỗi dãy số, cần tìm được quy luật của mỗi dãy số đó.

$$\begin{array}{ll} \text{a. Ta nhận xét : } & 3 \times 3 = 9 \\ & 9 \times 3 = 27 \end{array}$$

Quy luật của dãy số là: Kể từ số hạng thứ 2 trở đi, mỗi số hạng gấp 3 lần số liền trước nó.

Vậy các số còn thiếu của dãy số đó là:

$$27 \times 3 = 81 ; 81 \times 3 = 243 ; 243 \times 3 = 729 \text{ (đúng)}.$$

Vậy dãy số còn thiếu hai số là : 81 và 243.

b. Ta nhận xét: $3 \times 3 - 1 = 8 ; \quad 8 \times 3 - 1 = 23.$

Quy luật của dãy số là: Kể từ số hạng thứ 2 trở đi, mỗi số hạng bằng 3 lần số liền trước nó trừ đi 1. Vì vậy, các số còn thiếu ở dãy số là:

$$23 \times 3 - 1 = 68 ; \quad 68 \times 3 - 1 = 203 ; 203 \times 3 - 1 = 608 \text{ (đúng)}.$$

Dãy số còn thiếu hai số là: 68 và 203.

Bài 5: Lúc 7h sáng, một người đi từ A đến B và một người đi từ B đến A ; cả hai cùng đi đến đích của mình lúc 2h chiều. Vì đường đi khó dân từ A đến B ; nên người đi từ A, giờ đầu đi được 15km, cứ mỗi giờ sau đó lại giảm đi 1km. Người đi từ B giờ cuối cùng đi được 15km, cứ mỗi giờ trước đó lại giảm 1km. Tính quãng đường AB.

Giải:

2 giờ chiều là 14h trong ngày.

2 người đi đến đích của mình trong số giờ là:

$$14 - 7 = 7 \text{ giờ}.$$

Vận tốc của người đi từ A đến B lập thành dãy số:

$$15, 14, 13, 12, 11, 10, 9.$$

Vận tốc của người đi từ B đến A lập thành dãy số:

$$9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.$$

Nhìn vào 2 dãy số ta nhận thấy đều có các số hạng giống nhau vậy quãng đường AB là: $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 84$

Đáp số: 84km.

Bài 6: Điền các số thích hợp vào ô trống sao cho tổng số 3 ô liên tiếp đều bằng 2010

					783				998
--	--	--	--	--	-----	--	--	--	-----

Giải:

Ta đánh số thứ tự các ô như sau:

					783				998
$\hat{O}_1$	$\hat{O}_2$	$\hat{O}_3$	$\hat{O}_4$	$\hat{O}_5$	$\hat{O}_6$	$\hat{O}_7$	$\hat{O}_8$	$\hat{O}_9$	$\hat{O}_{10}$

Theo điều kiện của đề bài ta có:

$$783 + \hat{O}_7 + \hat{O}_8 = 2010.$$

$$\hat{O}_7 + \hat{O}_8 + \hat{O}_9 = 2010.$$

Vậy $\hat{O}_9 = 783$; từ đó ta tính được:

$$\hat{O}_8 = \hat{O}_5 = \hat{O}_2 = 2010 - (783 + 998) = 229$$

$$\hat{O}_7 = \hat{O}_4 = \hat{O}_1 = 998$$

$$\hat{O}_3 = \hat{O}_6 = 783.$$

Điền các số vào ta được dãy số:

998	229	783	998	229	783	998	229	783	998
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Một số lưu ý khi giảng dạy Toán dạng này là: Trước hết phải xác định được quy luật của dãy là dãy tiến, dãy lùi hay dãy số theo chu kỳ. Từ đó mà học sinh có thể điền được các số vào dãy đã cho.

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: 13, 19, 25, 31,.....,

Dãy số vừa được viết ra
Ba số viết tiếp là ba số nào?
Số nào suy nghĩ thấp cao?
Đố em, đố bạn làm sao kể liền?

Bài 2: Tìm và viết ra các số hạng còn thiếu trong dãy số sau:

- a. 7, 10, 13, ..., ..., 22, 25.
b. 103, 95, 87, ..., ..., ..., 55, 47.

Bài 3: Điền số thích hợp vào ô trống, sao cho tổng các số ở 3 ô liền nhau bằng:

a. $n = 14,5$

2,7									8,5
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	-----

b. $n = 23,4$

	8,7								7,6
--	-----	--	--	--	--	--	--	--	-----

Bài 4: Cho dãy phân số sau:

$$\frac{2001}{2002}, \frac{2002}{2003}, \frac{2003}{2004}, \frac{2004}{2005}$$

- a) Hãy viết tiếp số hạng thứ năm của dãy theo đúng quy luật?
b) Chứng tỏ dãy trên là một dãy xếp theo thứ tự tăng dần?

Bài 5: Viết tiếp ba số hạng vào dãy số sau :

- a) 1; 3; 4; 7; 11; 18;...
b) 0; 2; 4; 6; 12; 22;...
c) 0 ; 3; 7; 12;...
d) 1; 2; 6; 24;...

Dạng 2: Xác định số A có thuộc dãy đã cho hay không?

Cách giải của dạng toán này:

- Xác định quy luật của dãy;
- Kiểm tra số A có thỏa mãn quy luật đó hay không?

Các ví dụ:

Bài 1: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8,.....

- a. Dãy số được viết theo quy luật nào?
b. Số 2009 có phải là số hạng của dãy không? Vì sao?

Giải:

- a. Ta nhận thấy:
- | | |
|----------------|------------------|
| Số hạng thứ 1: | $2 = 2 \times 1$ |
| Số hạng thứ 2: | $4 = 2 \times 2$ |
| Số hạng thứ 3: | $6 = 2 \times 3$ |
| | |
| Số hạng thứ n: | $? = 2 \times n$ |

Quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng bằng 2 nhân với số thứ tự của số hạng ấy.

b. Ta nhận thấy các số hạng của dãy là số chẵn, mà số 2009 là số lẻ, nên số 2009 không phải là số hạng của dãy.

Bài 2: Cho dãy số: 2, 5, 8, 11, 14, 17,.....

- Viết tiếp 3 số hạng vào dãy số trên?
- Số 2009 có thuộc dãy số trên không? Tại sao?

Giải:

- Ta thấy: $8 - 5 = 3$; $11 - 8 = 3$;

Dãy số trên được viết theo quy luật sau: Kể từ số thứ 2 trở đi, mỗi số hạng bằng số hạng đứng liền trước nó cộng với 3.

Vậy 3 số hạng tiếp theo của dãy số là:

$$17 + 3 = 20 ; 20 + 3 = 23 ; 23 + 3 = 26$$

Dãy số được viết đầy đủ là: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26.

- Ta thấy: $2 : 3 = 0$ dư 2 ; $5 : 3 = 1$ dư 2 ; $8 : 3 = 2$ dư 2 ;

Vậy đây là dãy số mà mỗi số hạng khi chia cho 3 đều dư 2. Mà:

$2009 : 3 = 669$ dư 2. Vậy số 2009 có thuộc dãy số trên vì cũng chia cho 3 thì dư 2.

Bài 3: Em hãy cho biết:

- Các số 60, 483 có thuộc dãy 80, 85, 90,..... hay không?
- Số 2002 có thuộc dãy 2, 5, 8, 11,..... hay không?
- Số nào trong các số 798, 1000, 9999 có thuộc dãy 3, 6, 12, 24,..... giải thích tại sao?

Giải:

- Cả 2 số 60, 483 đều không thuộc dãy đã cho vì:

- Các số hạng của dãy đã cho đều lớn hơn 60.
- Các số hạng của dãy đã cho đều chia hết cho 5, mà 483 không chia hết cho 5.

- Số 2002 không thuộc dãy đã cho vì mọi số hạng của dãy khi chia cho 3 đều dư 2, mà 2002 chia 3 thì dư 1.

- Cả 3 số 798, 1000, 9999 đều không thuộc dãy 3, 6, 12, 24,... vì:

- Mỗi số hạng của dãy (kể từ số hạng thứ 2) đều gấp đôi số hạng liền trước nhận nó; cho nên các số hạng (kể từ số hạng thứ 3) có số hạng đứng liền trước là số chẵn, mà 798 chia cho 2 = 399 là số lẻ.

- Các số hạng của dãy đều chia hết cho 3, mà 1000 lại không chia hết cho 3.

- Các số hạng của dãy (kể từ số hạng thứ 2) đều chẵn, mà 9999 là số lẻ.

Bài 4: Cho dãy số: 1; 2,2; 3,4;; 13; 14,2.

Nếu viết tiếp thì số 34,6 có thuộc dãy số trên không?

Giải:

- Ta nhận xét: $2,2 - 1 = 1,2$; $3,4 - 2,2 = 1,2$; $14,2 - 13 = 1,2$;.....

Quy luật của dãy số trên là: Từ số hạng thứ 2 trở đi, mỗi số hạng đều hơn số hạng liền trước nó là 1,2 đơn vị:

- Mặt khác, các số hạng trong dãy số trừ đi 1 đều chia hết cho 1,2.

Ví dụ: $(13 - 1)$ chia hết cho 1,2

$(3,4 - 1)$ chia hết cho 1,2

Mà: $(34,6 - 1) : 1,2 = 28$ dư 0.

Vậy nếu viết tiếp thì số 34,6 cũng thuộc dãy số trên.

Bài 5: Cho dãy số: 1996, 1993, 1990, 1987,....., 55, 52, 49.

Các số sau đây có phải là số hạng của dãy không?

100, 123, 456, 789, 1900, 1436, 2009?

Giải:

Nhận xét: Đây là dãy số cách đều 3 đơn vị.

Trong dãy số này, số lớn nhất là 1996 và số bé nhất là 49. Do đó, số 2009 không phải là số hạng của dãy số đã cho vì lớn hơn 1996.

Các số hạng của dãy số đã cho là số khi chia cho 3 thì dư 1. Do đó, số 100 và số 1900 là số hạng của dãy số đó.

Các số 123, 456, 789 đều chia hết cho 3 nên các số đó không phải là số hạng của dãy số đã cho.

Số 1436 khi chia cho 3 thì dư 2 nên không phải là số hạng của dãy số đã cho.

*** Bài tập luyện:**

Bài 1: Cho dãy số: 1, 4, 7, 10,...

a. Nêu quy luật của dãy.

b. Số 31 có phải là số hạng của dãy không?

c. Số 2009 có thuộc dãy này không? Vì sao?

Bài 2: Cho dãy số: 1004, 1010, 1016,...., 2012.

Hỏi số 1004 và 1760 có thuộc dãy số trên hay không?

Bài 3: Cho dãy số: 1, 7, 13, 19,....,

a. Nêu quy luật của dãy số rồi viết tiếp 3 số hạng tiếp theo.

b. Trong 2 số 1999 và 2009 thì số nào thuộc dãy số? Vì sao?

Bài 4: Cho dãy số: 3, 8, 13, 18,.....

Có số tự nhiên nào có chữ số tận cùng là 6 mà thuộc dãy số trên không?

Bài 5: Cho dãy số: 1, 3, 6, 10, 15,....., 45, 55,.....

a. Số 1997 có phải là số hạng của dãy số này hay không?

b. Số 561 có phải là số hạng của dãy số này hay không?

Dạng 3: Tìm số số hạng của dãy

*** Cách giải ở dạng này là:**

Đối với dạng toán này, ta thường sử dụng phương pháp giải toán khoảng cách (toán trồng cây). Ta có công thức sau :

Số các số hạng của dãy = số khoảng cách + 1.

Đặc biệt, nếu quy luật của dãy là : Mỗi số hạng đứng sau bằng số hạng liền trước cộng với số không đổi d thì:

Số các số hạng của dãy = (Số hạng lớn nhất – Số hạng nhỏ nhất) : d + 1.

Các ví dụ:

Bài 1: Cho dãy số 11; 14; 17;.....;65; 68.

Hãy xác định dãy số trên có bao nhiêu số hạng?

Lời giải :

Ta có : $14 - 11 = 3$; $17 - 14 = 3$;....

Vậy quy luật của dãy số đó là mỗi số hạng đứng liền sau bằng số hạng đứng liền trước nó cộng với 3. Số các số hạng của dãy số đó là:

$$(68 - 11) : 3 + 1 = 20 \text{ (số hạng)}$$

Bài 2: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8, 10,....., 1992

Hãy xác định dãy số trên có bao nhiêu số hạng?

Giải:

Ta thấy: $4 - 2 = 2$; $8 - 6 = 2$
 $6 - 4 = 2$;

Vậy, quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng đứng sau bằng một số hạng đứng trước cộng với 2. Nói khác: Đây là dãy số chẵn hoặc dãy số cách đều 2 đơn vị.

Dựa vào công thức trên:

(Số hạng cuối – số hạng đầu) : khoảng cách + 1

Ta có: Số các số hạng của dãy là:

$$(1992 - 2) : 2 + 1 = 996 \text{ (số hạng).}$$

Bài 3: Cho 1, 3, 5, 7, là dãy số lẻ liên tiếp đầu tiên; hỏi 1981 là số hạng thứ bao nhiêu trong dãy số này? Giải thích cách tìm?

(Đề thi học sinh giỏi bậc tiểu học 1980 – 1981)

Giải:

Ta thấy:

Số hạng thứ nhất bằng: $1 = 1 + 2 \times 0$
Số hạng thứ hai bằng: $3 = 1 + 2 \times 1$
Số hạng thứ ba bằng: $5 = 1 + 2 \times 2$
.....

Còn số hạng cuối cùng: $1981 = 1 + 2 \times 990$

Vì vậy, số 1981 là số hạng thứ 991 trong dãy số đó.

Bài 4: Cho dãy số: 3, 18, 48, 93, 153,...

a. Tìm số hạng thứ 100 của dãy.

b. Số 11703 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

Giải:

a. Số hạng thứ nhất: $3 = 3 + 15 \times 0$
Số hạng thứ hai: $18 = 3 + 15 \times 1$
Số hạng thứ ba: $48 = 3 + 15 \times 1 + 15 \times 2$
Số hạng thứ tư: $93 = 3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + 15 \times 3$
Số hạng thứ năm: $153 = 3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + 15 \times 3 + 15 \times 4$
.....

Số hạng thứ n: $3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + 15 \times 3 + \dots + 15 \times (n - 1)$

Vậy số hạng thứ 100 của dãy là:

$$\begin{aligned} & 3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + \dots + 15 \times (100 - 1) \\ &= 3 + 15 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 99) \text{ (Đưa về một số nhân với một tổng.} \\ &= 3 + 15 \times (1 + 99) \times 99 : 2 = 74253 \end{aligned}$$

b. Gọi số 11703 là số hạng thứ n của dãy:

Theo quy luật ở phần a ta có:

$$\begin{aligned}
3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + 15 \times 3 + \dots \times (n-1) &= 11703 \\
3 + 15 \times (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) &= 11703 \\
3 + 15 \times (1 + n-1) \times (n-1) : 2 &= 11703 \\
15 \times n \times (n-1) &= (11703 - 3) \times 2 = 23400 \\
n \times (n-1) &= 23400 : 15 = 1560
\end{aligned}$$

Nhận xét: Số 1560 là tích của hai số tự nhiên liên tiếp 39 và 40 ($39 \times 40 = 1560$)

Vậy, $n = 40$, số 11703 là số hạng thứ 40 của dãy.

Bài 5: Trong các số có ba chữ số, có bao nhiêu số chia hết cho 4?

Lời giải:

Ta nhận xét : Số nhỏ nhất có ba chữ số chia hết cho 4 là 100 và số lớn nhất có ba chữ số chia hết cho 4 là 996. Như vậy các số có ba chữ số chia hết cho 4 lập thành một dãy số có số hạng nhỏ nhất là 100, số hạng lớn nhất là 996 và mỗi số hạng của dãy (kể từ số hạng thứ hai) bằng số hạng đứng liền trước cộng với 4.

Vậy số các số có ba chữ số chia hết cho 4 là :

$$(996 - 100) : 4 = 225 \text{ (số)}$$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho dãy số: 3, 8, 13, 23,, 2008

Tìm xem dãy số có bao nhiêu số hạng ?

Bài 2: Tìm số số hạng của các dãy số sau:

a. 1, 4, 7, 10,, 1999.

b. 1,1 ; 2,2 ; 3,3 ; ... ; 108,9 ; 110,0.

Bài 3: Xét dãy số: 100, 101,, 789.

Dãy này có bao nhiêu số hạng?

Bài 4: Có bao nhiêu số khi chia cho 4 thì dư 1 mà nhỏ hơn 2010 ?

Bài 5: Người ta trồng cây hai bên đường của một đoạn đường quốc lộ dài 21km. Hỏi phải dùng bao nhiêu cây để đủ trồng trên đoạn đường đó ? Biết rằng cây nọ trồng cách cây kia 5m.

Dạng 4: Tìm số hạng thứ n của dãy số

Bài toán 1: Cho dãy số: 1, 3, 5, 7,.....Hỏi số hạng thứ 100 của dãy số là số nào

Giải:

Số khoảng cách từ số đầu đến số hạng thứ 100 là:

$$98 - 1 = 99$$

Mỗi khoảng cách là

$$3 - 1 = 5 - 3 = 2$$

Số hạng thứ 100 là

$$1 + 99 \times 2 = 199$$

Công thức tổng quát:

Số hạng thứ n = số đầu + khoảng cách $\times$ (Số số hạng - 1)

Bài toán 2: Tìm số hạng thứ 100 của các dãy số được viết theo quy luật:

a) 3, 8, 15, 24, 35,... (1)

b) 3, 24, 63, 120, 195,... (2)

c) 1, 3, 6, 10, 15,... (3)

Giải: a) Dãy (1) có thể viết dưới dạng: $1 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 5, 4 \times 6, 5 \times 7, \dots$

Mỗi số hạng của dãy (1) là tích của hai thừa số, thừa số thứ hai lớn hơn thừa số thứ nhất 2 đơn vị. Các thừa số thứ nhất làm thành một dãy: 1, 2, 3, 4, 5, ...; Dãy này có số hạng thứ 100 là 100.

Số hạng thứ 100 của dãy (1) bằng: $100 \times 102 = 10200$.

b) Dãy (2) có thể viết dưới dạng: $1 \times 3, 4 \times 6, 7 \times 9, 10 \times 12, 13 \times 15, \dots$

Mỗi số hạng của dãy (2) là tích của hai thừa số, thừa số thứ hai lớn hơn thừa số thứ nhất 2 đơn vị. Các thừa số thứ nhất làm thành một dãy: 1, 4, 7, 10, 13, ...; Số hạng thứ 100 của dãy 1, 4, 7, 10, 13, ... là: $1 + (100 - 1) \times 3 = 298$.

Số hạng thứ 100 của dãy (2) bằng: $298 \times 300 = 89400$.

c) Dãy (3) có thể viết dưới dạng:

$$\frac{1 \times 2}{2}; \frac{2 \times 3}{2}; \frac{3 \times 4}{2}; \frac{4 \times 5}{2}; \dots$$

Số hạng thứ 100 của dãy (3) bằng: $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho dãy số : 101, 104, 107, 110,

Tìm số hạng thứ 1998 của dãy số đó.

Bài 2: Cho dãy số : 5, 8, 11, 14,

a) Tìm số hạng thứ 200 của dãy số.

b) Nếu cứ viết tiếp thì các số : 1000 ; 2009 ; 5000 có là số hạng của dãy không ?
Tại sao.

Bài 3: Một bạn học sinh viết liên tiếp các số tự nhiên mà khi chia cho 3 thì dư 2 bắt đầu từ số 5 thành dãy số. Viết đến số hạng thứ 100 thì phát hiện đã viết sai. Hỏi bạn đó đã viết sai số nào ?

Dạng 5: Tìm số chữ số của dãy khi biết số số hạng

Bài toán 1: Cho dãy số: 1, 2, 3,.....150. Hỏi để viết dãy số này người ta phải dùng bao nhiêu chữ số

Giải:

Dãy số đã cho có : $(9 - 1) : 1 + 1 = 9$ số có 1 chữ số.

Có $(99 - 10) : 1 + 1 = 90$ số có 2 chữ số

Có $(150 - 100) : 1 + 1 = 51$ số có 3 chữ số.

Vậy số chữ số cần dùng là :

$$9 \times 1 + 90 \times 2 + 51 \times 3 = 342 \text{ chữ số}$$

Bài toán 2: Một quyển sách có 234 trang. Hỏi để đánh số trang quyển sách đó người ta phải dùng bao nhiêu chữ số.

Giải:

Để đánh số trang quyển sách đó người ta phải viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 234 thành dãy số. Dãy số này có

$$(9 - 1) : 1 + 1 = 9 \text{ số có 1 chữ số}$$

$$\text{Có: } (99 - 10) : 1 + 1 = 90 \text{ số có 2 chữ số}$$

Có: $(234 - 100) : 1 + 1 = 135$ số có 3 chữ số

Vậy người ta phải dùng số chữ số là:

$$9 \times 1 + 90 \times 2 + 135 \times 3 = 594 \text{ chữ số}$$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Một bạn học sinh viết liên tiếp các số tự nhiên từ 101 đến 2009 thành 1 số rất lớn. Hỏi số đó có bao nhiêu chữ số

Bài 2: Trường Tiểu học Thành Công có 987 học sinh. Hỏi để ghi số thứ tự học sinh trường đó người ta phải dùng bao nhiêu chữ số

Bài 3: Cần bao nhiêu chữ số để đánh số trang của một cuốn sách có tất cả là:

a) 752 trang.

b) 1251 trang.

Dạng 6: Tìm số số hạng khi biết số chữ số

Bài toán 1: Để đánh số trang 1 quyển sách người ta dùng hết 435 chữ số. Hỏi quyển sách đó có bao nhiêu trang?

Giải:

Để đánh số trang quyển sách đó, người ta phải viết liên tiếp các số tự nhiên bắt đầu từ 1 thành dãy số. Dãy số này có

9 số có 1 chữ số

có 90 số có 2 chữ số

Để viết các số này cần số chữ số là

$$9 \times 1 + 90 \times 2 = 189 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại là:

$$435 - 189 = 246 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại này dùng để viết tiếp các số có 3 chữ số bắt đầu từ 100. Ta viết được

$$246 : 3 = 82 \text{ số}$$

Số trang quyển sách đó là

$$99 + 82 = 181 \text{ (trang)}$$

Bài toán 2:

Để đánh số trang một cuốn sách người ta phải dùng tất cả 600 chữ số. Hỏi quyển sách đó có bao nhiêu trang?

Giải: 99 trang đầu cần dùng $9 \times 1 + 90 \times 2 = 189$ chữ số.

999 trang đầu cần dùng: $9 \times 1 + 90 \times 2 + 900 \times 3 = 2889$ chữ số

Vì: $189 < 600 < 2889$ nên trang cuối cùng phải có 3 chữ số. Số chữ số để đánh số các trang có 3 chữ số là: $600 - 189 = 411$ (chữ số)

Số trang có 3 chữ số là $411 : 3 = 137$ trang.

Vậy quyển sách có tất cả là: $99 + 137 = 236$ trang.

Bài toán 3: Để ghi thứ tự các nhà trên một đường phố, người ta dùng các số chẵn 2, 4, 6, 8 . . . để ghi các nhà ở dãy phải và các số lẻ 1, 3, 5, 7 . . . để ghi các nhà ở dãy trái của đường phố đó. Hỏi số nhà cuối cùng của dãy chẵn trên đường phố đó là bao nhiêu, biết rằng khi đánh thứ tự các nhà của dãy này, người ta đã dùng 367 lượt chữ số cả thảy.

Giải:

Số nhà có số thứ tự ghi bằng 1 chữ số chẵn là: $(8 - 2) : 2 + 1 = 4$ (nhà)

Số nhà có số thứ tự ghi bằng 2 chữ số chẵn là: $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$ (nhà)

Số lượt chữ số để đánh số thứ tự các nhà có 1 và 2 chữ số là:

$$4 + 45 \times 2 = 94 \text{ (lượt)}$$

Số lượt chữ số để đánh số thứ tự nhà có 3 chữ số là: $367 - 94 = 273$ (lượt)

Số nhà có số thứ tự 3 chữ số là: $273 : 3 = 91$ (nhà)

Tổng số nhà của dãy chẵn là: $4 + 45 + 91 = 140$ (nhà)

Số nhà cuối cùng của dãy chẵn là: $(140 - 1) \times 2 + 2 = 280$.

Bài toán 4: Cho dãy số: 1, 3, 5, 7, ..., n. Hãy tìm số n để số chữ số của dãy gấp 3 lần số các số hạng của dãy.

Giải:

Để tìm được số n sao cho số các chữ số của dãy gấp ba lần số các số hạng của dãy đó, ta giả sử trung bình mỗi số lẻ liên tiếp của dãy đều có 3 chữ số. Do đó:

- Từ 1 đến 9 gồm các số lẻ có một chữ số là:

$$(9 - 1) : 2 + 1 = 5 \text{ (số)}$$

Mỗi số cần phải viết thêm 2 chữ số nên số chữ số cần phải viết thêm là:

$$2 \times 5 = 10 \text{ (chữ số)}$$

Các số lẻ gồm hai chữ số là

$$(99 - 11) : 2 + 1 = 45 \text{ (số)}$$

Mỗi số cần phải viết thêm 1 chữ số nên số chữ số cần phải viết thêm là:

$$1 \times 45 = 45 \text{ (chữ số)}$$

Các số lẻ gồm 3 chữ số là:

$$(999 - 101) : 2 + 1 = 450 \text{ (số)}$$

Các số có 3 chữ số đảm bảo số chữ số của dãy gấp ba lần số số hạng của dãy đó.

Từ 1001 trở đi, mỗi số cần bớt đi một chữ số. Số chữ số cần thêm phải bằng số chữ số cần bớt và bằng:

$$10 + 45 = 55 \text{ (chữ số)}$$

Vì mỗi số phải bớt đi 1 chữ số nên số các số lẻ có 4 chữ số là:

$$55 : 1 = 55 \text{ (số)}$$

Ta có:

$$(n - 1001) : 2 + 1 = 55$$

$$(n - 1001) : 2 = 55 - 1 = 54$$

$$(n - 1001) = 54 \times 2 = 108$$

$$n = 108 + 1001 = 1109$$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Để viết dãy số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 1 người ta dùng hết 756 chữ số. Hỏi số hạng cuối cùng của dãy số là bao nhiêu.

Bài 2: Để ghi số thứ tự học sinh của 1 trường Tiểu học, người ta phải dùng 1137 chữ số. Hỏi trường đó có bao nhiêu học sinh?

Bài 3: Tính số trang của một cuốn sách. Biết rằng để đánh số trang của cuốn sách đó người ta phải dùng 3897 chữ số?

Bài 4: Để đánh số trang của một quyển sách, người ta phải dùng trung bình mỗi trang 4 chữ số. Hỏi quyển sách đó có bao nhiêu trang?

Dạng 7: Tìm chữ số thứ n của dãy

Bài toán 1: Cho dãy số 1, 2, 3,..... Hỏi chữ số thứ 200 là chữ số nào ?

Giải:

Dãy số đã cho có 9 số có 1 chữ số

Có 90 số có 2 chữ số

Để viết các số này cần

$$9 \times 1 + 90 \times 2 = 189 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại là

$$200 - 189 = 11 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại này dùng để viết các số có 3 chữ số bắt đầu từ 100. Ta viết được

$$11 : 3 = 3 \text{ số (dư 2 chữ số)}$$

Nên có 3 số có 3 chữ số được viết liên tiếp đến

$$99 + 3 = 102$$

Còn dư 2 chữ số dùng để viết tiếp số 103 nhưng chỉ viết được 10. Vậy chữ số thứ 200 của dãy là chữ số 0 của số 103.

Bài toán 2: Cho dãy số 2, 4, 6, 8, Hỏi chữ số thứ 2010 của dãy là chữ số nào?

Giải:

Dãy số đã cho có 4 số có 1 chữ số

Có $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$ số có 2 chữ số

Có $(998 - 100) : 2 + 1 = 450$ số có 3 chữ số

Để viết các số này cần:

$$4 \times 1 + 45 \times 2 + 450 \times 3 = 1444 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại là:

$$2010 - 1444 = 566 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại này dùng để viết các số có 4 chữ số bắt đầu từ 1000. Ta viết được:

$$566 : 4 = 141 \text{ số (dư 2 chữ số)}$$

Nên có 141 số có 4 chữ số được viết, số có 4 chữ số thứ 141 là:

$$(141 - 1) \times 2 + 1000 = 1280$$

Còn dư 2 chữ số dùng để viết tiếp số 1282 nhưng mới chỉ viết được 12. Vậy chữ số thứ 2010 của dãy là chữ số 2 hàng trăm của số 1282.

Bài toán 3: Tìm chữ số thứ 2010 ở phần thập phân của số thập phân bằng phân số $\frac{1}{7}$.

Giải:

Số thập phân bằng phân số $\frac{1}{7}$ là: $1 : 7 = 0,14285714285.....$

Đây là số thập phân vô hạn tuần hoàn. Ta thấy cứ 6 chữ số thì lập thành 1 nhóm 142857. Với 2010 chữ số thì có số nhóm là:

2010 : 6 = 335 (nhóm). Vậy chữ số thứ 2010 ở phần thập phân của số thập phân bằng phân số $\frac{1}{7}$ là chữ số 7.

Bài toán 4: Cho 1 số có 2 chữ số, một dãy số được tạo nên bằng cách nhân đôi chữ số hàng đơn vị của số này rồi cộng với chữ số hàng chục, ghi lại kết quả; tiếp tục như vậy với số vừa nhận được ... (Ví dụ có thể là dãy: 59, 23, 8, 16, 13, ...). Tìm số thứ 2010 của dãy nếu số thứ nhất là 14.

Giải:

Ta lập được dãy các số như sau:

14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15,

Ta thấy cứ hết 18 số thì dãy các số lại được lặp lại như dãy 18 số đầu.

Với 2010 số thì có số nhóm là:

$$2010 : 18 = 111 \text{ nhóm (dư } 12 \text{ số)}$$

12 số đó là các số của nhóm thứ 112 lần lượt là: 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 1.

Vậy số thứ 2010 của dãy là số 1.

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho dãy số: 2, 5, 8, 11,.....Hãy tìm chữ số thứ 200 của dãy số đó.

Bài 2: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8, Bạn Minh tìm được chữ số thứ 2010 của dãy là chữ số 0, hỏi bạn tìm đúng hay sai?

Bài 3: Bạn Minh đang viết phân số $\frac{5}{13}$ dưới dạng số thập phân. Thấy bạn Thông sang chơi, Minh liền hỏi: Đố bạn tìm được chữ số thứ 100 ở phần thập phân của số thập phân mà tớ đang viết. Thông nghĩ 1 tí rồi trả lời ngay: đó là chữ số 6. Em hãy cho biết bạn Thông trả lời đúng hay sai?

Dạng 8: Tìm số hạng thứ n khi biết tổng của dãy số

Bài toán 1: Cho dãy số: 1, 2, 3,, n. Hãy tìm số n biết tổng của dãy số là 136

Giải:

Áp dụng công thức tính tổng ta có :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n) \times n}{2} = 136$$

$$\text{Do đó: } (1+n) \times n = 136 \times 2$$

$$= 17 \times 8 \times 2$$

$$= 16 \times 17$$

$$\text{Vậy } n = 16$$

Bài toán 2: Cho dãy số: 21, 22, 23,, n

Tìm n biết: $21 + 22 + 23 + \dots + n = 4840$

Giải:

Nếu cộng thêm vào tổng trên tổng của các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 20 ta có tổng sau:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 21 + 22 + 23 + \dots + n$$

Áp dụng công thức tính tổng ta có

$$\begin{aligned}
 (1 + n) \times n : 2 &= 1 + 2 + \dots + 20 + 4840 \\
 &= (1 + 20) \times 20 : 2 + 4840 \\
 &= 210 + 4840 = 5050 \\
 (1 + n) \times n &= 5050 \times 2 \\
 &= 10100 \\
 &= 101 \times 100
 \end{aligned}$$

Vậy $n = 100$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho biết: $1 + 2 + 3 + \dots + n = 345$. Hãy tìm số n .

Bài 2: Tìm số n biết rằng

$$98 + 102 + \dots + n = 15050$$

Bài 3: Cho dãy số 10, 11, 12, 13, ..., x . Tìm x để tổng của dãy số trên bằng 5106

Dạng 9: Tính tổng của dãy số

Các bài toán được trình bày ở chuyên đề này được phân ra hai dạng chính, đó là:

Dạng thứ nhất: Dãy số với các số hạng là số nguyên, phân số (hoặc số thập phân) cách đều

Dạng thứ hai: Dãy số với các số hạng không cách đều.

Dạng 1: Dãy số mà các số hạng cách đều.

Xuất phát từ một bài Toán như sau:

$$\text{Tính: } A = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

Ta thấy tổng A có 100 số hạng, ta chia thành 50 nhóm, mỗi nhóm có tổng là 101 như sau:

$$A = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) = 101 + 101 + \dots + 101 = 50 \times 101 = 5050.$$

Đây là bài Toán mà lúc lên 7 tuổi nhà Toán học Gauxơ đã tính rất nhanh tổng các số Tự nhiên từ 1 đến 100 trước sự ngạc nhiên của thầy giáo và các bạn bè cùng lớp.

Như vậy bài toán trên là cơ sở đầu tiên để chúng ta tìm hiểu và khai thác thêm rất nhiều các bài tập tương tự, được đưa ra ở nhiều dạng khác nhau, được áp dụng ở nhiều thể loại toán khác nhau nhưng chủ yếu là: tính toán, tìm số, so sánh, chứng minh. Để giải quyết được các dạng toán đó chúng ta cần phải nắm được quy luật của dãy số, tìm được số hạng tổng quát, ngoài ra cần phải kết hợp những công cụ giải toán khác nhau nữa.

Cách giải:

Nếu số hạng của dãy số cách đều nhau thì tổng của hai số hạng cách đều đầu và số hạng cuối trong dãy số đó bằng nhau. Vì vậy:

Tổng các số hạng của dãy bằng tổng của một cặp hai số hạng cách đầu số hạng đầu và cuối nhân với số hạng của dãy chia cho 2.

Viết thành sơ đồ:

$$\text{Tổng của dãy số cách đều} = (\text{số đầu} + \text{số cuối}) \times (\text{số số hạng} : 2)$$

Từ sơ đồ trên ta suy ra:

$$\text{Số đầu của dãy} = \text{tổng} \times 2 : \text{số số hạng} - \text{số hạng cuối.}$$

$$\text{Số cuối của dãy} = \text{tổng} \times 2 : \text{số số hạng} - \text{số đầu.}$$

Sau đây là một số bài tập được phân thành các thể loại, trong đó đã phân thành hai dạng trên:

Bài 1: Tính tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên.

Giải:

19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là:

1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37.

Ta thấy: $1 + 37 = 38$; $5 + 33 = 38$

$1 + 35 = 38$; $7 + 31 = 38$

Nếu ta sắp xếp các cặp số từ hai đầu số vào, ta được các cặp số đều có tổng số là 38.

Số cặp số là:

$19 : 2 = 9$ (cặp số) dư một số hạng.

Số hạng dư này là số hạng ở chính giữa dãy số và là số 19. Vậy tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là:

$$39 \times 9 + 19 = 361$$

Đáp số: 361.

Nhận xét: Khi số số hạng của dãy số lẻ (19) thì khi sắp cặp số sẽ dư lại số hạng ở chính giữa vì số lẻ không chia hết cho 2, nên dãy số có nhiều số hạng thì việc tìm số hạng còn lại sẽ rất khó khăn.

Vậy ta có thể làm cách 2 như sau:

Ta bỏ lại số hạng đầu tiên là số 1 thì dãy số có: $19 - 1 = 18$ (số hạng)

Ta thấy: $3 + 37 = 40$; $7 + 33 = 40$

$5 + 35 = 40$; $9 + 31 = 40$

.....

Khi đó, nếu ta sắp xếp các cặp số từ 2 đầu dãy số gồm 18 số hạng vào thì được các cặp số có tổng là 40.

Số cặp số là: $18 : 2 = 9$ (cặp số)

Tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là:

$$1 + 40 \times 9 = 361$$

Chú ý: Khi số hạng là số lẻ, ta để lại một số hạng ở 2 đầu dãy số (số đầu, hoặc số cuối) để còn lại một số chẵn số hạng rồi sắp cặp; lấy tổng của mỗi cặp nhân với số cặp rồi cộng với số hạng đã để lại thì được tổng của dãy số.

Bài 2: Tính tổng của số tự nhiên từ 1 đến n.

Giải:

Ghép các số: 1, 2,, n - 1, n thành từng cặp (không sắp thứ tự) : 1 với n, 2 với (n - 1), 3 với (n - 2),

Khi **n chẵn**, ta có $S = n \times (n + 1) : 2$

Khi **n lẻ**, thì n - 1 chẵn và ta có:

$$1 + 2 + + (n - 1) = (n - 1) \times n : 2$$

Từ đó ta cũng có:

$$S = (n - 1) \times n : 2 + n$$

$$= (n - 1) \times n : 2 + 2 \times n : 2$$

$$\begin{aligned}
 &= [(n-1) \times n + 2 \times n] : 2 \\
 &= (n-1+2) \times n : 2 \\
 &= n \times (n+1) : 2
 \end{aligned}$$

Khi học sinh đã làm quen và thực hiện thành thạo thì hướng dẫn học sinh áp dụng công thức luôn mà không cần nhóm thành các cặp số có tổng bằng nhau.

Tổng của dãy số cách đều = (số đầu + số cuối) x số số hạng : 2

Bài 3: Tính $E = 10,11 + 11,12 + 12,13 + \dots + 98,99 + 100$

Lời giải

Ta có thể đưa các số hạng của tổng trên về dạng số tự nhiên bằng cách nhân cả hai vế với 100, khi đó ta có:

$$100 \times E = 1011 + 1112 + 1213 + \dots + 9899 + 1000$$

Áp dụng công thức tính tổng ta tính được tổng là $E = 4954,95$

Hoặc giải như sau:

Ta thấy: $11,12 - 10,11 = 12,13 - 11,12 = \dots = 1,01$

Vậy đây là dãy số cách đều 1,01 đơn vị.

Dãy số có số số hạng là: $(100 - 10,11) : 1,01 + 1 = 90$ số hạng

Tổng của dãy số là: $(10,11 + 100) \times 90 : 2 = 4954,95$

Bài 4: Cho dãy số: 1, 2, 3, 195. Tính tổng các chữ số trong dãy?

Giải:

Ta viết lại dãy số và bổ sung thêm các số: 0, 196, 197, 198, 199 vào dãy: 0, 1, 2, 3,, 9

10, 11, 12, 13,, 19

.....

90, 91, 92, 93,, 99

100, 101, 102, 103,, 109

.....

Vì có 200 số và mỗi dòng có 10 số, nên có $200 : 10 = 20$ (dòng)

Tổng các chữ số hàng đơn vị trong mỗi dòng là:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 9 \times 10 : 2 = 45$$

Vậy tổng các chữ số hàng đơn vị là:

$$45 \times 20 = 900$$

Tổng các chữ số hàng chục trong 10 dòng đầu đều bằng tổng các chữ số hàng chục trong 10 dòng sau và bằng:

$$1 \times 10 + 2 \times 10 + \dots + 9 \times 10 = (1 + 2 + \dots + 9) \times 10 = 45 \times 10 = 450$$

Vậy tổng các chữ số hàng chục là:

$$450 \times 2 = 900$$

Ngoài ra dễ thấy tổng các chữ số hàng trăm là: $10 \times 10 = 100$.

Vậy tổng các chữ số của dãy số này là:

$$900 + 900 + 100 = 1900$$

Từ đó suy ra tổng các chữ số của dãy ban đầu là:

$$1900 - (1 + 9 + 6 + 1 + 9 + 7 + 1 + 9 + 8 + 1 + 9 + 9) = 1830$$

Trong Toán học nói riêng và trong khoa học nói chung, chúng ta thường nhờ vào suy luận quy nạp không hoàn toàn mà phát hiện ra những kết luận (gọi là giả thuyết)

nào đó. Sau đó chúng ta sử dụng suy luận diễn dịch hoặc quy nạp hoàn toàn để kiểm tra sự đúng đắn của kết luận đó. Khi dạy học tiểu học, điều nói trên cũng được lưu ý.

Bài 5: Tính tổng tất cả số thập phân có phần nguyên là 9, phần thập phân có 3 chữ số:

Giải:

Các số thập phân có phần nguyên là 9, phần thập phân có 3 chữ số là:
9,000; 9,001; 9,002; 9,003; 9,004; 9,005; 9,006; 9,007; 9,008; ; 9,999 tức là có 1000 số.

Tổng tất cả các số của dãy số trên là:

$$(9,000 + 9,999) \times 1000 : 2 = 9499,5$$

Đáp số: 9499,5

Bài 6: Phải thêm vào tổng các số hạng trong dãy số: 2, 4, 6, 8, ..., 246 ít nhất bao nhiêu đơn vị để được số chia hết cho 100 ?

Giải:

Đây là dãy số chẵn liên tiếp hay dãy số cách đều 2 đơn vị.

Dãy số có số số hạng là: $(246 - 2) : 2 + 1 = 123$ số hạng.

Tổng của dãy số là: $(246 + 2) \times 123 : 2 = 12252$

Vì $100 - 52 = 48$ nên phải thêm vào tổng của dãy số ít nhất 48 đơn vị.

Dạng 2: Dãy số mà các số hạng không cách đều.

Bài toán 1: Tổng nhiều phân số có tử số bằng nhau và mẫu số của phân số liền sau gấp mẫu số của phân số liền trước 2 lần.

Ví dụ: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}.$

Cách giải:

Cách 1:

Bước 1: Đặt $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

Bước 2: Ta thấy: $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

Bước 3: Vậy $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right)$

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$$

$$A = 1 - \frac{1}{64}$$

$$A = \frac{64}{64} - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Đáp số: $\frac{63}{64}$.

Cách 2:

Bước 1: Đặt $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

Bước 2: Ta thấy:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

.....

Bước 3: Vậy $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$
 $= 1 - \frac{1}{64} = \frac{64}{64} - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

Bài toán 2: Tính tổng của nhiều phân số có tử số bằng nhau và mẫu số của phân số liền sau gấp mẫu số của phân số liền trước n lần ($n > 1$).

Ví dụ: $B = \frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \frac{5}{162} + \frac{5}{486}$

Cách giải:

Bước 1: Tính $B \times n$ ($n = 3$)

$$B \times 3 = 3 \times \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \frac{5}{162} + \frac{5}{486} \right)$$

$$= \frac{15}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \frac{5}{162}$$

Bước 2: Tính $B \times n - B$

$$B \times 3 - B = \left(\frac{15}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \frac{5}{162} \right) - \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \frac{5}{162} + \frac{5}{486} \right)$$

$$B \times (3 - 1) = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \frac{5}{162} - \frac{5}{2} - \frac{5}{6} - \frac{5}{18} - \frac{5}{54} - \frac{5}{162} - \frac{5}{486}$$

$$B \times 2 = \frac{15}{2} - \frac{5}{486}$$

$$B \times 2 = \frac{3645 - 5}{486}$$

$$B \times 2 = \frac{3640}{486}$$

$$B = \frac{3640}{486} : 2$$

$$B = \frac{1820}{486}$$

$$B = \frac{910}{243}$$

Bài toán 3: Tính tổng của nhiều phân số có tử số là n ($n > 0$); mẫu số là tích của 2 thừa số có hiệu bằng n và thừa số thứ 2 của mẫu phân số liền trước là thừa số thứ nhất của mẫu phân số liền sau:

Ví dụ 1: $A = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6}$

Cách giải:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3-2}{2 \times 3} + \frac{4-3}{3 \times 4} + \frac{5-4}{4 \times 5} + \frac{6-5}{5 \times 6} \\ &= \frac{3}{2 \times 3} - \frac{2}{2 \times 3} + \frac{4}{3 \times 4} - \frac{3}{3 \times 4} + \frac{5}{4 \times 5} - \frac{4}{4 \times 5} + \frac{6}{5 \times 6} - \frac{5}{5 \times 6} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ví dụ 2:

$$B = \frac{3}{2 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{3}{8 \times 11} + \frac{3}{11 \times 14}$$

Cách giải:

$$\begin{aligned} B &= \frac{5-2}{2 \times 5} + \frac{8-5}{5 \times 8} + \frac{11-8}{8 \times 11} + \frac{14-11}{11 \times 14} \\ B &= \frac{5}{2 \times 5} - \frac{2}{2 \times 5} + \frac{8}{5 \times 8} - \frac{5}{5 \times 8} + \frac{11}{8 \times 11} - \frac{8}{8 \times 11} + \frac{14}{11 \times 14} - \frac{11}{11 \times 14} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{7}{14} - \frac{1}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Tính tổng:

- Của tất cả các số lẻ bé hơn 100
- $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 169$

Bài 2:

- Tính nhanh tổng của tất cả các số có 3 chữ số.
- 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

Dãy số trên có mười số hạng

Tổng bao nhiêu, mời bạn tính nhanh

Đố em, đố chị, đố anh

Tìm ra phương pháp tính nhanh mới tài.

Bài 3: Tính nhanh:

$$a) \frac{4}{3 \times 7} + \frac{4}{7 \times 11} + \frac{4}{11 \times 15} + \frac{4}{15 \times 19} + \frac{4}{19 \times 23} + \frac{4}{23 \times 27}$$

$$b) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{110}$$

$$c) \frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{88} + \frac{1}{154} + \frac{1}{138} + \frac{1}{340}$$

Bài 4: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} = ?$

Phép cộng phân số khó gì?

Kê đủ số hạng ra thì uổng công

Cách gì ai tỏ ai thông

Cộng nhanh đáp đúng lại không tốn giờ

Đố bạn hiền đố em thơ

Đố ai ai biết đây nhờ giải mau.

Bài 5: Hãy tính tổng của các dãy số sau:

a) 1, 5, 9, 13, 17, ... Biết dãy số có 80 số hạng.

b) ..., 17, 27, 44, 71, 115. Biết dãy số có 8 số hạng.

Bài 6: Tính nhanh:

a) $1,27 + 2,77 + 4,27 + 5,77 + 7,27 + \dots + 13,27 + 14,77$

b) $0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + \dots + 0,9 + 0,10 + 0,11 + 0,12 + \dots + 0,19$.

Bài 7: Cho dãy số: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$

a) Hãy tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của dãy số trên.

b) Số $\frac{1}{10200}$ có phải là một số hạng của dãy số trên không? Vì sao?

Dạng 10: Dãy chữ

Khác với các dạng toán khác, toán về dạng dãy chữ không đòi hỏi học sinh phải tính toán phức tạp. Ngược lại để giải những bài toán dạng này, đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng sáng tạo những kiến thức toán học đơn giản, những hiểu biết về xã hội, từ đó mà vận dụng dạng toán này vào trong đời sống hàng ngày và các môn học khác.

Các ví dụ:

Bài toán 1: Người ta viết liên tiếp nhóm chữ: **HOCSINHGIOITINH** thành một dãy chữ liên tiếp: **HOCSINHGIOITINHHOCSINHGIOI.....** hỏi chữ cái thứ 2009 của dãy là chữ cái nào?

Giải:

Ta thấy mỗi nhóm chữ: **HOCSINHGIOITINH** gồm 15 chữ cái. Giả sử dãy chữ có 2009 chữ cái thì có:

$2009 : 15 = 133$ (nhóm) và còn dư 14 chữ cái.

Vậy chữ cái thứ 2009 của dãy chữ **HOCSINHGIOITINH** là chữ **N** của tiếng **TINH** đứng ở vị trí thứ 14 của nhóm chữ thứ 134.

Bài toán 2: Một người viết liên tiếp nhóm chữ **THIXAHAIDU'ONG** thành dãy **THIXAHAIDU'ONGTHIXAHAIDU'ONG.....** Hỏi:

a. Chữ cái thứ 2002 trong dãy này là chữ gì?

b. Nếu người ta đếm được trong dãy số có 50 chữ H thì dãy đó có bao nhiêu chữ A? Bao nhiêu chữ N?

c. Bạn Hải đếm được trong dãy có 2001 chữ A. Hỏi bạn ấy đếm đúng hay đếm sai? Giải thích tại sao?

d. Người ta tô màu các chữ cái trong dãy theo thứ tự: **XANH, ĐỎ, TÍM, VÀNG, XANH, ĐỎ, TÍM**,... hỏi chữ cái thứ 2001 trong dãy được tô màu gì?

Giải:

a. Nhóm chữ **THIXAHAIDUÔNG** có 13 chữ cái:

$$2002 : 13 = 154 \text{ (nhóm)}$$

Như vậy, kể từ chữ cái đầu tiên đến chữ cái thứ 2002 trong dãy, người ta đã viết 154 lần nhóm **THIXAHAIDUÔNG**, vậy chữ cái thứ 2002 trong dãy là chữ **G** của tiếng **DUÔNG**.

b. Mỗi nhóm chữ **THIXA HAIDUÔNG** có 2 chữ H và cũng có 2 chữ A và 1 chữ N. Vì vậy, nếu người ta đếm được trong dãy có 50 chữ H thì tức là người đó đã viết 25 lần nhóm đó nên dãy đó phải có 50 chữ A và 25 chữ N.

c. Bạn đó đếm sai, vì số chữ A trong dãy phải là số chẵn.

d. Ta nhận xét:

+ 2001 chia cho 4 thì dư 1.

+ Những chữ cái trong dãy có số thứ tự là chia cho 4 thì dư 1 thì được tô màu **XANH**.

Vậy chữ cái thứ 2001 trong dãy được tô màu **XANH**.

Bài toán 3: Bạn Hải cho các viên bi vào hộp lần lượt theo thứ tự là: bi xanh, bi đỏ, bi vàng rồi lại đến bi xanh, bi đỏ, bi vàng ... cứ như vậy. Hỏi:

a) Viên bi thứ 100 có màu gì?

b) Muốn có 10 viên bi đỏ thì phải bỏ vào hộp ít nhất bao nhiêu viên bi?

Giải:

a) Ta thấy, cứ 3 viên bi thì lập thành 1 nhóm màu: xanh, đỏ, vàng. 100 viên bi thì có số nhóm là: $100 : 3 = 33$ nhóm (dư 1 viên bi)

Như vậy, bạn Hải đã cho vào hộp được 33 nhóm, còn dư 1 viên của nhóm thứ 34 và là viên bi đầu tiên của nhóm này. Vậy viên bi thứ 100 có màu xanh.

b) Một nhóm thì có 3 viên bi, muốn có 10 viên bi đỏ thì cần bỏ vào hộp:

$3 \times 10 = 30$ viên bi. Nhưng viên bi màu đỏ là viên bi thứ 2 của nhóm. Vậy cần bỏ vào hộp ít nhất số viên bi là: $30 - 1 = 29$ viên.

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Một người viết liên tiếp nhóm chữ: **TOANNAM** thành dãy: **TOANNAMTOANNAMTOAN.....** Hỏi:

a. Chữ cái thứ 2010 trong dãy là chữ gì?

b. Nếu người ta đếm được trong dãy có 50 chữ N thì dãy đó có bao nhiêu chữ A? Bao nhiêu chữ O?

c. Một người đếm được trong dãy có 2009 chữ A, hỏi người đó đếm đúng hay sai? Giải thích tại sao?

d. Người ta tô màu các chữ cái trong dãy theo thứ tự **XANH, ĐỎ, TÍM, VÀNG, XANH, ĐỎ, TÍM.....** hỏi chữ cái thứ 2009 trong dãy được tô màu gì?

Bài 2: Người ta viết các chữ cái **D, A, Y, T, O, T, H, O, C, T, O, T,.....** thành dãy: **DAYTOTHOCOTDAYTOT...** bằng 3 màu **xanh, đỏ, tím**, mỗi tiếng một màu. Hỏi chữ cái thứ 2010 là chữ cái gì? Màu gì?

Bài 3: Bạn Dương viết liên tiếp các nhóm chữ **DIENBIENPHU** thành dãy: **DIENBIENPHUDIENBIENPHU ...** Hỏi:

a) Chữ cái thứ 1954 là chữ gì?

b) Nếu trong dãy đã viết có 2010 chữ **E** thì có bao nhiêu chữ **H**?

Bài 4: Một người viết liên tiếp nhóm chữ **TOQUOCVIETNAM** thành dãy **TOQUOCVIETNAM TOQUOCVIETNAM ...** Hỏi:

a) Chữ cái thứ 1975 trong dãy là chữ gì?

b) Người ta đếm được trong dãy đó có 50 chữ **T** thì dãy đó có bao nhiêu chữ **O**? Bao nhiêu chữ **I**?

c) Bạn An đếm được trong dãy có 1945 chữ **O**. Hỏi bạn ấy đếm đúng hay sai? Vì sao?

d) Người ta tô màu vào các chữ cái trong dãy trên theo thứ tự: xanh, đỏ, tím, vàng, xanh, đỏ, tím, vàng, ... Hỏi chữ cái thứ 2010 được tô màu gì?

4- Một số lưu ý khi giải toán về “dãy số”

Trong bài toán về dãy số thường người ta không cho biết cả dãy số (vì dãy số có nhiều số không thể viết ra hết được) vì vậy, phải tìm ra được quy luật của dãy (mà có rất nhiều quy luật khác nhau) mới tìm được các số mà dãy số không cho biết. Đó là những quy luật của dãy số cách đều, dãy số không cách đều hoặc dựa vào dấu hiệu chia hết để tìm ra quy luật.

Ở dạng 2: Muốn kiểm tra số **A** có thỏa mãn quy luật của dãy đã cho hay không? Ta cần xem dãy số cho trước và số cần xác định có cùng tính chất hay không? (Có cùng chia hết cho một số nào đó hoặc có cùng số dư) thì số đó thuộc dãy đã cho.

Ở dạng 3 và 4: Học sinh phải được tự tìm ra công thức tổng quát, vận dụng một cách thành thạo và biết biến đổi công thức để làm các bài toán khác.

Ở dạng 9: Có các yêu cầu:

+ Tìm tổng các số hạng của dãy.

+ Tính nhanh tổng.

Khi giải: Sau khi tìm ra quy luật của dãy, ta sắp xếp các số theo từng cặp sao cho có tổng đều bằng nhau, sau đó tìm số cặp rồi tìm tổng các số hạng của dãy. Chú ý: Khi tìm số cặp số mà còn dư một số hạng thì khi tìm tổng ta phải cộng số dư đó vào.

Nếu tính nhanh tổng của các phân số phải dựa vào tính chất của phân số.

Ở dạng 10: Đó là dãy chữ khi giải phải dựa vào quy luật của dãy, sau đó có thể xem mỗi nhóm chữ có tất cả bao nhiêu chữ rồi đi tìm có tất cả bao nhiêu nhóm và đó chính là phần trả lời của bài toán.