

Nội dung

CHUYÊN ĐỀ 1: TẬP HỢP VÀ Củng cố về số tự nhiên	5
❖ DẠNG 1: TẬP HỢP TRÊN SỐ TỰ NHIÊN	5
❖ DẠNG 2: ĐẾM.....	6
❖ DẠNG 3: TÌM SỐ TỰ NHIÊN.....	7
HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ	8
❖ DẠNG 1: TẬP HỢP TRÊN SỐ TỰ NHIÊN	8
❖ DẠNG 2: ĐẾM.....	9
❖ DẠNG 3: TÌM SỐ TỰ NHIÊN.....	14
CHUYÊN ĐỀ 2: DẤU HIỆU CHIA HẾT – CHIA CÓ DƯ	20
❖ DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ CHỨNG MINH	21
❖ DẠNG 2: TÌM SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ	22
❖ DẠNG 3: BÀI TOÁN ĐẾM SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN	22
HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ	23
❖ DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ CHỨNG MINH	23
1. DẠNG 2: TÌM SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ	28
a. DẠNG 3: BÀI TOÁN ĐẾM SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN	32
CHUYÊN ĐỀ 3: LŨY THỪA TRONG SỐ TỰ NHIÊN.....	33
- DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC	33
- DẠNG 2: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG.....	34
- DẠNG 3: SO SÁNH LŨY THỪA VỚI LŨY THỪA	34
- DẠNG 4: TÌM GIÁ TRỊ CỦA SỐ TỰ NHIÊN	34
HƯỚNG DẪN – ĐÁP ÁN	35

- DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC	35
a. DẠNG 2: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG	36
b. DẠNG 3: SO SÁNH LŨY THỪA VỚI LŨY THỪA	37
c. DẠNG 4: TÌM GIÁ TRỊ CỦA SỐ TỰ NHIÊN	38
CHUYÊN ĐỀ 4: DÃY SỐ TỰ NHIÊN THEO QUY LUẬT.....	40
a. DẠNG 1: MỘT SỐ DÃY SỐ TỔNG QUÁT	40
b. DẠNG 2: MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG	41
HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ.....	43
CHUYÊN ĐỀ 5: BỘI – ƯỚC – ƯCLN – BCNN	49
⇒ DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN LIÊN QUAN VỀ ƯỚC VÀ BỘI: 50	
⇒ DẠNG 2: TÌM SỐ TỰ NHIÊN KHI BIẾT MỘT SỐ YẾU TỐ TRONG ĐÓ CÓ CÁC DỮ KIẾN VỀ ƯCLN VÀ BCNN.....	51
⇒ DẠNG 3: TÌM ƯCLN CỦA CÁC BIỂU THỨC SỐ	53
⇒ DẠNG 4: VẬN DỤNG THUẬT TOÁN Ơ – CLIT TÌM ƯCLN.....	53
HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ	55
⇒ DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN LIÊN QUAN VỀ ƯỚC VÀ BỘI: 55	
⇒ DẠNG 2: TÌM SỐ TỰ NHIÊN KHI BIẾT MỘT SỐ YẾU TỐ TRONG ĐÓ CÓ CÁC DỮ KIẾN VỀ ƯCLN VÀ BCNN.....	58
⇒ DẠNG 3: TÌM ƯCLN CỦA CÁC BIỂU THỨC SỐ	66
⇒ DẠNG 4: VẬN DỤNG THUẬT TOÁN Ơ – CLIT TÌM ƯCLN.....	67
CHUYÊN ĐỀ 6: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG	70
DẠNG 1: TÌM MỘT CHỮ SỐ TẬN CÙNG.....	70
DẠNG 2: TÌM HAI CHỮ SỐ TẬN CÙNG	75

DẠNG 3: TÌM BA CHỮ SỐ TẬN CÙNG.....	78
CHUYÊN ĐỀ 7: VỀ SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ - SỐ CHÍNH PHƯƠNG	82
CHUYÊN ĐỀ 8: BẤT ĐẲNG THỨC.....	105
❖ DẠNG 1: SO SÁNH HAI SỐ	105
a. DẠNG 2: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC:.....	105
a) DẠNG 3: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC	107
• DẠNG 4: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM KHOẢNG GIÁ TRỊ CỦA SỐ PHẢI TÌM	109
HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ	109
❖ DẠNG 1: SO SÁNH HAI SỐ	109
b. DẠNG 2: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC:.....	110
b) DẠNG 3: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC	117
CHUYÊN ĐỀ 9: DÃY PHÂN SỐ THEO QUY LUẬT	130
DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHÂN SỐ	130
a. DẠNG 2: TÍNH NHANH.....	130
b. DẠNG 3: CHỨNG MINH BIỂU THỨC	132
• DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ THỎA MÃN BIỂU THỨC	136
HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ	136
a. DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHÂN SỐ.....	136
c. DẠNG 2: TÍNH NHANH.....	138
d. DẠNG 3: CHỨNG MINH BIỂU THỨC	142
• DẠNG 4: TÌM X	148

• DẠNG 5: SO SÁNH PHÂN SỐ	149
• DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ THỎA MÃN BIỂU THỨC	153
CHUYÊN ĐỀ 10: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	156
CHUYÊN ĐỀ 11: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG	195
PHẦN HÌNH HỌC CƠ BẢN & NÂNG CAO GỒM CHUYÊN ĐỀ 11 VÀ 12.....	225
CHƯƠNG I – ĐOẠN THẲNG	225

TÀI LIỆU ĐƯỢC SƯU TẦM TỪ INTERNET

NÂNG CAO PHÁT TRIỂN & BỒI DƯỠNG HSG THEO CHUYÊN ĐỀ MÔN TOÁN LỚP 6

CHUYÊN ĐỀ 1: TẬP HỢP VÀ CƯỜNG CỐ VỀ SỐ TỰ NHIÊN

❖ DẠNG 1: TẬP HỢP TRÊN SỐ TỰ NHIÊN

Bài 1: Viết các tập hợp sau rồi tìm số phần tử của mỗi tập hợp đó:

- Tập hợp A các số tự nhiên x mà $8 : x = 2$
- Tập hợp B các số tự nhiên x mà $x + 3 < 5$
- Tập hợp C các số tự nhiên x mà $x - 2 = x + 2$
- Tập hợp D các số tự nhiên x mà $x : 2 = x : 4$
- Tập hợp E các số tự nhiên x mà $x + 0 = x$

Bài 2: Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

- Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2.
- Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3.

Bài 3: Cho các tập hợp:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{3; 4; 5\}$$

Viết các tập hợp vừa là tập hợp con của A, vừa là tập hợp con của B.

Bài 4: Cho tập hợp:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

- Viết các tập hợp con của A mà mọi phần tử của nó đều là số chẵn
- Viết các tập hợp con của A.

❖ **DẠNG 2: ĐẾM**

Bài 1: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 100, có bao nhiêu số:

- a. Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?
- b. Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?
- c. Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Bài 2: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 1000, có bao nhiêu số:

- a. Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5?
- b. Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Bài 3: Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích học Toán, 60 học sinh thích Văn.

- a. Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- b. Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?
- c. Có ít nhất bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn Văn và Toán?

Bài 4: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Bài 5: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

Bài 6: Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

- a. Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?
- b. Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?

Bài 7: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

- a. Chứa đúng một chữ số 4?
- b. Chứa đúng hai chữ số 4?
- c. Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?
- d. Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Bài 8: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A.

- a. Số A có bao nhiêu chữ số?

- b. Tính tổng các chữ số của số A?
- c. Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?
- d. Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Bài 9: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, lập tất cả các số tự nhiên mà mỗi chữ số trên đều có mặt đúng một lần. Tính tổng các số ấy.

❖ **DANG 3: TÌM SỐ TỰ NHIÊN**

Bài 1: Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng các viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

Bài 2: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

Bài 3: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

Bài 4: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

Bài 5: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

Bài 6: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

Bài 7: Một học sinh nhân một số với 463. Vì bạn đó viết các chữ số tận cùng của các tích riêng ở cùng một cột nên tích bằng 30524. Tìm số bị nhân?

Bài 8: Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi?

Bài 9: Khi chia một số tự nhiên gồm ba chữ số như nhau cho một số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, ta được thương là 2 và còn dư. Nếu xóa một chữ số ở số bị chia và xoát một chữ số ở số chia thì thương của phép chia vẫn bằng 2 nhưng số dư giảm hơn trước là 100. Tìm số bị chia và số chia lúc đầu.

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

❖ DẠNG 1: TẬP HỢP TRÊN SỐ TỰ NHIÊN

Bài 1: Viết các tập hợp sau rồi tìm số phần tử của mỗi tập hợp đó:

- a) Tập hợp A các số tự nhiên x mà $8 : x = 2$
 $\Rightarrow x = 8 : 2 = 4$
 $\Rightarrow A = \{4\}$
- b) Tập hợp B các số tự nhiên x mà $x + 3 < 5$
 $\Rightarrow x < 2$
 $\Rightarrow A = \{0; 1\}$
- c) Tập hợp C các số tự nhiên x mà $x - 2 = x + 2$
 $\Rightarrow 0.x = 4$
 $\Rightarrow A = \emptyset$
- d) Tập hợp D các số tự nhiên x mà $x : 2 = x : 4$
 $\Rightarrow x = 0$
 $\Rightarrow A = \{0\}$
- e) Tập hợp E các số tự nhiên x mà $x + 0 = x$
 $\Rightarrow x = x$
 $\Rightarrow A = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

Bài 2: Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

- a) Tập hợp A các số tự nhiên có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2.
 $A = \{20; 31; 42; 53; 64; 75; 86; 97\}$
- b) Tập hợp B các số tự nhiên có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 3.
 $B = \{102; 120; 111; 201; 210\}$

Bài 3: Cho các tập hợp:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{3; 4; 5\}$$

Viết các tập hợp vừa là tập hợp con của A, vừa là tập hợp con của B.

$\emptyset$; $\{3; 4\}$; $\{3\}$; $\{4\}$.

Bài 4: Cho tập hợp:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

a) Viết các tập hợp con của A mà mọi phần tử của nó đều là số chẵn

$$B = \{2; 4\}, B_1 = \{2\}, B_2 = \{4\}$$

b) Viết các tập hợp con của A.

$$C = \{1\}; D = \{2\}; E = \{3\}; F = \{4\}$$

$$G = \{1; 2\}; H = \{1; 3\}; I = \{1; 4\}; K = \{2; 3\}; L = \{3; 4\}; M = \{2; 4\}$$

$$N = \{1; 2; 3\}; O = \{1; 3; 4\}; P = \{2; 3; 4\}; T = \{1; 2; 4\}$$

$$Q = \emptyset$$

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

❖ DẠNG 2: ĐẾM

Bài 1: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 100, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3?

Các số chia hết cho 2: 1; 2; 4; ...; 100

$$\text{số các số chia hết cho 2 là: } \frac{(100-2)}{2} + 1 = 50 \text{ số}$$

Các số chia hết cho 2 và 3: 6; 12; 18; 24; ...; 96

$$\text{số các số chia hết cho cả 2 và 3 là: } \frac{(96-6)}{6} + 1 = 16 \text{ số}$$

Vậy từ 1 – 100 có $50 - 16 = 34$ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 3

b) Chia hết cho ít nhất một trong hai số 2 và 3?

Các số chia hết cho 3 là: 3; 6; 9; 12; 15; ...; 99

$$\text{số các số chia hết cho 3 là: } \frac{(99-3)}{3} + 1 = 33 \text{ số}$$

Vậy các số chia cho ít nhất một trong hai số 2 và 3 là: $50 + 33 - 16 = 67$ số

c) Không chia hết cho 2 và không chia hết cho 3?

Các số không chia hết cho 2 và cho 3 là: $100 - 67 = 33$ số

Bài 2: Trong các số tự nhiên từ 1 đến 1000, có bao nhiêu số:

a) Chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5?

Gọi A, B, C, D, E, G, H là tập hợp các số từ 1 đến 1000 mà theo thứ tự chia hết cho 2, chia hết cho 3, chia hết cho 5, chia hết cho 2 và 3, chia hết cho 2 và 5, chia hết cho 3 và 5, chia hết cho cả 3 số. số phần tử của các tập hợp đó theo thứ tự bằng $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$.

Ta có:

$$s_1 = 1000 : 2 = 500$$

$$s_2 = [1000 : 3] = 333$$

$$s_3 = 1000 : 5 = 200$$

$$s_4 = [1000 : 6] = 166$$

$$s_5 = 1000 : 10 = 100$$

$$s_6 = [1000 : 15] = 66$$

$$s_7 = [1000 : 30] = 33.$$

Các số phải tìm gồm: $s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5 - s_6 + s_7 = 734$ số.

b) Không chia hết cho tất cả các số tự nhiên từ 2 đến 5?

Còn lại $1000 - 734 = 266$ số

Bài 3: Trong số 100 học sinh có 75 học sinh thích học Toán, 60 học sinh thích Văn.

HƯỚNG DẪN:

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x, số học sinh thích Toán mà k thích Văn là $75 - x$.

a) Nếu có 5 học sinh không thích cả Toán lẫn Văn thì có bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

$$\text{Ta có: } 75 - x + 60 + 5 = 100$$

$$x = 40$$

vậy có 40 học sinh thích cả hai môn.

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

60 học sinh (nếu tất cả số thích văn đều thích toán)

c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn Văn và Toán?

$75 - x + 60 \leq 100 \Rightarrow x \geq 35$. Có ít nhất 35 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

Bài 4: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm bốn chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

HƯỚNG DẪN:

Các số phải đếm có dạng $\overline{abc2}$

Chữ số a có 9 cách chọn

Với mỗi cách chọn a, chữ số b có 10 cách chọn

Với mỗi cách chọn a, b chữ số c có 5 cách chọn (1, 3, 5, 7, 9) để tạo với chữ số 2 tận cùng làm thành số chia hết cho 4.

Tất cả có: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ số.

Bài 5: Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5?

HƯỚNG DẪN:

Chia ra 3 loại số:

- Số đếm có dạng $\overline{5ab}$: chữ số a có 9 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn. các số thuộc loại này có: $9 \cdot 9 = 81$ số.
- Số đếm có dạng $\overline{a5b}$: chữ số a có 8 cách chọn, chữ số b có 9 cách chọn. các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ số
- Số đếm có dạng $\overline{ab5}$: các số thuộc loại này có: $8 \cdot 9 = 72$ số.

Vậy số số tự nhiên có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 5 là: $81 + 72 + 72 = 225$ số

Bài 6: Để đánh số trang của một cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số.

a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?

Ta có: Từ trang 1 đến trang 9 phải dùng 9 chữ số (viết tắt c/s)

Từ trang 10 đến trang 99 phải dùng $(99-10)+1=90$ số có 2 c/s = 180 c/s

Vì còn các trang gồm các số có 3 c/s

$\Rightarrow$ Còn lại: $1998 - (180 + 9) = 1809$ c/s là đánh dấu các trang có 3 c/s

$\Rightarrow$ Có: $1809:3=603$ số có 3 c/s

Vậy:

$\Rightarrow$ Cuốn sách đó có: $603 + 99 = 702$ (vì từ trang 1 $\rightarrow$ 99 có 99 trang)

Cuốn sách có 702 trang

b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?

Chữ số thứ 1010 là chữ số 7 của 374.

Bài 7: Trong các số tự nhiên có ba chữ số, có bao nhiêu số:

a) Chứa đúng một chữ số 4?

Các số phải đếm có 3 dạng:

$\overline{4bc}$ có $9 \cdot 9 = 81$ số

$\overline{a4c}$ có $8 \cdot 9 = 72$ số

$\overline{ab4}$ có $8 \cdot 9 = 72$ số

Tất cả có: $81 + 72 + 72 = 225$ số

b) Chứa đúng hai chữ số 4?

Các số phải đếm gồm 3 dạng: $\overline{44c}$, $\overline{a44}$, $\overline{4b4}$, có 26 số

c) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5?

Số có ba chữ số, chia hết cho 5 gồm 180 số. trong đó số không chứa chữ số 5 có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 1 cách chọn (là 0) gồm $8 \cdot 9 = 72$ số

Vậy có: $180 - 72 = 108$ số phải đếm

d) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?

Số phải tìm có dạng $\overline{abc}$, a có 8 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 3 cách chọn (nếu $a + b = 3k$ thì $c = 0; 3; 6; 9$, nếu $a + b = 3k + 1$ thì $c = 2; 5; 8$ Nếu $a + b = 3k + 2$ thì $c = 1; 4; 7$), có $8 \cdot 9 \cdot 3 = 216$ số

Bài 8: Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được một số tự nhiên A.

HƯỚNG DẪN:

a) Số A có bao nhiêu chữ số?

Từ 1 đến 9 có 9 số gồm: $1 \cdot 9 = 9$ chữ số

Từ 10 đến 99 có 90 số gồm: $90 \cdot 2 = 180$ chữ số

Từ 100 đến 999 có 900 số gồm: $900 \cdot 3 = 2700$ chữ số

Số A có: $9 + 180 + 2700 = 2889$ chữ số.

b) Tính tổng các chữ số của số A?

Giả sử ta viết số B là các số tự nhiên từ 000 đến 999 (mỗi số đều viết bởi 3 chữ số), thế thì tổng các chữ số của B cũng bằng tổng các chữ số của A.

B có: $3 \cdot 1000 = 3000$ chữ số, mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều có mặt

$3000 : 10 = 300$ (lần)

Tổng các chữ số của B (cũng là của A):

$$(0+1+2+\dots+9).300 = 45.300 = 13500$$

c) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần?

Cần đếm số chữ số 1 trong 1 dãy:

1, 2, 3, ..., 999 (1)

Ta xét dãy: 000, 001, 002, ..., 999 (2)

Số chữ số 1 trong hai dãy như nhau. Ở đây dãy (2) có 1000 số, mỗi số gồm 3 chữ số, số lượng mỗi chữ số từ 0 đến 9 đều như nhau. Mỗi chữ số (từ 0 đến 9) đều có mặt:

$$3. 1000 : 10 = 300 \text{ (lần)}$$

Vậy ở dãy (1) chữ số 1 cũng được viết 300 lần.

d) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?

Ở dãy (2) chữ số 0 có mặt 300 lần.

So với dãy (1) thì ở dãy (2) ta viết thêm các chữ số 0:

- Vào hàng trăm 100 lần (chữ số hàng trăm của các số từ 000 đến 099);
- Vào hàng chục 10 lần (chữ số hàng chục của các số từ 000 đến 009);
- Vào hàng đơn vị 1 lần (chữ số hàng đơn vị của 000).

Vậy chữ số 0 ở dãy (1) được viết là: $300 - 111 = 189$ (lần)

Bài 9: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, lập tất cả các số tự nhiên mà mỗi chữ số trên đều có mặt đúng một lần. Tính tổng các số ấy.

HƯỚNG DẪN:

Ta lập được $4.3.2.1 = 24$ số tự nhiên bao gồm cả bốn chữ số 1, 2, 3, 4. Mỗi chữ số có mặt 6 lần ở mỗi hàng. Tổng của 24 số nói trên bằng:

$$60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660.$$

❖ DẠNG 3: TÌM SỐ TỰ NHIÊN

Bài 1: Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào đằng sau số đó thì được số lớn gấp ba lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 2 vào đằng trước số đó.

HƯỚNG DẪN:

Gọi số cần tìm là: $\overline{abcde}$ (a khác 0)

Theo bài ra ta có: $\overline{abcde2} = 3 \cdot \overline{2abcde}$

$$\Rightarrow 10 \cdot \overline{abcde} + 2 = 3 \cdot 200000 + 3 \cdot \overline{abcde}$$

$$\Rightarrow 7 \cdot \overline{abcde} = 599998$$

$$\Rightarrow \overline{abcde} = 85714$$

$$\text{Thử lại: } 857142 = 3 \cdot 285714$$

Vậy số cần tìm là 857142

Bài 2: Tìm số tự nhiên có tận cùng bằng 3, biết rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị.

HƯỚNG DẪN:

Vì rằng nếu xóa chữ số hàng đơn vị thì số đó giảm đi 1992 đơn vị nên số tự nhiên cần tìm có 4 chữ số.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc3}$. ($a \neq 0$)

Theo bài ra ta có $\overline{abc3} - 1992 = \overline{abc}$

$$\Rightarrow 10 \cdot \overline{abc} + 3 - 1992 = \overline{abc}$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \overline{abc} = 1989$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 221$$

Vậy số cần tìm là 2213

Bài 3: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng nếu dùng cả ba chữ số này lập thành các số tự nhiên có ba chữ số thì hai số lớn nhất có tổng bằng 1444.

HƯỚNG DẪN:

Gọi ba chữ số cần tìm là: a, b, c ($a > b > c > 0$).

Theo bài ra ta có:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$$

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 1444$$

$$200a + 11b + 11c = 1444$$

$$200a + 11(b + c) = 1400 + 44$$

$$a = 7; b = 3; c = 1$$

Vậy 3 số cần tìm là 1; 3; 7

Bài 4: Hiệu của hai số là 4. Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm hai số đó.

HƯỚNG DẪN:

Gọi 2 số đó là a, b ($a > b$)

Theo bài ra ta có: $a - b = 4 \Rightarrow b = a - 4$ (1)

Nếu tăng một số gấp ba lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60

$$\Rightarrow 3a - b = 60$$
 (2)

Thay (1) vào (2) ta có:

$$3a - (a - 4) = 60$$

$$\Rightarrow 3a - a + 4 = 60$$

$$\Rightarrow 2a = 56$$

$$\Rightarrow a = 28$$

$$\Rightarrow b = 24$$

$\Rightarrow$ Vậy số cần tìm là 28; 24.

Bài 5: Tìm hai số, biết rằng tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.

HƯỚNG DẪN:

Theo đầu bài. Nếu biểu thị hiệu là 1 phần thì tổng là 5 phần và tích là 24 phần.

Số lớn là:

$$(5 + 1) : 2 = 3 \text{ (phần)}$$

Số bé là:

$$5 - 3 = 2 \text{ (phần)}$$

Vậy tích sẽ bằng 12 lần số bé.

Ta có:

$$\text{Tích} = \text{Số lớn} \times \text{Số bé}$$

$$\text{Tích} = 12 \times \text{Số bé}$$

Suy ra Số lớn là 12.

Số bé là:

$$12 : 3 \times 2 = 8$$

Đáp số:

SL: 12

SB: 8

Bài 6: Tích của hai số là 6210. Nếu giảm một thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.

HƯỚNG DẪN:

Gọi thừa số được giảm là a , thừa số còn lại là b. theo đề bài ta có:

$$a.b = 6210$$

$$(a - 7).b = 5265$$

$$\Rightarrow a.b - 7.b = 5265$$

$$\Rightarrow 6210 - 7.b = 5265$$

$$\Rightarrow 7.b = 6210 - 5265$$

$$\Rightarrow 7.b = 945$$

$$\Rightarrow b = 945 : 7 = 135$$

$$\Rightarrow a = 6210 : 135 = 46$$

Vậy hai thừa số cần tìm là 46; 135

Bài 7: Một học sinh nhân một số với 463. Vì bạn đó viết các chữ số tận cùng của các tích riêng ở cùng một cột nên tích bằng 30524. Tìm số bị nhân?

HƯỚNG DẪN:

Do đặt sai vị trí các tích riêng nên bạn học sinh đó chỉ nhân số bị nhân với 4 + 6 + 3. Vậy số bị nhân bằng : $30524 : 13 = 2348$.

Bài 8: Tìm thương của một phép chia, biết rằng nếu thêm 15 vào số bị chia và thêm 5 vào số chia thì thương và số dư không đổi?

HƯỚNG DẪN:

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a, b, c, d. Ta có:

$$a : b = c \text{ (dư } d)$$

$$\Rightarrow a = c.b + d$$

$$(a+15) : (b+5) = c \text{ (dư } d)$$

$$\Rightarrow a+15 = c.(b+5) + d$$

$$\Rightarrow a+15 = c.b + c.5 + d$$

Mà $a = c.b + d$ nên:

$$a+15 = c.b + c.5 + d$$

$$= c.b + d + 15 = c.b + c.5 + d$$

$$\Rightarrow 15 = c.5$$

$$\Rightarrow c = 3$$

Bài 9: Khi chia một số tự nhiên gồm ba chữ số như nhau cho một số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, ta được thương là 2 và còn dư. Nếu xóa một chữ số ở số bị chia và xoát một chữ số ở số chia thì thương của phép chia vẫn bằng 2 nhưng số dư giảm hơn trước là 100. Tìm số bị chia và số chia lúc đầu.

HƯỚNG DẪN:

Gọi số bị chia lúc đầu là $\overline{aaa}$, số chia lúc đầu là $\overline{bbb}$ số dư lúc đầu là r.

$$\text{Ta có: } \overline{aaa} = 2.\overline{bbb} + r \quad (1)$$

$$\overline{aa} = 2.\overline{bb} + r - 100 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overline{aaa} - \overline{aa} = 2.(\overline{bbb} - \overline{bb}) + 100$

$\Rightarrow$

$$\overline{a00} = 2.\overline{b00} + 100$$

$\Rightarrow$

$$a = 2b + 1$$

Ta có:

b	1	2	3	4
a	3	5	7	9

Thử từng trường hợp ta được 3 đáp số:

555 và 222; 777 và 333; 999 và 444

1. BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Viết liên tiếp các số tự nhiên thành dãy 12345... Hỏi chữ số 1 ở hàng đơn vị của số 1991 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?

Bài 2: Viết liên tiếp các số tự nhiên chẵn thành dãy 246810... Hỏi chữ số thứ 2000 là chữ số gì?

Bài 3: Cho dãy số 4, 7, 10, 13, 16, ...

1. Tìm số thứ 100, số thứ n của dãy số đó.
2. Các số 45723 và số 3887 có mặt trong dãy đó không?

Bài 4: Cho dãy số 7, 12, 17, 22, 27, ...

1. Tìm số thứ 1000 của dãy số trên.
2. Các số 38246 và 795841 có mặt trong dãy đó không?

Bài 5: Có bao nhiêu số có ba chữ số mà có ít nhất hai chữ số giống nhau?

Bài 6: Tính nhẩm:

1. $9.24.25$
2. $12.125.54$
3. $64.125.875$
4. $425.7.4 - 170.60$

5. $8.9.14 + 6.17.12 + 19.4.18$

Bài 7: Tìm số lớn nhất có ba chữ số mà khi chia cho 75 có thương và số dư bằng nhau?

Bài 8: Có bao nhiêu số năm chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 2?

Bài 9: Tính nhanh:

$$1992.19911991 - 1991.19921992$$

Bài 10: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà tổng các chữ số của nó bằng 21.

Bài 11: Tổng số trang của 8 quyển vở loại 1, 9 quyển vở loại 2 và 5 quyển vở loại 3 là 1980 trang. Số trang của một quyển vở loại 2 chỉ bằng $\frac{2}{3}$ số trang của một quyển vở loại 1. Số trang của 4 quyển vở loại 3 bằng số trang của 3 quyển vở loại 2. Tính số trang của mỗi quyển vở mỗi loại.

Bài 12: Trong một cuộc thi có 20 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 10 điểm, còn sai bị trừ đi 5 điểm. Một học sinh được tất cả 50 điểm. Hỏi bạn ấy đã trả lời đúng mấy câu?

Bài 13: Tổng hai số bằng 270. Nếu gạch bỏ chữ số 6 ở hàng đơn vị của một trong hai số thì ta được số thứ hai. Tìm hai số đó.

Bài 14: Một số có hai chữ số được tăng lên bao nhiêu lần nếu viết tiếp vào số đó hai chữ số ấy?

CHUYÊN ĐỀ 2: DẤU HIỆU CHIA HẾT – CHIA CÓ DƯ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Với mọi $a, b \in \mathbb{N}$ ($b \neq 0$) ta luôn tìm được số tự nhiên r sao cho

$$a = bq + r \quad (0 \leq r < b)$$

a là số bị chia, b là số chia, q là thương, r là số dư

- Nếu $r = 0$ ta được phép chia hết, ta nói rằng a chia hết cho b ($a : b$), hay a là bội của b , hay b chia hết a , hay b là ước của a (b/a).

- Nếu $r > 0$, ta được phép chia có dư, ta nói rằng a không chia hết cho b ($a : b$).

2. Các tính chất về phép chia hết. (10 tính chất)

- Số 0 chia hết cho mọi số $b \neq 0$.
- Số a chia hết cho mọi $a \neq 0$.
- Nếu $a : b$, $b : c$ thì $a : c$.
- Nếu a và b cùng chia hết cho m thì $a+b$ và $a-b$ đều chia hết cho m .
- Nếu một trong hai số a và b chia hết cho m , số kia không chia hết cho m thì $a+b$ và $a-b$ đều không chia hết cho m .
- Nếu tổng hoặc hiệu hai số chia hết cho m và một trong hai số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .
- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m .
- Suy ra $a : m$ thì $a^n : m$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Nếu $a : m$, $b : n$ thì $ab : mn$.
- Suy ra nếu $a : b$ thì $a^n : b^n$.
- Nếu một số chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau thì nó chia hết cho tích của hai số đó.
- Nếu tích ab chia hết cho m , trong đó b và m là hai số nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho m .
- Nếu một tích chia hết cho số nguyên tố p thì tồn tại một thừa số của tích chia hết cho p . Suy ra nếu $a^n : p$, p là nguyên tố thì $a : p$.

a. Dấu hiệu chia hết cơ bản:

- a. Dấu hiệu chia hết cho 2: Các số có chữ số tận cùng là: 0,2,4,6,8
- b. Dấu hiệu chia hết cho 5: Các số có chữ số tận cùng là: 0,5
- c. Dấu hiệu chia hết cho 3: Tổng các chữ số của số đó phải chia hết cho 3
- d. Dấu hiệu chia hết cho 9: Tổng các chữ số của số đó phải chia hết cho 9

b. Dấu hiệu chia hết cho các số khác:

- a. Dấu hiệu chia hết cho 4(25): Hai chữ số tận cùng tạo thành một số chia hết cho 4(25)
- b. Dấu hiệu chia hết cho 8(125): Ba chữ số tận cùng tạo thành một số chia hết cho 8(125)
- c. Dấu hiệu chia hết cho 11: Tổng các chữ số hàng lẻ trừ đi tổng chữ số hàng chẵn chia hết cho 11 hoặc ngược lại.

B. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

❖ DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ CHỨNG MINH

Bài 1: Chứng minh rằng:

- a. $A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 4
- b. $B = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33
- c. $C = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8$ chia hết cho 30
- d. $D = 45 + 99 + 180$ chia hết cho 9
- e. $E = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{119}$ chia hết cho 13.
- f. $F = 10^{28} + 8$ chia hết cho 72
- g. $G = 8^8 + 2^{20}$ chia hết cho 17
- h. $H = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$ chia hết cho 3, 7, 15
- i. $I = E = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991}$ chia cho 13 và 41.
- j. $J = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27
- k. $K = 10^n + 72n - 1$ chia hết cho 81

Bài 2: Chứng minh rằng:

- a. $\overline{abcabc}$ chia hết cho 7, 11 và 13

- b. $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 23 và 29, biết $\overline{abc} = 2 \cdot \overline{deg}$
- c. $\overline{aaa}$ chia hết cho a
- d. Chứng minh rằng số gồm 27 chữ số 1 thì chia hết cho 27
- e. $\overline{abcd}$ chia hết cho 29 $\Leftrightarrow a + 3b + 9c + 27d$ chia hết cho 29
- f. $\overline{abc}$ chia hết cho 21 $\Leftrightarrow a - 2b + 4c$ chia hết cho 21

Bài 3: Chứng minh rằng:

- a. Chứng minh rằng tổng ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3.
- b. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $60n + 45$ chia hết cho 15 nhưng không chia hết cho 30.
- c. Chứng minh rằng không có số tự nhiên nào mà chia cho 15 dư 6 và chia 9 dư 1.
- d. Chứng minh rằng: $(1005a + 2100b)$ chia hết cho 15, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.
- e. Chứng minh rằng: $A = n^2 + n + 1$ không chia hết cho 2 và 5, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- f. Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}$ thì tích $(n + 3)(n + 6)$ chia hết cho 2.

❖ DẠNG 2: TÌM SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ

- a. Tìm các chữ số a và b sao cho $a - b = 4$ và $\overline{87ab}$ chia hết cho 9
- b. Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a - b = 6$ và n chia hết cho 9. Tìm a và b
- c. Tìm hai số tự nhiên chia hết cho 9, biết rằng: Tổng của chúng bằng $\overline{*657}$ và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91}$.
- d. Tìm chữ số a, biết rằng: $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7
- e. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu viết nó tiếp sau số 1999 thì ta được một số chia hết cho 37.
- f. Tìm các số tự nhiên chia cho 4 dư 1, còn chia cho 25 thì dư 3
- g. Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng số đó bằng 45 lần tích các chữ số của nó.
- h. Tìm số $\overline{abcd}$, biết rằng số đó chia hết cho tích các số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$.
- i. $\overline{*63*}$ chia hết cho cả 2,3,5,9
- j. Tìm tất cả các số có 5 chữ số dạng: $\overline{34x5y}$ mà chia hết cho 36.

❖ **DANG 3: BÀI TOÁN ĐẾM SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN**

3. Từ 1 đến 100 có bao nhiêu số chia hết cho 2, bao nhiêu số chia hết cho 5?
4. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 5 và dư 3?
5. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số và chia hết cho 3?
6. Trong các số tự nhiên nhỏ hơn 1000, có bao nhiêu số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5?

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

❖ **DANG 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ CHỨNG MINH**

Bài 1: Chứng minh rằng:

1. $A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 4
 $A = (1 + 3) + 3^2.(1 + 3) + \dots + 3^{10}(1 + 3)$
 $A = 4 + 3^2.4 + \dots + 3^{10}.4$
 $A = 4.(1 + 3^2 + 3^{10}) : 4(\text{đpcm})$
2. $B = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33
 $B = (2^4)^5 + 2^{15}$
 $B = 2^{20} + 2^{15}$
 $B = 2^{15}.(1 + 2^5)$
 $B = 2^{15}.33 : 33 (\text{đpcm})$
3. $C = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8$ chia hết cho 30
 $C = (5 + 5^2) + 5^2.(5 + 5^2) + \dots + 5^6.(5 + 5^2)$
 $C = 30 + 5^2.30 + \dots + 5^6.30$
 $C = 30.(1 + 5^2 + \dots + 5^6) : 30 (\text{đpcm})$
4. $D = 45 + 99 + 180$ chia hết cho 9
Ta có: $45 : 9; 99 : 9; 180 : 9$ nên $D = 45 + 99 + 180 : 9 (\text{đpcm})$ (tính chất chia hết của một tổng)
5. $E = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{119}$ chia hết cho 13.
 $E = (1 + 3 + 3^2) + 3^3.(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{117}.(1 + 3 + 3^2)$

$$E = 13 + 3^3.13 + \dots + 3^{117}.13$$

$$E = 13.(1 + 3^3 + \dots + 3^{117}) \vdots 13 \text{ (đpcm)}$$

6. $F = 10^{28} + 8$ chia hết cho 72

Ta thấy: $72 = 8.9$

Ta có:

$$10^{28} + 8 \vdots 9 \text{ vì tổng các chữ số bằng } 9$$

$$10^{28} + 8 \vdots 8 \text{ vì có tận cùng là } 008$$

$$\text{Mà } (8;9) = 1 \text{ nên } 10^{28} + 8 \vdots 8.9 = 72 \text{ (đpcm)}$$

7. $G = 8^8 + 2^{20}$ chia hết cho 17

$$G = (2^3)^8 + 2^{20}$$

$$G = 2^{24} + 2^{20}$$

$$G = 2^{20}.(2^4 + 1)$$

$$G = 2^{20}.17 \vdots 17 \text{ (đpcm)}$$

8. $H = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$ chia hết cho 3, 7, 15

Ta có:

$$H = 2.(1 + 2) + 2^3.(1 + 2) + \dots + 2^{59}.(1+2)$$

$$H = 2.3 + 2^3.3 + \dots + 2^{59}.3$$

$$H = 3.(2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) \vdots 3$$

Ta có:

$$H = 2.(1 + 2 + 2^2) + 2^4.(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{58}.(1 + 2 + 2^2)$$

$$H = 2.7 + 2^4.7 + \dots + 2^{58}.7$$

$$H = 7.(2 + 2^4 + \dots + 2^{58}) \vdots 7$$

Ta có:

$$H = 2.(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^5.(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{57}.(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$$

$$H = 2.15 + 2^5.15 + \dots + 2^{57}.15$$

$$H = 15.(2 + 2^5 + \dots + 2^{57}) \vdots 15$$

Vậy H chia hết cho 3, 7, 15.

9. $I = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991}$ chia cho 13 và 41.

Ta có:

$$I = (1 + 3 + 3^2) + 3^3.(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{1989}.(1 + 3 + 3^2)$$

$$I = 13 + 3^3.13 + \dots + 3^{1989}.13$$

$$I = 13.(1 + 3^3 + \dots + 3^{1989}) \vdots 13 \text{ (đpcm)}$$

Ta có:

$$I = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7) + \dots + (3^{1984} + 3^{1986} + 3^{1988} + 3^{1990}) + (3^{1985} + 3^{1987} + 3^{1989} + 3^{1991})$$

$$I = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + 3 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + \dots + 3^{1984} \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + 3^{1985} \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6)$$

$$I = 820 \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1985})$$

$$I = 41 \cdot 20 \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1985}) \vdots 41$$

Vậy I chia hết cho 13, 41.

10. $J = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27

Ta có:

$$J = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) + 18n$$

$$J = 99\dots 9 + 18n \text{ (số } 99\dots 9 \text{ có } n \text{ chữ số } 9)$$

$$J = 9(11\dots 1 + 2n) \text{ (số } 11\dots 1 \text{ có } n \text{ chữ số } 1)$$

$$J = 9 \cdot L$$

Xét biểu thức trong ngoặc

$$L = 11\dots 1 + 2n = 11\dots 1 - n + 3n \text{ (số } 11\dots 1 \text{ có } n \text{ chữ số } 1).$$

Ta đã biết một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó sẽ có cùng số dư trong phép chia cho 3. Số $11\dots 1$ (n chữ số 1) có tổng các chữ số là $1 + 1 + \dots + 1 = n$ (vì có n chữ số 1).

$\Rightarrow 11\dots 1$ (n chữ số 1) và n có cùng số dư trong phép chia cho 3

$\Rightarrow 11\dots 1$ (n chữ số 1) - n chia hết cho 3

$\Rightarrow L$ chia hết cho 3

$\Rightarrow 9 \cdot L$ chia hết cho 27 hay $J = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 (đpcm)

11. $K = 10^n + 72n - 1$ chia hết cho 81

Ta có:

$$K = 10^n + 72n - 1$$

$$K = 10^n - 1 + 72n$$

$$K = (10-1)[10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1] + 72n$$

$$K = 9 \cdot [10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1] - 9n + 81n$$

$$K = 9 \cdot [10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1 - n] + 81n$$

$$K = 9[(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + \dots + (10 - 1) + (1 - 1)] + 81n$$

Ta có:

$$10^k - 1 = (10-1)[10^{k-1} + \dots + 10 + 1] \text{ chia hết cho } 9$$

$$\Rightarrow 9[(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + \dots + (10 - 1) + (1 - 1)] \text{ chia hết cho } 81$$

$$\Rightarrow 9[10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1 - n] + 81n \text{ chia hết cho } 81$$

$$\Rightarrow K = 10^n + 72n - 1 \vdots 81 \text{ (đpcm).}$$

Bài 2: Chứng minh rằng:

1. $\overline{abcabc}$ chia hết cho 7, 11 và 13
Ta có: $\overline{abcabc} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001.\overline{abc} = 7.11.13.\overline{abc} : 7; 11; 13$ (đpcm)
2. $\overline{abcdeg}$ chia hết cho 23 và 29, biết $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$
Ta có: $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1000.2.\overline{deg} + \overline{deg}$
 $= \overline{deg}(2000 + 1) = \overline{deg}.2001 = \overline{deg}.23.29.3 : 23; 29$ (đpcm)
3. $\overline{aaa}$ chia hết cho a
 $\overline{aaa} = 100.a + 10.a + a = 111.a : a$ (đpcm)
4. Chứng minh rằng số gồm 27 chữ số 1 thì chia hết cho 27
Gọi A là số gồm 27 chữ số 1, B là số gồm 9 chữ số 1.
Lấy A chia cho B ta được thương là $C=10..010..01$.
Như vậy : $A=B.C$, trong đó B chia hết cho 9, C chia hết cho 3
Vậy A chia hết cho 27 (đpcm).
5. $\overline{abcd}$ chia hết cho 29 $\Leftrightarrow a + 3b + 9c + 27d$ chia hết cho 29
Ta có: $\overline{abcd} : 29$
 $\Leftrightarrow 1000.a + 100.b + 10.c + d : 29$
 $\Leftrightarrow 2000.a + 200.b + 20.c + 2d : 29$
 $\Leftrightarrow 2001.a - a + 203.b - 3.b + 29.c - 9.c + 29.d - 27.d : 29$
 $\Leftrightarrow (2001.a + 203.b + 29.c + 29.d) - (a + 3.b + 9.c + 27.d) : 29$
 $\Leftrightarrow (69.29.a + 7.29.b + 29.c + 29.d) - (a + 3.b + 9.c + 27.d) : 29$
 $\Leftrightarrow (a + 3.b + 9.c + 27.d) : 29$ (đpcm)
6. $\overline{abc}$ chia hết cho 21 $\Leftrightarrow a - 2b + 4c$ chia hết cho 21
Ta có:
 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$
 $= 100a - 84a + 10b - 42b + c + 63c + 84a + 42b - 63c$
 $= 16a - 32b + 64c + 84a + 42b - 63c$
 $= 16(a - 2b + 4c) + 84a + 42b - 63c$
 $\overline{abc}$ chia hết cho 21, $84a + 42b - 63c$ chia hết cho 21 $\Rightarrow a - 2b + 4c$ (đpcm)

Bài 3: Chứng minh rằng:

- a. Chứng minh rằng tổng ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3.
Gọi 3 số tự nhiên liên tiếp là: a; a + 1; a + 2

Tổng của ba số là: $a + a + 1 + a + 2 = 3.a + 3 \div 3(\text{đpcm})$ (tính chất chia hết của một tổng)

- b. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $60n + 45$ chia hết cho 15 nhưng không chia hết cho 30.

Ta có:

$60 \div 15 \Rightarrow 60n \div 15$; $45 \div 15 \Rightarrow 60n + 45 \div 15$ (theo tính chất chia hết của một tổng)

$60 \div 30 \Rightarrow 60n \div 30$; 45 không chia hết cho 30 $\Rightarrow 60n + 45$ không chia hết cho 30 (theo tính chất chia hết của một tổng).

- c. Chứng minh rằng không có số tự nhiên nào mà chia cho 15 dư 6 và chia 9 dư 1.

Giả sử có số $a \in \mathbb{N}$ thỏa mãn cả hai điều kiện trên thì:

$$\left. \begin{array}{l} a = 15q_1 + 6 \text{ chia hết cho 3} \\ a = 15q_2 + 1 \text{ không chia hết cho 3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Mâu thuẫn}$$

Vậy không có số tự nhiên nào thỏa mãn. (đpcm)

- d. Chứng minh rằng: $(1005a + 2100b)$ chia hết cho 15, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

Vì 1005 chia hết cho 3 nên $1005.a$ chia hết cho 3 với mọi a

Vì 2100 chia hết cho 3 nên $2100.b$ chia hết cho 3 với mọi b

$$\Rightarrow (1005a + 2100b) \text{ chia hết cho 3 với mọi } a, b$$

Vì 1005 chia hết cho 5 nên $1005a$ chia hết cho 5 với mọi a

Vì 2100 chia hết cho 5 nên $2100b$ chia hết cho 5 với mọi b

$$\Rightarrow (1005a + 2100b) \text{ chia hết cho 5 với mọi } a, b$$

$$\text{Mà } (3;5) = 1 \Rightarrow (1005a + 2100b) \text{ chia hết cho 15 với mọi } a, b$$

- e. Chứng minh rằng: $A = n^2 + n + 1$ không chia hết cho 2 và 5, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $n.(n+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp, trong 2 số liên tiếp luôn luôn có 1 số chẵn $\Rightarrow n.(n+1)$ là số chẵn, cộng thêm 1 sẽ là số lẻ $\Rightarrow n.(n+1) + 1$ là số lẻ, không chia hết cho 2.

Để chứng minh $n.(n+1) + 1$ không chia hết cho 5 ta thấy hai số n và $n+1$ có thể có các chữ số tận cùng sau:

n tận cùng là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; tương ứng số tận cùng của $n+1$ như sau:

$n+1$ tận cùng là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

$\Rightarrow$ tích của $n.(n+1)$ tận cùng là:

0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0

Hay là $n.(n+1)$ tận cùng là 0, 2, 6

$\Rightarrow n.(n+1)+1$ tận cùng là: 1, 3, 7 không chia hết cho 5

f. Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}$ thì tích $(n+3)(n+6)$ chia hết cho 2.

Ta xét các trường hợp:

(+) Nếu n là số lẻ thì $n+3$ là số chẵn ; $n+6$ là số lẻ. Mà số chẵn nhân với số lẻ có tận cùng là số chẵn $\Rightarrow (n+3)(n+6)$ chia hết cho 2.

(+) Nếu n là số chẵn thì $n+3$ là số lẻ ; $n+6$ là số chẵn. Mà tích của 1 số lẻ với 1 số chẵn có tận cùng là số chẵn nên $\Rightarrow (n+3)(n+6)$ chia hết cho 2.

Vậy $\forall n \in \mathbb{N}$ thì tích $(n+3)(n+6)$ chia hết cho 2 (đpcm).

1. DẠNG 2: TÌM SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ

❖ Tìm các chữ số a và b sao cho $a-b=4$ và $\overline{87ab}$ chia hết cho 9

Vì $a-b=4 \Rightarrow a=b+4$ mà $\overline{87ab}$ chia hết cho 9 $\Rightarrow 15+a+b$ chia hết cho 9
 $\Rightarrow 19+2b$ chia hết cho 9 $\Rightarrow b=4$; $a=8$.

❖ Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a-b=6$ và n chia hết cho 9. Tìm a và b

n chia hết cho 9

$\Rightarrow \overline{7a5} + \overline{8b4}$ chia hết cho 9

$\Rightarrow 7+a+5+8+b+4$ chia hết cho 9

$\Rightarrow 24+a+b$ chia hết cho 9.

Mà $a, b \leq 9 \Rightarrow a+b \leq 18$

$\Rightarrow a+b=3$ hoặc $a+b=12$.

- $a+b=3$

$\Rightarrow a=(3+6):2=9/2$ không thuộc $\mathbb{N}$ (loại)

- $a+b=12$

$$\Rightarrow a = (12 + 6) : 2 = 9 ; b = 9 - 6 = 3 \text{ (chọn)}$$

Vậy $a = 9$ và $b = 3$.

- ❖ Tìm hai số tự nhiên chia hết cho 9, biết rằng: Tổng của chúng bằng $\overline{*657}$ và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91}$.

Vì hai số chia hết cho 9 nên tổng của hai số là: $\overline{*657} : 9 \Leftrightarrow * = 9$; và hiệu của chúng bằng $\overline{5*91} : 9 \Leftrightarrow * = 3$.

Vậy tổng của hai số là 9657 và hiệu của hai số là 5391.

$\Rightarrow$ Hai số cần tìm là: 7524 và 2133

- ❖ Tìm chữ số a , biết rằng: $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overline{20a20a20a} &= \overline{20a20a} \cdot 1000 + \overline{20a} \\ &= (\overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}) \cdot 1000 + \overline{20a} \\ &= 1001 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a} \\ &= 7 \cdot 143 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a} : 7 \\ \text{Mà } 7 \cdot 143 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 &: 7 \Rightarrow \overline{20a} : 7 \\ \overline{20a} &= 200 + a = 196 + 4 + a = 196 + (4 + a) : 7 \\ \text{Mà } 196 &: 7 \Rightarrow 4 + a : 7 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

- ❖ Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu viết nó tiếp sau số 1999 thì ta được một số chia hết cho 37.

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \overline{1999ab} : 37 &\Rightarrow 199900 + \overline{ab} : 37 \\ &\Rightarrow \overline{5402.37} + 26 + \overline{ab} : 37 \\ &\Rightarrow 26 + \overline{ab} : 37 \\ \text{Vậy } \overline{ab} &= \{11; 48; 85\} \end{aligned}$$

- ❖ Tìm các số tự nhiên chia cho 4 dư 1, còn chia cho 25 thì dư 3

Gọi thương của số tự nhiên x cần tìm tuần tự là a và b
Theo đề, ta có:

$$\begin{aligned}
 x &= 4a + 1 \\
 x &= 25b + 3 \\
 \Leftrightarrow 4a + 1 &= 25b + 3 \\
 4a &= 25b + 2 \\
 a &= (25b + 2)/4 \\
 b = 2 ; a = 13 &\Leftrightarrow x = 53 \\
 b = 6 ; a = 38 &\Leftrightarrow x = 153 \\
 b = 10 ; a = 63 &\Leftrightarrow x = 253 \\
 b = 14 ; a = 88 &\Leftrightarrow x = 353 \\
 b = 18 ; a = 113 &\Leftrightarrow x = 453 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Đáp số:

Tất cả các số tự nhiên, tận cùng là 53 đều thỏa mãn điều kiện.

❖ Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng số đó bằng 45 lần tích các chữ số của nó.

Gọi số đó là $\overline{abcde}$ (a, b, c, d, e là các chữ số và a khác 0). Theo đề bài ta có:

$$\overline{abcde} = 45 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$$

$$\overline{abcde} = 5 \cdot 9 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$$

$\overline{abcde}$ chia hết cho 5 nên $e = 0$ (loại) hoặc $e = 5$. Dễ thấy $e = 5$. Số $abcd5$ là số lẻ nên a, b, c, d, e đều là các chữ số lẻ.

$$\overline{abcd5} = 5 \cdot 9 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot 5$$

$$\overline{abcd5} = 25 \cdot 9 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$$

Do đó, $\overline{abcd5}$ chia hết cho 25. Mà $\overline{abcd5} = abc \cdot 100 + d5$. $d5$ chia hết cho 25 và d lẻ $\Rightarrow d = 7$.

Ta có $\overline{abcde} = \overline{abc75}$ chia hết cho 9 nên $a + b + c + 7 + 5 = a + b + c + 12$ chia hết cho 9. Mà $2 < a + b + c < 28$.

Do đó: $a + b + c = 6; 15$ hoặc 24

Vì a, b, c lẻ nên $a + b + c$ lẻ $\Rightarrow a + b + c = 15$

$$\text{Mà } 15 = 1 + 5 + 9 = 1 + 7 + 7 = 3 + 3 + 9 = 3 + 5 + 7 = 5 + 5 + 5$$

Vì ta có $45 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot 7 \cdot 5 < 100000$

nên $a \cdot b \cdot c < 64$. Do đó ta chỉ còn xét hai trường hợp, ba chữ số a, b, c có tổng là $1 + 5 + 9$ và $1 + 7 + 7$.

Thử chọn thấy 77175 là thích hợp.

Đ/S: 77175.

❖ Tìm số $\overline{abcd}$, biết rằng số đó chia hết cho tích các số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$.

Ta có: $\overline{abcd} = \overline{ab00} + \overline{cd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd}$ chia hết cho $\overline{ab}.\overline{cd}$

$\Rightarrow \overline{cd}$ chia hết cho $\overline{ab}$. Đặt $\overline{cd} = k.\overline{ab}$ ($1 \leq k \leq 9$)

có $\overline{ab}.100 + k.\overline{ab}$ chia hết cho $\overline{ab}.\overline{cd} = \overline{ab}.k.\overline{ab}$

$\Rightarrow 100 + k$ chia hết cho $k.\overline{ab}$ (1) $\Rightarrow 100$ chia hết cho k

$\Rightarrow k = \{1, 2, 4, 5\}$

+ $k = 1$; $\overline{cd} = \overline{ab}$; từ (1) $\Rightarrow 101$ chia hết cho $\overline{ab}$ vô lí vì 101 nguyên tố

+ $k = 2$; $\overline{cd} = 2.\overline{ab}$, từ (1) $\Rightarrow 102$ chia hết cho $2.\overline{ab} \Rightarrow 51$ chia hết cho $\overline{ab}$

$\overline{ab}$ không thể là 51 (vì nếu thế thì $\overline{cd} = 102$ vô lí) $\Rightarrow \overline{ab} = 17 \Rightarrow \overline{cd} = 34$

Số cần tìm là 1734 (dễ kiểm tra $1734 : (17.34) = 3$)

+ $k = 4$; $\overline{cd} = 4.\overline{ab} \Rightarrow 104$ chia hết cho $4.\overline{ab} \Rightarrow 26$ chia hết cho $\overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} =$

$13, \overline{cd} = 52$ (nhận) hoặc $\overline{ab} = 26, \overline{cd} = 104$ (loại)

+ $k = 5$; $\overline{cd} = 5.\overline{ab}$, từ (1) $\Rightarrow 105$ chia hết cho $5.\overline{ab} \Rightarrow 21$ chia hết cho $\overline{ab}$

$\Rightarrow \overline{ab} = 21 \Rightarrow \overline{cd} = 105$ vô lí

Vậy có hai cặp số thỏa mãn yêu cầu là: 1734 và 1352

❖ $\overline{*63*}$ chia hết cho cả 2,3,5,9

$\overline{*63*}$ chia hết cho 2 và 5 $\Rightarrow \overline{*63*} = \overline{*630}$.

Vì $\overline{*63*}$ chia hết cho 9 nên tổng các số phải chia hết cho 9

$\Rightarrow * + 6 + 3 + 0 = * + 9$ chia hết cho 9

$\Rightarrow * = 0$ (loại) hoặc $* = 9$.

Số chia hết cho 9 thì sẽ chia hết cho 3. Vậy số cần tìm là: 9630

❖ Tìm tất cả các số có 5 chữ số dạng: $\overline{34x5y}$ mà chia hết cho 36.

Ta có: $36 = 9 \cdot 4$ mà $ƯC(4;9) = 1$

Vậy để $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36 thì $\overline{34x5y}$ chia hết cho 4 và 9

$\overline{34x5y}$ chia hết cho 9 $\Leftrightarrow 3+4+x+5+y : 9 \Leftrightarrow 12 + x + y : 9$ (1)

$\overline{34x5y}$ chia hết cho 4 $\Leftrightarrow \overline{5y}$ chia hết cho 4 $\Rightarrow y = 2$ hoặc $y = 6$

Với $y = 2$ thay vào (1) $\Rightarrow 14 + x : 9 \Rightarrow x = 4$

Với $y = 6$ thay vào (1) $\Rightarrow 18 + x : 9 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 9$

Vậy các cặp (x, y) cần tìm là: $(4; 2), (0; 6), (9; 6)$.

a. DẠNG 3: BÀI TOÁN ĐẾM SỐ TỰ NHIÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

❖ Từ 1 đến 100 có bao nhiêu số chia hết cho 2, bao nhiêu số chia hết cho 5?

Các số chia hết cho 2 từ 1 đến 100 là: 2; 4; 6; 8; ...; 100

$\Rightarrow$ Số các số chia hết cho 2 từ 1 đến 100 là
 $(100 - 2) : 2 + 1 = 50$ (số)

Các số chia hết cho 5 từ 1 đến 100 là: 5; 10; 15; ...; 100

$\Rightarrow$ Số các số chia hết cho 5 từ 1 đến 100 là
 $(100 - 5) : 5 + 1 = 20$ (số)

❖ Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia cho 5 và dư 3?

Số chia cho 5 và dư 3 nhỏ hơn 100 là: 3; 8; 13; 18; ...; 98

Vậy có: $\frac{(98-3)}{5} + 1 = 19 + 1 = 20$ số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia cho 5 và dư 3

❖ Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số và chia hết cho 3?

Các số tự nhiên chia hết cho 3 và có 3 chữ số là: 102; 105; 108; ...; 999

Vậy có: $\frac{(999-102)}{3} + 1 = 299+1 = 300$ số tự nhiên chia hết cho 3 và có 3 chữ số.

❖ Trong các số tự nhiên nhỏ hơn 1000, có bao nhiêu số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5?

Các số tự nhiên chia hết cho cả 2 và 5 là: 0; 2; 4 ; 6; 8; ...; 998; 1000

Các số tự nhiên chẵn chia hết cho 5 là: 0; 10; 20;...;990;1000

Vậy có: $\left[\frac{(1000-0)}{2} + 1 \right] - \left[\frac{(1000-0)}{10} + 1 \right] = 501 - 101 = 400$ số tự nhiên nhỏ hơn 1000 chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5.

CHUYÊN ĐỀ 3: LŨY THỪA TRONG SỐ TỰ NHIÊN

CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

- DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

a. $4^{10}.8^{15}$

b. $4^{15}.5^{30}$

c. $\frac{2^{10}.13 + 2^{10}.65}{2^8.104}$

d. $(1 + 2 + 3 + \dots + 100).(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2). (65.111 - 13.15.37)$

e. $19991999.1998 - 19981998.1999$

f. $\frac{101+100+99+98+\dots+3+2+1}{101-100+99-98+\dots+3-2+1}$

g. 6^{3^1}

h. 3^{2^3}

i. $\frac{11.3^{22}.3^7-9^{15}}{(2.3^{14})^2}$

j. $9! - 8! - 7! \cdot 8^2$

k. $27^{16} : 9^{10}$

- DẠNG 2: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

1. 74^{30}

2. 49^{31}

3. 87^{32}

4. 58^{33}

5. 23^{35}

6. 2^{101}

7. 3^{19}

8. $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$.

Bài 2: Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau:

a. 51^{51}

b. 99^{99}

c. 6^{666}

- DẠNG 3: SO SÁNH LŨY THỪA VỚI LŨY THỪA

a) 27^{11} và 81^8

b) 625^5 và 125^7

c) 5^{36} và 11^{24}

d) 3^{2n} và 2^{3n}

e) 5^{23} và 6.5^{22}

f) 199^{20} và 2003^{15}

g) 3^{99} và 11^{21}

- DẠNG 4: TÌM GIÁ TRỊ CỦA SỐ TỰ NHIÊN

Bài 1: Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết:

1. $(x - 47) - 115 = 0$
2. $2^x - 15 = 17$
3. $(7x - 11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200$
4. $x^{10} = 1^x$
5. $x^{10} = x$
6. $(2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$
7. $2 \cdot 3^x = 10 \cdot 3^{12} + 8 \cdot 27^4$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP ÁN

- DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

$$\checkmark 4^{10} \cdot 8^{15} = (2^2)^{10} \cdot (2^3)^{15} = 2^{20} \cdot 2^{45} = 2^{65}$$

$$\checkmark 4^{15} \cdot 5^{30} = (2^2)^{15} \cdot 5^{30} = 2^{30} \cdot 5^{30} = (2 \cdot 5)^{30} = 10^{30}$$

$$\checkmark \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^{10} \cdot (13 + 65)}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^{11} \cdot 39}{2^{11} \cdot 13} = \frac{39}{13} = 3$$

$$\begin{aligned} \checkmark & (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \cdot (65 \cdot 111 - 13 \cdot 15 \cdot 37) \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \cdot (13 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 37 - 13 \cdot 15 \cdot 37) \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\checkmark 19991999.1998 - 19981998.1999 = 1999.10001.1998 - 1998.10001.1999 = 0$$

$$\begin{aligned} \checkmark & \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1} = \frac{101 \cdot (101 + 1)}{2} : \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{51 \text{ chữ số } 1} \\ &= \frac{101 \cdot 51}{51} = 101 \end{aligned}$$

$$\checkmark 6^{3^1} = 6^3 = 216$$

$$\checkmark 3^{2^3} = 3^8 = 6561$$

$$\checkmark \frac{11.3^{22}.3^7 - 9^{15}}{(2.3^{14})^2} = \frac{11.3^{29} - 3^{30}}{2^2.3^{28}} = \frac{(11.3 - 3^2)3^{28}}{2^2.3^{28}} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\checkmark 9! - 8! - 7! \cdot 8^2 = 8! \cdot (9 - 1) - 7! \cdot 8^2 = 8.8.7! - 7! \cdot 8^2 = 8^2.7! - 7! \cdot 8^2 = 0$$

$$\checkmark 27^{16} : 9^{10} = (3^3)^{16} : (3^2)^{10} = 3^{48} : 3^{20} = 3^{28}$$

a. DẠNG 2: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

1. 74^{30} Lũy thừa của một số có tận cùng bằng 4 là một số có tận cùng bằng 6 nếu số mũ chẵn, tận cùng bằng 4 nếu số mũ lẻ. 30 là số chẵn nên 74^{30} có tận cùng bằng 6.
2. 49^{31} Lũy thừa của một số có tận cùng bằng 9 là một số có tận cùng bằng 1 nếu số mũ chẵn, tận cùng bằng 9 nếu số mũ lẻ. 31 là số lẻ nên 49^{31} có tận cùng bằng 9.
3. $87^{32} = (87^4)^8$ Ta có các số có tận cùng 7 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 1. Những số có tận cùng bằng 1 dù nâng lên lũy thừa bao nhiêu thì tận cùng cũng bằng 1. Vậy 87^{32} có tận cùng bằng 1.
4. 58^{33} Ta có các số có tận cùng 8 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 6. Do đó ta biến đổi như sau: $58^{33} = (58^4)^8.58 = (\dots 6)^8.58 = (\dots 8)$. Vậy 58^{33} có tận cùng bằng 8.
5. 23^{35} Ta có các số có tận cùng 3 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 1. Do đó ta biến đổi như sau: $23^{35} = (23^4)^8.23^3 = (\dots 1)^8.(\dots 7)$. Vậy 23^{35} có tận cùng bằng 7.
6. 2^{101} Ta có các số có tận cùng 2 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 6. Do đó ta biến đổi như sau: $2^{101} = (2^4)^{25}.2 = 16^{25}.2 = (\dots 6).2 = (\dots 2)$. Vậy 2^{101} có tận cùng bằng 2.
7. 3^{19} Ta có các số có tận cùng 3 nâng lên lũy thừa 4 thì được số có tận cùng bằng 1. Do đó ta biến đổi như sau: $3^{19} = (3^4)^4.3^3 = (\dots 1)^4.27 = \dots 7$. Vậy 3^{19} có tận cùng bằng 7.
8. $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$.

Bài 2: Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau:

$$\Rightarrow 51^{51}$$

$51^{51} = (51^2)^{25} \cdot 51$. Một chữ số có tận cùng bằng 01 dù nâng lên bất kì lũy thừa tự nhiên nào cũng có tận cùng vẫn bằng 01 nên 51^{51} có tận cùng bằng 51.

$$\Rightarrow 99^{99}$$

$$(99^2)^{49} \cdot 9 = 9801^{49} \cdot 9$$

Một chữ số có tận cùng bằng 01 dù nâng lên bất kì lũy thừa tự nhiên nào cũng có tận cùng vẫn bằng 01 nên 9801^{49} có tận cùng bằng 01. Do đó, 99^{99} có tận cùng bằng 99.

$$\Rightarrow 6^{666}$$

Ta có 6^5 có tận cùng bằng 76. Một số tận cùng bằng 76 dù nâng lên bất kì một số tự nhiên nào khác 0 nào cũng vẫn tận cùng bằng 76. Do đó $6^{666} = (6^5)^{133} \cdot 6 = (\dots 76)^{133} \cdot 6 = (\dots 76) \cdot 6 = (\dots 56)$. Vậy 6^{666} có tận cùng là 56

b. DẠNG 3: SO SÁNH LŨY THỪA VỚI LŨY THỪA

1. 27^{11} và 81^8

$$\text{Ta có: } 27^{11} = (3^3)^{11} = 3^{33} \text{ và } 81^8 = (3^4)^8 = 3^{32}$$
$$3^{33} > 3^{32} \text{ nên } 27^{11} > 81^8$$

2. 625^5 và 125^7

$$\text{Ta có: } 625^5 = (5^4)^5 = 5^{20} \text{ và } 125^7 = (5^3)^7 = 5^{21}$$
$$5^{20} < 5^{21} \text{ nên } 625^5 < 125^7$$

3. 5^{36} và 11^{24}

$$\text{Ta có } 5^{36} = (5^3)^{12} = 125^{12}$$
$$11^{24} = (11^2)^{12} = 121^{12} < 125^{12}$$

1. $5^{36} > 11^{24}$

4. 3^{2n} và 2^{3n}

$$\text{Ta có: } 3^{2n} = 9^n; 2^{3n} = 8^n$$
$$9^n > 8^n \Rightarrow 3^{2n} > 2^{3n}$$

5. 5^{23} và $6 \cdot 5^{22}$

Ta có: $6.5^{22} = (5 + 1).5^{22} = 5.5^{22} + 5^{22} = 5^{23} + 5^{22} > 5^{23}$
vậy $5^{23} < 6.5^{22}$

6. 199^{20} và 2003^{15}

$$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$$

$$\text{Vậy } 2003^{15} > 199^{20}$$

7. 3^{99} và 11^{21}

$$11^{21} < 27^{21} = (3^3)^{21} = 3^{63} < 3^{99}$$

$$\text{vậy } 3^{99} > 11^{21}$$

c. DẠNG 4: TÌM GIÁ TRỊ CỦA SỐ TỰ NHIÊN

Bài 1: Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết:

a. $(x - 47) - 115 = 0$

$$\Leftrightarrow x - 47 = 115$$

$$\Leftrightarrow x = 115 + 47$$

$$\Leftrightarrow x = 162$$

b. $2^x - 15 = 17$

$$\Leftrightarrow 2^x = 32$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^5$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

c. $(7x - 11)^3 = 2^5.5^2 + 200$

$$\Leftrightarrow (7x - 11)^3 = 32.25 + 200$$

$$\Leftrightarrow (7x - 11)^3 = 800 + 200$$

$$\Leftrightarrow (7x - 11)^3 = 1000$$

$$\Leftrightarrow (7x - 11)^3 = 10^3$$

$$\Leftrightarrow 7x - 11 = 10$$

$$\Leftrightarrow 7x = 21$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

d. $x^{10} = 1^x$

$$\Leftrightarrow x^{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

e. $x^{10} = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

f. $(2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$

$$\Leftrightarrow (2x - 15)^3 \cdot [(2x - 15)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 15 = 0 \\ 2x - 15 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 15/2 \\ x = 8 \end{cases}$$

g. $2 \cdot 3^x = 10 \cdot 3^{12} + 8 \cdot 27^4$

$$\Leftrightarrow 3^x = 5 \cdot 3^{12} + 4 \cdot 3^{12}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^{12} \cdot (5 + 4)$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^{12} \cdot 3^2 = 3^{14}$$

$$\Leftrightarrow x = 14$$

CHUYÊN ĐỀ 4: DÃY SỐ TỰ NHIÊN THEO QUY LUẬT

a. DẠNG 1: MỘT SỐ DÃY SỐ TỔNG QUÁT

$$\text{✚ } A = 1+2+3+\dots+(n-1)+n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$\text{✚ } A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1).n.(n+1)}{3}$$

$$\text{✚ } A = 1.3+2.4+3.5+\dots+(n-1)(n+1) = \frac{(n-1).n.(2n+1)}{6}$$

$$\text{✚ } A = 1.2.3+2.3.4+3.4.5+\dots+(n-2)(n-1)n = \frac{(n-2).(n-1).n.(n+1)}{4}$$

$$\text{✚ } A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{✚ } A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\text{✚ } A = 1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12}.n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)$$

$$\text{✚ } A = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} \quad (p \neq 1)$$

$$\text{✚ } A = 1 + 2p + 3p^2 + \dots + (n+1)p^n = \frac{(n+1)p^{n+1}}{p-1} - \frac{p^{n+1}-1}{(p-1)^2} \quad (p \neq 1)$$

$$\text{✚ } A = 1.2+2.5+3.8+\dots+n(3n-1) = n^2.(n+1)$$

$$\text{✚ } A = 1^3+3^3+5^3+\dots+(2n+1)^3 = (n+1)^2.(2n^2+4n+1)$$

$$\text{✚ } A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad (n > 1)$$

$$A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n.(n+3)}{4.(n+1).(n+2)}$$

$$A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{n.(n+2)}{(n+1)^2}$$

b. DẠNG 2: MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau:

- I.** $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 2015$
- II.** $B = 1 + 3 + 5 + \dots + 1017$
- III.** $C = 2 + 4 + 6 + \dots + 2014$
- IV.** $D = 1 + 4 + 7 + \dots + 2008$
- V.** $E = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 1001.1002$
- VI.** $F = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + 2013.2015$
- VII.** $G = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 2013.2014.2015$
- VIII.** $H = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2$
- IX.** $I = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1001^2 + 1002^2$
- X.** $J = 6 + 16 + 30 + 48 + \dots + 19600 + 19998$
- XI.** $K = 2 + 5 + 9 + 14 + \dots + 4949 + 5049$
- XII.** $L = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2$
- XIII.** $M = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 99^3 + 100^3$
- XIV.** $N = 1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$
- XV.** $O = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100}$

Bài 2: Tìm giá trị của x để thỏa mãn điều kiện:

- A. Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$
 Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A + 3 = 3^n$
- B. Cho $M = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$
 Hỏi :
 a. M có chia hết cho 4, cho 12 không ? vì sao?
 b. Tìm số tự nhiên n biết rằng $2M + 3 = 3^n$
- C. Cho biểu thức: $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{118} + 3^{119}$

- a) Thu gọn biểu thức M.
b) Biểu thức M có chia hết cho 5, cho 13 không? Vì sao?
- D. Cho $A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$
a) Tính A.
b) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không?
c) A có bao nhiêu ước tự nhiên. Bao nhiêu ước nguyên?
- E. Cho $A = 1 - 7 + 13 - 19 + 25 - 31 + \dots$
a) Biết $A = 181$. Hỏi A có bao nhiêu số hạng?
b) Biết A có n số hạng. Tính giá trị của A theo n?
- F. Cho $A = 1 - 7 + 13 - 19 + 25 - 31 + \dots$
a) Biết A có 40 số hạng. Tính giá trị của A.
b) Tìm số hạng thứ 2004 của A.
- G. Tìm giá trị của x trong dãy tính sau:
 $(x+2)+(x+12)+(x+42)+(x+47) = 655$
- H. Tìm x biết :
 $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+2009) = 2009.2010$
- I. Bạn Lâm đánh số trang một cuốn sách dày 284 trang bằng dãy số chẵn 2, 4, 6, 8, ...
Biết mỗi chữ số viết mất 1 giây. Hỏi bạn Lâm cần bao nhiêu phút để đánh số trang cuốn sách?
- J. Tích $A = 1.2.3 \dots 500$ tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?
- K. Tính giá trị của biểu thức sau:
 $A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{50 \text{ chữ số}}$
- L. Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng: $A < B/3$

HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau:

I. $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 2015$

$$A = \frac{2015 \cdot (2015+1)}{2} = \frac{2015 \cdot 2016}{2} = 2015 \cdot 1008 = 2031120$$

II. $B = 1 + 3 + 5 + \dots + 1017$

$$B = (1017 + 1) \cdot \left(\frac{1017-1}{2} + 1 \right) : 2 = 1018 \cdot 509 : 2 = 259081$$

III. $C = 2 + 4 + 6 + \dots + 2014$

$$C = (2014 + 2) \cdot \left(\frac{2014-2}{2} + 1 \right) : 2 = 2016 \cdot 1007 : 2 = 1015056$$

IV. $D = 1 + 4 + 7 + \dots + 2008$

$$D = (2008 + 1) \cdot \left(\frac{2008-1}{3} + 1 \right) : 2 = 2009 \cdot 670 : 2 = 673015$$

V. $E = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 1001 \cdot 1002$

$$E = \frac{(1002-1) \cdot 1002 \cdot (1002+1)}{3} = \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 1003}{3} = 335337002$$

VI. $F = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 2013 \cdot 2015$

$$F = \frac{(2014-1) \cdot 2014 \cdot (2 \cdot 2014 + 1)}{6} = \frac{2013 \cdot 2014 \cdot 4029}{6} = 2722383213$$

VII. $G = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + 2013 \cdot 2014 \cdot 2015$

$$G = \frac{(2015-2) \cdot (2015-1) \cdot 2015 \cdot (2015+1)}{4} = \frac{2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016}{4}$$

$$G = 4117265071920$$

VIII. $H = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2$

$$H = \frac{100.(100+1)(2.100+1)}{6} = \frac{100.101.201}{6} = 338350$$

IX. $I = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1001^2 + 1002^2$

$$I = \frac{1002.(1002+1)(2.1002+1)}{6} = \frac{1002.1003.2005}{6} = 335839505$$

X. $J = 6 + 16 + 30 + 48 + \dots + 19600 + 19998$

$$\frac{1}{2}.J = 1.3 + 2.4 + 3.5 + 4.6 + \dots + 98.100 + 99.101$$

$$\frac{1}{2}.J = \frac{(100-1).100.(2.100+1)}{6} = \frac{99.100.201}{6} = 331650$$

a. $J = 331650 \cdot 2 = 663300$

XI. $K = 2 + 5 + 9 + 14 + \dots + 4949 + 5049$

$$2K = 1.4 + 2.5 + 3.6 + 4.7 + \dots + 99.102$$

$$2K = 1.(2+2) + 2.(2+3) + 3.(2+4) + \dots + 99.(2+100)$$

$$2K = 1.2 + 1.2 + 2.2 + 2.3 + 3.2 + 3.4 + \dots + 2.99 + 99.100$$

$$2K = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100) + 2.(1+2+3+4+\dots+99)$$

$$2K = \frac{(100-1).100.(100+1)}{3} + 2 \cdot \frac{99.(99+1)}{2}$$

$$2K = 333300 + 9900$$

$$2K = 343200$$

$$K = 343200 : 2 = 171600$$

XII. $L = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2$

$$L = 2^2.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2)$$

$$L = 4 \cdot \frac{50.(50+1)(2.50+1)}{6} = 4 \cdot \frac{50.51.101}{6} = 171700$$

XIII. $M = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 99^3 + 100^3$

$$M = \left[\frac{100.(100+1)}{2} \right]^2 = \left[\frac{100.101}{2} \right]^2 = 5050^2 = 25502500$$

XIV. $N = 1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$

$$N = 1 + 5.(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{99})$$

$$N = 1 + 5.(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{99} + 5^{100} - 5^{100})$$

$$\Rightarrow N = 1 + 5.(N - 5^{100})$$

$$\Rightarrow N = 1 + 5.N - 5^{101}$$

$$A. 4N = 5^{101} - 1$$

$$B. N = \frac{5^{101} - 1}{4}$$

$$XV. O = 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100}$$

$$O = \frac{3^{101} - 1}{2}$$

Bài 2: Tìm giá trị của x để thỏa mãn điều kiện:

$$\Rightarrow \text{Cho } A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$$

Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A + 3 = 3^n$

$$\text{Ta có } A = 3.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{99})$$

$$A = 3.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{99} + 3^{100} - 3^{100})$$

$$A = 3.(1 + A - 3^{100})$$

$$A = 3 + 3.A - 3^{101}$$

$$2A = 3^{101} - 3$$

$$A = \frac{3^{101} - 3}{2}$$

$$C. 2A + 3 = 3^n$$

$$\Leftrightarrow 2. \frac{3^{101} - 3}{2} + 3 = 3^n$$

$$\Leftrightarrow 3^{101} - 3 + 3 = 3^n$$

$$\Leftrightarrow 3^{101} = 3^n$$

$$\Leftrightarrow n = 101$$

$$\Rightarrow \text{Cho } M = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$$

Hỏi :

○ M có chia hết cho 4, cho 12 không ? vì sao?

Ta có: M chia hết cho 4 vì

$$M = 3.(1 + 3) + 3^2.(1 + 3) + \dots + 3^{99}.(1 + 3)$$

$$M = 3.4 + 3^2.4 + \dots + 3^{99}.4$$

$$M = 4.(3 + 3^2 + \dots + 3^{99}) \vdots 4$$

Ta có:

$$M \vdots 12 \text{ vì } M = 4.(3 + 3^2 + \dots + 3^{99}) \vdots 4; 3 \text{ mà } (4;3)=1$$

b. Tìm số tự nhiên n biết rằng $2M+3 = 3^n$

$$M = 3.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{99})$$

$$M = 3.(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{99} + 3^{100} - 3^{100})$$

$$M = 3.(1 + M - 3^{100})$$

$$M = 3 + 3.M - 3^{101}$$

$$2M = 3^{101} - 3$$

$$M = \frac{3^{101} - 3}{2}$$

$$D. 2M + 3 = 3^n$$

$$\Leftrightarrow 2. \frac{3^{101} - 3}{2} + 3 = 3^n$$

$$\Leftrightarrow 3^{101} - 3 + 3 = 3^n$$

$$\Leftrightarrow 3^{101} = 3^n$$

$$\Leftrightarrow n = 101$$

$$\Rightarrow \text{Cho biểu thức: } M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{118} + 3^{119}$$

▪ Thu gọn biểu thức M.

$$M = \frac{3^{120} - 1}{2}$$

▪ Biểu thức M có chia hết cho 5, cho 13 không? Vì sao?

• Xét $M = \frac{3^{120} - 1}{2}$

Một số có tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc $\mathbb{N}$) thì chữ số tận cùng là 1. Do đó, $3^{120} = 3^{4 \cdot 30}$ có tận cùng là 1 $\Rightarrow M$ có tận cùng là 0 $\Rightarrow M$ chia hết cho 5

• $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{118} + 3^{119}$

$$M = (1 + 3 + 3^2) + 3^3.(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{117}.(1 + 3 + 3^2)$$

$$M = 13 + 3^3 \cdot 13 + \dots + 3^{117} \cdot 13$$

$$M = 13.(1 + 3^3 + \dots + 3^{117}) \vdots 13$$

Vậy M chia hết cho 5, chia hết cho 13.

$$\Rightarrow \text{Cho } A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 99 - 100$$

▪ Tính A.

$$A = (1 + 3 + \dots + 99) - (2 + 4 + \dots + 100)$$

$$A = (99 + 1) \cdot \left(\frac{99-1}{2} + 1 \right) : 2 - (100+2) \cdot \left(\frac{100-2}{2} + 1 \right) : 2$$

$$A = 100.50:2 - 102.51:2$$

$$A = 2500 - 2601 = -101$$

▪ A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?

A không chia hết cho 2, 3 và 5

▪ A có bao nhiêu ước tự nhiên. Bao nhiêu ước nguyên ?

$$U(A) = \{-101; -1; 1; 101\} \text{ và 4 ước nguyên.}$$

vậy A có 2 ước tự nhiên

⇒ Cho $A = 1 - 7 + 13 - 19 + 25 - 31 + \dots$

▪ Biết $A = 181$. Hỏi A có bao nhiêu số hạng ?

$$A = 1 + 6 + 6 + \dots$$

$$\bullet \text{ Nếu } n \text{ lẻ : } A = 1 + 6 \cdot \frac{n-1}{2} = 181 \Rightarrow 6 \cdot \frac{n-1}{2} = 180 \Rightarrow \frac{n-1}{2} =$$

$$30 \Rightarrow n = 61 \text{ (TM)}$$

$$\bullet \text{ Nếu } n \text{ chẵn: } A = -6 - 6 - 6 - \dots = (-6) \cdot \frac{n}{2} = -3n = 181 \text{ (loại)}$$

Vậy A có 61 số hạng.

▪ Biết A có n số hạng. Tính giá trị của A theo n ?

$$\text{Nếu } n \text{ chẵn: } A = -6 - 6 - 6 - \dots = (-6) \cdot \frac{n}{2} = -3n$$

$$\text{Nếu } n \text{ lẻ: } A = 1 + 6 + 6 + \dots = 1 + 6 \cdot \frac{n-1}{2} = 3n - 2$$

⇒ Cho $A = 1 - 7 + 13 - 19 + 25 - 31 + \dots$

▪ Biết A có 40 số hạng. Tính giá trị của A.

$$\text{Theo câu 5 } n \text{ chẵn} \Rightarrow A = -3n = -3 \cdot 40 = -120$$

▪ Tìm số hạng thứ 2004 của A.

$$\text{Ta có số hạng thứ nhất: } A_1 = 1$$

$$\text{Số hạng thứ 2: } A_2 = (-1)^{2-1} \cdot (1 + 6)$$

$$\text{Số hạng thứ 3: } A_3 = (-1)^{3-1} \cdot (1 + 6 \cdot 2)$$

$$\text{Số hạng thứ 4: } A_4 = (-1)^{4-1} \cdot (1 + 6 \cdot 3)$$

....

$$\text{Số hạng thứ } n: A_n = (-1)^{n-1} \cdot [1 + 6 \cdot (n-1)]$$

$$n = 2004 \Rightarrow A_{2004} = (-1)^{2003-1} \cdot [1+6(2004-1)] = - (1+6 \cdot 2003)$$

$$A_{2004} = -12019$$

⇒ Tìm giá trị của x trong dãy tính sau:

$$(x+2)+(x+12)+(x+42)+(x+47) = 655$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2 + 12 + 42 + 47 = 655$$

$$\Leftrightarrow 4x + 103 = 655$$

$$\Leftrightarrow 4x = 655 - 103 = 552$$

$$\Leftrightarrow x = 552 : 4 = 138$$

⇒ Tìm x biết :

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+2009) = 2009 \cdot 2010$$

$$\Leftrightarrow 2010x + (1 + 2 + 3 + \dots + 2009) = 2009 \cdot 2010$$

$$\Leftrightarrow 2010x + \frac{2009 \cdot (2009+1)}{2} = 2009 \cdot 2010$$

$$\Leftrightarrow 2010x = 2009 \cdot 2010 - 2009 \cdot 2010 : 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2009 - 2009 : 2 = 1004,5$$

⇒ Bạn Lâm đánh số trang một cuốn sách dày 284 trang bằng dãy số chẵn 2, 4, 6, 8, ... Biết mỗi chữ số viết mất 1 giây. Hỏi bạn Lâm cần bao nhiêu phút để đánh số trang cuốn sách?

Từ trang 2 đến trang 8 gồm: $(8 - 2) : 2 + 1 = 4$ trang ứng với 4 chữ số

Từ trang 10 - 98 gồm $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$ trang ứng với 90 chữ số

Từ trang 100 - 284 gồm $(284 - 100) : 2 + 1 = 93$ trang ứng với $93 \cdot 3 = 279$ chữ số

Vậy bạn Lâm phải viết tất cả : $4 + 90 + 279 = 373$ chữ số tương ứng với 373 giây hay 6 phút 13 giây .

⇒ Tích $A = 1.2.3 \dots 500$ tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?

Số mũ của 5 trong $500!$ là

$$\left[\frac{500}{5} \right] + \left[\frac{500}{5^2} \right] + \left[\frac{500}{5^3} \right] = 124$$

Vậy tích $500!$ có tận cùng 124 chữ số 0.

⇒ Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{50 \text{ chữ số } 9}$$

$$A = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^{50} - 1$$

$$A = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{50} - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{50 \text{ chữ số } 1}$$

$$A = \underbrace{111 \dots 110}_{50 \text{ chữ số } 1} - 50 = \underbrace{111 \dots 1060}_{48 \text{ chữ số } 1}$$

$\Rightarrow$ Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng: $A < B/3$

Ta có $A = \frac{4^{100} - 1}{3} < \frac{4^{100}}{3} = B$ (đpcm)

CHUYÊN ĐỀ 5: BỘI – ƯỚC – ƯCLN – BCNN

❖ LÝ THUYẾT CƠ BẢN

❖ Ước và bội

$a : b \Leftrightarrow a$ là bội của $b \Leftrightarrow b$ là ước của a

❖ Ước chung lớn nhất:

- ✓ Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó. Ước chung lớn nhất của a, b, c được kí hiệu là: $ƯCLN(a, b, c)$ hoặc (a, b, c) .
- ✓ Ta có: $(a, b) = d \Leftrightarrow$ Tồn tại $a', b' \in \mathbb{N}$ sao cho $a = da', b = db', (a', b') = 1$.

❖ Bội chung nhỏ nhất:

- ✓ Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của các số đó. Bội chung nhỏ nhất của a, b, c được kí hiệu là $BCNN(a, b, c)$ hoặc $[a, b, c]$.
- ✓ Ta có: $[a, b] = m \Leftrightarrow$ Tồn tại $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $m = ax, m = by, (x, y) = 1$.

❖ Tính chất:

- ✓ Số lượng các ước của một số: Giả sử số tự nhiên A được phân tích ra thừa số nguyên tố là: $a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots$ thì số lượng các ước của A bằng $(x + 1)(y + 1)(z + 1) \dots$
- ✓ Nếu một tích chia hết cho số nguyên tố p thì tồn tại một thừa số của tích chia hết cho p .
- ✓ Nếu tích ab chia hết cho m trong đó b và m là hai số nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho m .
- ✓ Nếu a chia hết cho m và n thì a chia hết cho $BCNN$ của m và n
- ✓ Tích của hai số bằng tích của $BCNN$ với $ƯCLN$ của chúng: $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$.
- ✓ Ba số a, b, c nguyên tố cùng nhau đôi một nếu $(a, b) = 1; (b, c) = 1; (c, a) = 1$.

❖ **Thuật toán Ô – clit:** Để tìm ƯCLN(a, b) ta thực hiện như sau:

✓ Chia a cho b có số dư là r:

Nếu $r = 0$ thì $ƯCLN(a, b) = b$. Việc tìm ƯCLN dừng lại.

Nếu $r > 0$, ta chia tiếp b cho r, được số dư r_1

- Nếu $r_1 = 0$ thì $r_1 = ƯCLN(a, b)$. Dừng lại việc tìm ƯCLN

- Nếu $r_1 > 0$ thì ta thực hiện phép chia r cho r_1 và lập lại quá trình như trên.

ƯCLN(a, b) là số dư khác 0 nhỏ nhất trong dãy phép chia nói trên.

❖ CÁC DẠNG BÀI TẬP

⇒ **DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN LIÊN QUAN VỀ ƯỚC VÀ BỘI:**

Bài 1: Tìm số chia và thương của một phép chia có số bị chia bằng 145, số dư bằng 12 biết rằng thương khác 1 (số chia và thương là các số tự nhiên).

Bài 2: Một phép chia số tự nhiên có số bị chia bằng 3193. Tìm số chia và thương của phép chia đó, biết rằng số chia có hai chữ số.

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tích bằng 600.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n, sao cho: $n + 5$ chia hết cho $n + 1$

Bài 5: Tìm số tự nhiên n biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = 820$

⇒ **Bài tập tự rèn luyện:**

Bài 1: Tìm ba số lẻ liên tiếp có tích bằng 12075.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n , sao cho: $2n + 7$ chia hết cho $n + 2$

Bài 3: Hãy viết số 100 dưới dạng tổng các số lẻ liên tiếp.

Bài 4: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nó tăng gấp n lần nếu cộng mỗi chữ số của nó với n (n là số tự nhiên, có thể gồm một hoặc nhiều chữ số).

⇒ **DẠNG 2: TÌM SỐ TỰ NHIÊN KHI BIẾT MỘT SỐ YẾU TỐ TRONG ĐÓ CÓ CÁC DỮ KIỆN VỀ ƯCLN VÀ BCNN.**

Bài 1 : Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 84, UCLN của chúng bằng 6.

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên $a, b > 0$, biết $[a, b] = 240$ và $(a, b) = 16$.

Bài 3 : Tìm hai số tự nhiên $a, b > 0$, biết $ab = 216$ và $(a, b) = 6$.

Bài 4 : Tìm hai số tự nhiên $a, b > 0$, biết $ab = 180$, $[a, b] = 60$.

Bài 5: Tìm số tự nhiên a , biết rằng 398 chia cho a thì dư 38, còn 450 chia cho a thì dư 18.

Bài 6: Ba khối 6,7,8 theo thứ tự có 300 học sinh, 276 học sinh, 252 học sinh xếp hàng dọc để diễu hành sao cho số hàng dọc của mỗi khối như nhau. Có thể xếp nhiều nhất thành mấy hàng dọc để mỗi khối đều không có ai lẻ hàng? Khi đó ở mỗi khối có bao nhiêu hàng ngang?

Bài 7: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho chia a cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự 2, 3, 4.

Bài 8: Một số tự nhiên chia cho 3 thì dư 1, chia cho 4 thì dư 2, chia cho 5 thì dư 3, chia cho 6 thì dư 4 và chia hết cho 13.

- ✓ Tìm số nhỏ nhất có tính chất trên.
- ✓ Tìm dạng chung của tất cả các số có tính chất trên.

Bài 9: Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng 20, 25, 30 đều dư 15, nhưng xếp hàng 41 thì vừa đủ. Tính số người của đơn vị đó biết rằng số người chưa đến 1000.

Bài 10 : Tìm hai số tự nhiên $a, b > 0$, biết $a/b = 2,6$ và $(a, b) = 5$.

a) Bài tập tự luyện:

Bài 1 : Tìm a, b biết $a/b = 4/5$ và $[a, b] = 140$.

Bài 2 : Tìm hai tự nhiên $a, b > 0$, biết $a + b = 128$ và $(a, b) = 16$.

Bài 3 : Tìm a, b biết $a + b = 42$ và $[a, b] = 72$.

Bài 4 : Tìm a, b biết $a - b = 7$, $[a, b] = 140$.

Bài 5: Tìm số tự nhiên a , biết rằng 350 chia cho a thì dư 14, còn 320 chia cho a thì dư 26.

Bài 6: Người ta muốn chia 200 bút bi, 240 bút chì, 320 tẩy thành một số phần thưởng như nhau. Hỏi có thể chia được nhiều nhất là bao nhiêu phần thưởng, mỗi phần thưởng có bao nhiêu bút bi, bút chì, tẩy?

Bài 7: Tìm số tự nhiên nhỏ hơn 500, sao cho chia nó cho 15, cho 35 được các số dư theo thứ tự là 8 và 13.

Bài 8: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 8, 10, 15, 20 được số dư theo thứ tự 5, 7, 12, 17 và chia hết cho 41.

Bài 9: Hai lớp 6A, 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Trong lớp 6A, một bạn thu được 26kg, còn lại mỗi bạn thu 11kg. Trong lớp 6B, một bạn thu được 25kg, còn lại mỗi bạn thu 10kg. Tính số học sinh mỗi lớp, biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng từ 200kg đến 300kg.

⇒ **DẠNG 3: TÌM ƯCLN CỦA CÁC BIỂU THỨC SỐ**

Bài 1: Tìm ƯCLN của $2n - 1$ và $9n + 4$ (với n thuộc số tự nhiên).

Bài 2: Tìm ƯCLN của $7n + 3$ và $8n - 1$ (với n thuộc số tự nhiên).

⇒ **DẠNG 4: VẬN DỤNG THUẬT TOÁN Ô – CLIT TÌM ƯCLN**

b) Ví dụ minh họa:

Hãy tìm ƯCLN (1575, 343) = ?

Giải:

Ta có: $1575 = 343 \cdot 4 + 203$

$$343 = 203.1 + 140$$

$$203 = 140.1 + 63$$

$$140 = 63.2 + 14$$

$$63 = 14.4 + 7$$

$$14 = 7.2 + 0 \text{ (chia hết)}$$

Vậy: Hãy tìm ƯCLN $(1575, 343) = 7$

Trong thực hành người ta đặt phép chia đó như sau:

A staircase diagram representing the decomposition of 1575. The steps are labeled with numbers: 0, 2, 14, 7, 4, 63, 14, 2, 140, 63, 1, 203, 140, 1, 343, 203, 4, 1575, 343. The diagram shows a path from (0,0) to (1575, 1575) using steps of size (2,1) and (1,4).

Suy

$$\text{ra UCLN}(1575, 343) = 7$$

c) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm ƯCLN(702, 306) bằng cách phân tích ra thừa số nguyên tố và bằng thuật toán Ôclit.

Bài 2: Dùng thuật toán Ôclit để tìm

a/ ƯCLN(318, 214)

b/ ƯCLN(6756, 2463)

Bài 3: Tìm UCLN (A, B) biết rằng A là số gồm 1991 chữ số 2, B là số gồm 8 chữ số 2.

Bài 4: Tìm ƯCLN của các số sau: (187231, 165148)

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

⇒ DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN LIÊN QUAN VỀ ƯỚC VÀ BỘI:

Bài 1: Tìm số chia và thương của một phép chia có số bị chia bằng 145, số dư bằng 12 biết rằng thương khác 1 (số chia và thương là các số tự nhiên).

Gọi x là số chia, a là thương, ta có $145 = ax + 12$ ($x > 12$). Như vậy, x là ước của $145 - 12 = 133$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $133 = 7.19$

Ước của 133 mà lớn hơn 12 là 19 và 133.

Nếu số chia bằng 19 thì thương bằng 7. Nếu số chia bằng 133 thì thương bằng 1 (trái với đề bài).

Vậy số chia bằng 19 và thương bằng 7

Bài 2: Một phép chia số tự nhiên có số bị chia bằng 3193. Tìm số chia và thương của phép chia đó, biết rằng số chia có hai chữ số.

Nhận xét:

1) Loại suy:

3193 không chia hết cho 2 $\Rightarrow$ 3193 không chia hết cho 2k $\Rightarrow$ không chia hết cả 4k, 6k, 8k

Tương tự: 3193 không chia hết cho 3k, 5k, 7k, 9k

$\Rightarrow$ số chia của 3193 là một số nguyên tố

Gọi số chia là $ab \Rightarrow b$ chỉ CÓ THỂ là 1, 3, 7, 9

Ngoài ra, ta nhận thấy thương của phép chia cũng phải là một số nguyên tố (*)

2) Phép thử

* $b=9 \Rightarrow a=1,2,5,7,9 \Rightarrow$ thương không là số tự nhiên

* $b=7 \Rightarrow a=1,3,4,6,9 \Rightarrow$ thương không là số tự nhiên

* $b=3 \Rightarrow a=1,2,4,5,7,8 \Rightarrow$ thương không là số tự nhiên

* $b=1 \Rightarrow a=3,4,6,1 \Rightarrow$ tìm được $a=3$

$\Rightarrow$ số chia = 31; thương = 103

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tích bằng 600.

Phân tích 600 ra thừa số nguyên tố:

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Ghép các thừa số lại để được tích của hai số tự nhiên liên tiếp:

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = (8 \cdot 3) \cdot 25 = 24 \cdot 25$$

Đáp số: 24 và 25

Bài 4: Tìm số tự nhiên n , sao cho: $n + 5$ chia hết cho $n + 1$

Ta có: $n + 5 = (n + 1) + 4$

Để $n + 5 : n + 1$ thì $(n + 1) + 4 : n + 1 \Rightarrow n + 1$ là ước của 4

Ta có bảng sau:

$n + 1$	1	2	4
n	0	1	3

Vậy $n = \{0; 1; 3\}$

Bài 5: Tìm số tự nhiên n biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = 820$

Ta có: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 820$

$$\diamond n \cdot (n+1) = 1640 = 40 \cdot 41$$

$$\diamond n = 40$$

$\Rightarrow$ **Bài tập tự rèn luyện:**

Bài 1: Tìm ba số lẻ liên tiếp có tích bằng 12075.

$$12075 = 3.5^2.7.23 = 21.23.25$$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n , sao cho: $2n + 7$ chia hết cho $n + 2$

Ta có: $2n + 2 = 2n + 4 + 3$.

Để $2n + 7$ chia hết cho $n + 2$ thì $n + 2$ phải là ước của 3. $U(3) = \{1; 3\}$

Vậy $n = 1$

Bài 3: Hãy viết số 100 dưới dạng tổng các số lẻ liên tiếp.

Giả sử số 100 viết được dưới dạng k số lẻ liên tiếp là $n + 2$; $n + 4$; ...; $n + 2k$, ta có: $(n + 2) + (n + 4) + \dots + (n + 2k) = 100$ với n lẻ, $k > 1$.

Có hai đáp số: 49; 51 và $1 + 3 + \dots + 19$.

Bài 4: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nó tăng gấp n lần nếu cộng mỗi chữ số của nó với n (n là số tự nhiên, có thể gồm một hoặc nhiều chữ số).

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, ta có: $\overline{abc} + 100n + 10n + n = \overline{abc}.n$

Suy ra: $\overline{abc} : n$.

Đặt $\overline{abc} = n.k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì: $n.k + 111.n = n.k.n$

Chia cả hai vế cho n khác 0 ta được $k + 111 = n.k$, tức là $111 = k(n - 1)$. Như vậy k và $n - 1$ là ước của 111

Bài toán có 4 đáp số:

k	$n - 1$	n	$\overline{abc}$
1	111	112	112
3	37	38	114
37	3	4	148
111	1	2	222

⇒ **DẠNG 2: TÌM SỐ TỰ NHIÊN KHI BIẾT MỘT SỐ YẾU TỐ TRONG ĐÓ CÓ CÁC DỮ KIỆN VỀ ƯCLN VÀ BCNN.**

Bài 1 : Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 84, UCLN của chúng bằng 6.

Gọi hai số phải tìm là a và b ($a \leq b$). Ta có $(a, b) = 6$ nên $a = 6a'$, $b = 6b'$ trong đó $(a', b') = 1$ ($a, a', b, b' \in \mathbb{N}$).

Do $a + b = 84$ nên $6(a' + b') = 84 \Rightarrow a' + b' = 14$. ($a' \leq b'$) ta được:

a'	1	3	5
b'	13	11	9

Do đó:

a	6	18	30
b	78	66	54

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên $a, b > 0$, biết $[a, b] = 240$ và $(a, b) = 16$.

$$\text{Từ } ab = (a, b)[a, b] = 240.16 = 3840$$

Giả sử $a \leq b$, vì $(a, b) = 16$ nên $a = 16m$, $b = 16n$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$(m, n) = 1 \text{ và } m \leq n \Rightarrow ab = 16m.16n = 256mn \text{ vì } ab = 3840 \text{ nên } 256mn = 3840 \Rightarrow mn = 15$$

Lập bảng:

m	n	a	b
1	15	16	240
3	5	48	80

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là : 16 và 240, 48 và 80.

Bài 3 : Tìm hai số tự nhiên $a, b > 0$, biết $ab = 216$ và $(a, b) = 6$.

Giả sử $a \leq b$, vì $(a, b) = 6$ nên $a = 6m, b = 6n$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$

$(m, n) = 1$ và $m \leq n \Rightarrow ab = 6m \cdot 6n = 36mn$ vì $ab = 216$ nên $36mn = 216 \Rightarrow mn = 6$

Lập bảng:

m	n	a	b
1	6	6	36
2	3	12	18

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là : 6 và 36, 12 và 18.

Bài 4 : Tìm hai số tự nhiên $a, b > 0$, biết $ab = 180, [a, b] = 60$.

Từ $ab = (a, b)[a, b] \Rightarrow (a, b) = \frac{ab}{[a, b]} = \frac{180}{60} = 3$.

Giả sử $a \leq b$, vì $(a, b) = 3$ nên $a = 3m, b = 3n$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$

$(m, n) = 1$ và $m \leq n \Rightarrow ab = 3m \cdot 3n = 9mn$ vì $ab = 180$ nên $9mn = 180 \Rightarrow mn = 20$

Lập bảng:

m	n	a	b
1	20	3	60
4	5	12	15

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là : 3 và 60, 12 và 15.

Bài 5: Tìm số tự nhiên a , biết rằng 398 chia cho a thì dư 38, còn 450 chia cho a thì dư 18.

Số 398 chia cho a dư 38 nên a là ước của $398 - 38 = 360$ và $a > 38$

Số 450 chia cho a dư 18 nên a là ước của $450 - 18 = 432$ và $a > 18$

Do đó a là ước chung của 398 và 450, đồng thời $a > 38$.

$ƯCLN(360;432) = 72$ mà $72 > 38$ nên $a = 72$.

Bài 6: Ba khối 6,7,8 theo thứ tự có 300 học sinh, 276 học sinh, 252 học sinh xếp hàng dọc để diễu hành sao cho số hàng dọc của mỗi khối như nhau. Có thể xếp nhiều nhất thành mấy hàng dọc để mỗi khối đều không có ai lẻ hàng? Khi đó ở mỗi khối có bao nhiêu hàng ngang?

Số hàng dọc nhiều nhất là $ƯCLN(300, 276, 252)$.

Đáp số: Xếp được nhiều nhất thành 12 hàng dọc, khi đó, khối 6 có 25 hàng ngang, khối 7 có 23 hàng ngang và khối 8 có 21 hàng ngang.

Bài 7: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho chia a cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự 2, 3, 4.

Gọi:

$$a = 3m + 2 \quad (m \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2a = 6m + 4, \text{ chia cho 3 dư 1}$$

$$a = 5n + 3 \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2a = 10n + 6, \text{ chia cho 5 dư 1}$$

$$a = 7p + 4 \quad (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2a = 14p + 8, \text{ chia cho 7 dư 1}$$

Do đó $2a - 1 \in BC(3, 5, 7)$. Để a nhỏ nhất thì $2a - 1$ là BCNN(3, 5, 7).

$$BCNN(3, 5, 7) = 105$$

$$2a - 1 = 105$$

$$2a = 106$$

$$a = 53$$

Bài 8: Một số tự nhiên chia cho 3 thì dư 1, chia cho 4 thì dư 2, chia cho 5 thì dư 3, chia cho 6 thì dư 4 và chia hết cho 13.

- ❖ Tìm số nhỏ nhất có tính chất trên.
- ❖ Tìm dạng chung của tất cả các số có tính chất trên.

- a. Gọi x là số phải tìm thì $x + 2$ chia hết cho 3, 4, 5, 6 nên $x + 2$ là BC(3, 4, 5, 6).
 $BCNN(3, 4, 5, 6) = 60$ nên $x + 2 = 60n$, do đó $x = 60n - 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
Ngoài ra x phải là số nhỏ nhất có tính chất trên và x phải chia hết cho 13.
Lần lượt cho n bằng 1, 2, 3.. ta thấy đến $n = 10$ thì $x = 598$ chia hết cho 13. Số nhỏ nhất phải tìm là 598.
- b. Số phải tìm phải thỏa mãn hai điều kiện: $x + 2$ chia hết cho 60(1), x chia hết cho 13 (2).
Từ (1) $\Rightarrow x + 182$ chia hết cho 60
Từ (2) $\Rightarrow x + 182$ chia hết cho 13
Vì $(13, 60) = 1$ nên $x + 182 = 780k$ hay $x = 780 - 182$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)
Với $k = 1$, giá trị nhỏ nhất của x bằng 598.

Bài 9: Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng 20, 25, 30 đều dư 15, nhưng xếp hàng 41 thì vừa đủ. Tính số người của đơn vị đó biết rằng số người chưa đến 1000.

Gọi số người của đơn vị là a (người) ($a \in \mathbb{N}$, $a \leq 1000$). Khi xếp hàng 20; 25; 30 đều dư 15 người.

Do đó: $(a - 15) \in BC(20, 25, 30)$.

$$\text{BCNN}(20, 25, 30) = 300$$

$$\diamond (a - 15) \in B(30) = \{0, 300, 600, 900, 1200, \dots\}$$

$$\diamond a \in \{15, 315, 615, 915, 1215, \dots\}$$

do khi xếp hàng 41 thì vừa đủ nên $a : 41$; $a \leq 1000$ nên $a = 615$

Đáp số: 615 người

Bài 10 : Tìm hai số tự nhiên $a, b > 0$, biết $a/b = 2,6$ và $(a, b) = 5$.

$$\text{Do } (a, b) = 5 \Rightarrow a = 5m, b = 5n \text{ với } m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1 \text{ nên } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} = 2,6 = \frac{13}{5}$$

Vì $(m, n) = 1$ nên $m = 13, n = 5$. Khi đó $a = 13.5 = 65, b = 5.5 = 25$.

Vậy hai số cần tìm là 65 và 25

d) Bài tập tự luyện:

Bài 1 : Tìm a, b biết $a/b = 4/5$ và $[a, b] = 140$.

Đặt $(a, b) = d \Rightarrow a = m.d, b = n.d$ với $m, n \in \mathbb{N}^*; (m, n) = 1$. Giả sử $a \leq b$ khi đó $m \leq n$.

$$\diamond \frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

Vì $(m, n) = 1$ nên $m = 4, n = 5$

Mặt khác $[a, b] = m.n.d \Rightarrow 140 = 4.5.d \Rightarrow d = 7$

Lúc đó $a = 4.7 = 28; b = 5.7 = 35$

Vậy hai số cần tìm là 28 và 35.

Bài 2 : Tìm hai tự nhiên $a, b > 0$, biết $a + b = 128$ và $(a, b) = 16$.

Giả sử $a \leq b$, vì $(a, b) = 16$ nên $a = 16m$, $b = 16n$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$(m, n) = 1 \text{ và } m \leq n \Rightarrow a + b = 16m + 16n = 128 \Rightarrow 16(m + n) = 128 \Rightarrow (m + n) = 128 : 16 = 8$$

Lập bảng:

m	n	a	b
1	7	16	112
3	5	48	80

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là : 16 và 112, 48 và 80.

Bài 3 : Tìm a, b biết $a + b = 42$ và $[a, b] = 72$.

Đặt $(a, b) = d \Rightarrow a = m.d$, $b = n.d$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$; $(m, n) = 1$. Giả sử $a \leq b$ khi đó $m \leq n$. do đó $a + b = d(m + n) = 42$ (1)

$$[a, b] = dmn = 72 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d \in \text{ƯC}(42, 72)$ mà $\text{ƯCLN}(42, 72) = 6 \Rightarrow d \in \text{Ư}(6)$ nên $d \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Lần lượt thay các giá trị của d vào (1), (2) để tính m, n ta thấy chỉ có $d = 6$ là thỏa mãn.

❖ $m + n = 7$ và $m.n = 12$

chỉ có $m = 3$ và $n = 4$ là thỏa mãn. Khi đó $a = 18$ và $b = 24$. Vậy hai số cần tìm là 18 và 24

Bài 4 : Tìm a, b biết $a - b = 7$, $[a, b] = 140$.

Đặt $(a, b) = d \Rightarrow a = m.d$, $b = n.d$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$; $(m, n) = 1$. Giả sử $a > b$ khi đó $m > n$. do đó $a - b = d(m - n) = 7$ (1)

$$[a, b] = dm n = 140 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d \in \text{ƯC}(7, 140)$ mà $\text{ƯCLN}(7, 140) = 7 \Rightarrow d \in \text{Ư}(7)$ nên $d \in \{1, 7\}$.

Lần lượt thay các giá trị của d vào (1), (2) để tính m, n ta thấy chỉ có $d = 7$ là thỏa mãn.

❖ $m - n = 1$ và $m.n = 20$

chỉ có $m = 5$ và $n = 4$ là thỏa mãn. Khi đó $a = 35$ và $b = 28$. Vậy hai số cần tìm là 35 và 28

Bài 5: Tìm số tự nhiên a , biết rằng 350 chia cho a thì dư 14, còn 320 chia cho a thì dư 26.

Số 350 chia cho a dư 14 nên a là ước của $350 - 14 = 336$ và $a > 14$

Số 320 chia cho a dư 26 nên a là ước của $320 - 26 = 294$ và $a > 26$

Do đó a là ước chung của 336 và 294, đồng thời $a > 26$.

$\text{ƯCLN}(336; 294) = 42$ mà $42 > 26$ nên $a = 42$.

Bài 6: Người ta muốn chia 200 bút bi, 240 bút chì, 320 tẩy thành một số phần thưởng như nhau. Hỏi có thể chia được nhiều nhất là bao nhiêu phần thưởng, mỗi phần thưởng có bao nhiêu bút bi, bút chì, tẩy?

Số phần thưởng phải tìm là $\text{ƯCLN}(200, 240, 320) = 40$. Mỗi phần thưởng có 5 bút bi, 6 bút chì và 8 tẩy.

Bài 7: Tìm số tự nhiên nhỏ hơn 500, sao cho chia nó cho 15, cho 35 được các số dư theo thứ tự là 8 và 13.

Gọi số phải tìm là n , ta tìm được $n + 22 \in B(15, 35)$.

Đáp số: 83; 188; 293; 398

Bài 8: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 8, 10, 15, 20 được số dư theo thứ tự 5, 7, 12, 17 và chia hết cho 41.

Đáp số: 4797

Bài 9: Hai lớp 6A, 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Trong lớp 6A, một bạn thu được 26kg, còn lại mỗi bạn thu 11kg. Trong lớp 6B, một bạn thu được 25kg, còn lại mỗi bạn thu 10kg. Tính số học sinh mỗi lớp, biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng từ 200kg đến 300kg.

Gọi số giấy mỗi lớp thu được là $x(\text{kg})$ thì $x - 26 : 11$, $x - 25 : 10$ do đó $x - 15 \in BC(11, 10)$, ngoài ra $200 \leq x \leq 300$.

Ta tìm được $x = 235$. Do đó lớp 6 A có 20 học sinh, lớp 6 B có 22 học sinh

⇒ DẠNG 3: TÌM ƯCLN CỦA CÁC BIỂU THỨC SỐ

Bài 1: Tìm ƯCLN của $2n - 1$ và $9n + 4$ (với n thuộc số tự nhiên).

Gọi d là ước chung của $2n - 1$ và $9n + 4 \Rightarrow 2n - 1 : d$ và $9n + 4 : d$
 $\Rightarrow 2(9n + 4) - 9(2n - 1) : d$ hay $18n + 8 - 18n + 9 = 17 : d \Rightarrow d \in \{1; 17\}$

Nếu $d = 17$ thì ta có :

$$2n - 1 \vdots 17 \Leftrightarrow 2n - 1 - 17 = 2n - 18 \vdots 17 \Rightarrow 2(n - 9) \vdots 17$$

$$\Rightarrow n - 9 \vdots 17 \text{ vì } (2, 17) = 1. \text{ Vậy } n - 9 = 17k, (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow n = 17k + 9, (k \in \mathbb{N})$$

Thử lại :

$$\text{Với } n = 17k + 9 \text{ thì } 2n - 1 \vdots 17 \text{ và } 9n + 4 = 9(17k + 9) + 4 = 9 \cdot 17k + 85 \vdots 17.$$

$$\text{Do đó } \text{ƯCLN}(2n - 1; 9n + 4) = 17$$

Nếu $n \neq 17k + 9$ thì $2n - 1$ không chia hết cho 17

$$\text{Do đó } \text{ƯCLN}(2n - 1; 9n + 4) = 1.$$

Đáp số : $\text{ƯCLN}(2n - 1; 9n + 4) = 17$ khi $n = 17k + 9 (k \in \mathbb{N})$

$$\text{ƯCLN}(2n - 1; 9n + 4) = 1. \text{ khi } n \neq 17k + 9 (k \in \mathbb{N})$$

Bài 2: Tìm ƯCLN của $7n + 3$ và $8n - 1$ (với n thuộc số tự nhiên).

Gọi d là ước chung của $8n - 1$ và $7n + 3 \Rightarrow 8n - 1 \vdots d$ và $7n + 3 \vdots d$

$$\Rightarrow 8(7n + 3) - 7(8n - 1) \vdots d \text{ hay } 56n + 24 - 56n + 7 = 31 \vdots d \Rightarrow d \in \{1; 31\}$$

Nếu $d = 31$ thì ta có :

$$8n - 1 \vdots 31 \Leftrightarrow 8n - 1 - 31 = 8n - 32 \vdots 31 \Rightarrow 8(n - 4) \vdots 31$$

$$\Rightarrow n - 4 \vdots 31 \text{ vì } (8, 31) = 1. \text{ Vậy } n - 4 = 31k, (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow n = 31k + 4, (k \in \mathbb{N})$$

Thử lại :

$$\text{Với } n = 31k + 4 \text{ thì } 8n - 1 \vdots 31 \text{ và } 7n + 3 = 7(31k + 4) + 3 = 9 \cdot 31k + 31 \vdots 31.$$

$$\text{Do đó } \text{ƯCLN}(8n - 1; 7n + 3) = 31$$

Nếu $n \neq 31k + 4$ thì $8n - 1$ không chia hết cho 31

$$\text{Do đó } \text{ƯCLN}(8n - 1; 7n + 3) = 1.$$

Đáp số : $\text{ƯCLN}(8n - 1; 7n + 3) = 31$ khi $n = 31k + 4 (k \in \mathbb{N})$

$$\text{ƯCLN}(8n - 1; 7n + 3) = 1. \text{ khi } n \neq 31k + 4 (k \in \mathbb{N})$$

⇒ **DẠNG 4: VẬN DỤNG THUẬT TOÁN Ô – CLIT TÌM ƯCLN**

e) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm ƯCLN(702, 306) bằng cách phân tích ra thừa số nguyên tố và bằng thuật toán Ôclit.

Đáp số: 18

Bài 2: Dùng thuật toán Ôclit để tìm

a/ ƯCLN(318, 214)

b/ ƯCLN(6756, 2463)

Đáp số: a/ 2; b/ 1

Bài 3: Tìm ƯCLN (A, B) biết rằng A là số gồm 1991 chữ số 2, B là số gồm 8 chữ số 2.

Ta có 1991 chia cho 8 dư 7; còn 8 chia cho 7 dư 1.

Theo thuật toán Ôclit

$$\begin{aligned} \text{ƯCLN}(a, b) &= \text{ƯCLN} \left(\underbrace{222 \dots 2}_{1991 \text{ chữ số}} ; \underbrace{222 \dots 2}_8 \right) = \text{ƯCLN} \left(\underbrace{222 \dots 2}_8 ; \underbrace{222 \dots 2}_7 \right) = \text{ƯCLN} \left(\underbrace{222 \dots 2}_7 \right) = 2 \end{aligned}$$

Bài 4: Tìm ƯCLN của các số sau theo thuật toán Ôclit : (187231, 165148)

Để tìm USCLN của hai số tự nhiên a và b bất kỳ ta dùng cách chia liên tiếp hay còn gọi là thuật toán Oclit như sau:

Bước 1: Lấy 187231 chia cho 165148 :

187231 không chia hết cho 165148

làm tiếp bước 2.

Bước 2: Lấy 165148 chia cho số dư 22083 được 7 dư 10567

làm tiếp bước 3.

Bước 3: Lấy 22083 chia cho số dư 10567 được 2 dư :949

làm tiếp bước 4.

Bước 4: Lấy 10567 chia cho số dư 949 được 11 dư :128

làm tiếp bước 5

Bước 5: Lấy 949 chia cho số dư 128 được 7 dư :53

làm tiếp bước 6

Bước 6: Lấy 128 chia cho số dư 53 được 2 dư :22

làm tiếp bước 7

Bước 7: Lấy 53 chia cho số dư 22 được 2 dư :9

làm tiếp bước 8

Bước 8: Lấy 22 chia cho số dư 9 được 2 dư :4

làm tiếp bước 9

bước 9: Lấy 9 chia cho số dư 4 được 2 dư :1

làm tiếp bước 10

Bước 10: Lấy 4 chia cho số dư 1 được 4 dư :0

Vậy $\text{UCLN}(187231, 165148) = 1$

CHUYÊN ĐỀ 6: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

DẠNG 1: TÌM MỘT CHỮ SỐ TẬN CÙNG

TÍNH CHẤT 1:

a. LÝ THUYẾT:

- I. Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- II. Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- III. Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.
- IV. Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.

Việc chứng minh tính chất trên không cần thiết với lớp 6. Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a .

- Nếu chữ số tận cùng của a là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 3, 7, 9, vì $a^m = a^{4n+r} = a^{4n} \cdot a^r$ với $r = 0, 1, 2, 3$ nên từ tính chất 1c $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r .

- Nếu chữ số tận cùng của a là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên, từ tính chất 1d $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6.a^r$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Bài toán 1 : Tìm chữ số tận cùng của các số :

a) 7^{99} b) 14^{1414} c) 4^{567}

Lời giải :

a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4 :

$99 - 3 = 96$ chia hết cho 4

$\Rightarrow 99 = 4k + 3$ (k thuộc $\mathbb{N}$) $\Rightarrow 7^{99} = 7^{4k+3} = 7^{4k} \cdot 7^3$

Do 7^{4k} có chữ số tận cùng là 1 (theo tính chất 1c) $\Rightarrow 7^{99}$ có chữ số tận cùng là 3.

b) Dễ thấy $1414 - 2 = 1412$ chia hết cho 4 $\Rightarrow 1414 = 4k + 2$ (k thuộc $\mathbb{N}$) $\Rightarrow$ theo tính chất 1d thì $14^{1414} = 14^{4k+2} = 14^{4k} \cdot 14^2$ có chữ số tận cùng là 6.

c) Ta có $567 - 3$ chia hết cho 4 $\Rightarrow 567 = 4k + 3$ (k thuộc $\mathbb{N}$)

$\Rightarrow 4^{567} = 4^{4k+3} = 4^{4k} \cdot 4^3$, theo tính chất 1d, 4^{4k} có chữ số tận cùng là 6 nên 4^{567} có chữ số tận cùng là 4.

Tính chất sau được $\Rightarrow$ từ tính chất 1.

TÍNH CHẤT 2:

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 1$ (n thuộc $\mathbb{N}$) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Bài toán 2 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$.

Lời giải :

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+1}$, n thuộc $\{2, 3, \dots, 2004\}$).

Theo tính chất 2, mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng :

$$(2 + 3 + \dots + 9) + 199.(1 + 2 + \dots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + \dots + 9) + 9 = 9009.$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Từ tính chất 1 tiếp tục $\Rightarrow$ tính chất 3.

TÍNH CHẤT 3:

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Bài toán 3 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$.

Lời giải :

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc $\{2, 3, \dots, 2004\}$).

Theo tính chất 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8 ; 3^7 có chữ số tận cùng là 7 ; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4 ; ...

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng : $(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 = 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019$.

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.

* Trong một số bài toán khác, việc tìm chữ số tận cùng dẫn đến lời giải khá độc đáo.

Bài toán 4 : Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Lời giải : 1995^{2000} tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5. Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không ?

Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6 $\Rightarrow n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7 $\Rightarrow n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Sử dụng tính chất “*một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9*”, ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán 5 : Chứng minh rằng các tổng sau không thể là số chính phương :

a) $M = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn)

b) $N = 2004^{2004k} + 2003$

Sử dụng tính chất “*một số nguyên tố lớn hơn 5 chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 1 ; 3 ; 7 ; 9*”, ta tiếp tục giải quyết được bài toán :

Bài toán 6 : Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng : $p^{8n} + 3.p^{4n} - 4$ chia hết cho 5.

CÁC BẠN HÃY GIẢI CÁC BÀI TẬP SAU

Bài 1 : Tìm số dư của các phép chia :

 $2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2003^{8005}$ cho 5

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 1$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

a. $2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2003^{8005} = (2+3+4+5+6+7+8+9) + 199.(1+2+3+4+5+6+7+8+9) + (1+2+3) = 200.9.10:2 + 5 = 9000 + 5 = 9005$

Vậy $2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2003^{8005}$ chia cho 5 dư 0

 $2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2003^{8007}$ cho 5

Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3.

Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2.

Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

a. Như vậy tổng của $2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2003^{8007}$ có tận cùng bằng tổng của $(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + (1 + 8 + 7) = 200.(1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 15 = 200. \frac{9.(9+1)}{2} + 15 = 9015$. Vậy chữ số tận cùng của tổng $2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2003^{8007}$ là 5 $\Rightarrow 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2003^{8007}$ chia cho 5 dư 0.

Bài 2 : Tìm chữ số tận cùng của X, Y :

$$X = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + \dots + 2004^{8010}$$

$$Y = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \dots + 2004^{8016}$$

Bài 3 : Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau :

$$U = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2005^{8013}$$

$$V = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2005^{8015}$$

Bài 4 : Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn :

$$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 2004.$$

* Các bạn thử nghiên cứu các tính chất và phương pháp tìm nhiều hơn một chữ số tận cùng của một số tự nhiên, chúng ta sẽ tiếp tục trao đổi về vấn đề này.

DẠNG 2: TÌM HAI CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Nhận xét : Nếu $x \in \mathbb{N}$ và $x = 100k + y$, trong đó $k, y \in \mathbb{N}$ thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y .

Hiển nhiên là $y \leq x$. Như vậy, để đơn giản việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x thì thay vào đó ta đi tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên y (nhỏ hơn).

Rõ ràng số y càng nhỏ thì việc tìm các chữ số tận cùng của y càng đơn giản hơn.

Từ nhận xét trên, ta đề xuất phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :

Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m : 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} : 25$.

Viết $m = p^n + q$ ($p, q \in \mathbb{N}$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q : 4$ ta có :

$$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q.$$

Vì $a^{n-1} : 25 \Rightarrow a^{pn} - 1 : 25$. Mặt khác, do $(4, 25) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1) : 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^q . Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^q .

Trường hợp 2 : Nếu a lẻ, gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} : 100$.

Viết $m = u^n + v$ ($u, v \in \mathbb{N}, 0 \leq v < n$) ta có :

$$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v.$$

Vì $a^n - 1 : 100 \Rightarrow a^{un} - 1 : 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^v . Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^v .

Trong cả hai trường hợp trên, chìa khóa để giải được bài toán là chúng ta phải tìm được số tự nhiên n . Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của a^q và a^v .

Bài toán 7 :

Tìm hai chữ số tận cùng của các số :

a) 2^{2003} b) 7^{99}

Lời giải : a) Do 2^{2003} là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 \vdots 25$.

Ta có $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 \vdots 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) \vdots 25 \Rightarrow 2^3(2^{20} - 1) \vdots 100$. Mặt khác :

$$2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3((2^{20})^{100} - 1) + 2^3 = 100k + 8 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

b) Do 7^{99} là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho $7^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $7^4 = 2401 \Rightarrow 7^4 - 1 \vdots 100$.

Mặt khác : $9^9 - 1 \vdots 4 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$

Vậy $7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7 \quad (q \in \mathbb{N})$ tận cùng bởi hai chữ số 07.

Bài toán 8 :

Tìm số dư của phép chia 3^{517} cho 25.

Lời giải : Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 3^{517} . Do số này lẻ nên theo trường hợp 2, ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $3^{10} = 9^5 = 59049 \Rightarrow 3^{10} + 1 \vdots 50 \Rightarrow 3^{20} - 1 = (3^{10} + 1)(3^{10} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác : $5^{16} - 1 \vdots 4 \Rightarrow 5(5^{16} - 1) \vdots 20$

$$\Rightarrow 5^{17} = 5(5^{16} - 1) + 5 = 20k + 5 \Rightarrow 3^{517} = 3^{20k+5} = 3^5(3^{20k} - 1) + 3^5 = 3^5(3^{20k} - 1) + 243,$$

có hai chữ số tận cùng là 43.

Vậy số dư của phép chia 3^{517} cho 25 là 18.

Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp.

Trước tiên, ta tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng. Cuối cùng, dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.

Các thí dụ trên cho thấy rằng, nếu $a = 2$ hoặc $a = 3$ thì $n = 20$; nếu $a = 7$ thì $n = 4$.

Một câu hỏi đặt ra là : Nếu a bất kì thì n nhỏ nhất là bao nhiêu ? Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 4 : Nếu $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{20} - 1 : 25$.

Bài toán 9 : Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng :

a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + \dots + 2004^{2002}$

b) $S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + \dots + 2004^{2003}$

Lời giải :

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4 ; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4 ; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ ta có $a^{100} - 1 : 25$.

Vậy với mọi $a \in \mathbb{N}$ ta có $a^2(a^{100} - 1) : 100$.

Do đó $S_1 = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$.

Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$. áp dụng công thức :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 2004^2 = 2005 \times 4009 \times 334 = 2684707030, \text{ tận cùng là } 30.$$

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a, $S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 + 2004^3$. Vì thế, hai chữ số tận cùng của tổng S_2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2004^3$.

áp dụng công thức :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + 2004^3 = (2005 \times 1002)^2 = 4036121180100, \text{ tận cùng là } 00.$$

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_2 là 00.

Trở lại bài toán 5 (TTT2 số 15), ta thấy rằng có thể sử dụng việc tìm chữ số tận cùng để nhận biết một số không phải là số chính phương. Ta cũng có thể nhận biết điều đó thông qua việc tìm hai chữ số tận cùng.

Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 5 : Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu :

- + A có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 ;
- + A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn ;
- + A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ ;
- + A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2 ;
- + A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

Bài toán 10 : Cho $n \in \mathbb{N}$ và $n - 1$ không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.

Lời giải : Do $n - 1$ không chia hết cho 4 nên $n = 4k + r$ ($r \in \{0, 2, 3\}$). Ta có $7^4 - 1 = 2400 : 100$. Ta viết $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r(7^{4k} - 1) + 7^r + 2$.

Vậy hai chữ số tận cùng của $7^n + 2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r + 2$

($r = 0, 2, 3$) nên chỉ có thể là 03, 51, 45. Theo tính chất 5 thì rõ ràng $7^n + 2$ không thể là số chính phương khi n không chia hết cho 4.

DẠNG 3: TÌM BA CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Nhận xét : Tương tự như trường hợp tìm hai chữ số tận cùng, việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.

Nếu $x = 1000k + y$, trong đó $k ; y \in \mathbb{N}$ thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y ($y \leq x$).

Do $1000 = 8 \times 125$ mà $(8, 125) = 1$ nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :

Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m : 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho

$$a^n - 1 : 125.$$

Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in \mathbb{N}$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q : 8$ ta có :

$$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q.$$

Vì $a^n - 1 : 125 \Rightarrow a^{pn} - 1 : 125$. Mặt khác, do $(8, 125) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1) : 1000$.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^q . Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^q .

Trường hợp 2 : Nếu a lẻ, gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1 : 1000$.

Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in \mathbb{N}, 0 \leq v < n$) ta có :

$$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v.$$

Vì $a^n - 1 : 1000 \Rightarrow a^{un} - 1 : 1000$.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^v . Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^v .

Tính chất sau được suy ra từ tính chất 4.

Tính chất 6 :

Nếu $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{100} - 1 : 125$.

Chứng minh : Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

$$\Rightarrow a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1 : 5. \text{ Vậy } a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1) : 125.$$

Bài toán 11 :

Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101} .

Lời giải : Theo *tính chất 6*, do $(123, 5) = 1 \Rightarrow 123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác :

$$123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1) \Rightarrow 123^{100} - 1 \text{ chia hết cho } 8 \quad (2).$$

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra : $123^{100} - 1$ chia hết cho 1000

$$\Rightarrow 123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài toán 12 :

Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$.

Lời giải : Theo *tính chất 6*, do $(9, 5) = 1 \Rightarrow 9^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Tương tự bài 11, ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra : $9^{100} - 1 : 1000$

$$\Rightarrow 3^{399 \dots 98} = 9^{199 \dots 9} = 9^{100p + 99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99} \quad (p, q \in \mathbb{N}).$$

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99} .

Lại vì $9^{100} - 1 : 1000 \Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9 \Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (để kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân $\overline{779} \times 9 = \overline{\dots 001}$ để xác định $\overline{779} = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ là 889.

Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước : Tìm dư của phép chia số đó cho 125, từ đó suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng, cuối cùng kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.

Bài toán 13 :

Tìm ba chữ số tận cùng của 2004^{200} .

Lời giải : do $(2004, 5) = 1$ (tính chất 6)

$\Rightarrow 2004^{100}$ chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200} = (2004^{100})^2$ chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200}$ chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Do 2004^{200} chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

Từ phương pháp tìm hai và ba chữ số tận cùng đã trình bày, chúng ta có thể mở rộng để tìm nhiều hơn ba chữ số tận cùng của một số tự nhiên.

SAU ĐÂY LÀ MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG :

Bài 1 : Chứng minh $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài 2 : Tìm hai chữ số tận cùng của :

a) 3^{999} b) 11^{1213}

Bài 3 : Tìm hai chữ số tận cùng của :

$$S = 2^3 + 2^{23} + \dots + 2^{40023}$$

Bài 4 : Tìm ba chữ số tận cùng của :

$$S = 1^{2004} + 2^{2004} + \dots + 2003^{2004}$$

Bài 5 : Cho $(a, 10) = 1$. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a .

Bài 6 : Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Hãy tìm ba chữ số tận cùng của A^{200} .

Bài 7 : Tìm ba chữ số tận cùng của số :

$$1993^{19941995 \dots 2000}$$

Bài 8 : Tìm sáu chữ số tận cùng của 5^{21} .

CHUYÊN ĐỀ 7: VỀ SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ - SỐ CHÍNH PHƯƠNG

a. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

❖ LÝ THUYẾT SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ:

a. Định nghĩa:

- a. Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
- b. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.

b. Tính chất:

- a. Để kết luận số a là số nguyên tố ($a > 1$), chỉ cần chứng tỏ không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a .
- b. Để chứng tỏ một số tự nhiên $a > 1$ là hợp số, chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và a .
- c. Cách xác định số lượng các ước của một số:

Nếu số M phân tích ra thừa số nguyên tố được $M = a^x \cdot b^y \cdot \dots \cdot c^z$ thì số lượng các ước của M là $(x + 1)(y + 1) \dots (z + 1)$.

- d. Nếu tích $a.b$ chia hết cho số nguyên tố p thì hoặc $a:p$ hoặc $b:p$.
- e. Đặc biệt nếu $a^n : p$ thì $a:p$
- f. Ước nhỏ nhất khác 1 của một hợp số là một số nguyên tố và bình phương lên không vượt quá nó.
- g. Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng: $4n \pm 1$
- h. Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng: $6n \pm 1$
- i. Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị
- j. Một số bằng tổng các ước của nó (Không kể chính nó) gọi là ‘Số hoàn chỉnh’.

Ví dụ: $6 = 1 + 2 + 3$ nên 6 là một số hoàn chỉnh

❖ SỐ CHÍNH PHƯƠNG:

⇒ **ĐỊNH NGHĨA:** Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

⇒ **TÍNH CHẤT:**

- ❖ Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.
- ❖ Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.
- ❖ Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $4n$ hoặc $4n+1$. Không có số chính phương nào có dạng $4n+2$ hoặc $4n+3$ ($n \in \mathbb{N}$).
- ❖ Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $3n$ hoặc $3n+1$. Không có số chính phương nào có dạng $3n+2$ ($n \in \mathbb{N}$).
- ❖ Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
- ❖ Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.
- ❖ Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.
- ❖ Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.
- ❖ Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.
- ❖ Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25.
- ❖ Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

⇒ **Một số bài toán về số chính phương:**

- a) Phương pháp chứng minh một số là số chính phương:
 - a) Dựa vào định nghĩa: Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên. Dựa vào định nghĩa này, ta có thể định hướng giải quyết các bài toán.
 - b) Dựa vào tính chất đặc biệt: **“Nếu a, b là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau và $a.b$ là một số chính phương thì a và b đều là các số chính phương”.**
- b) Phương pháp chứng minh một số không phải là số chính phương:
 - a) Nhìn chữ số tận cùng: số chính phương phải có chữ số tận cùng là một trong các chữ số **0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9**. Nếu số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì phải chia hết cho p^2 .
 - a) Dùng tính chất của số dư
 - b) “Kẹp” số giữa hai số chính phương “liên tiếp” Các em có thể thấy rằng : Nếu n là số tự nhiên và số tự nhiên k thỏa mãn $n^2 < k < (n+1)^2$ thì k không là số chính phương.

b. BÀI TẬP VẬN DỤNG

SỞ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ

Bài 1: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số nguyên tố đó là số chẵn hay lẻ?

Bài 2: Tổng của ba số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong ba số nguyên tố đó.

Bài 3: Tìm bốn số nguyên tố liên tiếp, sao cho tổng của chúng là số nguyên tố.

Bài 4: Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2003 được không?

Bài 5: Tìm hai số nguyên tố, sao cho tổng và tích của chúng đều là số nguyên tố.

Bài 6: Tìm số nguyên tố có ba chữ số, biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được một số là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 7: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục và số đó viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp.

Bài 8: Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm số dư r .

Bài 9: Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị. Tìm hai số nguyên tố sinh đôi nhỏ hơn 50.

Bài 10: Tìm số nguyên tố, biết rằng số đó bằng tổng của hai chữ số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố.

Bài 11: Tìm số nguyên tố p , sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

 $p + 2$ và $p + 10$

 $p + 10$ và $p + 14$

 $p + 10$ và $p + 20$

 $p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14$

Bài 12: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết $p + 2$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $p + 1$ chia hết cho 6.

Bài 13: Cho $a + b = p$, p là một số nguyên tố. Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

Bài 14: Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng?

Bài 15: Số $a^4 + a^2 + 1$ có thể là một số nguyên tố hay không?

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

c) Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương

Bài 1: Chứng minh với mọi số tự nhiên n thì $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.

Bài 2: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

Bài 3: Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; ...

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa các chữ số đứng trước và đứng sau nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng : Nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì $m - n$ và $4m + 4n + 1$ đều là số chính phương.

a) Dạng 2 : Chứng minh một số không phải là số chính phương

Bài 1: Chứng minh số : $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không phải là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh một số có tổng các chữ số là 2006 không phải là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh số : $n = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$ không là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh số 4014025 không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh $A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

Bài 10: Giả sử $N = 1.3.5.7 \dots 2007.2011$

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N - 1$, $2N$ và $2N + 1$ không có số nào là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Bài 12: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

b) Dạng 3: Tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị là một số chính phương

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương

- a) $n^2 + 2n + 12$ b) $n(n + 3)$
c) $13n + 3$ d) $n^2 + n + 1589$

Bài 2: Tìm a để các số sau là những số chính phương

- a) $a^2 + a + 43$
b) $a^2 + 81$
c) $a^2 + 31a + 1984$

Bài 3: Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Bài 4: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n + 1$ và $3n + 1$ đều là các số chính phương.

Bài 6: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương

c) **Dạng 4: TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

Bài 1: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B . Hãy tìm các số A và B .

Bài 2: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau một đơn vị.

Bài 3: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Bài 4: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Bài 5: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Bài 6: Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ

Bài 1: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số nguyên tố đó là số chẵn hay lẻ?

HƯỚNG DẪN:

Ta thấy trong 25 số nguyên tố có 1 số chẵn còn lại là 24 số lẻ. Tổng của 24 số lẻ là một số chẵn nên tổng của 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

Bài 2: Tổng của ba số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong ba số nguyên tố đó.

HƯỚNG DẪN:

Vì tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012, nên trong 3 số nguyên tố đó tồn tại ít nhất một số nguyên tố chẵn. Mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2 và là số nguyên tố nhỏ nhất. Vậy số nguyên tố nhỏ nhất trong 3 số nguyên tố đó là 2

Bài 3: Tìm bốn số nguyên tố liên tiếp, sao cho tổng của chúng là số nguyên tố.

HƯỚNG DẪN:

Tổng của 4 số nguyên tố là một số nguyên tố $\Rightarrow$ tổng của 4 số nguyên tố là 1 số lẻ $\Rightarrow$ trong 4 số đó tồn tại ít nhất một số nguyên tố chẵn. Mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2. Vậy 4 số nguyên tố cần tìm là: 2; 3; 5; 7

Bài 4: Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2003 được không?

HƯỚNG DẪN:

Vì tổng của 2 số nguyên tố bằng 2003, nên trong 2 số nguyên tố đó tồn tại 1 số nguyên tố chẵn. Mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2. Do đó số nguyên tố còn lại là 2001. Do 2001 chia hết cho 3 và $2001 > 3$. Suy ra 2001 không phải là số nguyên tố. $\Rightarrow$ Tổng của hai số nguyên tố không thể bằng 2003.

Bài 5: Tìm hai số nguyên tố, sao cho tổng và hiệu của chúng đều là số nguyên tố.

HƯỚNG DẪN:

Gọi a, b, c, d là các số nguyên tố. ($a > b$)

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a - b = c \\ a + b = d \end{cases} (*) \Rightarrow c + b = d - b$

Từ (*) $\Rightarrow a > 2$, a là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow c + b$ và $d - b$ là số lẻ. Do b, c, d đều là số nguyên tố nên để $c + b$ và $d - b$ là số lẻ thì $\Rightarrow b$ chẵn. Vậy $b = 2$

a. Bài toán đưa về dạng tìm một số nguyên tố a sao cho $a - 2$ và $a + 2$ cũng là số nguyên tố.

- Nếu $a = 5 \Rightarrow a - 2 = 3; a + 2 = 7$ đều là số nguyên tố
- Nếu $a \neq 5$. Xét 2 trường hợp
 - + a chia 3 dư 1 $\Rightarrow a + 2$ chia hết cho 3 : không là số nguyên tố
 - + a chia 3 dư 2 $\Rightarrow a - 2$ chia hết cho 3: không là số nguyên tố
 Vậy chỉ có số nguyên tố a duy nhất thoả mãn là 5.
 Hai số nguyên tố cần tìm là 5; 2

Bài 6: Tìm số nguyên tố có ba chữ số, biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được một số là lập phương của một số tự nhiên.

HƯỚNG DẪN:

Gọi số tự nhiên đó là a .

Ta có $10^3 = 1000; 5^3 = 125 \Rightarrow 125 \leq a^3 < 1000 \Rightarrow 5 \leq a < 10$

Ta có bảng sau:

a	5	6	7	8	9
a^3	125	216	343	512	729
Số cần tìm	521	612	343	215	927
Kết luận	TM	loại	loại	loại	loại

Vậy số cần tìm là 521

Bài 7: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục và số đó viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp.

Bài 8: Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm số dư r .

HƯỚNG DẪN:

Ta có:

$$p = 42.k + r = 2.3.7.k + r$$

Vì r là hợp số và $r < 42$ nên r phải là tích của 2 số $r = x.y$

x và y không thể là 2, 3, 7 và cũng không thể là số chia hết cho 2, 3, 7 được vì nếu thế thì p không là số nguyên tố.

Vậy x và y có thể là các số trong các số $\{5, 11, 13, \dots\}$

Nếu $x=5$ và $y=11$ thì $r = x.y = 55 > 42$

Vậy chỉ còn trường hợp $x = 5, y = 5$. Khi đó $r = 25$

Bài 9: Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị. Tìm hai số nguyên tố sinh đôi nhỏ hơn 50.

HƯỚNG DẪN:

Các số nguyên tố sinh đôi nhỏ hơn 50 là: 5 và 7; 11 và 13; 17 và 19; 29 và 31; 41 và 43.

Bài 10: Tìm số nguyên tố, biết rằng số đó bằng tổng của hai chữ số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố.

Giả sử a, b, c, d, e là các số nguyên tố ($d > e$)

Theo bài ra ta có: $a = b + c = d - e$ (*)

Từ (*) $\Rightarrow a > 2 \Rightarrow a$ là số nguyên tố lẻ

❖ $b + c = d - e$ là số lẻ.

do b, d là các số nguyên tố $\Rightarrow b, d$ là số lẻ $\Rightarrow c, e$ là số chẵn.

❖ $c = e = 2$ (do e, c là các số nguyên tố)

❖ $a = b + c = d - 2 \Rightarrow d = b + 4$

vậy ta cần tìm số nguyên tố b sao cho $b + 2, b + 4$ cũng là số nguyên tố

❖ $b = 3$

Vậy số nguyên tố cần tìm là 5

Bài 11: Tìm số nguyên tố p , sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a. $p + 2$ và $p + 10$

▪ Nếu $p = 2$ thì $p + 2 = 4$ và $p + 10 = 12$ đều không phải là số nguyên tố.

▪ Nếu $p \geq 3$ thì số nguyên tố p có một trong 3 dạng : $3k, 3k + 1, 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

+ Nếu $p = 3k \Rightarrow p = 3; p + 2 = 5; p + 10 = 13$ đều là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 2 = 3k + 3$ chia hết cho 3: không là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 10 = 3k + 12$ chia hết cho 3: không là số nguyên tố

Vậy $p = 3$

b. $p + 10$ và $p + 14$

Nếu $p = 2$ thì $p + 10 = 12$ và $p + 14 = 16$ đều không phải là số nguyên tố.

Nếu $p \geq 3$ thì số nguyên tố p có một trong 3 dạng : $3k, 3k + 1, 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

+ Nếu $p = 3k \Rightarrow p = 3; p + 10 = 13; p + 14 = 17$ đều là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 14 = 3k + 15$ chia hết cho 3: không là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 10 = 3k + 12$ chia hết cho 3: không là số nguyên tố

Vậy $p = 3$

c. $p + 10$ và $p + 20$

Nếu $p = 2$ thì $p + 10 = 12$ và $p + 20 = 22$ đều không phải là số nguyên tố.

Nếu $p \geq 3$ thì số nguyên tố p có một trong 3 dạng : $3k, 3k + 1, 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

+ Nếu $p = 3k \Rightarrow p = 3; p + 10 = 13; p + 20 = 23$ đều là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 20 = 3k + 21$ chia hết cho 3: không là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 10 = 3k + 12$ chia hết cho 3: không là số nguyên tố

Vậy $p = 3$

d. $p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14$

+ Nếu $p = 2 \Rightarrow p + 2 = 4$ (loại)

+ Nếu $p = 3 \Rightarrow p + 6 = 9$ (loại)

+Nếu $p = 5 \Rightarrow p + 2 = 7, p + 6 = 11, p + 8 = 13, p + 12 = 17, p + 14 = 19$ (thỏa mãn)

+Nếu $p > 5$, ta có vì p là số nguyên tố nên $\Rightarrow p$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow p = 5k+1, p = 5k+2, p = 5k+3, p = 5k+4$

-Với $p = 5k + 1$, ta có: $p + 14 = 5k + 15 = 5(k+3) : 5$ (loại)

-Với $p = 5k + 2$, ta có: $p + 8 = 5k + 10 = 5(k+2) : 5$ (loại)

-Với $p = 5k + 3$, ta có: $p + 12 = 5k + 15 = 5(k+3) : 5$ (loại)

-Với $p = 5k + 4$, ta có: $p + 6 = 5k + 10 = 5(k+2) : 5$ (loại)

$\Rightarrow$ không có giá trị nguyên tố p lớn hơn 5 thỏa mãn

Vậy $p = 5$ là giá trị cần tìm

Bài 12: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết $p + 2$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $p + 1$ chia hết cho 6.

HƯỚNG DẪN:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $6k-1$ hoặc $6k+1$ nếu $p=6k+1$ thì $p+2=6k+3=3(2k+1)$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên là hợp số (vô lý) do đó $p=6k-1 \Rightarrow p+1=6k$ chia hết cho 6 (đpcm)

Bài 13: Cho $a + b = p$, p là một số nguyên tố. Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

HƯỚNG DẪN:

Gọi d là ước chung lớn nhất của a và b .

Theo bài ra ta có: $a, b < p$

$$\diamond \begin{cases} a : d \\ b : d \end{cases} \Rightarrow a + b : d \Rightarrow p : d \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a, b \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau.}$$

Bài 14: Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng?

HƯỚNG DẪN:

Gọi 3 số nguyên tố đó là a, b, c

Ta có: $abc = 5(a+b+c)$

$\Rightarrow abc$ chia hết cho 5, do a, b, c nguyên tố

$\Rightarrow$ chỉ có trường hợp 1 trong 3 số $=5$, giả sử là $a=5$

$\Rightarrow bc = b+c +5 \Rightarrow (b-1)(c-1) = 6$

$\{b-1=1 \Rightarrow b=2; c-1=6 \Rightarrow c=7$

$$\{b-1=2, c-1=3 \Rightarrow c=4 \text{ (loại)}\}$$

Vậy 3 số nguyên tố đó là 2, 5, 7

Bài 15: Số $a^4 + a^2 + 1$ có thể là một số nguyên tố hay không?

HƯỚNG DẪN:

Số $a^4 + a^2 + 1$ có thể là một số nguyên tố vì với $a = 1$ thì $a^4 + a^2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ là số nguyên tố.

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

d) Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương

Bài 1: Chứng minh với mọi số tự nhiên n thì $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n \cdot (n+3)(n+1)(n+2) + 1$$

$$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } n^2 + 3n = t \quad (t \in \mathbb{N}) \text{ thì } (*) = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$$

$$= (n^2 + 3n + 1)^2$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2 + 3n + 1 \in \mathbb{N}$. Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.

Bài 2: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

$$\text{Ta có: } k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2) \cdot 4 = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2) \cdot [(k+3) - (k-1)]$$

$$= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k-1)$$

$$\Rightarrow 4S = 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$- k(k+1)(k+2)(k-1) = k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\Rightarrow 4S + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$$

Theo kết quả bài 2 $\Rightarrow k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$ là số chính phương.

Bài 3: Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; ...

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa các chữ số đứng trước và đứng sau nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

$$\text{Ta có } \underbrace{44 \dots 488 \dots 89}_{\substack{n \text{ chữ số } 4 \quad n-1 \text{ chữ số } 8 \quad n \text{ chữ số } 4 \quad n \text{ chữ số } 8 \quad n \text{ chữ số } 4 \quad n \text{ chữ số } 1}} = \underbrace{44 \dots 488 \dots 8}_{n \text{ chữ số } 4} + 1 = \underbrace{44 \dots 4}_{n \text{ chữ số } 4} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ chữ số } 1} + 1$$

$$= 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 8 + 9}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9}$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2$$

Ta thấy:

$$2 \cdot 10^n + 1 = \underbrace{200 \dots 01}_{n-1 \text{ chữ số } 0} \text{ có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2 \in \mathbb{Z} \text{ hay các số có dạng } 44 \dots 488 \dots 89 \text{ là số chính phương.}$$

Bài 4: Chứng minh rằng : Nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì $m - n$ và $4m + 4n + 1$ đều là số chính phương.

Ta có : $3m^2 + m = 4n^2 + n$ tương đương với $4(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$ hay là $(m - n)(4m + 4n + 1) = m^2$ (*)

Gọi d là ước chung lớn nhất của $m - n$ và $4m + 4n + 1$ thì $(4m + 4n + 1) + 4(m - n)$ chia hết cho d

$\Rightarrow 8m + 1$ chia hết cho d .

Mặt khác, từ (*) ta có : m^2 chia hết cho $d^2 \Rightarrow m$ chia hết cho d .

Từ $8m + 1$ chia hết cho d và m chia hết cho d ta có 1 chia hết cho $d \Rightarrow d = 1$.

Vậy $m - n$ và $4m + 4n + 1$ là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (*) nên chúng đều là các số chính phương.

d) DẠNG 2 : CHỨNG MINH MỘT SỐ KHÔNG PHẢI LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Chứng minh số : $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

Dễ dàng thấy chữ số tận cùng của các số 2004^2 ; 2003^2 ; 2002^2 ; 2001^2 lần lượt là 6 ; 9 ; 4 ; 1. Do đó số n có chữ số tận cùng là 8 nên n không phải là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

Thấy ngay số 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90). Do đó số 1234567890 không phải là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không phải là số chính phương.

Ta thấy tổng các chữ số của số 2004 là 6 nên 2004 chia hết cho 3 mà không chia hết 9 nên số có tổng các chữ số là 2004 cũng chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9, do đó số này không phải là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh một số có tổng các chữ số là 2006 không phải là số chính phương.

Vì số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1. Do tổng các chữ số của số đó là 2006 nên số đó chia cho 3 dư 2. Chứng tỏ số đã cho không phải là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Ta có:

$$1+2+3+\dots+2005 \equiv (2005+1).2005:2 \equiv 2006.2005:2$$

$$\equiv 1003.2005 \equiv 3.1 \equiv 3$$

(mod 4)

Vậy tổng của các số từ 1 đến 2005 có dạng $4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) nên không là số chính phương (đpcm)

Bài 6: Chứng minh số : $n = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$ không là số chính phương.

$$n \equiv 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15 \equiv 0^4 + 0^{44} + 0^{444} + 0^{4444} + 3 \equiv 3$$

(mod 4)

Vậy $n=4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) nên n không là số chính phương (đpcm)

Bài 8: Chứng minh số 4014025 không là số chính phương.

Ta có: $2003^2 = 4012009$; $2004^2 = 4016016$ mà $4012009 < 4014025 < 4016016$ nên $2003^2 < 4014025 < 2004^2$. Vậy 4014025 không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh $A = n(n+1)(n+2)(n+3)$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

$$\text{Ta có : } A + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Mặt khác :

$$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) = A.$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $n \geq 1$. Chứng tỏ : $(n^2 + 3n)^2 < A < A + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$. $\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Bài 10: Giả sử $N = 1.3.5.7 \dots 2007.2011$

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N - 1$, $2N$ và $2N + 1$ không có số nào là số chính phương.

a- $2N - 1 = 2.1.3.5.7 \dots 2011 - 1$

Có $2N : 3 \Rightarrow 2N - 1 = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 2N - 1$ không là số chính phương.

b- $2N = 2.1.3.5.7 \dots 2011 \Rightarrow 2N$ chẵn.

$\Rightarrow N$ lẻ $\Rightarrow N$ không chia hết cho 2 và $2N : 2$ nhưng $2N$ không chia hết cho 4.

$2N$ chẵn nên $2N$ không chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3 $\Rightarrow 2N$ không là số chính phương.

c- $2N + 1 = 2.1.3.5.7 \dots 2011 + 1$

$2N + 1$ lẻ nên $2N + 1$ không chia hết cho 4

$2N$ không chia hết cho 4 nên $2N + 1$ không chia cho 4 dư 1.

$\Rightarrow 2N + 1$ không là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Gọi 2 số lẻ bất kỳ là a, b .

 a có dạng $2m + 1$, b có dạng $2n + 1$ (với m, n thuộc $\mathbb{N}$)

 $a^2 + b^2 = (2m + 1).(2m + 1) + (2n + 1)(2n + 1)$

$$= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1$$

$$= 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2 = 4.t + 2 \text{ (t} \in \mathbb{N})$$

Không có số chính phương nào có dạng $4t + 2$ ($t \in \mathbb{N}$) do đó $a^2 + b^2$ không thể là số chính phương. $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 12: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

$$\begin{aligned}n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 &= n^2 \cdot (n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2 \cdot [n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)] \\&= n^2[(n+1)(n^3 - n^2 + 2)] = n^2(n+1) \cdot [(n^3+1) - (n^2-1)] \\&= n^2(n+1)^2 \cdot (n^2 - 2n + 2)\end{aligned}$$

Với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

$$\text{và } n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không phải là một số chính phương.

e) **DẠNG 3: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ LÀ MỘT SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương

- a) $n^2 + 2n + 12$ b) $n(n+3)$
c) $13n + 3$ d) $n^2 + n + 1589$

Hướng dẫn

a) Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n+1)^2 = 11 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1) = 11$$

Nhận xét thấy $k+n+1 > k-n-1$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(k+n+1)(k-n-1) = 11 \cdot 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} k+n+1 = 11 \\ k-n-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$$

b) Đặt $n(n+3) = a^2$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n^2 + 3n = a^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4a^2$

$$\Leftrightarrow (4n^2 + 12n + 9) - 9 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (2n + 3)^2 - 4a^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9$$

Nhận xét thấy $2n + 3 + 2a > 2n + 3 - 2a$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết

$$(2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9.1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2n + 3 + 2a = 9 \\ 2n + 3 - 2a = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

c) Đặt $13n + 3 = y^2$ ($y \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 13(n - 1) = y^2 - 16$

$$\Leftrightarrow 13(n - 1) = (y + 4)(y - 4)$$

$$\Rightarrow (y + 4)(y - 4) : 13 \text{ mà } 13 \text{ là số nguyên tố nên } y + 4 : 13 \text{ hoặc } y - 4 : 13$$

$$\Rightarrow y = 13k \pm 4 \text{ (với } k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 13(n - 1) = (13k \pm 4)^2 - 16 = 13k.(13k \pm 8)$$

$$\Rightarrow 13k^2 \pm 8k + 1$$

Vậy $n = 13k^2 \pm 8k + 1$ (với $k \in \mathbb{N}$) thì $13n + 3$ là số chính phương

d) Đặt $n^2 + n + 1589 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow (4n^2 + 1)^2 + 6355 = 4m^2$

$$\Leftrightarrow (2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355$$

Nhận xét thấy $2m + 2n + 1 > 2m - 2n - 1 > 0$ và chúng là những số lẻ, nên ta có thể viết $(2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355.1 = 1271.5 = 205.31 = 155.41$

Suy ra n có thể có các giá trị sau : 1588 ; 316 ; 43 ; 28

Bài 2: Tìm a để các số sau là những số chính phương

a) $a^2 + a + 43$

b) $a^2 + 81$

c) $a^2 + 31a + 1984$

Đáp số:

- a) 2; 42; 13
- b) 0; 12; 40
- c) 12 ; 33 ; 48 ; 97 ; 176 ; 332 ; 565 ; 1728

Bài 3: Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Với $n = 1$ thì $1! = 1 = 1^2$ là số chính phương

Với $n = 2$ thì $1! + 2! = 3$ không là số chính phương

Với $n = 3$ thì $1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2$ là số chính phương

Với $n \geq 4$ ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33$ còn $5!; 6!; \dots; n!$ đều tận cùng bởi 0 do đó $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài là $n = 1; n = 3$

Bài 4: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2010$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $m + n + m - n = 2m \Rightarrow 2$ số $m + n$ và $m - n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn.

$\Rightarrow (m + n)(m - n) : 4$ nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n + 1$ và $3n + 1$ đều là các số chính phương.

Ta có $10 \leq n \leq 99$ nên $21 \leq 2n + 1 \leq 199$. Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được $2n + 1$ bằng 25; 49; 81; 121; 169 tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84

Số $3n + 1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy $n = 40$

Bài 6: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương

Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$) thì

$$2^n = a^2 - 48^2 = (a + 48)(a - 48)$$

$$2^p \cdot 2^q = (a + 48)(a - 48) \text{ với } p, q \in \mathbb{N}; p + q = n \text{ và } p > q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 48 = 2^p \Rightarrow 2^p 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q (2^{p-q} - 1) = 2^5 \cdot 3 \\ a - 48 = 2^q \end{cases}$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ và } p - q = 2 \Rightarrow p = 7$$

$$\Rightarrow n = 5 + 7 = 12$$

$$\text{Thử lại ta có: } 2^8 + 2^{11} + 2^n = 80^2$$

f) Dạng 4: TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Gọi $A = \overline{abcd} = k^2$. Nếu thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta có số

$$B = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2 \quad \text{với } k, m \in \mathbb{N} \text{ và } 32 < k < m < 100$$

$$a, b, c, d = \overline{1;9}$$

$$\Rightarrow \text{Ta có: } \begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases} \text{ Đúng khi cộng không có nhớ}$$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m - k)(m + k) = 1111 \quad (*)$$

Nhận xét thấy tích $(m - k)(m + k) > 0$ nên $m - k$ và $m + k$ là 2 số nguyên dương.

Và $m - k < m + k < 200$ nên $(*)$ có thể viết $(m - k)(m + k) = 11.101$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$$

Bài 2: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau một đơn vị.

Đặt $\overline{abcd} = k^2$ ta có $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ và $k \in \mathbb{N}$, $32 \leq k < 100$

$$\text{Suy ra: } 101\overline{cd} = k^2 - 100 = (k - 10)(k + 10) \Rightarrow k + 10 : 101 \text{ hoặc } k - 10 : 101$$

$$\text{Mà } (k - 10; 101) = 1 \Rightarrow k + 10 : 101$$

$$\text{Vì } 32 \leq k < 100 \text{ nên } 42 \leq k + 10 < 110 \Rightarrow k + 10 = 101 \Rightarrow k = 91$$

$$\Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$$

Bài 3: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Gọi số chính phương phải tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b} = 11 \cdot (100a + b) = 11 \cdot (99a + a + b)$ (1)

Nhận xét thấy $\overline{aabb} : 11 \Rightarrow a + b : 11$

Mà $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$ nên $1 \leq a + b \leq 18 \Rightarrow a + b = 11$

Thay $a + b = 11$ vào (1) được $n^2 = 11^2(9a + 1)$ do đó $9a + 1$ là số chính phương

Bằng phép thử với $a = 1; 2; \dots; 9$ ta thấy chỉ có $a = 7$ thỏa mãn $\Rightarrow b = 4$

Số cần tìm là: 7744

Bài 4: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Gọi số chính phương đó là $\overline{abcd}$. Vì $\overline{abcd}$ vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt $\overline{abcd} = x^2 = y^3$ với $x, y \in \mathbb{N}$

Vì $y^3 = x^2$ nên y cũng là một số chính phương.

Ta có : $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq y \leq 21$ và y chính phương

$\Rightarrow y = 16 \Rightarrow \overline{abcd} = 4096$

Bài 5: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a, b, c, d nguyên và $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b, c, d \leq 9$

$\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow d \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

d nguyên tố $\Rightarrow d = 5$

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \leq k < 100$

k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow k$ tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow k = 45$

$$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$$

Vậy số phải tìm là: 2025

Bài 6: Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$

Theo giả thiết ta có: $\overline{ab} = (a + b)^3$

$$\Leftrightarrow (10a + b)^2 = (a + b)^3$$

$\Rightarrow \overline{ab}$ là một lập phương và $a + b$ là một số chính phương

Đặt $\overline{ab} = t^3$ ($t \in \mathbb{N}$), $a + b = 1^2$ ($1 \in \mathbb{N}$)

Vì $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

Nếu $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a + b = 9$ là số chính phương

Nếu $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a + b = 10$ không là số chính phương $\Rightarrow$ loại

Vậy số cần tìm là $\overline{ab} = 27$

CHUYÊN ĐỀ 8: BẤT ĐẲNG THỨC

❖ DẠNG 1: SO SÁNH HAI SỐ

Bài vận dụng:

 107^{50} và 73^{75}

 2^{91} và 5^{35}

 54^4 và 21^{12}

 199^{20} và 2003^{15}

 3^{39} và 11^{21}

 9^8 và 8^9

 333^{444} và 444^{333}

 5^{143} và 7^{119} (*)

 2^{1995} và 5^{863} (*)

 3^{976} , 4^{2015} và 7^{1997} (*)

a. DẠNG 2: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC:

Bài tập minh họa:

Bài 1:

 Cho biểu thức: $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$ và $B = 3^{101} - 1$. Chứng minh rằng: $A < B$.

 Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng: $A < B/3$

 Cho $H = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2$ và $B = 10100$. Chứng minh rằng $H > B$

 Cho $E = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 999.1000$ và $B = 111111000$. Chứng minh rằng $E > B$.

Bài 2: Cho $E = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$.

Chứng minh rằng: $E < \frac{3}{4}$

Bài 3: Cho $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{199}{200}$. Chứng minh: $C^2 < \frac{1}{201}$

Bài 4: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng minh rằng:

a) $A < 100$

b) $A > 50$

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = \frac{9}{10!} + \frac{9}{11!} + \frac{9}{12!} + \dots + \frac{9}{1000!} < \frac{1}{9!}$

Bài 6: Cho $C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$. Chứng minh: $C < \frac{5}{3}$

Bài 7: Cho $G = \frac{5}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{11}{3^3} + \dots + \frac{302}{3^{100}}$. Chứng minh: $2\frac{5}{9} < G < 3\frac{1}{2}$

Bài 8: So sánh $L = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

Bài 9: Cho $C = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng:

❖ $C > \frac{7}{12}$

❖ $C > \frac{5}{8}$

a) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho $C = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < C < 2,5$

Bài 2: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{100!} < 1$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}$

Chứng minh rằng: $0,2 < A < 0,4$.

Bài 4: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Bài 5: Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2}$. Chứng minh: $A < \frac{1003}{2008}$

Bài 6: Cho $S = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{409^2}$. Chứng minh: $S < \frac{1}{12}$

Bài 7: Cho $A = \frac{11}{9} + \frac{18}{16} + \frac{27}{25} + \dots + \frac{1766}{1764}$. Chứng minh: $40\frac{20}{43} < A < 40\frac{20}{21}$

Bài 8: Cho $N = \frac{1.4}{2.3} + \frac{2.5}{3.4} + \frac{3.6}{4.5} + \dots + \frac{98.101}{99.100}$. Chứng minh $97 < N < 98$.

Bài 9: Cho $C = \frac{5}{5.8.11} + \frac{5}{8.11.14} + \dots + \frac{5}{302.305.308}$. Chứng minh $C < \frac{1}{48}$

Bài 10: Cho $B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$. Chứng minh $B < 100$.

a) DẠNG 3: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

a) Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{14-x}{4-x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{7-x}{x-5}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{x-13}{x+3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{2x+4}{x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a và b nhỏ nhất sao cho $a^7 = b^8$

Bài 6: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho ta có cách thêm n chữ số vào sau số đó để được số chia hết cho 39.

Bài 7: Viết số 72 thành tổng của hai số mà BCNN của chúng có giá trị lớn nhất.

Bài 8: Cho dãy số tự nhiên 1, 2, 3, 4, ..., 50.

- ⇒ Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho ƯCLN của chúng đạt giá trị lớn nhất.
- ⇒ Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho BCNN của chúng đạt giá trị lớn nhất.

a) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{1}{4+x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{5x-19}{x-4}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{10x+25}{2x+4}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{3x+7}{x-1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 15, ta được: $A = 1234...1415$

Hãy xóa đi 15 chữ số của số A để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành:

- a. Số lớn nhất
- b. Số nhỏ nhất

Bài 6: Tìm các phân số có tử và mẫu đều dương sao cho tổng của phân số đó với nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất.

Bài 7: Tổng của bốn số nguyên dương bằng 402. ƯCLN của chúng có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Bài 8: Dùng mười chữ số khác nhau, hãy viết số chia hết cho 8 có mười chữ số sao cho số đó có giá trị:

- a. Lớn nhất
- b. Nhỏ nhất

 DẠNG 4: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM KHOẢNG GIÁ TRỊ CỦA SỐ PHẢI TÌM

❖ **Bài tập minh họa:**

Bài 1: Tìm hai số nguyên dương sao cho tích của hai số ấy gấp đôi tổng của chúng.

Bài 2: Viết phân số $\frac{1}{4}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên sao cho tổng của hai số ấy bằng tích của chúng.

Bài 4: Tìm ba số nguyên tố a, b, c khác nhau sao cho: $abc < ab + bc + ca$

 Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng số đó có thể phân tích thành tích của hai thừa số có tổng bằng 100 và một trong hai thừa số ấy có dạng a^a .

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên sao cho tích của hai số ấy gấp bốn lần tổng của chúng.

Bài 3: Viết phân số $\frac{1}{6}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Bài 4: Tìm hai phân số có tử bằng 1, các mẫu dương, biết rằng tổng của hai phân số ấy cộng với tích của chúng bằng $\frac{1}{2}$

Bài 5: Tìm bốn số tự nhiên sao cho tổng nghịch đảo các bình phương của chúng bằng 1.

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

❖ **DẠNG 1: SO SÁNH HAI SỐ**

 Bài vận dụng:

❖ 107^{50} và 73^{75}

$$107^{50} < 108^{50} = (4.27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150} \quad (1)$$

$$73^{75} > 72^{75} = (8.9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

$$\text{Mà } 2^{100} \cdot 3^{150} < 2^{225} \cdot 3^{150} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $107^{50} < 73^{75}$

❖ 2^{91} và 5^{35}

$$2^{91} = (2^{13})^7 = 8192^7$$

$$5^{35} = (5^5)^7 = 3125^7$$

$$\Rightarrow 2^{91} > 5^{35}$$

❖ 54^4 và 21^{12}

$$\text{Có } 54^4 = (2 \cdot 27)^4 = (2 \cdot 3^3)^4 = 2^4 \cdot 3^{12}$$

$$21^{12} = (3 \cdot 7)^{12} = 3^{12} \cdot 7^{12}$$

$$7^{12} > 2^4 \Rightarrow 54^4 < 21^{12}$$

❖ 199^{20} và 2003^{15}

$$199^{20} < 200^{20} = (8 \cdot 25)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = 2^{60} \cdot 5^{40}$$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16 \cdot 125)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = 2^{60} \cdot 5^{45}$$

$$\text{Vì } 2^{60} \cdot 5^{45} > 2^{60} \cdot 5^{40} \text{ nên } 2003^{15} > 199^{20}$$

❖ 3^{39} và 11^{21}

$$3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$$

$$11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$$

$$\text{Mà } 121^{10} > 81^{10} \Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$$

❖ 9^8 và 8^9

$$9^8 < 10^8 = 100^4 = 100 \cdot 100^3$$

$$8^9 = 512^3 > 500^3 = 5^3 \cdot 100^3 = 125 \cdot 100^3$$

$$\Rightarrow 8^9 > 9^8$$

❖ 333^{444} và 444^{333}

$$333^{444} = (3 \cdot 111)^{4 \cdot 111} = (3^4 \cdot 111^4)^{111} = 8991^{111} \cdot 111^{333}$$

$$444^{333} = (4 \cdot 111)^{3 \cdot 111} = (4^3 \cdot 111^3)^{111} = 64^{111} \cdot 111^{333}$$

$$\text{Mà } 8991^{111} \cdot 111^{333} > 64^{111} \cdot 111^{333} \text{ nên } 333^{444} > 444^{333}$$

b. DẠNG 2: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC:

Bài tập minh họa:

Bài 1:

 Cho biểu thức: $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$ và $B = 3^{101} - 1$. Chứng minh rằng:
 $A < B$.

Ta có: $A + 1 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100} = \frac{3^{101} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{101} - 1}{2}$

$A = \frac{3^{101} - 1}{2} - 1 = \frac{3^{101} - 3}{2} < B = 3^{101} - 1$ (đpcm).

Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng: $A < B/3$

$$A = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{99} = \frac{4^{100} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{100} - 1}{3} < \frac{4^{100}}{3} = \frac{B}{3}$$

Cho $H = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2$ và $B = 10100$. Chứng minh rằng $H > B$

$$H = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2 = \frac{100 \cdot (100 + 1) \cdot (2 \cdot 100 + 1)}{6} = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} =$$

$$338350 > 10100.$$

Vậy $H > B$ (đpcm)

Cho $E = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 999.1000$ và $B = 111111000$. Chứng minh rằng $E > B$.

$$E = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 999.1000 = \frac{(1000 - 1) \cdot 1000 \cdot (1000 + 1)}{3} =$$

$$\frac{999 \cdot 1000 \cdot 1001}{3} = 333333000 > 111111000 = B$$

Vậy $E > B$

Bài 2: Cho $E = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$.

Chứng minh rằng: $E < \frac{3}{4}$

Giải:

Giữ nguyên phân số $\frac{1}{2^2}$, còn các phân số sau thay bằng các phân số lớn hơn, ta có:

$$E < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{4} + F$$

$$F = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

Do đó: $E < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$ (ĐPCM)

Bài 3: Cho $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{199}{200}$. Chứng minh: $C^2 < \frac{1}{201}$

Giải:

Biểu thức C là tích của 100 phân số nhỏ hơn 1, trong đó các tử đều lẻ, các mẫu đều chẵn. Ta đưa ra biểu thức trung gian là một tích các phân số mà các tử đều chẵn, các mẫu đều lẻ. Thêm 1 vào tử và mẫu của mỗi phân số của A, giá trị mỗi phân số tăng thêm, do đó:

$$C < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{200}{201} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được:

$$C^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{199}{200} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{200}{201} \right)$$

Vế phải của bất đẳng thức trên bằng $\frac{1}{201}$

Vậy $C^2 < \frac{1}{201}$ (đpcm)

Bài 4: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng minh rằng:

❖ $A < 100$

Để chứng tỏ $A < 100$, ta chia A thành 100 nhóm:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{15} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \cdots + \frac{1}{2^{100}-1} \right)$$

Thay mỗi phân số trong dấu ngoặc bằng phân số lớn hơn trong dấu ngoặc đó, ta được:

$$A < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots + \frac{1}{2^{99}} \cdot 2^{99} = 100$$

❖ $A > 50$

Để chứng tỏ rằng $A > 50$, ta thêm và bớt $\frac{1}{2^{100}}$ rồi viết A dưới dạng sau:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

Thay các phân số trong mỗi dấu ngoặc bằng phân số nhỏ nhất trong dấu ngoặc đó, ta được:

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{2^{100}} \cdot 2^{99} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 100 - \frac{1}{2^{100}} > 50$$

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = \frac{9}{10!} + \frac{9}{11!} + \frac{9}{12!} + \dots + \frac{9}{1000!} < \frac{1}{9!}$

Giải:

$$\begin{aligned} A &< \frac{10-1}{10!} + \frac{11-1}{11!} + \frac{12-1}{12!} + \dots + \frac{1000-1}{1000!} \\ &= \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!} + \frac{1}{10!} - \frac{1}{11!} + \frac{1}{11!} - \frac{1}{12!} + \dots + \frac{1}{999!} - \frac{1}{1000!} \\ &= \frac{1}{9!} - \frac{1}{1000!} < \frac{1}{9!} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Bài 6: Cho $C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$. Chứng minh: $C < \frac{5}{3}$

Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}} \\ \Leftrightarrow 4C &= \frac{5}{1} + \frac{5}{4^1} + \frac{5}{4^2} + \dots + \frac{5}{4^{98}} \\ \Leftrightarrow 3C &= \frac{5}{1} - \frac{5}{4^{98}} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{5}{3} - \frac{5}{3 \cdot 4^{98}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C < \frac{5}{3}$$

Bài 7: Cho $G = \frac{5}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{11}{3^3} + \dots + \frac{302}{3^{100}}$. Chứng minh: $2\frac{5}{9} < G < 3\frac{1}{2}$

Bài 8: So sánh $L = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

Giải:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{20} > \frac{1}{21}$$

Bài 9: Cho $C = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng:

$$C > \frac{7}{12}$$

Ta chọn biểu thức D làm trung gian sao cho $C > D$, còn $D > \frac{7}{12}$. Tách C thành hai nhóm, mỗi nhóm có 50 phân số, rồi thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ trong nhóm đấy, ta được:

$$C = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150}\right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \dots + \frac{1}{200}\right) > \frac{1}{150} \cdot 50 + \frac{1}{200} \cdot 50 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \text{ (đpcm).}$$

$$C > \frac{5}{8}$$

Tách C thành 4 nhóm rồi cũng làm như trên ta được:

$$C > \frac{25}{125} + \frac{25}{150} + \frac{25}{175} + \frac{25}{200} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{8} = \frac{107}{210} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

b) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho $C = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < C < 2,5$

Giải:

Ta tách C thành 3 nhóm:

$$C = \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{70} \right)$$

$$C > \frac{1}{30} \cdot 20 + \frac{1}{50} \cdot 20 + \frac{1}{70} \cdot 20 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = 1 \frac{37}{105} = 1 \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad (1)$$

Tiếp tục, ta tách tổng C thành 6 nhóm:

$$C = \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{20} \right) + \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \\ \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{70} \right)$$

$$C < \frac{1}{11} \cdot 10 + \frac{1}{21} \cdot 10 + \frac{1}{31} \cdot 10 + \frac{1}{41} \cdot 10 + \frac{1}{51} \cdot 10 + \frac{1}{61} \cdot 10$$

$$C < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) < 2 + 0,5 = 2,5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{4}{3} < C < 2,5$ đpcm

Bài 2: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{100!} < 1$

Giải:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2!} = \frac{1}{1.2} ; \frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} ; \frac{1}{4!} < \frac{1}{3.4} ; \dots ; \frac{1}{100!} < \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ = 1 - \frac{1}{100} < 1$$

Vậy $A < 1$ (đpcm).

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}$

Chứng minh rằng: $0,2 < A < 0,4$.

Giải:

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right)$$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất $= \frac{13}{60} > \frac{12}{60} = 0,2$

Để chứng minh $A < \frac{2}{5}$ ta viết:

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) - \dots - \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{98}\right) - \frac{1}{99}$$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất $< \frac{2}{5}$, còn các dấu ngoặc trong biểu thức đều dương, do đó $A < \frac{2}{5}$.

Bài 4: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Giải:

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{49.50}\right) = \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{50}\right) < \frac{1}{2}. \text{ (đpcm)}$$

Bài 5: Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2}$. Chứng minh: $A < \frac{1003}{2008}$

Giải:

Ta có: $\frac{2}{(2n+1)^2} < \frac{2}{2n \cdot (2n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}$

Thay $n = 1, 2, 3, \dots, 1003$

Ta có: $A < \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$ (đpcm)

b) DẠNG 3: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

b) Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{14-x}{4-x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

$$A = \frac{(4-x)+10}{4-x} = 1 + \frac{10}{4-x}$$

$$\text{Để } A_{\max} \Leftrightarrow \frac{10}{4-x} \max$$

$$\text{TH1: } 4-x < 0 \text{ thì } \frac{10}{4-x} < 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } 4-x > 0 \Leftrightarrow x < 4 \text{ thì } \frac{10}{4-x} \max \Leftrightarrow (4-x) \min \Leftrightarrow x \max \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy khi $x = 3$ thì $A_{\max} = 11$

Bài 2: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{7-x}{x-5}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

$$A = \frac{7-x}{x-5} = \frac{(5-x)+2}{x-5} = \frac{2}{x-5} - 1$$

Để $A_{\max}$ thì $\frac{2}{x-5}_{\max}$

TH1: $x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 5 \Rightarrow \frac{2}{x-5} < 0$ (loại)

TH2: $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$. Để $\frac{2}{x-5}_{\max}$ thì $(x - 5)_{\min}$ mà x nguyên nên $x = 6$

Vậy $x = 6$ thì $A_{\max} = 1$

Bài 3: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{x-13}{x+3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

$$A = \frac{x-13}{x+3} = \frac{(x+3)-16}{x+3} = 1 - \frac{16}{x+3}$$

Để $A_{\min}$ thì $\frac{16}{x+3}_{\max} \Rightarrow (x+3)_{\min} \Leftrightarrow x_{\min}$

Nếu $x + 3 < 0$ thì không tìm được giá trị A nhỏ nhất

Nếu $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$ mà x nguyên nên $(x + 3)_{\min}$ khi $x = -2$

Vậy $A_{\min} = -15$ khi $x = -2$

Bài 4: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{2x+4}{x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

$$A = \frac{2x+4}{x+1} = \frac{2x+2+2}{x+1} = 2 + \frac{2}{x+1}$$

$A_{\min} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1}_{\min}$

TH1: Nếu $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Rightarrow \frac{2}{x+1} > 0$ không thỏa mãn.

TH 2:

$$\text{Nếu } x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow \frac{2}{x+1} < 0$$

$$\frac{2}{x+1} \text{ min} \Leftrightarrow x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow A_{\min} = 0$$

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a và b nhỏ nhất sao cho $a^7 = b^8$

Giải:

$$\text{Ta có : } a^7 = b^8 \quad (1) \Rightarrow b = \frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7.$$

Do b là số tự nhiên nên $a : b$, đặt $a = b.k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Do $b > 1$ nên $\frac{a}{b} > 1$, do đó $k \geq 2$ (2)

Thay $a = b.k$ vào (1):

$$b^7 k^7 = b^8 \Rightarrow k^7 = b \quad (3)$$

Từ (2) và (3) : $b \geq 2^7$

Giá trị nhỏ nhất của b là 2^7 . Khi đó $k = 2$; $a = b.k = 2^7.2 = 2^8$

Đáp số $a = 2^8$, $b = 2^7$

Bài 6: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho ta có cách thêm n chữ số vào sau số đó để được số chia hết cho 39.

Giải:

Xét $n = 1$. Không có cách nào thêm một chữ số vào đằng sau chữ số 1 để được một số chia hết cho 39

Xét $n = 2$ tồn tại cách thêm hai chữ số vào đằng sau chữ số 2 để được số chia hết cho 39, chẳng hạn như $234 : 39$.

Vậy $n = 2$

Bài 7: Viết số 72 thành tổng của hai số mà BCNN của chúng có giá trị lớn nhất.

Giải:

Viết 72 thành tổng hai số, có các cách sau:

$$36 + 36; 35 + 37; 34 + 38; \dots; 2 + 70; 1 + 71.$$

Ta thấy:

$$[36, 36] = 36, [35, 37] = 35.37, [34, 38] < 34.38 \dots$$

$$[2, 70] > 2.70, [1, 71] = 1.71$$

Ta sẽ chứng minh rằng $35.37 > 34.38 > \dots > 2.70 > 1.71$. muốn vậy chỉ cần chứng tỏ rằng nếu $b > a$ thì $ab > (a-1)(b+1)$. Thật vậy, ta có:

$$(a-1)(b+1) = a(b+1) + (b+1) = ab + a - b - 1 = ab - (b-a) - 1 < ab.$$

Vậy $[35, 37]$ có giá trị lớn nhất.

Bài 8: Cho dãy số tự nhiên 1, 2, 3, 4, ..., 50.

-  Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho ƯCLN của chúng đạt giá trị lớn nhất.
-  Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho BCNN của chúng đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi a và b là hai số bất kì thuộc dãy 1, 2, 3, ..., 50. Giả sử $a > b$

- ❖ Gọi $d \in \text{ƯC}(a, b)$ thì $a - b \vdots d$. Ta sẽ chứng minh $d \leq 25$.

Thật vậy, giả sử $d > 25$ thì $b > 25$. Ta có $a \leq 50$ mà $b > 25$ nên $0 < a - b < 25$, không thể xảy ra $a - b \vdots d$.

$d = 25$ xảy ra khi $a = 50; b = 25$.

Vậy hai số có ƯCLN đạt giá trị lớn nhất là 50 và 25.

- ❖ $\text{BCNN}(a, b) \leq a.b \leq 50.49 = 2450$.

Vậy hai số có BCNN đạt giá trị lớn nhất là 50 và 49.

b) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{1}{4+x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Để $A_{\max}$ thì $(4+x)_{\min}$.

TH1: $x+4 < 0 \Leftrightarrow x < -4 \Rightarrow \frac{1}{x+4} < 0$ (loại)

TH2: $x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$. Để $\frac{1}{x+4}_{\max}$ thì $(x+4)_{\min}$ mà x nguyên nên $x = -3$

Vậy $x = -3$ thì $A_{\max} = 1$

Bài 2: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{5x-19}{x-4}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Ta có: $A = \frac{5x-19}{x-4} = \frac{(5x-20)+1}{x-4} = 5 + \frac{1}{x-4}$.

Để $A_{\max}$ thì $(x-4)_{\min}$.

TH1: $x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4 \Rightarrow \frac{1}{x-4} < 0$ (loại)

TH2: $x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$. Để $\frac{1}{x-4}_{\max}$ thì $(x-4)_{\min}$ mà x nguyên nên $x-4 = 1$

$\Leftrightarrow x = 5$

Vậy $x = 5$ thì $A_{\max} = 6$.

Bài 3: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{10x+25}{2x+4}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{10x + 25}{2x + 4} = \frac{(10x + 20) + 5}{2x + 4} = 5 + \frac{5}{2x + 4}$$

Để $A_{\min}$ thì $(2x + 4)_{\max}$.

$$\text{TH1: } 2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \Rightarrow \frac{5}{2x+4} > 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } 2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -2. \text{ Để } \frac{5}{2x+4}_{\min} \text{ thì } (2x + 4)_{\max} \text{ mà } x \text{ là số nguyên}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{Vậy } x = -3 \text{ thì } A_{\min} = \frac{5}{2}$$

Bài 4: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{3x + 7}{x - 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

$$A = \frac{3x + 7}{x - 1} = \frac{3x - 3 + 10}{x - 1} = 3 + \frac{7}{x - 1}$$

Để $A_{\min}$ thì $(x - 1)_{\max}$.

$$\text{TH1: } x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow \frac{7}{x-1} < 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1. \text{ Để } \frac{7}{x-1}_{\min} \text{ thì } (x - 1)_{\max} \text{ mà } x \text{ nguyên nên } x = 2$$

$$\text{Vậy } x = 2 \text{ thì } A_{\min} = 10$$

Bài 5: Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 15, ta được: $A = 1234...1415$

Hãy xóa đi 15 chữ số của số A để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành:

✚ Số lớn nhất

✚ Số nhỏ nhất

Giải:

Số A có 21 chữ số, sau khi xóa đi 15 chữ số thì còn lại 6 chữ số abcdefg.

a) Để được số lớn nhất, ta chọn a = 9 (của số 9). Sau chữ số 9, còn lại dãy chữ số: 101112131415.

Để chọn b ta bớt lại bốn chữ số cuối, còn lại 10111213, chọn chữ số lớn nhất là 3.

Sau chữ số 3 còn lại 1415, đọc chính là cdeg.

Vậy số lớn nhất phải tìm là: 931415.

b) Để được số nhỏ nhất, ta lần lượt chọn a, b, ... (a, b có thể bằng 0) là chữ số nhỏ nhất có thể được. Bằng cách giải tương tự như câu a, ta được: 011111.

Bài 6: Tìm các phân số có tử và mẫu đều dương sao cho tổng của phân số đó với nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Gọi phân số phải tìm là $\frac{a}{b}$. Phân số này phải khác 0, nghịch đảo của nó là $\frac{b}{a}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$, ta đặt $a = b + m$ với $m \geq 0$.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b+m}{b} + \frac{b}{b+m} = 1 + \frac{m}{b} + \frac{b}{b+m} \geq 1 + \frac{m}{b+m} + \frac{b}{b+m} = 1 + \frac{m+b}{b+m} = 2$$

Như vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $m = 0$, khi đó $a = b$.

Vậy phân số mà tổng của nó với số nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất là phân số có tử bằng mẫu, tức là phân số có giá trị bằng 1.

Bài 7: Tổng của bốn số nguyên dương bằng 402. ƯCLN của chúng có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Giải:

Gọi d là ƯCLN của 4 số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4 ($1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$) thì $a_1 = dk_1, a_2 = dk_2, a_3 = dk_3, a_4 = dk_4$. Ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 402$ nên $d(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 402$.

Gọi $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = s$ thì $d.s = 402$. Như vậy d lớn nhất khi s nhỏ nhất.

Ta có $s \geq 4$ và s là ước của 402. Do đó s nhỏ nhất bằng 6. Khi đó d lớn nhất bằng : $402 : 6 = 67$.

Các số k_1, k_2, k_3, k_4 có tổng bằng 6 ($k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4$) có thể là 1, 1, 1, 3 hoặc 1, 1, 2, 2.

Vậy ƯCLN $_{(a_1, a_2, a_3, a_4)}$ có giá trị lớn nhất bằng 67 khi 4 số đó là: 67, 67, 67, 201 hoặc 67, 67, 134, 134.

Bài 8: Dùng mười chữ số khác nhau, hãy viết số chia hết cho 8 có mười chữ số sao cho số đó có giá trị:

- a) Lớn nhất
- b) Nhỏ nhất

Giải:

⇒ Chọn 7 chữ số đầu là: 9 8 7 6 5 4 3. Còn lại 3 chữ số 2, 1, 0; lập được số lớn nhất có 3 chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 8 được 120.

Đáp số: 9876543120.

⇒ Ta chọn 6 chữ số đầu là 102345, ta được $n = \overline{102345abcd}$ với $a, b, c, d \in \{6, 7, 8, 9\}$.

Để n chia hết cho 8 thì $\overline{bcd}$ phải chia hết cho 8. Chỉ có 4 cách chọn $\overline{bcd}$ bằng 896; 976; 968; 768. Để n nhỏ nhất thì 4 chữ số cuối cùng của n có thể là: 7896; 8976; 7968; 9768, số nhỏ nhất là 7896.

Vậy số n nhỏ nhất là 1023457896.

DẠNG 4: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM KHOẢNG GIÁ TRỊ CỦA SỐ PHẢI TÌM

❖ Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm hai số nguyên dương sao cho tích của hai số ấy gấp đôi tổng của chúng.

Giải:

Gọi hai số nguyên dương phải tìm là a và b , ta có $2(a + b) = ab$ (1)

Do vai trò của a và b như nhau, ta giả sử rằng $a \leq b$, nên $a + b \leq 2b$, do đó $2(a + b) \leq 4b$.
(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ab \leq 4b$. Chia hai vế cho $b > 0$ ta được $a \leq 4$.

Thay $a = 1$ vào (1) ta được $2 + 2b = b$, loại.

Thay $a = 2$ vào (1) ta được $4 + 2b = 2b$, loại.

Thay $a = 3$ vào (1) ta được $6 + 2b = 3b \Rightarrow b = 6$

Thay $a = 4$ vào (1) ta được $8 + 2b = 4b \Rightarrow b = 4$

Vậy có hai cặp số thỏa mãn đề bài là 3 và 6, 4 và 4.

Bài 2: Viết phân số $\frac{1}{4}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Giải:

Gọi hai phân số phải tìm là $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$ (1)

Do vai trò của a và b là như nhau, ta giả sử rằng $a < b$. ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < \frac{1}{4}$ nên $a > 4$. (2)

Mặt khác, do $a < b$ nên $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Do đó: $\frac{1}{a} > \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{8}$. $\Rightarrow a < 8$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 4 < a < 8$. Thay các giá trị của a bằng 5, 6, 7 vào (1) ta được hai trường hợp cho b là số tự nhiên: $a = 5, b = 20$ và $a = 6, b = 12$.

Vậy có hai cách viết: $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ và $\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên sao cho tổng của hai số ấy bằng tích của chúng.

Giải:

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b

Theo bài ra ta có: $a + b = a.b$ (1)

Nếu một trong hai số bằng 0 thì số kia bằng 0.

Nếu cả hai số khác 0 thì từ (1) ta có:

$$\frac{a+b}{ab} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

Do vai trò của a và b là như nhau, ta giả sử rằng $a \leq b$. ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < 1$ nên $a > 1$. (2)

Mặt khác, do $a \leq b$ nên $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Do đó: $\frac{1}{a} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a \leq 2$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 1 < a \leq 2 \Rightarrow a = 2$. Thay $a = 2$ vào (1) ta được $b = 2$

Vậy được hai cặp số cần tìm: (0; 0) và (2; 2).

Bài 4: Tìm ba số nguyên tố a, b, c khác nhau sao cho: $abc < ab + bc + ca$

Giải:

Chia hai vế của bất đẳng thức $abc < ab + bc + ca$ cho số dương abc được: $1 < \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (1)

Giả sử $a > b > c \geq 2$. Trong ba phân số $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ thì $\frac{1}{c}$ lớn nhất nên $\frac{1}{c} > \frac{1}{3}$, do đó $c < 3$.

Vậy $c = 2$

Thay $c = 2$ vào (1) được: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$ (2)

Trong hai phân số $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, phân số $\frac{1}{b}$ lớn hơn nên: $\frac{1}{b} > \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$, do đó $b < 4$, mà $b > c = 2$ nên $b = 3$.

Thay $b = 3$ vào (2) được: $\frac{1}{a} > \frac{1}{6}$. Do đó $a < 6$, mà $a > b = 3$ và a là số nguyên tố, vậy $a = 5$.

Vậy các số a, b, c phải tìm là 2, 3, 5 và các hoán vị của chúng.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng số đó có thể phân tích thành tích của hai thừa số có tổng bằng 100 và một trong hai thừa số ấy có dạng a^a .

Giải:

Gọi thừa số còn lại là b , ta có $a^a + b = 100$

Do $a^a < 100$ nên $a \in \{1, 2, 3\}$. Mặt khác $a^a \cdot b > 1000$ mà $b < 100$ nên $a^a > 10$, tức $a > 2$.

Vậy $a = 3$. Ta có: $3^3 \cdot 73 = 1971$.

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên sao cho tích của hai số ấy gấp bốn lần tổng của chúng.

Giải:

Gọi hai số phải tìm là a và b , ta có:

$$4(a + b) = ab \quad (1)$$

Nếu một trong hai số bằng 0 thì số kia bằng 0.

Nếu cả hai số khác 0 thì từ (1) ta có:

$$\frac{4(a+b)}{4ab} = \frac{ab}{4ab} \text{ hay } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$$

Do vai trò của a và b là như nhau , ta giả sử rằng $a \leq b$. ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < \frac{1}{4}$ nên $a > 4$. (2)

Mặt khác, do $a \leq b$ nên $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Do đó: $\frac{1}{a} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{8}$. $\Rightarrow a \leq 8$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 4 < a \leq 8$. Thay các giá trị của a bằng 5, 6, 7, 8 vào (1) ta được hai trường hợp cho b là số tự nhiên: $a = 5, b = 20, a = 6, b = 12$ và $a = 8, b = 8$

Vậy có 4 cặp số cần tìm: (0; 0), (5; 20), (6; 12), (8; 8).

Bài 3: Viết phân số $\frac{1}{6}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Giải:

Gọi hai phân số cần tìm là: $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ ($a \neq b \neq 0$).

Theo bài ra ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ (1)

Do vai trò của a và b là như nhau , ta giả sử rằng $a < b$, ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < \frac{1}{6}$ nên $a > 6$. (2)

Mặt khác, do $a < b$ nên $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Do đó: $\frac{1}{a} > \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{12}$. $\Rightarrow a < 12$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 6 < a < 12$. Thay các giá trị của a bằng 7, 8, 9, 10, 11 vào (1) ta được 4 trường hợp cho b là số tự nhiên: $a = 7, b = 42, a = 8, b = 24, a = 9, b = 18$ và $a = 10, b = 15$

Bài 4: Tìm hai phân số có tử bằng 1, các mẫu dương, biết rằng tổng của hai phân số ấy cộng với tích của chúng bằng $\frac{1}{2}$

Giải:

Gọi hai phân số cần tìm là: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ ($a \leq b$, $\neq 0$).

Theo bài ra ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{2}$ (1)

Hiển nhiên ta có: $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ nên $a > 2$.

Mặt khác, nếu $a \geq 5$ thì: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{11}{25} < \frac{1}{2}$ (loại).

Lần lượt, thay $a = 3$, $a = 4$ vào (1), ta được $b = 8$, $b = 5$.

Đáp số: có hai cặp $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$ và $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{8}\right)$.

Bài 5: Tìm bốn số tự nhiên sao cho tổng nghịch đảo các bình phương của chúng bằng 1.

Giải:

Gọi 4 số tự nhiên cần tìm là: a, b, c, d , ta có: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$.

Trong 4 số a, b, c, d không có số nào bằng 1, không có số nào lớn hơn hoặc bằng 3, do đó cả 4 số đều bằng 2.

CHUYÊN ĐỀ 9: Dãy Phân Số Theo Quy Luật

DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHÂN SỐ

a. Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$

Bài 3: Cho phân số: $A = \frac{63}{3n+1}$ với n thuộc số tự nhiên.

- Với giá trị nào của n thì A rút gọn được.
- Với giá trị nào của n thì A là số tự nhiên?

b. Bài tập tự luyện:

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ sao cho:

- Có giá trị là số tự nhiên.
- Là phân số tối giản
- Với giá trị nào của n trong khoảng 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được?

Bài 6: Tìm các giá trị nguyên của n để các phân số sau có giá trị là số nguyên:

- $A = \frac{3n+4}{n-1}$
- $B = \frac{6n-3}{3n+1}$

a. DẠNG 2: TÍNH NHANH

c. Bài tập minh họa:

Bài 1: Rút gọn biểu thức sau:

a. $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$

b. $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$

c. $C = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{4} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{99} + 1\right)$

d. $D = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{899}{30^2}$

Bài 2: Tính các tổng sau:

a. $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000}$

b. $B = \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \dots + \frac{1}{496.501}$

c. $C = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{998.999.1000}$

d. $D = \frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+98)}{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}$

e. $B = \frac{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99}$

f. $E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}}$

d. Bài tập tự luyện:

❖ $A = \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \dots + \frac{1}{99.100}$

❖ $B = 1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!$

$$\diamond C = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{98.99.100}$$

$$\diamond D = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{(50 \text{ chữ số } 9)}$$

$$\diamond S = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{37.38.39}$$

$$\diamond B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\diamond D = \frac{100 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}}$$

b. DẠNG 3: CHỨNG MINH BIỂU THỨC

e. Bài tập minh họa:

Bài 1: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

$$\frac{n+1}{2n-3}$$

$$\frac{2n+3}{4n+8}$$

$$\frac{3n+2}{5n+3}$$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{63} > 2$

Bài 3: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$

Chứng minh rằng tổng A không phải là số tự nhiên.

Bài 4 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 ta đều có:

$$a) \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$$

$$b) \frac{5}{3.7} + \frac{5}{7.11} + \frac{5}{11.15} + \dots + \frac{5}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{5n}{4n+3}$$

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ ta có:

$$\frac{3}{9.14} + \frac{3}{14.19} + \frac{3}{19.24} + \dots + \frac{3}{(5n-1)(5n+4)} < \frac{1}{15}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$

Bài 7: Tổng $\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{99}$ bằng phân số $\frac{a}{b}$. Chứng minh rằng a chia hết cho 149.

f. Bài tập tự luyện:

Bài 8: Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2}$. Chứng minh: $A < \frac{1003}{2008}$

Bài 9: Cho $B = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{2006^2}$. Chứng minh: $B < \frac{334}{2007}$

Bài 10: Cho $C = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng minh $C > 48$

Bài 11: Cho $M = \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+59}$. Chứng minh $M < \frac{2}{3}$

Bài 12: Cho $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{18.19.20}$. Chứng minh $A < \frac{1}{4}$

Bài 13: Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}; n > 1$ ta có:

$$A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$$

Bài 14: Cho $C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$. Chứng minh: $C < \frac{5}{3}$

Bài 15: Cho $E = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $E < \frac{3}{4}$

Bài 16: Cho $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{199}{200}$. Chứng minh: $C^2 < \frac{1}{201}$

Bài 17: Cho $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{208}{210}$. Chứng minh: $A < \frac{1}{25}$

DẠNG 4: TÌM X

g. Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm x, biết rằng: $\frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \dots + \frac{1}{x.(x+3)} = \frac{101}{1540}$

Bài 2: Tìm x, biết rằng: $x - \left(\frac{50x}{100} + \frac{25x}{200} \right) = 11\frac{1}{4}$

Bài 3: Tìm x, biết rằng: $(x-5) \cdot \frac{30}{100} = \frac{200x}{100} + 5$

Bài 4: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x = 820$

❖ Bài tập tự luyện:

Bài 5: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$

Bài 6: $\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{15}{93}$

Bài 7: $\frac{7}{x} + \frac{4}{5.9} + \frac{4}{9.13} + \frac{4}{13.17} + \dots + \frac{4}{41.45} = \frac{29}{45}$

DẠNG 5: SO SÁNH PHÂN SỐ

Bài tập minh họa:

Bài 1: Cho $A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1}$ và $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$

So sánh A và B?

Bài 2: Cho $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ và $B = 1.2.3 \dots 11$

So sánh A và B?

Bài 3: So sánh $L = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

Bài 4: So sánh $M = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$ với $\frac{11}{19}$

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ và $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$

So sánh A và B?

Bài 2: Cho $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ và $B = \frac{10^{1992}+1}{10^{1992}+1}$

So sánh A và B?

Bài 3: So sánh $U = \frac{1.3.5.7 \dots 39}{21.22.23 \dots 40}$ và $V = \frac{1}{2^{20}-1}$

Bài 4: So sánh:

- ❖ 63^7 và 16^{12}
- ❖ $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{16}\right)^9$
- ❖ $\left(\frac{1}{243}\right)^9$ và $\left(\frac{1}{83}\right)^{13}$
- ❖ 5^{299} và 3^{501}
- ❖ 3^{23} và 5^{15}
- ❖ 127^{23} và 513^{18}
- ❖ $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}
- ❖ 3^{500} và 7^{300}
- ❖ 99^{20} và 9999^{10}
- ❖ 202^{303} và 303^{202}

DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ THỎA MÃN BIỂU THỨC

Bài 1: Tìm các số tự nhiên x và y sao cho:

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{y} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{x} - \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$$

Bài 2: Tìm các số nguyên x và y sao cho:

$$\frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}$$

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

a. DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHÂN SỐ

h. Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

$$A = \frac{n+10}{2n-8} \Rightarrow 2A = \frac{2n-8+28}{2n-8} = 1 + \frac{28}{2n-8} \text{ Để } 2A \text{ nguyên thì } 2n-8 \text{ phải là ước của } 28$$

Ta có bảng đáp số:

$2n - 8$	n	2A	A	Kết luận
-28	-10	-1	-1/2	L
-14	-3	-2	-1	TM
-7	1/2	-4	-2	L

-4	2	-7	-7/2	L
-2	3	-14	-7	TM
-1	7/2	-28	-14	L
1	9/2	28	14	L
2	5	14	7	TM
4	6	7	7/2	L
7	15/2	4	2	L
14	11	2	1	TM
28	18	1	1/2	L

Bài 3: Cho phân số: $A = \frac{63}{3n+1}$ với n thuộc số tự nhiên.

- 1 Với giá trị nào của n thì A rút gọn được.
- 2 Với giá trị nào của n thì A là số tự nhiên?

Hướng dẫn:

$$1 \text{ Ta có: } A = \frac{63}{3n+1} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 7}{3n+1}$$

Để A rút gọn được $\Leftrightarrow 3n+1 : 3$ hoặc $3n+1 : 7$.

TH1: $3n+1 : 3$ (Vô lý)

TH2: $3n+1 : 7$. Với $n = 7k+2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $3n+1 : 7$.

Kết luận: $n = 7k+2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì phân số $A = \frac{63}{3n+1}$ rút gọn được.

2 Để A là số tự nhiên $\Leftrightarrow 63 : (3n+1) \Leftrightarrow 3n+1$ là ước của 63.

$$U(63) = \{1; 3; 7; 9; 21; 63\}$$

$$\begin{cases} 3n+1=1 \\ 3n+1=3 \\ 3n+1=7 \\ 3n+1=9 \\ 3n+1=21 \\ 3n+1=63 \end{cases} \Leftrightarrow \{n=2\}$$

c. DẠNG 2: TÍNH NHANH

i. Bài tập minh họa:

Bài 1: Rút gọn biểu thức sau:

$$\diamond S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

$$3S = 3 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right)$$

$$3S = 3 + S - \frac{1}{3^n}$$

$$2S = 3 - \frac{1}{3^n}$$

$$S = \frac{3 - \frac{1}{3^n}}{2}$$

$$\diamond A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$2A = 1 + A - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\diamond C = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{4} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{99} + 1\right)$$

$$C = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} = \frac{100}{2} = 50$$

$$\diamond D = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{899}{30^2}$$

Bài 2: Tính các tổng sau:

$$\text{✚ } A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

$$A = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$$

$$\text{✚ } B = \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \dots + \frac{1}{496.501}$$

$$B = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{496} - \frac{1}{501} \right) =$$

$$B = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{501} \right) = \frac{100}{501}$$

$$\text{✚ } C = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{998.999.1000}$$

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}, \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}, \dots;$$

$$\frac{1}{998.999} - \frac{1}{999.1000} = \frac{2}{998.999.1000}$$

$$\text{Tổng quát: } \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$2C = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{998.999} - \frac{1}{999.1000} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{999.1000}$$

$$2C = \frac{500.999-1}{999.1000} = \frac{4951}{999.1000}$$

$$C = \frac{4951}{999.2000}$$

$$\text{✚ } D = \frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+98)}{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}$$

$$D = \frac{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1} = 1$$

$$B = \frac{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99}$$

$$E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}}$$

j. Bài tập tự luyện:

$$\diamond A = \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$A = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$$

$$\diamond B = 1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!$$

$$\text{Ta có : } 1! = 2! - 1!$$

$$2.2! = 3! - 2!$$

$$3.3! = 4! - 3!$$

$$\dots \dots \dots$$

$$n.n! = (n+1)! - n!$$

Vậy

$$B = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

$$\diamond C = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{98.99.100}$$

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}, \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}, \dots, \frac{1}{98.99} - \frac{1}{99.100} = \frac{2}{98.99.100}$$

$$\text{Tổng quát: } \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$C = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{98.99} - \frac{1}{99.100} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{99.100}$$

$$C = \frac{50.99-1}{99.100} = \frac{4951}{99.100}$$

$$\diamond D = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots 9}_{(50 \text{ chữ số } 9)}$$

$$D = 10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \dots + \underbrace{100\dots 0}_{(50 \text{ chữ } 0)} - 1$$

$$D = \underbrace{111\dots 10}_{(50 \text{ chữ } 1)} - 50.1 = \underbrace{111\dots 1060}_{(48 \text{ chữ } 1)}$$

$$\diamond S = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{37.38.39}$$

S = Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}, \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}, \dots, \frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} = \frac{2}{37.38.39}$$

$$\text{Tổng quát: } \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$C = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{38.39}$$

$$C = \frac{19.39-1}{38.39} = \frac{370}{19.39}$$

$$\diamond B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\diamond D = \frac{100 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}}$$

d. DẠNG 3: CHỨNG MINH BIỂU THỨC

k. Bài tập minh họa:

Bài 1: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

$$\frac{n+1}{2n-3}$$

$$\frac{2n+3}{4n+8}$$

$$\frac{3n+2}{5n+3}$$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{63} > 2$

Bài 3: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$

Chứng minh rằng tổng A không phải là số tự nhiên.

Bài 4 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 ta đều có:

$$a) \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$$

$$VT = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3n}{2(3n+2)} \right) = \frac{n}{6n+4} = VP \text{ (đpcm)}$$

$$b) \frac{5}{3.7} + \frac{5}{7.11} + \frac{5}{11.15} + \dots + \frac{5}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{5n}{4n+3}$$

$$VT = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right)$$

$$= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4n}{3(4n+3)} = \frac{5n}{3(4n+3)}$$

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ ta có:

$$\frac{3}{9 \cdot 14} + \frac{3}{14 \cdot 19} + \frac{3}{19 \cdot 24} + \dots + \frac{3}{(5n-1)(5n+4)} < \frac{1}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có VT} &= \frac{3}{5} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{5n-1} - \frac{1}{5n+4} \right) \\ &= \frac{3}{5} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{5n+4} \right) < \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{15} \Rightarrow \text{đpcm} \end{aligned}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$

$$\begin{aligned} A &> \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad (1) \end{aligned}$$

$$A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{8 \cdot 9} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm

Bài 7: Tổng $\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{99}$ bằng phân số $\frac{a}{b}$. Chứng minh rằng a chia hết cho 149.

I. Bài tập tự luyện:

Bài 8: Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2}$. Chứng minh: $A < \frac{1003}{2008}$

$$\text{Ta có: } \frac{2}{(2n+1)^2} < \frac{2}{2n \cdot (2n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}$$

Thay $n = 1, 2, 3, \dots, 1003$

Ta có: $A < \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$ (đpcm)

Bài 9: Cho $B = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{2006^2}$. Chứng minh: $B < \frac{334}{2007}$

Ta có: $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} ; \frac{1}{6^2} < \frac{1}{5.6} ; \dots ; \frac{1}{2006^2} < \frac{1}{2005.2006}$

$$a) B = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2006^2} < \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{2005.2006}$$

Bài 10: Cho $C = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng minh $C > 48$

C có 49 số hạng

Ta có: $C - 49 = -(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500})$

$$b) C - 49 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2500}\right)$$

$$c) C = 49 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2500}\right) = 49 - D$$

$$\text{Xét } D = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2500} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$$

$$D < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{48.49} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{48} - \frac{1}{49} = 1 - \frac{1}{49} < 1$$

$$D < 1 \Rightarrow 49 - D > 49 - 1 = 48$$

$$d) C > 48 \text{ (đpcm)}$$

Bài 11: Cho $M = \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+59}$. Chứng minh $M < \frac{2}{3}$

Áp dụng công thức: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$M = \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{59.60} = 2 \left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{59.60} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{59} - \frac{1}{60} \right) = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{60} \right) = 2 \cdot \frac{19}{60} = \frac{19}{30} < \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

e) $M < \frac{2}{3}$ (đpcm).

Bài 12: Cho $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{18.19.20}$. Chứng minh $A < \frac{1}{4}$

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}, \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}, \dots, \frac{1}{18.19} - \frac{1}{19.20} = \frac{2}{18.19.20}$$

Tổng quát: $\frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$

Do đó: $2A = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{18.19.20}$

$$= \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{18.19} - \frac{1}{19.20} \right)$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{19.20} = \frac{189}{380}$$

f) $A = \frac{189}{760} < \frac{190}{760} = \frac{1}{4}$ (đpcm)

Bài 13: Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}; n > 1$ ta có:

$$A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$$

$$A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

Nhận xét: mỗi số hạng tổng có dạng:

$$\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n.(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n.(n+1)} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 14: Cho $C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$. Chứng minh: $C < \frac{5}{3}$

Hướng dẫn giải:

$$\Leftrightarrow C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$$

$$\Leftrightarrow 4C = \frac{5}{1} + \frac{5}{4^1} + \frac{5}{4^2} + \dots + \frac{5}{4^{98}}$$

$$\Leftrightarrow 3C = 5 - \frac{5}{4^{99}}$$

$$\Leftrightarrow C < \frac{5}{3}$$

Bài 15: Cho $E = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $E < \frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải:

$$E = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Leftrightarrow 3E = \frac{1}{1} + \frac{2}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Leftrightarrow 2E = \frac{1}{1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{100}{3^{99}} - \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Leftrightarrow 2E = 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 6E = 3 + 1 + \frac{1}{3^1} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$4E = 3 - \frac{101}{3^{99}} + \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{3}{4} - \left(\frac{101 \cdot 3 - 100}{3^{100}} \right) < \frac{3}{4}$$

Bài 16: Cho $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{199}{200}$. (1) Chứng minh: $C^2 < \frac{1}{201}$

Biểu thức C là tích của 100 phân số nhỏ hơn 1, trong đó các tử đều lẻ, các mẫu đều chẵn. Ta đưa ra biểu thức trung gian là một tích các phân số mà các tử đều chẵn, các mẫu đều lẻ. Thêm 1 vào tử và mẫu của mỗi phân số của A, giá trị mỗi phân số tăng thêm, do đó:

$$C < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{200}{201} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được:

$$C^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{199}{200} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{200}{201} \right)$$

Vế phải của bất đẳng thức trên bằng $\frac{1}{201}$

Vậy $C^2 < \frac{1}{201}$ (đpcm)

DẠNG 4: TÌM X

m. Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm x, biết rằng: $\frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \dots + \frac{1}{x.(x+3)} = \frac{101}{1540}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{101}{1540}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{101}{1540}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x+3} = \frac{101}{1540} \cdot 3 = \frac{303}{1540}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5} - \frac{303}{1540} = \frac{1}{308}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 308$$

$$\Leftrightarrow x = 305$$

Bài 2: Tìm x, biết rằng: $x - \left(\frac{50x}{100} + \frac{25x}{200} \right) = 11\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3x}{8} = \frac{45}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 90$$

$$\Leftrightarrow x = 18$$

Bài 3: Tìm x, biết rằng: $(x-5) \cdot \frac{30}{100} = \frac{200x}{100} + 5$

$$\Leftrightarrow (x-5) \cdot 30 = 200x + 500$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \cdot 3 = 20x + 50$$

$$\Leftrightarrow 3x - 15 = 20x + 50$$

$$\Leftrightarrow 17x = -65$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{65}{17}$$

Bài 4: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x = 820$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{2} = 820$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 1640 = 40.41$$

Vậy $x = 40$

DẠNG 5: SO SÁNH PHÂN SỐ

Bài tập minh họa:

Bài 1: Cho $A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1}$ và $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$

So sánh A và B?

Ta có:

$$10A = \frac{10^{2005} + 10}{10^{2005} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2005} + 1}$$

$$10B = \frac{10^{2006} + 10}{10^{2006} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2006} + 1}$$

Vì $\frac{9}{10^{2005} + 1} > \frac{9}{10^{2006} + 1}$ nên $10A > 10B$, do đó $A > B$.

Bài 2: Cho $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ và $B = 1.2.3 \dots 11$

So sánh A và B?

$$\text{Ta có: } A = \frac{(1+1000).1000}{2} < 10^3.10^3 = 10^6$$

$$B = (2.5).(3.4).(6.7).(8.9).10.11 > 10^6$$

Vậy $A < B$

Bài 3: So sánh $L = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

$$\text{Ta có: } L = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{20} > \frac{1}{21}$$

$$\text{Vậy } L > \frac{1}{21}$$

Bài 4: So sánh $M = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$ với $\frac{11}{19}$

Ta có:

$$M = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1.3.2.4.3.5 \dots 9.10.9.11}{2^2.3^2.4^2 \dots 9^2.10^2} = \frac{(1.2.3 \dots 9).(3.4 \dots 11)}{(1.2.3 \dots 10).(1.2.3 \dots 10)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{2} = \frac{11}{20} < \frac{11}{19}$$

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ và $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$

So sánh A và B?

Ta có:

$$10A = \frac{10^{16}+10}{10^{16}+1} = 1 + \frac{9}{10^{16}+1}$$

$$10B = \frac{10^{17}+10}{10^{17}+1} = 1 + \frac{9}{10^{17}+1}$$

Vì $\frac{9}{10^{16}+1} > \frac{9}{10^{17}+1}$ nên $10A > 10B$, do đó $A > B$.

Bài 2: Cho $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ và $B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1}$

So sánh A và B?

Áp dụng tính chất: nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$ ($m > 0$)

Vì $B > 1$ nên

$$B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1} > \frac{10^{1993}+1+9}{10^{1992}+1+9} = \frac{10^{1993}+10}{10^{1992}+10} = \frac{10.(10^{1992}+1)}{10.(10^{1991}+1)} = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1} =$$

A

Vậy $A < B$

Bài 3: So sánh $U = \frac{1.3.5.7.....39}{21.22.23.....40}$ và $V = \frac{1}{2^{20}-1}$

Ta có: $U = \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.29.31.33.35.37.39}{21.2.11.23.3.2^2.25.2.13.27.7.2^2.29.2.15.31.2^5.33.2.17.35.9.2^2.37.2.19.39.5.2^3}$

$$U = \frac{1}{2.2^2.2.2^2.2.2^5.2.2^2.2.2^3} = \frac{1}{2^{20}}$$

Vì $\frac{1}{2^{20}} < \frac{1}{2^{20}-1} \Rightarrow U < V$

Bài 4: So sánh:

a. 63^7 và 16^{12}

$$63^7 < 64^7 = (8^2)^7 = 8^{14}$$

$$16^{12} = (2^4)^{12} = 2^{48} = 2^{3.16} = (2^3)^{16} = 8^{16}$$

$$8^{14} < 8^{16} \text{ nên } 63^7 < 16^{12}$$

b. $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{16}\right)^9$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^7 = \left(\frac{1}{2^5}\right)^7 = \frac{1}{2^{35}}$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^9 = \left(\frac{1}{2^4}\right)^9 = \frac{1}{2^{36}}$$

Ta có : $2^{35} < 2^{36}$ nên $\frac{1}{2^{35}} > \frac{1}{2^{36}} \Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^7 > \left(\frac{1}{16}\right)^9$

c. $\left(\frac{1}{243}\right)^9$ và $\left(\frac{1}{83}\right)^{13}$

$$\left(\frac{1}{3^5}\right)^9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{45} \text{ và } \left(\frac{1}{83}\right)^{13} < \left(\frac{1}{81}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3^4}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{52}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{45} > \left(\frac{1}{3}\right)^{52} \Rightarrow \left(\frac{1}{243}\right)^9 > \left(\frac{1}{83}\right)^{13}$$

d. 5^{299} và 3^{501}

$$5^{299} < 5^{300} = (5^3)^{100} < (3^5)^{100} = 3^{500} < 3^{501}$$

Vậy $5^{299} < 3^{501}$

e. 3^{23} và 5^{15}

$$3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7 > 5 \cdot (5^2)^7 = 5^{15}$$

f. 127^{23} và 513^{18}

$$127^{23} < 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161}$$

$$513^{18} > 512^{18} = (2^9)^{18} = 2^{162}$$

Vì $2^{162} > 2^{161}$ nên $513^{18} > 127^{23}$

g. $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}

$$1990^9 \cdot (1990+1) = 1991 \cdot 1990^9$$

$$1991^{10} = 1991 \cdot 1991^9$$

Vì $1991^9 > 1990^9$ nên $1991 \cdot 1991^9 > 1991 \cdot 1990^9 \Rightarrow 1991^{10} > 1990^{10} + 1990^9$

h. 3^{500} và 7^{300}

$$3^{500} = 3^{5 \cdot 100} = (3^5)^{100} = 243^{100}$$

$$7^{300} = 7^{3 \cdot 100} \cdot (7^3)^{100} = (343)^{100}$$

Vì $243^{100} < 343^{100} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$

i. 99^{20} và 9999^{10}

$$99^{20} = (99^2)^{10} = (99 \cdot 99)^{10} = 99^{10} \cdot 99^{10}$$

$$9999^{10} = (101 \cdot 99)^{10} = 101^{10} \cdot 99^{10}$$

Vì $101 > 99$ nên $101^{10} > 99^{10}$

$\Rightarrow 101^{10} \cdot 99^{10} > 99^{10} \cdot 99^{10}$

Vậy $9999^{10} > 99^{20}$

j. 202^{303} và 303^{202}

Vì $202^{303} = (2 \cdot 101)^{3 \cdot 101} = (2^3 \cdot 101^3)^{101} = (8 \cdot 101 \cdot 101^2)^{101} = (808 \cdot 101^2)^{101}$

Và $303^{202} = (3 \cdot 101)^{2 \cdot 101} = (3^2 \cdot 101^2)^{101} = (9 \cdot 101^2)^{101}$

Mà $(808 \cdot 101^2)^{101} > (9 \cdot 101^2)^{101}$ nên $202^{303} > 303^{202}$

DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ THỎA MÃN BIỂU THỨC

Bài 1: Tìm các số tự nhiên x và y sao cho:

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{y} = \frac{1}{5}$$

Đkxd : $y \neq 0$

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{y} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy - 12}{3y} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5xy - 60 = 3y$$

$$\Leftrightarrow y(5x - 3) = 60$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{60}{5x - 3}$$

Vì y là số tự nhiên nên $5x - 3$ phải là ước của 60

Vì x cũng là số tự nhiên nên giá trị của x thỏa mãn là $x = 1$; $x = 3$

Vậy $x = 3, y = 5$; $x = 1, y = 30$

$$\frac{4}{x} - \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$$

Đkxd: $x \neq 0$

$$\frac{4}{x} - \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12-xy}{3x} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 24 - 2xy = 5x$$

$$\Leftrightarrow x(5 + 2y) = 24$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24}{5+2y}$$

Vì x là số tự nhiên nên $5 + 2y$ là ước của 24, vì y cũng là số tự nhiên nên không có giá trị nào của x, y thỏa mãn.

Bài 2: Tìm các số nguyên x và y sao cho:

$$\frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$$

Đkxd: $x \neq 0$

$$\frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30-2xy}{6x} = \frac{x}{6x}$$

$$\Leftrightarrow x+2xy=3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30}{1+2y}$$

x nguyên nên $2y + 1$ là ước lẻ của 30. Ta có:

$2y+1$	1	-1	3	-3	5	-5	15	-15
$2y$	0	-2	2	-4	4	-6	14	-16
y	0	-1	1	-2	2	-3	7	-8
x	30	-30	10	-10	6	-6	2	-2

$$\frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}$$

Đkxd : $y \neq 0$

$$\frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-12}{6y} = \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5xy-60}{30y} = \frac{y}{30y}$$

$$\Leftrightarrow 5xy - 60 = y$$

$$\Leftrightarrow 5xy - y = 60$$

$$\Leftrightarrow y(5x - 1) = 60$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{60}{5x-1}$$

Vì y là số nguyên nên $5x - 1$ phải là ước của 60 và chia cho 5 thiếu 1. Ta có:

$5x - 1$	-1	4	-6
$5x$	0	5	-5
x	0	1	-1
y	-60	15	-10

Bài giải

Theo bài ra ta có sơ đồ:

Tuổi con: |-----|
Tuổi mẹ: |-----|-----|-----|-----|-----| } 36 tuổi

Tuổi con là: $36 : (1 + 5) = 6$ (tuổi)

Tuổi mẹ là: $36 - 6 = 30$ (tuổi)

Tuổi bà là: $30 \times 2 = 60$ (tuổi)

Đáp số: Tuổi con: 6 tuổi

Tuổi mẹ: 30 tuổi

Tuổi bà: 60 tuổi

Bài 3: Tuổi bố gấp 3 lần tuổi anh, tuổi anh gấp 2 lần tuổi em. Tuổi bố cộng với tuổi em bằng 42 tuổi. Tính tuổi của mỗi người.

Bài giải

Tuổi bố gấp ba lần tuổi anh, tuổi anh gấp 2 lần tuổi em nên tuổi bố gấp tuổi em số lần là: $3 \times 2 = 6$ (lần).

Ta có sơ đồ: Tuổi em: |-----|
Tuổi bố: |-----|-----|-----|-----|-----|-----| } 42 tuổi

Theo sơ đồ, tuổi của em là: $42 : (1 + 6) = 6$ (tuổi)

Tuổi của anh là: $6 \times 2 = 12$ (tuổi)

Tuổi của bố là: $12 \times 3 = 36$ (tuổi).

Đáp số: Em 6 tuổi, Anh 12 tuổi, Bố 36 tuổi.

Bài 4: Năm nay tuổi cô gấp 6 lần tuổi cháu. Đến khi tuổi cháu bằng tuổi cô hiện nay thì tuổi của hai cô cháu cộng lại bằng 68. Hỏi hiện nay mỗi người bao nhiêu tuổi?

Bài giải

Năm nay, nếu coi tuổi cháu là 1 phần thì tuổi cô là 6 phần như thế. Hiệu số phần tuổi của hai cô cháu là: $6 - 1 = 5$ (phần).

Vì hiệu số tuổi của hai cô cháu không thay đổi theo thời gian nên khi tuổi cháu bằng tuổi cô hiện nay thì cháu vẫn kém cô 5 phần tuổi cháu hiện nay.

Khi đó ta có sơ đồ:

Tuổi cháu: |----|----|----|----|----|----|
 Tuổi cô: |----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----| } 68 tuổi

Theo sơ đồ, tổng số phần bằng nhau là: $6 + 11 = 17$ (phần)

Khi đó tuổi cháu là: $68 : 17 \times 6 = 24$ (tuổi)

Khi đó tuổi cháu bằng tuổi cô hiện nay nên tuổi cô hiện nay là 24 tuổi.

Tuổi cháu hiện nay là: $24 : 6 = 4$ (tuổi).

Đáp số: Cháu: 4 tuổi; Cô: 24 tuổi.

Bài 5: Tổng số tuổi chị và tuổi em hiện nay bằng 32. Khi tuổi chị bằng tuổi em hiện nay thì tuổi chị gấp 3 lần tuổi em. Hỏi hiện nay mỗi người bao nhiêu tuổi?

Bài giải

Khi tuổi chị bằng tuổi em hiện nay thì tuổi chị gấp ba lần tuổi em, vậy nếu coi tuổi em hiện nay là 3 phần bằng nhau thì tuổi em trước đây là 1 phần.

Số phần tuổi chị nhiều hơn tuổi em trước đây là : $3 - 1 = 2$ (phần).

Vì hiệu số tuổi của hai chị em không thay đổi theo thời gian nên hiện nay chị vẫn hơn em hai phần tuổi em trước đây. Do đó nếu coi tuổi em hiện nay là 3 phần tuổi em trước đây thì tuổi chị hiện nay là 5 phần như thế ($2 + 3 = 5$) ta có sơ đồ:

Tuổi em hiện nay: |----|----|----|
 Tuổi chị hiện nay: |----|----|----|----|----| } 32 tuổi

Tổng số phần bằng nhau là: $3 + 5 = 8$ (phần)

Tuổi em hiện nay là: $32 : 8 \times 3 = 12$ (tuổi)

Tuổi chị hiện nay là: $32 - 12 = 20$ (tuổi)

Đáp số: Em: 12 tuổi; Chị: 20 tuổi.

Bài 6: Tuổi của hai anh em năm nay cộng lại bằng 16. Đến khi tuổi em bằng tuổi anh hiện nay thì tuổi anh bằng $\frac{5}{3}$ tuổi em. Tính tuổi anh và tuổi em hiện nay.

Bài giải

Khi tuổi em bằng tuổi anh hiện nay thì tuổi anh bằng $\frac{5}{3}$ tuổi em, vậy nếu coi tuổi em lúc đó là 5 phần như thế. Hiệu số phần tuổi của hai anh em lúc đó là:

$$5 - 3 = 2 \text{ (phần)}$$

Vì hiệu số tuổi của hai anh em không đổi theo thời gian nên hiện nay anh vẫn hơn em 2 phần tuổi em lúc đó. Do vậy nếu coi tuổi anh hiện nay bằng 3 phần tuổi em lúc đó thì tuổi em hiện nay là một phần như thế ($3 - 2 = 1$). Ta có sơ đồ:

Tuổi em hiện nay: |-----|
Tuổi anh hiện nay: |-----|-----|-----| } 16 tuổi

Theo sơ đồ, tổng số phần bằng nhau là: $3 + 1 = 4$ (phần)

Tuổi của em hiện nay là: $16 : 4 = 4$ (tuổi)

Tuổi của anh hiện nay là: $16 - 4 = 12$ (tuổi)

Đáp số: Em: 4 tuổi; Anh: 12 tuổi.

Bài 7: Hiệu của hai số là 1773. Tìm hai số đó biết rằng nếu viết thêm chữ số 0 vào tận cùng bên phải số bé thì được số lớn.

Bài giải

Nếu viết thêm chữ số 0 vào tận cùng bên phải số bé thì được số lớn, như vậy số lớn gấp 10 lần số bé hay số bé bằng $\frac{1}{10}$ số lớn. Theo bài ra ta có sơ đồ:

Số bé: |-----| 1773

← TÀI LIỆU BỒI DƯỠNG HSG TOÁN 6 →

Số lon: |-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

Theo sơ đồ, hiệu số phần bằng nhau là: $10 - 1 = 9$ (phần)

Số bé là: $1773 : 9 \times 1 = 197$

Số lớn là: $197 + 1773 = 1970$

Đáp số: Số bé: 197; Số lớn: 1970.

Bài 8: Hiện nay mẹ 35 tuổi, con 8 tuổi. Hỏi:

- a) Mấy năm nữa tuổi mẹ gấp 4 lần tuổi con?
- b) Có khi nào tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con không?

Bài giải

- a) Hiệu số tuổi của hai mẹ con là: $35 - 8 = 27$ (tuổi)

Hiệu số tuổi của hai mẹ con sẽ không thay đổi theo thời gian nên khi tuổi mẹ gấp 4 lần tuổi con thì mẹ vẫn hơn con 27 tuổi. Ta có sơ đồ:

Tuổi con: |-----| $\xleftarrow{27 \text{ tuổi}}$
Tuổi mẹ: |-----|-----|-----|-----|-----|

Khi đó tuổi con là: $27 : (4 - 1) = 9$ (tuổi)

Vì $9 - 8 = 1$ nên sau một năm nữa thì tuổi mẹ gấp 4 lần tuổi con.

- b) Khi tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con thì mẹ vẫn hơn con 27 tuổi. Ta có sơ đồ khi đó:

Tuổi con: |-----| $\xleftarrow{27 \text{ tuổi}}$
Tuổi mẹ: |-----|-----|-----|-----|-----|

Tuổi con khi đó là: $27 : (5 - 1) = 27 : 4$

Vì 27 không chia hết cho 4 nên không có khi nào tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con.

Bài 9: Cho phân số $\frac{23}{28}$. Hãy tìm số tự nhiên m sao cho khi cùng bớt cả tử số và mẫu số

của phân số đã cho đi m thì ta được phân số mới có giá trị bằng $\frac{2}{3}$.

Bài giải

Hiệu của mẫu số và tử số của phân số $\frac{23}{28}$ là $28 - 23 = 5$

Nếu cùng bớt m ở cả tử số và mẫu số thì hiệu mẫu số và tử số không đổi (vẫn bằng 5) mà khi đó được phân số mới có giá trị bằng $\frac{2}{3}$ nên ta có sơ đồ:

Tử số mới: $|\text{-----}| \text{-----}|$

Mẫu số mới: $\left| \text{-----} \right| \left| \text{-----} \right| \left| \text{-----} \right|$

Tử số mới là: $5 : (3 - 2) \times 2 = 10$

Số tự nhiên m là: $23 - 10 = 13$.

Đáp số: số tự nhiên m là 13.

Bài 10: Năm năm trước cha hơn con 36 tuổi. Hỏi năm cha bao nhiêu tuổi thì 3 lần tuổi cha bằng 7 lần tuổi con?

Bài giải

Vì hiệu số tuổi của hai cha con không thay đổi theo thời gian nên cha luôn hơn con 36 tuổi.

Đến năm mà 3 lần tuổi cha bằng 7 lần tuổi con nghĩa là năm tuổi con bằng $\frac{3}{7}$ tuổi cha. Ta có sơ đồ khi đó:

Tuổi con: |-----|-----|-----|

Tuổi con: |---|---|---|
Tuổi cha: |---|---|---|← 36 tuổi →

Theo sơ đồ, hiệu số phần bằng nhau là: $7 - 3 = 4$ (phần)

Khi đó tuổi của cha là: $36 : 4 \times 7 = 63$ (tuổi)

Đáp số: tuổi cha: 63 tuổi.

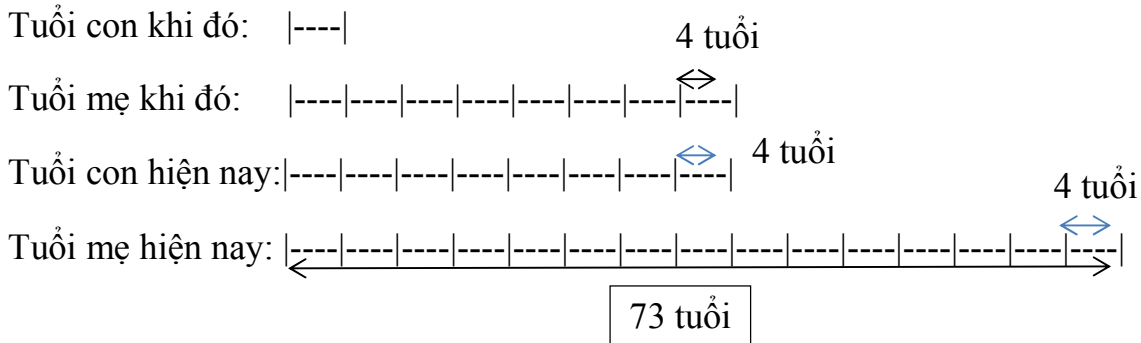
Bài 11: Năm nay mẹ 73 tuổi. Khi tuổi mẹ bằng tuổi con hiện nay thì tuổi mẹ hơn 7 lần tuổi con lúc đó là 4 tuổi. Tính tuổi con hiện nay?

Bài giải

Coi tuổi con là 1 phần (khi tuổi mẹ bằng tuổi con hiện nay) thì tuổi mẹ lúc đó là 7 phần như thế là cộng thêm 4 tuổi. Ta có hiệu số tuổi của hai mẹ con là:

7 phần tuổi con + 4 tuổi – 1 phần tuổi con = 6 phần tuổi con + 4 tuổi.

Vì hiệu số tuổi của hai mẹ con không đổi theo thời gian nên hiện nay mẹ vẫn hơn con 6 phần tuổi con khi đó cộng thêm 4 tuổi. Ta có sơ đồ:



Theo sơ đồ ta có:

$$7 \text{ phần tuổi con} + 4 \text{ tuổi} + 6 \text{ phần tuổi con} + 4 \text{ tuổi} = 73 \text{ tuổi}$$

$$\text{Hay } 13 \text{ phần tuổi con} + 8 \text{ tuổi} = 73 \text{ (tuổi)}$$

$$13 \text{ phần tuổi con} = 65 \text{ (tuổi)}$$

$$\text{Vậy một phần tuổi con khi đó là: } 65 : 13 = 5 \text{ (tuổi)}$$

$$\text{Tuổi con hiện nay là : } 5 \times 7 + 4 = 39 \text{ (tuổi).}$$

Đáp số: 39 tuổi.

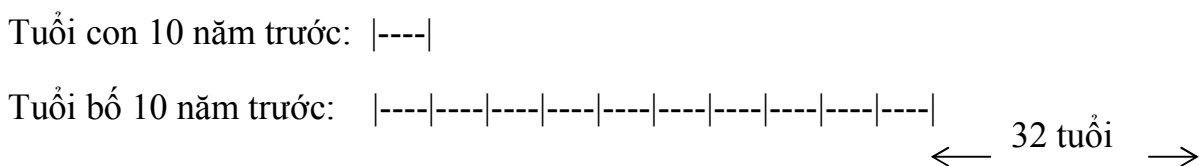
Bài 12: Bố nói với con: “10 năm trước đây tuổi bố gấp 10 lần tuổi con”, 22 năm sau nữa thì tuổi bố sẽ gấp đôi tuổi con. Hãy tính tuổi bố và tuổi con hiện nay.

Bài giải

Mười năm trước đây, nếu coi tuổi con là 1 phần thì tuổi bố là 10 phần như thế. Thời gian từ cách đây 10 năm đến sau đây 22 năm nữa có số năm là:

$$10 + 22 = 32 \text{ (năm)}$$

Theo bài ra ta có sơ đồ:



Tuổi bố 22 năm sau: 

Tuổi con 22 năm sau: 

Nhìn sơ đồ ta thấy:

$$1 \text{ phần tuổi con} + 32 \text{ tuổi} = (10 \text{ phần tuổi con} + 32 \text{ tuổi}) : 2$$

Hay $1 \text{ phần tuổi con} + 32 \text{ tuổi} = 5 \text{ phần tuổi con} + 16 \text{ tuổi}$

16 tuổi = 4 phần tuổi con

Vậy tuổi con cách đây 10 năm là: $16 : 4 = 4$ (tuổi).

Tuổi bố cách đây 10 năm là: $4 \times 10 = 40$ (tuổi)

Tuổi con hiện nay là: $4 + 10 = 14$ (tuổi)

Tuổi bố hiện nay là: $40 + 10 = 50$ (tuổi)

Đáp số: Con: 14 tuổi; Bố: 50 tuổi.

Bài 13: Lớp 5A có số học sinh nữ bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh nam. Sang đầu học kỳ II có 4 bạn nữ từ lớp khác chuyển đến nên số học sinh nữ bằng $\frac{3}{5}$ số học sinh nam. Hỏi đầu năm học lớp 5A có bao nhiêu học sinh nữ, bao nhiêu học sinh nam?

Bài giải

Theo bài ra ta có sơ đồ sau:

Số học sinh nữ lúc đầu: $|\overset{?}{\text{---}}|\text{---}|$ 4 h/s

Số học sinh nữ lúc sau: $|\text{---}| \text{---} |\text{---}| \overset{\leftarrow}{\text{---}} |$?

Số học sinh nam: 

Theo sơ đồ số học sinh nữ lúc đầu là: $4 : (3 - 2) \times 2 = 8$ (học sinh)

Số học sinh nam là: $8 : \frac{2}{5} = 20$ (học sinh).

Đáp số: 8 học sinh nữ

Bài 14: Có 3 bình nước đựng nước chưa đầy. Sau khi đổ $\frac{1}{3}$ số nước ở bình 1 sang bình 2, rồi đổ $\frac{1}{4}$ số nước hiện có ở bình 2 sang bình 3, cuối cùng đổ $\frac{1}{10}$ số nước hiện có ở bình 3 sang bình 1 thì mỗi bình đều có 9 lít nước. Hỏi lúc đầu mỗi bình có bao nhiêu lít nước?

Bài giải

Sau khi đổ $\frac{1}{10}$ số lít nước ở bình 3 sang bình 1 thì bình 3 còn 9 lít nước.

Vậy trước đó bình ba có số lít nước là: $9 : (1 - \frac{1}{10}) = 10$ (l)

Trước khi nhận $\frac{1}{10}$ số lít nước của bình 3 thì bình 1 có số lít nước là:

$$9 - 10 \times \frac{1}{10} = 8(l)$$

Vậy lúc đầu bình 1 có số lít nước là: $8 : (1 - \frac{1}{3}) = 12$ (l)

Sau khi đổ $\frac{1}{4}$ số nước ở bình 2 sang bình 3 thì bình 2 còn 9 lít (theo bài ra), vậy trước khi đó bình 2 có số lít nước là: $9 : (1 - \frac{1}{4}) = 12$ (l).

Vậy trước khi nhận $\frac{1}{3}$ số nước của bình 1 hay lúc đầu bình 2 có số lít nước là:

$$12 - 12 \times \frac{1}{3} = 8 (l).$$

Bình 2 đổ sang bình 3 số lít nước là: $12 \times \frac{1}{4} = 3$ (l)

Theo lời giải đầu thì trước khi đổ $\frac{1}{10}$ số nước sang bình 1 thì bình 3 có 10 lít nước, vậy trước khi nhận 3 lít nước ở bình 2 đổ sang hay lúc đầu bình 3 có số lít nước là: $10 - 3 = 7$ (l).

Đáp số: Bình 1: 12l; Bình 2: 8l; Bình 3: 7l.

Bài 15: Tìm bốn số tự nhiên chẵn liên tiếp có tổng bằng 5420

Bài giải

Gọi bốn số tự nhiên chẵn có dạng: $2k$; $2k + 2$; $2k + 4$; $2k + 6$. ($k \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có: $2k + 2k + 2 + 2k + 4 + 2k + 6 = 5420$

Hay $8k + 12 = 5420$

$$8k = 5408$$

$$k = 676 \text{ (TM)}$$

Vậy 4 số tự nhiên cần tìm là: 1352; 1354; 1356; 1358.

Bài 16: Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp biết rằng tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng 114.

Bài giải

Gọi ba số tự nhiên lẻ liên tiếp là: $2k + 1$; $2k + 3$; $2k + 5$ ($k \in \mathbb{N}$)

Theo bài ra ta có: $2k + 1 + 2k + 5 = 114$

Hay $4k + 6 = 114$

$$k = 27 \text{ (TM)}$$

Vậy 3 số tự nhiên lẻ cần tìm là: 55; 57; 59

Bài 17: Hiệu của hai số bằng 1217. Nếu tăng số trừ gấp bốn lần thì được số lớn hơn số bị trừ là 376. Tìm số bị trừ và số trừ.

Bài giải

Theo bài ra ta có sơ đồ:

Số bị trừ: |-----|

Số trừ: |-----| 1217 376

Số trừ x 4: |-----|-----|-----|-----|

Ba lần số trừ: $1217 + 376 = 1593$

Số trừ: $1953 : 3 = 531$

Số bị trừ: $531 + 1217 = 1748$

Đáp số: Số trừ: 531; Số bị trừ: 1748

Bài 18: Năm 2000, bố 40 tuổi, Mai 11 tuổi, em Nam 5 tuổi. Đến năm nào, tuổi bố bằng tổng số tuổi của hai chị em?

Bài giải

Năm 2000, chênh lệch giữa tuổi bố và tổng số tuổi của hai chị em là:

$$40 - (11 + 5) = 24 \text{ (tuổi)}$$

Cứ mỗi năm mỗi người tăng thêm một tuổi nên chênh lệch giữa tuổi bố là tuổi 2 chị em sẽ giảm đi: $(1 + 1) - 1 = 1 \text{ (tuổi)}$

Số năm để số tuổi bố bằng tổng số tuổi hai chị em là:

$$24 : 1 = 24 \text{ (năm)}$$

Lúc đó là năm : $2000 + 24 = 2024$.

Đáp số: Năm 2024

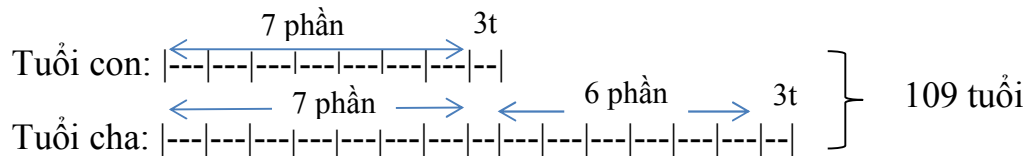
a) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Năm nay tuổi cha hơn 7 lần tuổi con là 3 tuổi. Đến khi tuổi con bằng tuổi cha hiện nay thì tuổi hai cha con cộng lại bằng 109. Tìm tuổi của mỗi người hiện nay.

Bài giải

Nếu coi tuổi con là 1 phần thì tuổi cha là 7 phần như thế cộng thêm 3 tuổi. Vậy hiệu số tuổi của hai cha con là 6 phần tuổi con cộng thêm 3 tuổi.

Vì hiệu số tuổi của hai cha con không thay đổi theo thời gian nên khi tuổi con bằng tuổi cha hiện nay thì con vẫn kém cha 6 phần tuổi con hiện nay cộng thêm 3 tuổi, ta có sơ đồ khi đó:



Theo sơ đồ ta có:

$$7 \text{ phần} + 7 \text{ phần} + 6 \text{ phần} + 3 \text{ tuổi} + 3 \text{ tuổi} + 3 \text{ tuổi} = 109 \text{ tuổi}$$

$$20 \text{ phần} + 9 \text{ tuổi} = 109 \text{ tuổi}$$

$\Leftrightarrow 20 \text{ phần} = 100 \text{ tuổi}$

Vậy tuổi con hiện nay là: $100 : 20 = 5$ (tuổi)

Tuổi cha hiện nay là: $5 \times 7 + 3 = 38$ (tuổi).

Đáp số: Con: 5 tuổi; Cha: 38 tuổi.

Bài 2: Hiệu của hai số là 2345. Tìm hai số đó, biết rằng nếu viết thêm chữ số 5 vào tận cùng bên phải số bé thì được số lớn.

Bài giải

Nếu viết thêm chữ số 5 vào tận cùng bên phải số bé thì được số lớn hơn, như vậy số lớn gấp 10 lần số bé và cộng thêm 5 đơn vị.

Theo bài ra ta có sơ đồ:

Số bé : $|\text{---}|$

Số lớn: 

Theo sơ đồ ta có 9 lần số bé là: $2345 - 5 = 2340$

Số bé là : $2340 : 9 = 260$

Số lớn là: $260 + 2345 = 2605$

Đáp số: Số bé: 260 ; Số lớn: 2605.

Bài 3: Mẹ hơn con 24 tuổi. Cách đây 4 năm tuổi con bằng $\frac{1}{4}$ tuổi mẹ. Hỏi hiện nay mỗi người bao nhiêu tuổi?

Bài giải

Hiệu số tuổi của hai mẹ con không thay đổi theo thời gian nên cách đây 4 năm mẹ vẫn hơn con 24 tuổi. Ta có sơ đồ khi đó:

Tuổi con : |-----|
 Tuổi mẹ : |-----|-----|-----|-----|
 5

Theo sơ đồ tuổi mẹ cách đây 4 năm là: $24 : (4 - 1) \times 4 = 32$ (tuổi)

Vì mỗi năm mỗi người tăng lên 1 tuổi nên hiện nay tuổi mẹ là:

$$32 + 4 \times 1 = 36 \text{ (tuổi)}$$

Tuổi con hiện nay là: $36 - 24 = 12$ (tuổi)

Đáp số: Mẹ: 36 tuổi ; Con: 12 tuổi.

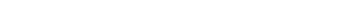
Bài 4: Cho phân số $\frac{107}{187}$. Hãy tìm số tự nhiên, biết rằng nếu cùng bớt cả tử số và mẫu số đi số tự nhiên đó thì ta được phân số mới có giá trị bằng $\frac{5}{9}$.

Bài giải

Hiệu của tử số và mẫu số của phân số $\frac{107}{187}$ là : $187 - 107 = 80$

Nếu cùng bớt cả tử số và mẫu số đi cùng một số tự nhiên thì hiệu mẫu số và tử số vẫn không đổi (vẫn bằng 80) mà khi đó thì được phân số mới có giá trị bằng $\frac{5}{9}$ nên ta có sơ đồ:

Tử số mới: |----|----|----|----|----|

Mẫu số mới: 

Tử số mới là: $80 : (9 - 5) \times 5 = 100$

Số tự nhiên cần tìm là: $107 - 100 = 7$

Đáp số: số tự nhiên là 7.

Bài 5: Hiệu của hai số bằng 0,8. Thương của hai số cùng bằng 0,8. Hãy tìm hai số đó.

Bài giải

$$0,8 = \frac{4}{5}$$

Ta có sơ đồ:

Số bé là: $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,8$

Số lớn là:

--	--	--	--	--

 $\longleftrightarrow$

Theo sơ đồ hiệu số phần bằng nhau là: $5 - 4 = 1$ (phần)

Số bé là: $0,8 : 1 \times 4 = 3,2$

Số lớn là: $3,2 + 0,8 = 4$

Đáp số: 3,2 và 4.

Bài 6: Hiệu của hai số bằng 20. Thương của hai số bằng 2,25. Tìm hai số đó.

Bài giải

Theo bài ta có sơ đồ:

Số bé :

--	--	--	--

20

Số lớn : |---|---|---|---|---|---|---|---|

Theo sơ đồ hiệu số phần bằng nhau là: $9 - 4 = 5$ (phần)

Số lớn là: $20 : 5 \times 9 = 36$

Số bé là: $36 - 20 = 16$

Đáp số: 36 và 16.

Bài 7: Tìm hai số có hiệu bằng 252, biết số bé bằng $\frac{1}{4}$ tổng của hai số.

Bài giải

Số bé bằng $\frac{1}{4}$ tổng hai số, nếu coi số bé là 1 phần thì tổng của hai số là 4 phần như vậy. Do đó số lớn có số phần bằng nhau là:

$$4 - 1 = 3 \text{ (phần)}$$

Vậy số bé bằng $\frac{1}{3}$ số lớn. Ta có sơ đồ:

Số bé : $\boxed{\hspace{1cm}}$
Số lớn : $\boxed{\hspace{1cm}} \boxed{\hspace{1cm}} \boxed{\hspace{1cm}}$

Theo sơ đồ hiệu số phần bằng nhau là: $3 - 1 = 2$ (phần)

Số bé là: $252 : 2 \times 1 = 126$

Số lớn là: $126 + 252 = 378$

Đáp số: số bé: 126; số lớn: 378.

Bài 8: Ba năm trước em 6 tuổi và kém chị 6 tuổi. Hỏi mấy năm sau nữa thì 3 lần tuổi chị bằng 4 lần tuổi em?

Bài giải

Vì hiệu số tuổi của hai chị em không thay đổi theo thời gian nên em luôn kém chị 6 tuổi.

Khi 3 lần tuổi chị bằng 4 lần tuổi em nghĩa là khi tuổi em bằng $\frac{3}{4}$ tuổi chị.

Ta có sơ đồ khi đó:

Tuổi em : |----|----|----| 6t

Tuổi chị : |----|----|----|----|

Theo sơ đồ hiệu số phần bằng nhau là: $4 - 3 = 1$ (phần)

Khi đó tuổi của em là: $6 : 1 \times 3 = 18$ (tuổi)

Từ khi em 6 tuổi đến lúc em 18 tuổi có số năm là: $18 - 6 = 12$ (năm)

Vậy sau 12 năm từ lúc em 6 tuổi thì 3 lần tuổi chị bằng 4 lần tuổi em

Đáp số: 12 năm.

Bài 9: Một quầy bán vải, lần thứ nhất bán 2m vải, lần thứ hai bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}$ m.

Lần thứ ba bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}$ m, lần thứ tư bán $\frac{1}{2}$ số vải còn lại và $\frac{1}{2}$ m thì vừa hết.

Hỏi quầy vải đó bán được tất cả bao nhiêu mét vải?

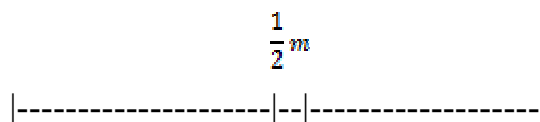
Bài giải

Ta có sơ đồ:

Số vải lúc đầu:



Số vải sau khi bán lần thứ nhất:



$\frac{1}{2}m$

Số vải sau khi bán lần thứ hai:

|-----|--|-----|

$\frac{1}{2}m$

Số vải sau khi bán lần thứ ba:

|---|---|

Theo sơ đồ số vải còn lại sau khi bán lần thứ 3 là: $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ (m)

Số vải còn lại sau khi bán lần thứ hai là: $(1 + \frac{1}{2}) \times 2 = 3$ (m)

Số vải còn lại sau khi bán lần thứ nhất là: $(3 + \frac{1}{2}) \times 2 = 7$ (m)

Số vải cửa hàng đó bán được tất cả là: $7 + 2 = 9$ (m)

Đáp số: 9 m vải.

Bài 10: Bình đọc một quyển truyện trong 3 ngày. Ngày đầu Bình đọc được $\frac{1}{5}$ số trang và 16 trang. Ngày thứ hai Bình đọc được $\frac{3}{10}$ số trang còn lại và 20 trang. Ngày thứ ba Bình đọc được $\frac{3}{4}$ số trang còn lại và 37 trang cuối cùng. Hỏi quyển truyện đó có bao nhiêu trang?

Bài giải

Ta có sơ đồ:

16 trang

Số trang quyển truyện: |-----|--|-----|-----|-----|-----|

Số trang còn lại sau khi đọc ngày đầu: |---|---|---|---|^{20 trang}|---|---|---|---|

Số trang còn lại sau khi đọc ngày thứ 2: |-----|-----|-----|-----|

37 trang

Theo sơ đồ, số trang còn lại sau khi Bình đọc ngày thứ hai là:

$$37 \times 4 = 148 \text{ (trang)}$$

Số trang còn lại sau khi Bình đọc ngày đầu là:

$$(148 + 20) : 7 \times 10 = 240 \text{ (trang)}$$

Số trang của quyển truyện đó là: $(240 + 16) : 4 \times 5 = 320 \text{ (trang)}$

Đáp số: 320 trang

Bài 11: Hai ngăn sách lúc đầu có tổng cộng 118 cuốn. Sau khi lấy đi 8 cuốn sách ở ngăn I, thêm 10 cuốn sách vào ngăn II thì số sách ở ngăn II gấp đôi số sách ở ngăn I. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

Bài giải

Ta vẽ sơ đồ lúc cuốn sách ngăn II gấp đôi số sách ngăn I (tức là số sách ở hai ngăn lúc sau):

$$\begin{array}{l} \text{Ngăn I lúc sau: } | \text{---} | \\ \text{Ngăn II lúc sau: } | \text{---} | \text{---} | \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} | \text{---} | \\ | \text{---} | \text{---} | \end{array}} \right\} 120$$

Tổng số sách ở hai ngăn lúc sau:

$$118 - 8 + 10 = 120 \text{ (cuốn)}$$

Số sách ở ngăn I lúc sau: $120 : 3 = 40 \text{ (cuốn)}$

Số sách ở ngăn I lúc đầu là: $40 + 8 = 48 \text{ (cuốn)}$

Số sách ở ngăn II lúc đầu: $118 - 48 = 70 \text{ (cuốn)}$

Bài 12: Tìm số tự nhiên tận cùng bằng 7 biết rằng sau khi xóa chữ số 7 đó thì số ấy giảm đi 484 đơn vị.

Bài Giải

Xóa đi chữ số 7 tận cùng của một số là trừ số đó đi 7 đơn vị rồi chia cho 10. Ta có sơ đồ:

Số còn lại: $| \text{---} | \quad 484$

Số ban đầu: $| \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} |$

Số còn lại: $(484 - 7) : 9 = 53.$

Số ban đầu: $484 + 53 = 537$.

Bài 13: Tìm số tự nhiên biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào sau chữ số hàng đơn vị thì số ấy tăng thêm 2000 đơn vị.

Bài Giải

Theo bài ra ta có: $2000 - 2 = 1998$ gấp 9 lần số phải tìm

Số phải tìm là: $1998 : 9 = 222$.

Đáp số: 222

Bài 14: Tìm ba số có tổng bằng 210, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ hai và bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

Bài Giải

Số thứ nhất bằng: $\frac{9}{11} : \frac{6}{7} = \frac{21}{22}$ (số thứ hai).

Số thứ ba bằng: $\frac{9}{11} : \frac{2}{3} = \frac{27}{22}$ (số thứ hai).

Tổng của ba số bằng $\frac{70}{22}$ số thứ hai hay 210.

Đáp số: 63, 66, 81.

Bài 15: Mẹ hơn con 28 tuổi. Sau 5 năm nữa, tuổi mẹ gấp ba tuổi con. Tính tuổi mẹ và con hiện nay.

Bài Giải

Vì hiệu số tuổi của mẹ và con không đổi theo thời gian nên sau 5 năm nữa tuổi mẹ vẫn hơn con 28 tuổi.

Ta có sơ đồ:

Tuổi con sau 5 năm: |-----|
 Tuổi mẹ sau 5 năm: |-----|-----|-----|
 ← 28 tuổi →

Dựa vào sơ đồ ta thấy:

Tuổi con sau 5 năm là: $28 : 2 = 14$ (tuổi)

Tuổi con hiện nay là: $14 - 5 = 9$ (tuổi)

Tuổi mẹ hiện nay là: $9 + 28 = 37$ (tuổi)

Đáp số: Con: 9 tuổi; Mẹ: 37 tuổi.

Bài 16: Năm 2000, mẹ 36 tuổi, hai con 7 tuổi và 12 tuổi. Bắt đầu từ năm nào, tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi của hai con?

HD: Trước hết ta tính xem đến năm nào thì tuổi mẹ bằng tổng số tuổi của hai con. Đó là năm 2017. Vậy từ năm 2018 trở đi thì tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi của hai con.

Bài giải

Số năm để tuổi mẹ bằng tổng tuổi hai con là:

$$36 - (7 + 12) = 17 \text{ (năm)}$$

Số năm để tuổi mẹ bắt đầu nhỏ hơn tổng số tuổi là con là:

$$17 + 1 = 18 \text{ (năm)}$$

Vậy năm đầu tiên là tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi 2 con là:

$$2000 + 18 = 2018$$

Đáp số: năm 2018

Bài 17: Anh hơn em 3 tuổi. Tuổi anh hiện nay gấp rưỡi tuổi em, lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Tính tuổi hiện nay của mỗi người.

Bài giải

Vì hiệu số tuổi của anh và em không thay đổi theo thời gian nên coi tuổi em trước đây là 1 phần thì tuổi anh trước đây là: 1 phần cộng thêm 3 tuổi

Vậy tuổi em hiện nay cũng là 1 phần cộng thêm 3 tuổi .

Tuổi anh hiện nay là:

$$1 \text{ phần} + 3 \text{ tuổi} + 3 \text{ tuổi} = 1 \text{ phần} + 6 \text{ tuổi}$$

Vì (1 phần + 6 tuổi) này cũng chính là 1,5 phần. Vậy 0,5 phần là 6 tuổi.

1 phần là: $6 : 0,5 = 12$ (tuổi)

Tuổi em hiện nay là: $12 + 3 = 15$ (tuổi)

Tuổi anh hiện nay là: $15 + 3 = 18$ (tuổi)

Đáp số: Anh: 18 tuổi ; Em: 15 tuổi

Bài 18: Tuổi mẹ hiện nay gấp 2,3 lần tuổi con. 16 năm trước, tuổi mẹ gấp 7,5 lần tuổi con. Hỏi mấy năm sau thì tuổi mẹ gấp đôi tuổi con?

Bài giải

Hiện nay mẹ hơn con: $2,3 - 1 = 1,3$ lần tuổi con hiện nay.

Còn 16 năm trước mẹ hơn con: $7,5 - 1 = 6,5$ lần tuổi con trước kia.

Vì mẹ luôn hơn con một số tuổi không đổi nên 6,5 lần tuổi con trước kia bằng 1,3 lần tuổi con hiện nay, tức là tuổi con hiện nay gấp: $6,5 : 1,3 = 5$ lần tuổi con trước kia.

Do đó 4 lần tuổi con trước kia là: 16 năm, tuổi con trước kia là 4 tuổi, tuổi con hiện nay là: $4 + 16 = 20$ tuổi, tuổi mẹ hiện nay là: $20 \times 2,3 = 46$ tuổi.

Mẹ hơn con : $46 - 20 = 26$ tuổi. Lúc mẹ gấp đôi tuổi con thì con 26 tuổi, tức là $26 - 20 = 6$ năm sau thì tuổi mẹ gấp đôi tuổi con.

Đáp số: 6 năm

a) PHƯƠNG PHÁP 2: GIẢ THIẾT TẠM

a) BÀI TẬP MINH HỌA:

Bài 1: Ba ô tô chở tổng cộng 50 chuyến, gồm 118 tấn hàng. Mỗi chuyến, xe thứ nhất chở 2 tấn, xe thứ hai chở 2,5 tấn, xe thứ ba chở 3 tấn. Hỏi mỗi xe chở bao nhiêu chuyến biết rằng số chuyến xe thứ nhất gấp rưỡi số chuyến xe thứ hai?

Bài Giải

Giả thiết rằng tất cả 50 chuyến đều do xe thứ ba chở thì khối lượng hàng chở được là: $3.50 = 150$ (tấn).

Dôi ra: $150 - 118 = 32$ (tấn)

Để không dôi ra, phải thay một số chuyến của xe thứ ba bằng các chuyến của hai xe kia theo quy luật sau: cứ 5 chuyến của xe thứ ba thay bởi 2 chuyến của xe thứ nhất và 2 chuyến của xe thứ hai. Mỗi lần thay bởi như vậy thì số chuyến không thay đổi, số chuyến của xe thứ nhất luôn gấp rưỡi số chuyến của xe thứ hai, còn khối lượng hàng giảm đi:

$$3.5 - (2.3 + 2.5.2) = 15 - 11 = 4 \text{ (tấn)}$$

Số lần thay: $32 : 4 = 8$ (lần)

Xe thứ nhất chở: $3.8 = 24$ (chuyến)

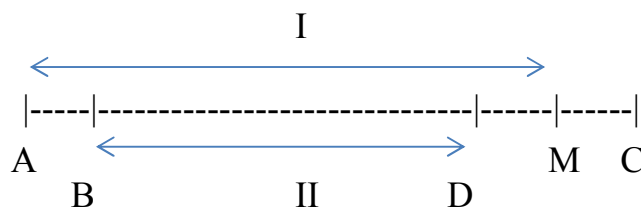
Xe thứ hai chở: $2.8 = 16$ (chuyến)

Xe thứ ba chở: $50 - (24 + 16) = 10$ (chuyến)

Bài 2: Trên quãng đường AC dài 200 km có một điểm B cách A là 10 km. Lúc 7 giờ, một ô tô đi từ A, một ô tô khác đi từ B, cả hai cùng đi tới C với vận tốc thứ tự bằng 50km/h và 40km/h. Hỏi lúc mấy giờ thì khoảng cách đến C của xe thứ hai gấp đôi khoảng cách đến C của xe thứ nhất?

Bài Giải

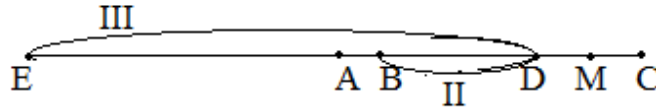
Quãng đường đi của hai ô tô được minh họa như sau:



Lúc xe thứ hai đến D là thời điểm phải tìm. ($DM = DC$).

Giả thiết rằng có một xe thứ ba phải đi quan quãng đường EC dài gấp đôi quãng đường AC của xe thứ nhất phải đi ($EC = 200.2 = 400$ km), với vận tốc gấp đôi vận tốc của xe thứ nhất (như vậy vận tốc xe thứ ba bằng : $50.2 = 100$ km/h) thì cũng trong thời

gian như xe thứ nhất, quãng đường còn lại đến C của xe thứ nhất và như vậy xe thứ ba này sẽ gặp xe thứ hai tại D. (Minh họa bằng hình dưới đây)



Quãng đường ED dài hơn quãng đường BD:

$$400 - 190 = 210 \text{ (km)}.$$

Vận tốc xe thứ ba lớn hơn vận tốc xe thứ hai:

$$100 - 40 = 60 \text{ (km/h)}.$$

Thời gian để xe thứ ba gặp xe thứ hai tại D:

$$210 : 60 = 3,5 \text{ (h)}.$$

Vậy thời điểm phải tìm là: $7 + 3,5 = 10\text{h } 30\text{ph}$.

Đáp số: 10 giờ 30 phút

Bài 3: Người ta bơm nước vào một bể: dùng máy I trong 30 phút, dùng máy II trong 20 phút. Tính xem trong mỗi phút mỗi máy bơm được bao nhiêu lít nước, biết rằng mỗi phút máy II bơm được nhiều hơn máy I là 50 lít và tổng cộng hai máy bơm được 21000 lít nước?

Bài Giải

Giả sử trong mỗi phút, máy II bơm số nước bằng máy I thì trong 50 phút cả hai máy bơm được:

$$21000 - 50.20 = 20000 \text{ (lít)}$$

Trong mỗi phút, máy I bơm được:

$$20000 : 50 = 400 \text{ (lít)}$$

Trong mỗi phút, máy II bơm được:

$$400 + 50 = 450 \text{ (lít)}$$

Bài 4: Khối 6 của một trường có 366 học sinh, gồm 8 lớp. Mỗi lớp gồm một số tổ, mỗi tổ có 9 người hoặc 10 người. Biết rằng số tổ của các lớp đều bằng nhau, tính số tổ có 9 người, số tổ có 10 người cả khối?

HD Giải

Mỗi lớp gồm một số tổ mỗi tổ 9 người hoặc 10 người, Trước hết ta nhận thấy :

$$366 : 10 = 36 \text{ còn dư}$$

$$366 : 9 = 40 \text{ còn dư}$$

Do đó số tổ của các lớp nằm trong khoảng từ 37 đến 40

Mặt khác số tổ chia hết cho 8 $\Rightarrow$ Số tổ của khối lớp 6 đó là 40 tổ

Giả sử cả 40 tổ đều là tổ 10 người. Khi đó số HS của khối là:

$$40 \cdot 10 = 400 \text{ (HS)}$$

So với bài ra thừa ra $400 - 366 = 34$ (HS) là do còn có tổ 9 người.

Nếu thay mỗi tổ 10 người bằng một tổ 9 người thì mỗi lần thay bớt được :

$$10 - 9 = 1$$

Vậy số tổ có 9 người là $34 : 1 = 34$ (tổ)

Số tổ có 10 người là $40 - 34 = 6$ (tổ)

Bài 5: Một câu lạc bộ có 22 chiếc ghế gồm ba loại: ghế ba chân, ghế bốn chân, ghế sáu chân. Tính số ghế mỗi loại, biết rằng tổng số chân ghế bằng 100 và số ghế sáu chân gấp đôi số ghế ba chân?

Bài Giải

Giả sử 22 chiếc ghế đều là 4 chân. Khi đó số chân ghế là:

$$4 \cdot 22 = 88 \text{ (Chân)}$$

So với bài ra bị hụt mất $100 - 88 = 12$ (chân) $\Rightarrow$ là do còn có ghế 3 chân, 6 chân.

Để không bị hụt đi ta thay các ghế 4 chân bằng hai loại ghế kia theo quy luật: một ghế 3 chân, 2 ghế 6 chân cho 3 ghế 4 chân, khi đó số ghế không thay đổi, quan hệ giữa ghế 3 chân và ghế 6 chân được đảm bảo.

Mỗi lần thay, số chân ghế tăng thêm: $2.6 + 1.3 - 3.4 = 3$ (chân)

Vậy số lần thay là: $12 : 3 = 4$ (lần)

Số ghế 3 chân là: $4.1 = 4$ (ghế)

Số ghế 6 chân là: $4.2 = 8$ (ghế)

Số ghế 4 chân là: $22 - (4 + 8) = 10$ (ghế)

a) BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Một số học sinh xếp hàng 12 thì thừa 5 học sinh, còn xếp hàng 15 cũng thừa 5 học sinh và ít hơn trước là 4 hàng. Tính số học sinh?

HD giải:

Giả thiết tạm rằng số HS đó khi xếp hàng 15 thì cũng được số hàng như khi xếp hàng 12, nghĩa là ta phải có thêm 4 hàng nữa. Khi đó có thêm:

$$15 \cdot 4 = 60 \text{ (HS)}$$

Trong hai trường hợp số HS ở mỗi hàng chênh lệch nhau :

$$15 - 12 = 3 \text{ (HS)}$$

Số hàng khi xếp hàng 12 là : $60 : 3 = 20$ (hàng)

Số HS là: $20 \cdot 12 + 5 = 245$ (HS)

Bài 2: Anh vào cửa hàng mua 12 vở và 4 bút chì hết 36000 đồng. Bích mua 8 vở và 5 bút chì cùng loại hết 27500 đồng. Tính giá trị một quyển vở, giá trị một bút chì.

HD giải

Giả sử An mua gấp đôi số hàng đã mua là 24 quyển vở và 8 bút chì hết

$$36\,000 \cdot 2 = 72\,000 \text{ đ}$$

Bích mua gấp ba số hàng đã mua là 24 quyển vở và 15 bút chì hết

$$27\,500 \cdot 3 = 82\,500 \text{ đ}$$

Như vậy Bích mua nhiều hơn An $15 - 8 = 7$ (bút chì)

Số tiền chênh lệch là: $82\,500 - 72\,000 = 10\,500$ đ,

Vậy giá tiền một bút chì là: $10\,500 : 7 = 1\,500$ đ,

Giá tiền một quyển vở là $:(36\,000 - 4. 1\,500) : 12 = 2\,500$ đ

Bài 3: Một tổ may phải may 1800 chiếc cả quần và áo trong 13 giờ. Trong 8 giờ đầu tổ may áo và trong thời gian còn lại tổ may quần. Biết rằng trong 1 giờ, tổ may được số áo nhiều hơn số quần là 30 chiếc. Tính số áo và số quần tổ đã may.

HD giải

Giả sử trong thời gian còn lại tổ vẫn may áo . Khi đó số áo may thêm được là:

$$(13 - 8). 30 = 150 \text{ (chiếc)}$$

Số áo tổ đó may được trong 13 giờ là $:1800 + 150 = 1950$ (chiếc)

Số áo tổ đó may được là: $(1950 : 13) . 8 = 1\,200$ (chiếc)

Số quần tổ đó may được là: $1800 - 1200 = 600$ (chiếc)

Bài 4: Một lớp học có 6 tổ, số người của mỗi tổ bằng nhau. Trong một bài kiểm tra, tất cả học sinh đều được điểm 7 hoặc 8. Tổng số điểm của cả lớp là 350. Hãy tính số học sinh của lớp, số học sinh đạt từng loại điểm?

HD giải

Trước hết tính số học sinh của lớp ta thấy:

350 chia cho 8 , được 43, còn dư;

$$350 : 7 = 50$$

Do đó số học sinh từ 44 đến 50. Do số học sinh chia hết cho 6 nên số học sinh là 48 người.

Giải tiếp bài toán bằng phương pháp tạm, ta tìm được: 4 học sinh được điểm 8; 34 học sinh được điểm 7.

Bài 5: Một đội bóng thi đấu 25 trận, chỉ có thắng và hòa, mỗi trận thắng được 3 điểm, mỗi trận hòa được 1 điểm, kết quả đội đó được 59 điểm. Tính số trận thắng, số trận hòa của đội bóng.

HD giải

Giả sử cả 25 trận đều thắng. Khi đó số điểm đội đó có được là :

$$25 \cdot 3 = 75 \text{ (điểm)}$$

So với bài ra thừa ra $75 - 59 = 16$ (điểm) $\Rightarrow$ là do còn có trận hòa

Chênh lệch điểm số của trận thắng và trận hòa là : $3 - 1 = 2$

Như vậy nếu thay mỗi trận thắng bằng một trận hòa thì mỗi lần thay giảm được 2 điểm $\Rightarrow$ Số trận hòa là $16 : 2 = 8$ (trận)

Số trận thắng là : $25 - 8 = 17$ (trận)

Bài 6: Có 25 gói đường gồm ba loại: gói 5 lạng, gói 2 lạng, gói 1 lạng, có tổng khối lượng tổng cộng là 56 lạng. Biết số gói 1 lạng gấp đôi số gói 5 lạng. Tính số gói mỗi loại.

HD giải:

Giả sử cả 25 gói đường là gói 2 lạng. khi đó khối lượng tổng cộng là:

$$25 \cdot 2 = 50 \text{ (lạng)}$$

So với bài hụt đi: $56 - 50 = 6$ (lạng)

Để không bị hụt đi ta thay các gói 2 lạng bằng các gói 5 lạng và gói 1 lạng theo quy luật 1 gói 5 lạng, 2 gói 1 lạng cho 3 gói 2 lạng khi đó số gói không thay đổi, quan hệ giữa gói 5 lạng và gói 1 lạng được đảm bảo. Mỗi lần thay tăng thêm được: $1.5 + 2.1 - 3.2 = 1$ (lạng).

Số lần thay: $6 : 1 = 6$ (lần)

Vậy số gói đường 5 lạng là: $6.1 = 6$ (gói)

Số gói đường 1 lạng là: $6.2 = 12$ (gói)

Số gói đường 2 lạng là: $25 - (6 + 12) = 7$ (gói)

Bài 7: Một hộp có thể chứa được vừa vặn 25 gói bánh hoặc 30 gói kẹo. Người ta xếp 28 gói cả bánh và kẹo thì vừa đầy hộp đó. Biết rằng giá tiền bánh và kẹo đều bằng nhau và bằng 36000 đồng. Tính giá một gói bánh, một gói kẹo.

HD giải

Một hộp có thể chứa được vừa vặn 25 gói bánh hoặc 30 gói kẹo

- a) Thể tích của 25 gói bánh bằng thể tích của 30 gói kẹo
 $\Leftrightarrow$ thể tích của 5 gói bánh = thể tích của 6 gói kẹo

Giả sử trong hộp đựng cả 30 gói kẹo. So với bài ra thì thừa: $30 - 28 = 2$ (gói)

Để kẹo không bị thừa ra ta thay các gói kẹo bằng các gói bánh theo quy luật 6 gói kẹo bằng 5 gói bánh. Mỗi lần thay như thế tổng thể tích không thay đổi, số gói bớt đi: $6 - 5 = 1$ (gói).

Số lần thay: $2 : 1 = 2$ (lần)

Vậy số gói bánh trong hộp là: $2 \cdot 5 = 10$ (gói)

Số gói kẹo trong hộp là: $28 - 10 = 18$ (gói)

Giá tiền một gói bánh là: $36000 : 10 = 3600$ (đ)

Giá tiền một gói kẹo là: $36000 : 18 = 2000$ (đ)

I- PHƯƠNG PHÁP 3: PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐƠN VỊ QUY ƯỚC

1. BÀI TẬP MINH HỌA:

Bài 1: Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc: xe thứ nhất đi từ A đến B, xe thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ 30 phút, chúng còn cách nhau 108 km. Tính quãng đường AB biết rằng xe thứ nhất đi cả quãng đường AB hết 6 giờ, xe thứ hai đi cả quãng đường BA hết 5 giờ.

Bài giải

Lấy quãng đường AB làm đơn vị quy ước

Trong một giờ xe thứ nhất đi được $\frac{1}{6}$ quãng đường AB

Trong một giờ xe thứ hai đi được $\frac{1}{5}$ quãng đường AB

Trong một giờ cả hai xe đi được: $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$ quãng đường AB

Trong một giờ 30 phút cả hai xe đi được: $\frac{11}{30} \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{20}$ quãng đường AB

Quãng đường còn lại: $1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$ quãng đường AB tương ứng với 108 km

Vậy quãng đường AB dài: $108 : \frac{9}{20} = 240$ (km)

Bài 2: Một công nhân làm một mình xong một công việc trong 10 ngày, người thứ hai làm xong công việc đó trong 15 ngày, còn người thứ ba muốn hoàn thành công việc nói trên cần một số ngày gấp 5 lần số ngày hai người trên cùng làm để hoàn thành công việc. Hỏi nếu cả ba người cùng làm công việc đó thì mấy ngày xong?

Bài giải

Chọn khối lượng công việc làm đơn vị quy ước

Trong 1 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{10}$ công việc

Trong 1 ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{15}$ công việc

Trong 1 ngày cả hai người làm được $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ công việc

Nếu cả hai người cùng làm thì công việc hoàn thành trong thời gian:

$$1 : \frac{1}{6} = 6 \text{ (ngày)}$$

Từ đó suy ra người thứ ba hoàn thành công việc trong thời gian:

$$5 \cdot 6 = 30 \text{ (ngày)}$$

Trong một ngày người thứ ba làm được $\frac{1}{30}$ công việc

Trong 1 ngày cả ba người làm được $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}$ công việc

Nếu cả ba người cùng làm thì hoàn thành công việc trên trong thời gian là:

$$1 : \frac{1}{5} = 5 \text{ (ngày)}$$

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Một người cần 15 ngày để làm xong một công việc, trong khi đó người thứ hai làm xong công việc ấy cần 18 ngày. Cả hai cùng làm 3 ngày, sau đó chỉ còn người thứ nhất làm thêm 3 ngày nữa thì có người thứ ba đến giúp và tất cả làm 4 ngày thì xong. Hỏi người thứ ba làm một bình bao nhiêu lâu thì xong công việc nói trên?

Bài giải

Chọn khối lượng công việc làm đơn vị quy ước

Trong 1 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{15}$ công việc

Trong 1 ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{18}$ công việc

Trong 3 ngày cả hai người làm được $(\frac{1}{15} + \frac{1}{18}) \cdot 3 = \frac{11}{30}$ công việc

Trong 3 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{15} \cdot 3 = \frac{1}{5}$ công việc

Trong 4 ngày thì người thứ nhất và người thứ ba làm được số phần công việc là: 1

$$- \left(\frac{11}{30} + \frac{1}{5} \right) = \frac{13}{30} \text{ công việc}$$

Trong 4 ngày thì người thứ ba làm được $\frac{13}{30} - 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ công việc

Trong 1 ngày thì người thứ ba làm được $\frac{1}{6} : 4 = \frac{1}{24}$ công việc

Vậy người thứ ba làm một mình thì hoàn thành công việc trên trong thời gian là:

$$1 : \frac{1}{24} = 24 \text{ (ngày)}$$

Bài 2: Ba máy cày cùng cày một cánh đồng. Lúc đầu chỉ có hai máy thứ nhất và thứ hai cày trong 3 giờ, sau đó máy thứ hai nghỉ, máy thứ ba vào làm thay với năng suất gấp đôi máy thứ hai và trong 5 giờ thì hai máy này cày xong cánh đồng. Hỏi mỗi máy cày một mình xong cánh đồng đó trong bao lâu, biết rằng nếu máy thứ nhất và máy thứ hai cùng làm thì sau 12 giờ xong công việc?

Bài giải

Một giờ máy thứ nhất và máy thứ hai là được $\frac{1}{12}$ công việc

Vậy 3 giờ máy thứ nhất và máy thứ hai là được $3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ công việc

Trong 5 giờ máy thứ nhất và máy thứ ba cày được: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ công việc

Một giờ máy thứ nhất và máy thứ ba cày được: $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$ công việc

Gọi một giờ máy thứ nhất làm được x công việc

b) Một giờ máy thứ hai làm được: $\frac{1}{12} - x$ công việc

c) Một giờ máy thứ ba làm được: $\frac{3}{20} - x$ công việc

Do năng suất của máy thứ 3 gấp đôi năng suất của máy thứ 2 nên ta có:

$$\frac{3}{20} - x = 2 \cdot \left(\frac{1}{12} - x \right) \Rightarrow x = \frac{1}{60}$$

Vậy máy thứ nhất cày một mình mất: $1 : \frac{1}{60} = 60$ giờ

Máy thứ hai cày một mình mất: $1 : \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{60} \right) = 15$ giờ

Máy thứ ba cày một mình mất: $1 : \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{60} \right) = 7,5$ giờ

1. PHƯƠNG PHÁP 4: PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGƯỢC TỪ CUỐI

1. BÀI TẬP MINH HỌA:

Bài 1: Một nông dân ra chợ bán hết số cam của mình cho năm người :

Người thứ nhất mua $\frac{1}{2}$ số cam rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ hai mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả , người thứ ba mua $\frac{1}{2}$ số quả còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ tư mua $1\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua $\frac{1}{2}$ quả, người thứ năm mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả thì vừa hết.

Tính số cam người nông dân đem đi bán và số cam những người khác đã mua.

Bài giải

Gọi số cam ban đầu là x

Người thứ nhất mua $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)$ vậy còn lại $x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

Người thứ 2 mua $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

Vậy còn lại: $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$

Người thứ 3 mua: $\frac{x}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$ vậy còn lại $\frac{x}{8} - \frac{7}{8}$

Người thứ 4 mua: $\frac{x}{16} - \frac{7}{16} + \frac{1}{2} = \frac{x}{16} + \frac{1}{16}$ vậy còn lại $\frac{x}{16} - \frac{15}{16}$

Người thứ 5 mua: $\frac{x}{32} - \frac{15}{32} + \frac{1}{2} = \frac{x}{32} + \frac{1}{32}$ vậy còn lại $\frac{x}{32} + \frac{31}{32} = 0$

Vậy $x = 31 \Rightarrow$ ban đầu có 31 quả cam đem đi bán

Người 1 mua : $31 - 15 = 16$ quả

Người 2 mua : $15 - 7 = 8$ quả

Người 3 mua : $7 - 3 = 4$ quả

Người 4 mua : $3 - 1 = 2$ quả

Người 5 mua : 1 quả

Bài 2:

- a) Có 100 viên bi. Hai người lần lượt lấy số bi bất kỳ từ 1 đến 4 viên, người nào lấy được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc.

Hỏi người đi trước hay người đi sau sẽ thắng và cách lấy số bi để đảm bảo phần thắng thuộc về mình?

- b) Cũng hỏi như câu a nếu mỗi người được lấy từ 5 đến 10 viên bi.
c) Cũng câu hỏi như câu a nếu mỗi người lấy được 5 đến 10 viên bi và người lấy viên bi cuối cùng là người thua cuộc?

Bài giải

- a) Người thắng cuộc cần để lại 5 viên bi cho đối thủ của mình. Bao giờ người đó cũng có cách để số bi lúc sau ít hơn số bi lúc trước là: $1 + 4 = 5$, do đó người đó cần để lại cho đối thủ của mình: 5, 10, 15, 20, ...bi, tức là số bi để lại là bội của 5. Người đi sau sẽ thắng cuộc nếu nắm được quy luật chơi: khi người đi trước lấy k viên bi ($1 \leq k \leq 4$) thì người đi sau lấy $5 - k$ viên bi.

- b) Người thắng cuộc cần để lại 11 viên bi cho đối thủ của mình. Bao giờ người đó cũng có cách để số bi lúc sau ít hơn số bi lúc trước là: $5 + 10 = 15$, do đó người đó cần để lại cho đối thủ của mình: 11, 26, 41, 56, 71, 86 bi.

Người đi sau sẽ thắng cuộc bằng cách: khi người đi trước lấy k viên bi ($5 \leq k \leq 10$) thì người đi sau lấy $14 - k$ viên bi. Khi đó có 86 viên bi. Tiếp theo nếu người đi trước lấy m viên bi thì người đi sau lấy $15 - m$ viên, và số bi còn lại lần lượt là 71, 56, 41, 26, 11. Lúc này người đi trước lấy số bi bất kì thì người đi sau lấy nốt số còn lại.

- c) Người đi trước thắng bằng cách: lấy 5 bi, khi đối thủ lấy tiếp k bi thì người đi trước lấy $15 - k$ bi, lần lượt để lại cho người kia 80, 65, 50, 35, 20, 5 viên bi.

1. BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Một người ra chợ bán trứng. Người khách thứ nhất mua $\frac{1}{2}$ số trứng rồi mua thêm 2 quả, người thứ hai mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm 2 quả, người thứ ba mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm 2 quả, người thứ tư mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm 2 quả thì hết. Hỏi người bán hàng bán được bao nhiêu quả trứng?

Bài giải

Gọi số trứng người bán hàng bán được là x

Người thứ nhất mua $(\frac{x}{2} + 2)$ vậy còn lại $x - (\frac{x}{2} + 2) = \frac{x}{2} - 2$

Người thứ 2 mua $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - 2 \right) + 2 = \frac{x}{4} - 1 + 2 = \frac{x}{4} + 1$

Vậy còn lại: $\frac{x}{2} - 2 - \frac{x}{4} - 1 = \frac{x}{4} - 3$

Người thứ 3 mua: $\frac{x}{8} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{x}{8} + \frac{1}{2}$

Vậy còn lại $\frac{x}{8} - \frac{7}{2}$

Người thứ 4 mua: $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{8} - \frac{7}{2} \right) + 2 = \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$

Vậy còn lại: $\frac{x}{8} - \frac{7}{2} - \frac{x}{16} - \frac{1}{4} = \frac{x}{16} - \frac{15}{4} = 0$

Vậy $x = 60 \Rightarrow$ Người bán hàng bán được 60 quả trứng.

Bài 2: Trong dịp Tết trồng cây, khối 6 phân chia số cây cho các lớp đem trồng như sau:

Lớp 6A trồng 10 cây và $\frac{1}{8}$ số còn lại, lớp 6B trồng 15 cây và $\frac{1}{8}$ số còn lại, lớp 6C trồng 20 cây và $\frac{1}{8}$ số còn lại ...

Cứ chia như vậy cho đến lớp cuối cùng thì vừa hết số cây và số cây các lớp được chia đem trồng đều bằng nhau. Hỏi có mấy lớp 6, mỗi lớp được chia bao nhiêu cây đem trồng?

Bài giải

Xét 2 lớp cuối cùng là lớp thứ $n-1$ và lớp thứ n .

Giả sử lớp thứ $n-1$ được chia x cây + $\frac{1}{8}$ số cây còn lại hay $x + \frac{1}{8} \cdot y$ (cây). Lớp thứ n được chia nốt $\frac{7}{8} \cdot y$ (cây).

Theo quy luật của bài toán lớp thứ n được chia $x + 5$ (cây) (Vì không còn số còn lại).

Vì số cây đem trồng đều bằng nhau nên ta có:

$$x + \frac{1}{8} \cdot y = x + 5$$

$$\text{suy ra } \frac{1}{8} \cdot y = 5$$

$$\Rightarrow y = 40$$

Tìm ra lớp thứ n được chia 35 cây

Suy ra mỗi lớp được chia 35 cây

Vì lớp 6A trồng 10 cây và $\frac{1}{8}$ số cây còn lại nên $\frac{1}{8}$ số cây còn lại là 25 cây

Tổng số cây là $10 + 25.8 = 210$ (cây)

Số lớp 6 là $210 : 35 = 6$ (lớp)

1. PHƯƠNG PHÁP 5: GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰA CHỌN

a) BÀI TẬP MINH HỌA:

Bài 1: Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó đều sắp xếp từ nhỏ đến lớn thì tỉ lệ với 1: 2: 3.

Bài giải

Căn cứ vào điều kiện các chữ số tỉ lệ với: 1 : 2 : 3, các chữ số của số phải tìm có thể là 1, 2, 3 hoặc 2, 4, 6 hoặc 3, 6, 9.

Chú ý rằng số phải tìm chia hết cho 18 nên chia hết cho 9, do đó tổng các chữ số của nó chia hết cho 9. Trong các trường hợp trên ta thấy chỉ có bộ ba 3, 6, 9 là thỏa mãn.

Số phải tìm chia hết cho 2 nên chữ số tận cùng phải bằng 6. Các số 396, 936 đều thỏa mãn bài toán.

Bài 2: Anh Văn nói với bạn:

Năm 1990, tuổi mình đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh. Hãy tính xem anh Văn sinh năm nào?

Bài giải

Gọi năm sinh của anh Văn là $\overline{19xy}$ thì $1990 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$.

$$\text{Do đó: } 90 - (10x + y) = 10 + x + y$$

$$80 = 11x + 2y$$

Do $11x \leq 80$ nên $x \leq 7$. Do $2y \leq 18$ nên $11x \geq 80 - 18 = 62$, do đó $x \geq 6$. Như vậy chỉ cần xét $x = 6$ hoặc $x = 7$.

$$\text{Với } x = 6 \text{ thì } 2y = 80 - 11.6 = 17 \Rightarrow y = 7$$

$$\text{Với } x = 7 \text{ thì } 2y = 80 - 11.7 = 3, \text{ loại.}$$

Vậy anh Văn sinh vào năm 1967.

$$\text{Ta có: } 1990 - 1967 = 1 + 9 + 6 + 7$$

Bài 3: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng tổng sáu số tự nhiên có hai chữ số lập bởi hai trong ba chữ số ấy gấp đôi số phải tìm.

Bài giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là: $\overline{abc}$ ($1 \leq a, b, c \leq 9$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ac} + \overline{cb} + \overline{ba} = 2\overline{abc}$$

$$10a + b + 10b + c + 10c + a + 10a + c + 10c + b + 10b + a = 2(100a + 10b + c)$$

$$\text{d) } 22a + 22b + 22c = 200a + 20b + 2c$$

$$\text{e) } 178a = 2b + 20c$$

$$\text{Ta có: } 178a = 2b + 20c \leq 2.9 + 20.9 = 198 \text{ và } 178a \geq 178.1 = 178. \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{f) } 2b + 20c = 178$$

$$\text{g) } b + 10c = 89$$

Ta tìm được duy nhất cặp số: $b = 9, c = 8$ thỏa mãn.

Vậy số cần tìm là: 198

a) BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu chia số ấy cho tích các chữ số của nó thì được $\frac{8}{3}$ và hiệu giữa số phải tìm với số gồm các chữ số của số ấy viết theo thứ tự ngược lại bằng 18.

Bài giải

Gọi chữ số cần tìm là: $\overline{ab}$ ($a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$, ta được $a - b = 2$, các số thỏa mãn điều kiện này là: 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97.

Do $\overline{ab} = \frac{8}{3} ab \Rightarrow 3\overline{ab} : 8$.

Trong các số trên chỉ có 64 chia hết cho 8.

Thử lại : $64 - 16 = 48$, $64 : (6.4) = \frac{8}{3}$.

Bài 2: Tìm số tự nhiên x, biết rằng tổng các chữ số của x bằng y, tổng các chữ số của y bằng z và $x + y + z = 60$.

Bài giải

Từ đầu bài ta có x là số có 2 chữ số. Đặt $x = \overline{ab}$

$x = 10a + b \Rightarrow y = a + b$, z có 2 trường hợp :

* Nếu $y = a + b \leq 9 \Rightarrow z = a + b$ ta có :

$$(10a + b) + (a + b) + (a + b) = 60 \Rightarrow 4a + b = 20$$

$b : 4 \Rightarrow b = 0; 4; 8 \Rightarrow a = 5, 4, 3$ loại $a = 3, b = 8$ (do $a + b > 9$)

* Nếu $y = a + b \geq 10 \Rightarrow z = a + b - 9$

$$\text{Ta có : } (10a + b) + (a + b) + (a + b - 9) = 60$$

$$\Rightarrow 4a + b = 23 \Rightarrow a = 4, b = 7$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 44, 47, 50.$$

Kết luận: có 3 số 44, 47, 50 đều thỏa mãn đề bài.

Bài 3: Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng tổng các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy bằng 1554.

Bài giải

Gọi ba số phải tìm là a,b,c.

Theo bài ra ta có: $a \neq b \neq c \neq 0$ và

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{cba} = 1554$$

$$\Rightarrow 222a + 222b + 222c = 1554$$

$$\Rightarrow a + b + c = 7 ;$$

Vì $a \neq b \neq c \neq 0$. Không làm mất tính tổng quát giả sử $a > b > c$ ta có $c=1; b=2; a=4$

Vậy ba chữ số khác nhau đó là 1; 2; 4

CHUYÊN ĐỀ 11: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

1. DẠNG 1: CHUYỂN ĐỘNG CÙNG CHIỀU

A) Bài tập minh họa:

Bài 1: Một người đi từ A đến B vận tốc 15km/h. Sau đó 1h30ph, người thứ hai cũng rời A đi về B, vận tốc 20km/h và đến B trước người thứ nhất 30 phút. Tính quãng đường AB.

Bài giải

Thời gian đi AB của người thứ hai ít hơn người thứ nhất là:

$$1\text{h}30\text{ph} + 30\text{ph} = 2\text{h}$$

Giả sử người thứ hai đi sau người thứ nhất 2 giờ thì hai người đến B cùng một lúc.

Trong hai giờ đi trước, người thứ nhất đi được:

$$15 \cdot 2 = 30 \text{ (km)}$$

Thời gian để người thứ hai đuổi kịp người thứ nhất là:

$$30 : (20 - 15) = 6 \text{ (h)}$$

Quãng đường AB dài: $20 \cdot 6 = 120 \text{ (km)}$.

Bài 2: Lúc 14 giờ 20 phút một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 48 km/h. Sau 10 phút một ô tô xuất phát từ A đuổi theo xe máy với vận tốc 60 km/h. Hỏi:

- a) Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?
- b) Chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km?

Bài giải

a. Đòi 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ

Xe máy đi trong $\frac{1}{6}$ giờ được quãng đường là:

$$48 \times \frac{1}{6} = 8 \text{ (km)}$$

Hiệu vận tốc hai xe là: $60 - 48 = 12 \text{ (km/h)}$

Thời gian hai xe gặp nhau là:

$$8 : 12 = \frac{2}{3} \text{ (giờ)} = 40 \text{ (phút)}$$

Hai xe gặp nhau lúc: $14 \text{ giờ } 20 \text{ phút} + 40 \text{ phút} = 15 \text{ (giờ)}$

b. Chỗ gặp nhau cách A là : $60 \times \frac{2}{3} = 40 \text{ (km)}$.

Bài 3: Lúc 7 giờ 50 phút, bác An đi từ A đến B với vận tốc 80 m/ phút, đến 7 giờ 55 phút bác Bình đi từ A đến B với vận tốc 90 m/ phút đuổi theo bác An. Hỏi:

- a) Bác Bình đuổi kịp bác An lúc mấy giờ?
- b) Chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km?

Bài giải

a. Thời gian bác An đi trước bác Bình là:

$$7 \text{ giờ } 55 \text{ phút} - 7 \text{ giờ } 50 \text{ phút} = 5 \text{ phút}$$

Khi bác Bình bắt đầu đi thì bác An đã đi được là:

$$80 \times 5 = 400 \text{ (m)}$$

Thời gian bác Bình đuổi kịp bác An là:

$$400 : (90 - 80) = 40 \text{ (phút)}$$

Bác Bình đuổi kịp bác An lúc:

$$7 \text{ giờ } 55 \text{ phút} + 40 \text{ phút} = 8 \text{ giờ } 35 \text{ phút}$$

b. Khoảng cách từ chỗ gặp nhau đến A là:

$$90 \times 40 = 3600 \text{ (m)} = 3,6 \text{ km}$$

Bài 4: Đồng hồ đang chỉ 4 giờ 10 phút. Sau ít nhất bao lâu thì hai kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng?

Bài giải

Ta xét thời điểm 4 giờ, lúc đó kim phút còn cách kim giờ $\frac{1}{3}$ vòng.

Muốn kim phút nằm đối diện với kim giờ thì trong cùng một thời gian, kim phút phải quay nhiều hơn kim giờ:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (vòng)}$$

Mỗi giờ kim phút quay được một vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng, kim phút quay nhanh hơn kim giờ:

a. $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (vòng)

Thời gian để kim phút và kim giờ nằm đối diện trên một đường thẳng:

$$\frac{5}{6} : \frac{11}{12} = \frac{10}{11} \text{ h} \approx 54 \text{ ph } 33 \text{ s}$$

Lúc đó là 4 giờ 54 phút 33 giây, sau lúc 4 giờ 10 phút là 44 phút 33 giây.

Bài 5: Hiện nay là 12 giờ đúng. Hỏi sau bao nhiêu lâu nữa thì kim giờ và kim phút trùng khít lên nhau 1 lần nữa?

Bài giải

Trong 1 giờ kim phút chạy được 1 vòng

Trong 1 giờ kim giờ chạy được $\frac{1}{12}$ vòng

Trong 1 giờ kim phút chạy nhiều hơn kim giờ: $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (vòng)

Lúc 12 giờ kim phút trùng với kim giờ

Khi kim phút trùng với kim giờ 1 lần nữa thì kim phút phải chạy nhiều hơn kim giờ đúng 1 vòng.

Vậy thời gian để kim phút trùng với kim giờ 1 lần nữa là:

$$1 : \frac{11}{12} = \frac{12}{11} \text{ (giờ)} = 1\frac{1}{11} \text{ (giờ)}$$

a) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Lúc 7 giờ một ô tô chở hàng đi từ A với vận tốc 40 km/h. Đến 10 giờ một ô tô du lịch cũng đi từ A với vận tốc 60 km/h và đi cùng chiều với ô tô chở hàng. Hỏi ô tô du lịch đuổi kịp ô tô chở hàng lúc mấy giờ?

Bài giải

Thời gian ô tô chở hàng đi trước ô tô du lịch là:

$$10 - 7 = 3 \text{ (giờ)}$$

Trong 3 giờ ô tô chở hàng đi được quãng đường dài là:

$$40 \times 3 = 120 \text{ (km)}$$

Hiệu vận tốc hai xe là:

$$60 - 40 = 20 \text{ (km/giờ)}$$

Thời gian hai xe đuổi kịp nhau là:

$$120 : 20 = 6 \text{ (giờ)}$$

Hai xe đuổi kịp nhau lúc:

$$10 + 6 = 16 \text{ (giờ)}$$

Bài 2: Một xe máy đi từ B đến C với vận tốc 45 km/h. Cùng lúc đó một ô tô đi từ A với vận tốc 50 km/h để đuổi theo xe máy. Hỏi:

- a) Sau bao lâu ô tô đuổi kịp xe máy, biết rằng A cách B 11 km
- b) Nơi gặp nhau cách A bao nhiêu km?

Bài giải

- a. Hiệu vận tốc của hai xe là:

$$50 - 45 = 5 \text{ (km/giờ)}$$

Hai xe gặp nhau sau: $11 : 5 = 2,2 \text{ (giờ)}$

b. Nơi gặp nhau cách A là: $50 \times 2,2 = 110$ (km).

Bài 3: Một người đi xe máy từ B đến C vận tốc 45 km/h. Cùng lúc đó một ô tô đi từ A với vận tốc 50 km/h để đuổi theo xe máy và sau 1,2 giờ thì ô tô đuổi kịp xe máy. Hỏi:

- a) Quãng đường từ A đến B dài bao nhiêu km?
- b) Đến khi gặp nhau mỗi xe đi được bao nhiêu km?

Bài giải

- a. Hiệu vận tốc của hai xe là: $50 - 45 = 5$ (km/giờ)
Quãng đường từ A đến B dài là: $5 \times 1,2 = 6$ (km)
- b. Xe ô tô đi được quãng đường là:
 $50 \times 1,2 = 60$ (km)

Người đi xe máy đi được quãng đường dài là:

$$45 \times 1,2 = 54 \text{ (km)}$$

Bài 4: Hiện nay là 6 giờ đúng. Hỏi sau bao lâu nữa thì kim giờ và kim phút của đồng hồ sẽ trùng kít lên nhau?

Bài giải

Vì kim phút quay nhanh gấp 12 lần kim giờ nên trong cùng một thời gian nếu kim giờ quay được 1 phần thì kim phút quay được 12 phần.

Vậy kim phút quay được nhiều hơn kim giờ là:

$$12 - 1 = 11 \text{ (phần)}$$

Lúc 6 giờ kim phút chỉ số 12, kim giờ chỉ số 6. Vậy lúc 6 giờ, kim phút đi sau kim giờ đúng $\frac{1}{2}$ vòng tròn.

Khi mà kim phút trùng khít lên kim giờ thì cũng là lúc kim phút đuổi kịp kim giờ. Trong thời gian đó kim phút quay được nhiều hơn kim giờ $\frac{1}{2}$ vòng tròn.

Vậy $\frac{1}{2}$ vòng tròn chính là 11 phần.

1 phần là: $\frac{1}{2} : 11 = \frac{1}{22}$ (vòng tròn).

Thời gian để kim giờ quay được 1 vòng là 12 giờ. Vậy thời gian để kim phút quay được $\frac{1}{22}$ vòng tròn là $\frac{12}{22}$ giờ (hay $\frac{6}{11}$ giờ)

$$\text{Đổi } \frac{6}{11} \text{ giờ} = \frac{6 \times 60}{11} = 32\frac{8}{11} \text{ phút}$$

Bài 5: Hiện nay là 12 giờ. Hỏi sau bao nhiêu lâu nữa thì kim giờ và kim phút vuông góc với nhau?

Bài giải

Lúc 12 giờ thì kim giờ và kim phút trùng khít lên nhau, khi hai kim vuông góc thì kim phút quay được nhiều hơn kim giờ đúng $\frac{1}{4}$ vòng (đồng hồ)

Trong 1 giờ kim phút chạy được 1 vòng, kim giờ chạy được $\frac{1}{12}$ vòng nên trong 1 giờ kim phút chạy nhiều hơn kim giờ là:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng)}$$

Thời gian để 2 kim vuông góc với nhau là:

$$\frac{1}{4} : \frac{11}{12} = \frac{3}{11} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Đổi } \frac{3}{11} \text{ giờ} = \frac{60 \text{ phút} \times 3}{11} = 16\frac{4}{11} \text{ phút}$$

Bài 6: Hiện nay là 2 giờ. Hỏi ít nhất bao nhiêu phút nữa thì hai kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành góc bẹt?

Bài giải

Lúc 2 giờ kim giờ chỉ số 2, kim phút chỉ số 12. Do đó kim phút đi sau kim giờ $\frac{1}{6}$ vòng đồng hồ ($\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$)

Để hai kim tạo thành góc bẹt thì kim phút phải vượt qua kim giờ đúng $\frac{1}{2}$ vòng đồng hồ.

Vậy kể từ lúc 2 giờ để 2 kim tạo thành góc bẹt thì kim phút phải đi nhiều hơn kim giờ: $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ (vòng).

Một giờ kim phút đi được 1 vòng, kim giờ đi được $\frac{1}{12}$ vòng nên mỗi giờ kim phút đi nhanh hơn kim giờ là:

$$\text{a) } - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng)}$$

Kể từ lúc 2 giờ thời gian để hai kim tạo thành góc bẹt là:

$$\frac{2}{3} : \frac{11}{12} = \frac{8}{11} \text{ (giờ)} = 43\frac{7}{11} \text{ phút}$$

Bài 7: Bây giờ là 4 giờ 10 phút. Hỏi sau ít nhất bao lâu kim giờ và kim phút nằm đối diện nhau trên một đường thẳng?

Bài giải

Lúc 4 giờ kim phút cách kim giờ $\frac{1}{3}$ vòng đồng hồ.

Để kim phút nằm đối diện với kim giờ để tạo thành một đường thẳng thì kim phút phải vượt hơn kim giờ $\frac{1}{2}$ vòng đồng hồ.

Vậy đến khi kim phút nằm đối diện với kim giờ trên một đường thẳng thì kim phút đi nhiều hơn kim giờ là: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ (vòng)

Trong một giờ kim phút đi được 1 vòng, kim giờ đi được $\frac{1}{12}$ vòng nên trong 1

giờ kim phút đi nhanh hơn kim giờ là: $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (vòng)

Thời gian từ lúc 4 giờ đến khi 2 kim nằm gần đối diện nhau trên một đường thẳng là: $\frac{5}{6} : \frac{11}{12} = \frac{10}{11}$ (giờ) $= 54\frac{6}{11}$ (phút)

Từ lúc 4 giờ 10 phút đến khi hai kim nằm gần đối diện nhau trên một đường thẳng là: $54\frac{6}{11}$ phút $- 10$ phút $= 44\frac{6}{11}$ phút.

a) DẠNG 2: CHUYỂN ĐỘNG NGƯỢC CHIỀU

b) Bài tập minh họa:

Bài 1: Hai xe ô tô đi từ hai địa điểm A và B về phía nhau, xe thứ nhất khởi hành từ A lúc 7 giờ, xe thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ 10 phút. Biết rằng để đi cả quãng đường AB, xe thứ nhất cần 2 giờ, xe thứ hai cần 3 giờ. Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

Bài giải

Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước.

Trong 1 giờ, xe thứ nhất đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường, xe thứ hai đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, hai xe gần nhau được:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ (quãng đường)}$$

Trong 7h 10ph $- 7h = 10$ phút đi trước, xe thứ nhất đi được:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ (quãng đường).}$$

Lúc xe thứ hai khởi hành, hai xe cách nhau:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (quãng đường)}$$

$$\text{Hai xe gặp nhau sau: } \frac{11}{12} : \frac{5}{6} = \frac{11}{10} \text{ (h)} = 1\text{h } 6\text{ph}$$

$$\text{Lúc hai xe gặp nhau: } 7\text{h } 10\text{ph} + 1\text{h } 6\text{ph} = 8\text{h } 16\text{ph}$$

Bài 2: Trên quãng đường AB, hai xe ô tô đi từ A và từ B ngược chiều nhau. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì chúng gặp nhau tại một điểm cách A 12 km, cách B 18 km. Nếu muốn gặp nhau ở chính giữa đường thì xe thứ nhất (đi từ A) phải khởi hành trước xe kia 10 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài giải

$$\text{Nửa quãng đường AB dài: } (12 + 18) : 2 = 15 \text{ (km)}$$

Tỉ số vận tốc của xe thứ nhất so với xe thứ hai bằng:

$$12 : 18 = \frac{2}{3}$$

Trong thời gian xe thứ hai đi được nửa quãng đường AB (15km) thì xe thứ nhất đi được:

$$15 \cdot \frac{2}{3} = 10 \text{ (km)}$$

Như vậy trong 10 phút, xe thứ nhất đi được:

$$15 - 10 = 5 \text{ (km)}$$

$$\text{Vận tốc xe thứ nhất: } 5 : \frac{1}{6} = 30 \text{ (km/h)}$$

$$\text{Vận tốc xe thứ hai: } 30 \cdot \frac{3}{2} = 45 \text{ (km/h)}$$

Bài 3: Quãng đường AB dài 180 km, một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 56 km/h. Cùng lúc đó một người đi xe máy từ B đến A với vận tốc 34 km/h. Hỏi kể từ lúc bắt đầu đi sau bao lâu thì hai xe gặp nhau?

Bài giải

Quãng đường cả hai xe đi trong 1 giờ là:

$$56 + 34 = 90 \text{ (km)}$$

Thời gian đi để ô tô gặp xe máy là:

$$180 : 90 = 2 \text{ (giờ)}$$

Bài 4: Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ A đến B cách nhau 223 km để đến C nằm giữa A và B. Xe 1 đi từ A với vận tốc 80 km/h, xe 2 đi từ B với vận tốc 65 km/h. Xe 1 đến C muộn hơn xe 2 là 15 phút. Tính quãng đường AC?

Bài giải

$$\text{Đổi } 15 \text{ phút} = \frac{1}{4} \text{ giờ}$$

Khi xe 2 đi đến C thì xe 1 còn cách C là:

$$80 \times \frac{1}{4} = 20 \text{ (km)}$$

Khi xe hai đi đến C thì quãng đường mà hai xe đi được là:

$$223 - 20 = 203 \text{ (km)}$$

Tổng vận tốc hai xe là: $80 + 65 = 145 \text{ (km/giờ)}$

Thời gian để hai xe đi được quãng đường dài 203 km là:

$$203 : 145 = 1,4 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường từ A đến C dài là: $80 \times 1,4 + 20 = 132 \text{ (km)}$.

Bài 5: Một người đi xe đạp từ nhà lên thị trấn huyện dự định hết 3 giờ nhưng thực tế họ chỉ đi hết 2 giờ vì họ đã tăng vận tốc lên 5 km/h. Tính quãng đường từ nhà người đó lên thị trấn huyện.

Bài giải

Tỉ số thời gian dự định và thời gian thực tế đi của người đó là:

$$3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Trên cùng một quãng đường nếu vận tốc gấp lên bao nhiêu lần thì thời gian giảm đi bấy nhiêu lần. Do đó vận tốc dự định bằng vận tốc thực tế.

Ta có sơ đồ:

Vận tốc dự định: |-----|-----| 5km/h

Vận tốc thực tế: |-----|-----| $\longleftrightarrow$ |

Vận tốc thực tế người đó đã đi là:

$$5 \times (3 - 2) \times 3 = 15 \text{ (km)}$$

Quãng đường từ nhà người đó đến thị trấn huyện là:

$$15 \times 2 = 30 \text{ (km)}.$$

a) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Hai người đi bộ cùng một lúc từ hai xã A và B cách nhau 18 km và đi ngược chiều nhau để gặp nhau. Vận tốc của người đi từ A là 4 km/h, của người đi từ B là 5 km/h. Họ xuất phát lúc 5 giờ 15 phút. Hỏi:

I- Hai người gặp nhau lúc mấy giờ?

II- Khi gặp nhau mỗi người đi được bao nhiêu km?

Bài giải

a) Tổng vận tốc hai người là:

$$4 + 5 = 9 \text{ (km/giờ)}$$

Thời gian hai người gặp nhau là:

$$18 : 9 = 2 \text{ (giờ)}$$

Hai người gặp nhau lúc:

$$5 \text{ giờ } 15 \text{ phút} + 2 \text{ giờ} = 7 \text{ giờ } 15 \text{ phút}$$

b) Khi gặp nhau người đi từ A đi được quãng đường dài là:

$$4 \times 2 = 8 \text{ (km)}$$

Khi gặp nhau người đi từ B đi được quãng đường dài là:

$$5 \times 2 = 10 \text{ (km)}$$

Bài 2: Tại hai đầu của một quãng đường dài 17,25 km, một người đi bộ và một người chạy bộ xuất phát cùng một lúc và ngược chiều nhau. Vận tốc người đi bộ là 4,2 km/h, vận tốc người chạy bộ là 9,6 km/h. Hỏi:

1. Họ xuất phát lúc mấy giờ? Biết học gặp nhau lúc 10 giờ 25 phút.
2. Khi gặp nhau mỗi người đi được bao nhiêu km?

Bài giải

a) Tổng vận tốc hai người là:

$$4,2 + 9,6 = 13,8 \text{ (km/giờ)}$$

Thời gian hai người gặp nhau là:

$$17,25 : 13,8 = 1,25 \text{ (giờ)} = 1 \text{ giờ } 15 \text{ phút}$$

Hai người xuất phát lúc:

$$10 \text{ giờ } 25 \text{ phút} - 1 \text{ giờ } 15 \text{ phút} = 9 \text{ giờ } 10 \text{ phút}$$

b) Khi gặp nhau người đi bộ đi được quãng đường dài là:

$$4,2 \times 1,25 = 5,25 \text{ (km)}$$

Khi gặp nhau người chạy bộ chạy được quãng đường dài là:

$$9,6 \times 1,25 = 12 \text{ (km)}$$

Bài 3: Hai ô tô đi từ A đến B cùng một lúc và ngược chiều nhau. Quãng đường AB dài 121,8 km. Vận tốc của ô tô đi từ A là 42 km/h, vận tốc của ô tô đi từ B là 45 km/h. Hỏi:

- Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ? Biết chúng xuất phát điểm lúc 8 giờ.
- Chỗ gặp nhau cách A và B bao nhiêu km?

Bài giải

⇒ Tổng vận tốc hai ô tô là:

$$45 + 42 = 87 \text{ (km/giờ)}$$

Thời gian hai xe gặp nhau là:

$$121,8 : 87 = 1,4 \text{ (giờ)} = 1 \text{ giờ } 24 \text{ phút}$$

Hai xe gặp nhau lúc:

$$8 \text{ giờ} + 1 \text{ giờ } 24 \text{ phút} = 9 \text{ giờ } 24 \text{ phút}$$

⇒ Chỗ gặp nhau cách A là:

$$42 \times 1,4 = 58,8 \text{ (km)}$$

Chỗ gặp nhau cách B là:

$$45 \times 1,4 = 63 \text{ (km)}$$

Bài 4: Lúc 7 giờ 15 phút sáng một ô tô khởi hành từ A đến B với vận tốc 65 km/h. Đến 8 giờ 15 phút một xe ô tô khác xuất phát từ B về A với vận tốc 70 km/h. Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ? Biết quãng đường AB là 402,5 km.

Bài giải

Khoảng thời gian ô tô khởi hành từ A đi từ trước ô tô khởi hành từ B là:

$$8 \text{ giờ } 15 \text{ phút} - 7 \text{ giờ } 15 \text{ phút} = 1 \text{ giờ}$$

Trong 1 giờ đó ô tô khởi hành từ A đi được 65km

Đến 8 giờ 15 phút hai xe còn cách nhau số km là:

$$402,5 - 65 = 337,5 \text{ (km)}$$

Tổng vận tốc của 2 xe là: $70 + 65 = 135 \text{ (km/h)}$

Khoảng thời gian hai xe gặp nhau là:

$$337,5 : 135 = 2,5 \text{ (giờ)} = 2 \text{ giờ } 30 \text{ phút}$$

Hai xe gặp nhau lúc:

$$8 \text{ giờ } 15 \text{ phút} + 2 \text{ giờ } 30 \text{ phút} = 10 \text{ giờ } 45 \text{ phút.}$$

Bài 5: Một ô tô dự định đi từ A đến B hết 5 giờ, nhưng thực tế xe chạy chỉ hết 4,5 giờ vì trung bình mỗi giờ xe chạy nhanh hơn dự định là 6 km/h. Tính vận tốc thực tế của ô tô.

Bài giải

Mỗi giờ ô tô dự định đi được số phần quãng đường AB là:

$$1 : 5 = \frac{1}{5} \text{ (quãng đường AB)}$$

Mỗi giờ ô tô thực tế đi được quãng đường AB là:

$$1 : 4,5 = \frac{2}{9} \text{ (quãng đường AB)}$$

Mỗi giờ ô tô đi thực tế hơn dự định số phần quãng đường AB là:

$$\frac{2}{9} - \frac{1}{5} = \frac{1}{45} \text{ (quãng đường AB)}$$

Quãng đường AB dài là: $6 : \frac{1}{45} = 270 \text{ (km)}$

Vận tốc thực tế ô tô đi là: $270 : 4,5 = 60 \text{ (km/giờ)}$

b) DẠNG 3: CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT CÓ CHIỀU DÀI ĐÁNG KỂ

❖ Bài tập minh họa:

Bài 1: Một đoàn tàu chạy ngang qua một cái cột điện hết 15 giây. Với vận tốc đó đoàn tàu chui qua một đường hầm dài 540m hết 1 phút. Tính:

1. Vận tốc của đoàn tàu
2. Chiều dài của đoàn tàu.

Bài giải

a) Đoàn tàu chui qua đường hầm hết 1 phút đó đoàn tàu đi được quãng đường bằng tổng chiều dài đường hầm và chiều dài đoàn tàu.

Đoàn tàu chạy ngang qua cột điện hết 15 giây nên 15 giây đó đoàn tàu đi được quãng đường bằng chiều dài đoàn tàu.

Vậy thời gian để đoàn tàu đi quãng đường dài 540m là:

$$1 \text{ phút} - 15 \text{ giây} = 45 \text{ giây}$$

Vận tốc của đoàn tàu là:

$$540 : 45 = 12 \text{ (m/giây)}$$

b) Chiều dài đoàn tàu là:

$$12 \times 15 = 180 \text{ (m)}.$$

Bài 2: Một xe lửa đi hết một cái cầu dài 12m hết 12 giây và đi hết một cái cầu dài 148m hết 20 giây. Tính chiều dài và vận tốc của xe lửa.

Bài giải

Trong 12 giây, xe lửa đi 12m cộng với chiều dài xe lửa. Trong 20 giây, xe lửa đi 148m cộng với chiều dài xe lửa.

Như vậy trong : $20 - 12 = 8 \text{ (s)}$, xe lửa đi được:

$$148 - 12 = 136 \text{ (m)}$$

Vận tốc xe lửa: $136 : 8 = 17 \text{ (m/s)}$

Chiều dài của xe lửa: $17 \cdot 12 - 12 = 192 \text{ (m)}$

Bài 3: Một đoàn xe lửa dài 160m chạy qua một đường hầm xuyên qua núi với vận tốc 40 km/h. Từ lúc toa bắt đầu chui vào hầm đến lúc toa cuối cùng ra khỏi hầm mất 4 phút 30 giây. Hỏi đường hầm dài bao nhiêu mét?

Bài giải

Đổi $40 \text{ km/h} = \frac{2000}{3} \text{ m/phút}$; $4 \text{ phút } 30 \text{ giây} = 4,5 \text{ phút}$

Quãng đường xe lửa đi được trong 4,5 phút là:

$$\frac{2000}{3} \cdot 4,5 = 3000 \text{ (m)}$$

Quãng đường này gồm chiều dài đường hầm và chiều dài đoàn xe lửa

Vậy chiều dài đường hầm là: $3000 - 160 = 2840 \text{ (m)}$.

❖ Bài tập tự luyện:

Bài 1: Một xe lửa đi qua một chiếc cầu dài 30m mất 10 giây. Cùng với vận tốc đó, nó đi qua một chiếc cầu khác dài 150m mất 18 giây. Tính:

1. Vận tốc của xe lửa.
2. Chiều dài của xe lửa.

Bài giải

⇒ Xe lửa đi qua một chiếc cầu dài 30 m mất 10 giây nên trong 10 giây xe lửa đi được quãng đường bằng tổng chiều dài chiếc cầu (30 m) và chiều dài xe lửa. Xe lửa đi qua một chiếc cầu khác dài 150m mất 18 giây nên trong 18 giây xe lửa đi được quãng đường bằng tổng chiều dài của chiếc cầu (150 m) và chiều dài của xe lửa:

$$150 \text{ m hơn } 30 \text{ m là: } 150 - 30 = 120 \text{ (m)}$$

Xe lửa đi 120 m hết khoảng thời gian là:

$$18 - 10 = 8 \text{ (giây)}$$

$$\text{Vận tốc của xe lửa là: } 120 : 8 = 15 \text{ (m/giây)}$$

⇒ Chiều dài của xe lửa là: $15 \times 10 - 30 = 120 \text{ (m)}$.

Bài 2: Một người đi xe đạp điện với vận tốc 18 km/h gặp một đoàn tàu đi ngược chiều và lướt qua mình trong 10 giây. Tính vận tốc của đoàn tàu, biết chiều dài của đoàn tàu là 120m.

Bài giải

$$\text{Đổi } 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$$

Đoàn tàu lướt qua người đi xe đạp ngược chiều trong 10 giây nên quãng đường người đi xe đạp đi và quãng đường đoàn tàu đi trong 10 giây chính là chiều dài đoàn tàu.

Quãng đường người đi xe đạp đi trong 10 giây là:

$$5 \cdot 10 = 50 \text{ (m)}$$

Quãng đường đoàn tàu đi được trong 10 giây là:

$$200 - 50 = 150 \text{ (m)}$$

Vận tốc của đoàn tàu đó là:

$$150 : 10 = 15 \text{ (m/giây)} = 54\text{km/giờ}$$

❖ DẠNG 4: CHUYỂN ĐỘNG CÓ DÒNG NƯỚC

❖ Bài tập minh họa:

Bài 1: Một ca nô chạy xuôi khúc sông AB hết 6 giờ và chạy ngược khúc sông ấy hết 9 giờ. Hỏi một phao trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu?

Bài giải

Trong 1 giờ, ca nô chạy xuôi được $\frac{1}{6}$ AB, ca nô chạy ngược được $\frac{1}{9}$ BA

Do vận tốc xuôi trừ vận tốc ngược bằng 2 lần vận tốc dòng nước nên trong một giờ dòng nước trôi được:

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) : 2 = \frac{1}{36}\text{AB}$$

Thời gian phao trôi từ A đến B: $1 : \frac{1}{36} = 36 \text{ (giờ)}$

Bài 2: Vận tốc dòng nước chảy là 20m/phút. Một người bơi xuôi dòng trên khúc sông dài 800m trong 8 phút. Hỏi người đó bơi ngược dòng đoạn sông ấy hết bao nhiêu thời gian?

Bài giải

Vận tốc bơi xuôi dòng của người đó là:

$$800 : 8 = 100 \text{ (m/phút)}$$

Vận tốc thực của người đó là:

$$100 - 20 = 80 \text{ (m/phút)}$$

Vận tốc bơi ngược dòng của người đó là:

$$80 - 20 = 60 \text{ (m/phút)}$$

Người đó bơi ngược dòng trên đoạn sông ấy hết khoảng thời gian là:

$$800 : 60 = 13\frac{1}{3} \text{ (phút)}$$

Bài 3: Một ca nô đi xuôi dòng với vận tốc 29 km/h và đi ngược dòng với vận tốc 24 km/h.

1. Tính vận tốc thực của ca nô.
2. Nếu ca nô đi xuôi dòng đoạn sông dài 34,8 km hết bao lâu?
3. Nếu ca nô đi ngược dòng đoạn sông dài 34,8 km hết bao lâu?

Bài giải

- a) Vận tốc thực của ca nô là: $(29 + 24) : 2 = 26,5 \text{ (km/giờ)}$
b) Thời gian ca nô đi xuôi dòng trên khúc sông dài 34,8km là:
 $34,8 : 19 = 1,2 \text{ (giờ)}$
c) Thời gian ca nô đi ngược dòng trên khúc sông dài 34,8 km là:
 $34,8 : 24 = 1,45 \text{ (giờ)}$

Bài 4: Quãng sông AB dài 143 km, vận tốc dòng nước là 6 km/h. Một ca nô đi xuôi dòng từ A về B và một ca nô khác đi ngược dòng từ B về A. Hai ca nô cùng khởi hành lúc 8 giờ 30 phút. Vận tốc thực của mỗi ca nô là 26 km/h. Hỏi đến mấy giờ hai ca nô gặp nhau?

Bài giải

Ca nô đi từ A xuôi dòng với vận tốc là: $26 + 6 = 32 \text{ (km/h)}$

Ca nô đi từ B ngược dòng với vận tốc là: $26 - 6 = 20 \text{ (km/h)}$

Tổng vận tốc của 2 ca nô là: $32 + 20 = 52 \text{ (km/h)}$

Thời gian từ lúc hai ca nô khởi hành đến lúc gặp nhau là:

$$143 : 52 = 2,75 \text{ (giờ)} = 2 \text{ giờ } 45 \text{ phút.}$$

Hai ca nô gặp nhau lúc:

$$8 \text{ giờ } 30 \text{ phút} + 2 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = 11 \text{ giờ } 15 \text{ phút}$$

❖ **Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Vận tốc dòng nước chảy là 20m/ phút, một người bơi ngược dòng trên khúc sông dài 420 m trong 7 phút. Hỏi người đó bơi xuôi dòng trên khúc sông đó hết bao nhiêu thời gian?

Bài giải

Vận tốc bơi ngược dòng sông của người đó là: $420 : 7 = 60$ (m/phút)

Vận tốc thực của người đó là: $60 + 20 = 80$ (m/phút)

Vận tốc bơi xuôi dòng của người đó là: $80 + 20 = 100$ (m/phút)

Thời gian người đó bơi xuôi dòng hết là: $420 : 100 = 4,2$ (phút)

Bài 2: Vận tốc ca nô khi nước yên lặng là 12,5 km/h. Vận tốc dòng nước là 2,5 km/h. Hai bến sông A và B cách nhau 30 km. Nếu ca nô đó xuôi dòng từ A đến B rồi lại ngược dòng ngay từ B về A thì hết bao nhiêu thời gian?

Bài giải

Vận tốc xuôi dòng của ca nô là: $12,5 + 2,5 = 15$ (km/giờ)

Vận tốc ngược dòng của ca nô là: $12,5 - 2,5 = 10$ (km/giờ)

Thời gian ca nô đi xuôi dòng là: $30 : 15 = 2$ (giờ)

Thời gian ca nô đi ngược dòng là: $30 : 10 = 3$ (giờ)

Tổng thời gian ca nô đi xuôi dòng và ngược dòng là: $2 + 3 = 5$ (giờ).

Bài 3: Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 4 giờ và ngược dòng từ B về A hết 6 giờ. Biết vận tốc của dòng nước 50 m/ phút. Tính:

1. Chiều dài quãng sông AB
2. Vận tốc ca nô khi nước yên lặng

Bài giải

Đổi $50 \text{ m/phút} = 3 \text{ km/giờ}$

a) Mỗi giờ ca nô đi xuôi dòng được số phần quãng sông là:

$$1 : 4 = \frac{1}{4} \text{ (quãng sông)}$$

Mỗi giờ ca nô đi ngược dòng được số phần quãng sông là:

$$1 : 6 = \frac{1}{6} \text{ (quãng sông)}$$

Vì hiệu vận tốc xuôi dòng và ngược dòng chính là 2 lần vận tốc dòng nước nên mỗi giờ dòng nước chảy được là:

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) : 2 = \frac{1}{24} \text{ (quãng sông)}$$

Thời gian dòng nước chảy từ A đến B là: $1 : \frac{1}{24} = 24$ (giờ)

Quãng sông AB dài là: $3 \cdot 24 = 72$ (km)

b) Vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là:

$$72 : 6 + 3 = 15 \text{ (km/giờ)}$$

Bài 4: Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 30 phút và ngược dòng từ B về A hết 45 phút. Hỏi một cụm bè trôi từ A về B hết bao lâu?

Bài giải

Mỗi phút ca nô đi xuôi dòng được số phần khúc sông là:

$$1 : 30 = \frac{1}{30} \text{ (khúc sông AB)}$$

Mỗi phút ca nô đi ngược dòng được số phần khúc sông là:

$$1 : 45 = \frac{1}{45} \text{ (khúc sông AB)}$$

Vì hiệu vận tốc xuôi dòng và ngược dòng chính là 2 lần vận tốc của dòng nước nên mỗi giờ dòng nước trôi được số phần khúc sông là:

$$\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{45}\right) : 2 = \frac{1}{180} \text{ (khúc sông AB)}$$

Thời gian cùm bèo trôi theo dòng nước từ A đến B là:

$$1 : \frac{1}{180} = 180 \text{ phút} = 3 \text{ giờ}$$

Bài 5: Một ca nô đi với vận tốc riêng là 55 km/h. Ca nô đi xuôi dòng từ A đến B và ngược dòng từ B về A. Thời gian lúc về hơn thời gian lúc đi là 18 phút. Tính độ dài quãng sông từ A đến B, biết vận tốc dòng nước là 5 km/h.

Bài giải

Vận tốc ca nô xuôi dòng là: $55 + 5 = 60$ (km/giờ)

Vận tốc ca nô ngược dòng là: $55 - 5 = 50$ (km/giờ)

Khi xuôi dòng ca nô đi 1km hết khoảng thời gian là: $1 : 60 = \frac{1}{60}$ (giờ)

Khi ngược dòng ca nô đi 1km hết khoảng thời gian là: $1 : 50 = \frac{1}{50}$ (giờ)

Thời gian đi 1km về hơn 1 km lúc đi là: $\frac{1}{50} - \frac{1}{60} = \frac{1}{300}$ (giờ)

Đổi $\frac{1}{300}$ giờ = $\frac{1}{5}$ phút

Quãng sông AB dài là: $18 : \frac{1}{5} = 90$ (km)

Bài 6: Một chiếc thuyền lúc 7 giờ đi ngược dòng từ A đến B. Sau khi nghỉ 35 phút thuyền lại xuôi dòng về đến bến A lúc 18 giờ 5 phút. Hỏi quãng sông AB dài bao nhiêu km. Biết rằng thuyền xuôi dòng với vận tốc 75 m/phút, và ngược dòng với vận tốc 30 m/phút.

Bài giải

Đổi 75 m/phút = 4,5 km/giờ; 30 m/phút = 1,8 km/giờ

Cứ 1 km thuyền xuôi dòng hết thời gian là: $1 : 4,5 = \frac{2}{9}$ (giờ)

Cứ 1 km thuyền ngược dòng hết thời gian là: $1 : 1,8 = \frac{5}{9}$ (giờ)

Cứ 1 km xuôi dòng và 1km ngược hết thời gian là: $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$ (giờ)

Tổng thời gian chuyển động của thuyền cả đi lẫn về là:

$$18 \text{ giờ } 5 \text{ phút} - 7 \text{ giờ } - 35 \text{ phút} = 10 \text{ giờ } 30 \text{ phút}$$

Đổi 10 giờ 30 phút = 10,5 giờ

Quãng sông từ A đến B dài là: $10,5 : \frac{7}{9} = 13,5 \text{ km}$.

a. DẠNG 5: CHUYỂN ĐỘNG CÓ VẬN TỐC THAY ĐỔI TRÊN TỪNG ĐOẠN

a. Bài tập minh họa:

Bài 1: Một người đi xe đạp từ A đến B gồm một đoạn lên dốc AB và một đoạn xuống dốc CB. Thời gian đi AB là 2 giờ, thời gian về BA là 1 giờ 45 phút. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng cứ lúc lên dốc thì người đó đi với vận 10 km/h, cứ lúc xuống dốc thì người đó đi với vận tốc 15 km/h.

Bài giải

Trên mỗi km của quãng đường AB đều có một lần người đi xe đạp với vận tốc 10km/h, một lần đi với vận tốc 15 km/h.

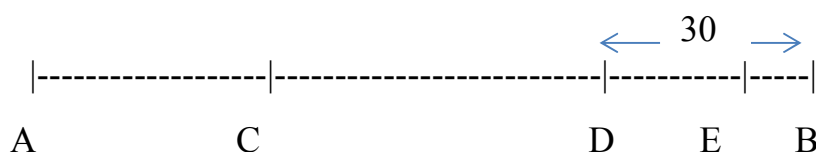
1km đi với vận tốc 10 km/h hết giờ, 1km đi với vận tốc 15 km/h hết giờ, do đó 1km cả đi lẫn về hết: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ (h)

Thời gian cả đi lẫn về: $2 + 1\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$ (h)

$$\text{Quãng đường AB} : 3\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = 22,5 \text{ (km)}$$

Bài 2: Một xe tải đi từ A đến B, vận tốc 40 km/h. Sau đó một thời gian, một xe du lịch rời A, vận tốc 60 km/h và như vậy sẽ đến B cùng lúc với xe tải. Nhưng đi đến C, được $\frac{1}{5}$ quãng đường AB, xe tải giảm vận tốc xuống còn 35 km/h, do đó xe du lịch gặp xe tải ở D, cách B 30km. Tính quãng đường AB.

Bài giải



Nếu không thay đổi vận tốc thì xe tải gặp xe du lịch ở B, do đổi vận tốc nên nó gặp xe du lịch ở D. Trong bài toán này, xe du lịch được dựa vào để xác định xem do thay đổi vận tốc, xe tải đi chậm bao lâu so với bình thường.

$$\text{Xe du lịch đi DB trong: } 30 : 60 = \frac{1}{2} \text{ (h)}$$

$$\text{Trong } \frac{1}{2} \text{ giờ đó, xe tải đi được: } 35 \cdot \frac{1}{2} = 17,5 \text{ (km)}$$

Như vậy lúc xe du lịch đến B (tức là lúc xe tải đáng lẽ đến B) thì xe tải mới đến E, còn cách B: $30 - 17,5 = 12,5 \text{ (km)}$.

Từ C xe tải đi với vận tốc bằng $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$ vận tốc cũ nên quãng đường đi được CE bằng $\frac{7}{8}$ quãng đường CB. Vậy quãng đường 12,5 km là $\frac{1}{8}$ quãng đường CB.

$$\text{Quãng đường CB: } 12,5 \cdot 8 = 100 \text{ (km)}$$

$$\text{Quãng đường AB: } \frac{100 \cdot 5}{4} = 125 \text{ (km)}$$

Bài 3: Một người đi từ A đến B. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 15 km/h. Khi còn cách B là 21 km, người đó tăng vận tốc thành 18 km/h. Lúc về người đó đi với vận tốc không đổi là 18 km/h. Thời gian cả đi lẫn về là 4 giờ 10 phút. Tính quãng đường AB.

HD giải

Gọi c là điểm cách B 21 km. Thời gian tổng cộng đi CB và BC là:

$$42 : 18 = 2\frac{1}{3} \text{ (h)}$$

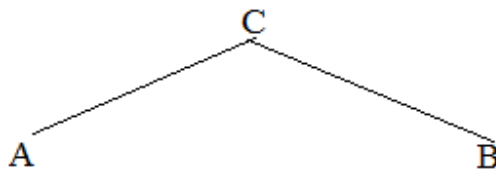
$$\text{Thời gian tổng cộng đi AC và CA là } 4\frac{1}{6} - 2\frac{1}{3} = 1\frac{5}{6} \text{ (h)}$$

Từ đó tìm được quãng đường AC là 15km, quãng đường AB là 36km.

b. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Một người đi từ A đến B gồm một đoạn lên dốc, một đoạn xuống dốc, vận tốc lên dốc là 12 km/h, vận tốc xuống dốc là 20 km/h, tổng cộng hết 1 giờ 35 phút. Lúc về, người đó đi từ B về A, vận tốc lên dốc cũng là 12 km/h, vận tốc xuống dốc cũng là 20 km/h, tổng cộng hết 1 giờ 45 phút. Tính quãng đường AB?

Bài giải



Gọi quãng đường lên dốc lúc đi là AC, quãng đường xuống dốc lúc đi là CB

Cả đi lẫn về, quãng đường lên dốc tổng cộng là: $AC + BC = AB$

Cả đi lẫn về, quãng đường xuống dốc tổng cộng là: $CB + CA = AB$

Quãng đường lên dốc, xuống dốc tổng cộng bằng quãng đường xuống dốc tổng cộng nên:

$$\frac{t_{\text{lên dốc}}}{t_{\text{xuống dốc}}} = \frac{v_{\text{xuống dốc}}}{v_{\text{lên dốc}}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Tổng thời gian lên dốc tổng cộng và xuống dốc tổng cộng là:

$$1\text{h } 35\text{ph} + 1\text{h } 45\text{ph} = 200 \text{ (ph)}$$

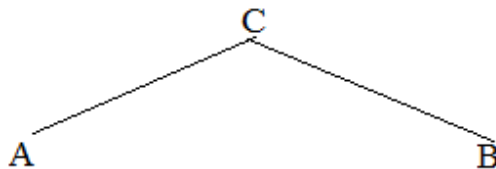
Thời gian xuống dốc tổng cộng: $\frac{200.3}{8} = 75 \text{ (ph)}$

Quãng đường xuống dốc tổng cộng (tức là quãng đường AB):

$$\frac{20.75}{60} = 25 \text{ km}$$

Bài 2: Một người đi quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc, một đoạn xuống dốc. Thời gian tổng cộng cả đi lẫn về là 7 giờ. Biết rằng cứ lên dốc thì người đó đi với vận tốc 18 km/h, cứ xuống dốc thì người đó đi với vận tốc 24 km/h. Tính quãng đường AB?

Bài giải



Gọi quãng đường lên dốc lúc đi là AC, quãng đường xuống dốc lúc đi là CB

Cả đi lẫn về, quãng đường lên dốc tổng cộng là: $AC + BC = AB$

Cả đi lẫn về, quãng đường xuống dốc tổng cộng là: $CB + CA = AB$

Quãng đường lên dốc, xuống dốc tổng cộng bằng quãng đường xuống dốc tổng cộng nên: $\frac{t_{\text{lên dốc}}}{t_{\text{xuống dốc}}} = \frac{v_{\text{xuống dốc}}}{v_{\text{lên dốc}}} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

Tổng thời gian lên dốc tổng cộng và xuống dốc tổng cộng là: $7\text{h} = 420\text{ph}$

Ta có sơ đồ:

Thời gian lên dốc tổng cộng: |-----|-----|-----|-----| }
 Thời gian xuống dốc tổng cộng: |-----|-----|-----| } 420 phút

Thời gian lên dốc tổng cộng là: $420 : (3 + 4) \times 4 = 240\text{ph}$

Quãng đường lên dốc tổng cộng là: $\frac{240.18}{60} = 72$ km

Vậy quãng đường AB dài : 72 km.

Bài 3: Một người đi quãng đường AB gồm đoạn AC và CB. Lúc đi, vận tốc trên AC là 12 km/h, vận tốc trên CB là 8 km/h hết 3 giờ 30 phút. Lúc về, vận tốc trên BC là 30 km/h, vận tốc trên CA là 20 km/h hết 1 giờ 36 phút. Tính quãng đường AB?

Bài giải

Chú ý rằng vận tốc 12km/h gấp rưỡi 8 km/h, vận tốc 30 km/h gấp rưỡi 20 km/h.

Giả sử trong 3h 30 ph lúc đi, người đó đi với vận tốc 12km/h thì đi được quãng đường $AC + 1,5CB$, dài: $12.3,5 = 42$ (km)

Giả sử trong 1h 36 ph lúc về, người đó đi được với vận tốc 30km/h thì đi được quãng đường $BC + 1,5CA$ dài : $30.1\frac{3}{5} = 48$ (km).

Vậy quãng đường: $42 + 48 = 90$ (km) là 2,5 (AC + CB) hay 2,5 AB.

Quãng đường AB dài : $90 : 2,5 = 36$ (km)

a. DẠNG 6: VẬN TỐC TRUNG BÌNH

a. Bài tập minh họa:

Bài 1: Một người đi xe đạp từ A đến B, đi từ A với vận tốc 10 km/h, nhưng đi từ chính giữa đường đến B với vận tốc 15 km/h. Tính xem trên cả quãng đường người đó đi với vận tốc trung bình là bao nhiêu?

Bài giải

Trên quãng đường AB, cứ 2km thì có 1km đi với vận tốc 10 (km/h) (hết $\frac{1}{10}$ h),

1km đi với vận tốc 15 (km/h) (hết $\frac{1}{15}$ h), nên cứ 2km, người đó đi hết: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ (h).

Vận tốc trung bình của người đó là: $2 : \frac{1}{6} = 12$ (km/h).

Bài 2: Một người đi xe máy trên một quãng đường, giờ đầu đi với vận tốc 40 km/h, 2 giờ sau đi với vận tốc 37 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường.

Bài giải

Trong hai giờ sau người đó đi được số km là:

$$37 \cdot 2 = 74 \text{ (km)}$$

Tổng thời gian người đó đi cả quãng đường là:

$$1 + 2 = 3 \text{ (giờ)}$$

Vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường là:

$$(40 + 74) : 3 = 38 \text{ (km/giờ)}$$

Bài 3: Một người đi từ A đến B với vận tốc 5 km/h, sau đó lại đi từ B về A với vận tốc 4 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường cả đi và về.

Bài giải

Người đó đi 1 km hết: $60 : 5 = 12$ (phút)

Người đó về 1km hết: $60 : 4 = 15$ (phút)

Người đó đi 1 km và về 1 km hết: $12 + 15 = 27$ (phút)

Thời gian người đó đi và về trên quãng đường 1km là: $27 : 2 = 13,5$ (phút)

Vận tốc trung bình cả đi và về của người đó là: $60 : 13,5 = 4\frac{4}{9}$ (km/h).

Bài 4: Quãng đường AB dài 43,8 km. Lúc 6 giờ xe thứ nhất đi từ A để đến B, lúc 6 giờ 25 phút xe thứ hai đi từ B để đến A. Hai xe gặp nhau trên đường đi lúc 6 giờ 45 phút và đến khi đó thì xe thứ nhất đã đi nhiều hơn xe thứ hai là 11,4 km. Tính vận tốc của mỗi xe.

HD giải:

Thời gian xe thứ nhất từ lúc đi đến lúc gặp nhau là:

$$6 \text{ giờ } 45 \text{ ph} - 6 \text{ giờ} = 45 \text{ ph} = 0,75 \text{ giờ}$$

Thời gian xe thứ hai từ lúc đi đến lúc gặp nhau là:

$$6 \text{ giờ } 45 \text{ ph} - 6 \text{ giờ } 25 \text{ ph} = 20 \text{ ph} = \frac{1}{3} \text{ giờ}$$

Quãng đường xe thứ nhất đã đi là:

$$(43,8 + 11,4) : 2 = 27,6 \text{ (km)}$$

Quãng đường xe thứ hai đã đi:

$$(43,8 - 11,4) : 2 = 16,2 \text{ (km)}$$

Vận tốc của xe thứ nhất là: $27,6 : 0,75 = 36,8 \text{ km/h}$

Vận tốc xe thứ hai là: $16,2 : \frac{1}{3} = 48,6 \text{ km/h}$

a. Bài tập tự luyện:

Bài 1: Hai người đi cùng xuất phát một lúc để đi từ A đến B.. Người thứ nhất, đi với vận tốc 32 km/h trên cả quãng đường. Người thứ hai đi nửa thời gian đầu với vận tốc 25 km/h và nửa thời gian sau đi với vận tốc 35 km/h. Hỏi ai đến B trước?

Bài giải

Vận tốc trung bình của người thứ hai trên cả quãng đường là:

$$(25 + 35) : 2 = 30 \text{ (km/h)}$$

Vì $32 \text{ (km/h)} > 30 \text{ (km/h)}$ nên người thứ nhất đi nhanh hơn người thứ hai

Do đó người thứ nhất đến B trước.

Bài 2: Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 35 km/h. Hỏi người đó đi xe máy từ B về A với vận tốc bao nhiêu để vận tốc trung bình trên cả quãng đường đi và về là 30 km/h?

Bài giải

Thời gian người đó đi được 1 km từ A đến B là:

$$1 : 35 = \frac{1}{35} \text{ (giờ)}$$

Người đó đi 1 km từ A đến B và 1 km từ B về A với vận tốc 30 km/h hết:

$$1 : 30 + 1 : 30 = \frac{1}{15} \text{ (giờ)}$$

Thời gian người đó đi 1 km từ B về A là:

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{35} = \frac{4}{105} \text{ (giờ)}$$

Vận tốc của người đó khi đi về từ B đến A là:

$$1 : \frac{4}{105} = 26,25 \text{ (km/giờ)}$$

Bài 3: Một người đi xe đạp trên quãng đường từ A đến B, $\frac{3}{5}$ quãng đường AB người đó đi với vận tốc 12 km/h. Quãng đường còn lại người đó đi với vận tốc 10 km/h. Tính vận tốc của người đó trên cả quãng đường AB.

Bài giải

Nếu chia quãng đường AB thành 5 phần bằng nhau thì người đó đi 3 phần với vận tốc 12 km/h và 2 phần với vận tốc 10 km/h.

Thời gian đi 1km với vận tốc 12 km/h là: $1 : 12 = \frac{1}{12}$ (giờ)

Thời gian đi 3km với vận tốc 12 km/h là: $3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ (giờ)

Thời gian đi 1 km với vận tốc 10 km/h là: $1 : 10 = \frac{1}{10}$ (giờ)

Thời gian đi 2 km với vận tốc 10 km/h là: $2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$ (Giờ)

Vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường AB là:

$$(3 + 2) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = 11\frac{1}{9} \text{ (km/h)}$$

Bài 4:

- a. Một máy bay có vận tốc trung bình trong cả chuyến bay là 700 km/h. Trên quãng đường đầu, vận tốc của máy bay là 800 km/h. Tính vận tốc của máy bay trên quãng đường sau biết rằng thời gian bay quãng đường đầu bằng $\frac{1}{3}$ thời gian cả chuyến bay.
- b. Một ô tô đi $\frac{2}{3}$ quãng đường AB với vận tốc 40 km/h rồi đi phần còn lại với vận tốc 60 km/h. Lúc về ô tô đi với vận tốc không đổi và thời gian về bằng thời gian đi. Tính vận tốc lúc về?

Bài giải

- a) Cứ trong 3 giờ thì máy bay bay được: $700 : 3 = 2100$ (km), trong đó có 1 giờ bay với vận tốc 800 km/h và có 2 giờ bay với vận tốc lúc sau.

Vậy vận tốc lúc sau bằng: $\frac{2100 - 800}{2} = 650$ (km/h)

- b) Cứ 3km lúc đi thì có 2km ô tô đi với vận tốc 40 km/h (hết $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$ giờ), 1 km đi với vận tốc 60 km/h (hết $\frac{1}{60}$ giờ), tổng cộng hết: $\frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{1}{15}$ (giờ)

Vận tốc trung bình lúc đi là: $3 : \frac{1}{15} = 45$ km/h

Vận tốc trung bình lúc về là: 45 km/h

PHẦN HÌNH HỌC CƠ BẢN & NÂNG CAO GỒM CHUYÊN ĐỀ 11 VÀ 12

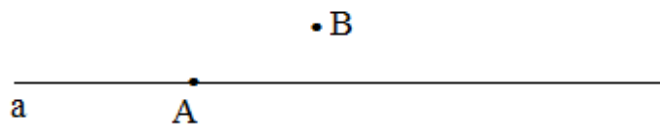
(Giáo án toàn bộ chương trình học hình lớp 6)

CHƯƠNG I – ĐOẠN THẲNG

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

a) ĐIỂM. ĐƯỜNG THẲNG. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

a) Vị trí của điểm và đường thẳng



a) Điểm A thuộc đường thẳng a, kí hiệu $A \in a$

b) Điểm B không thuộc đường thẳng a, kí hiệu $B \notin a$

b) Ba điểm thẳng hàng khi chúng cùng thuộc một đường thẳng. ba điểm không thẳng hàng khi chúng không cùng thuộc bất kì đường thẳng nào

c) Trong ba điểm thẳng hàng có một điểm và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại. Trong hình dưới, điểm M nằm giữa hai điểm A và B

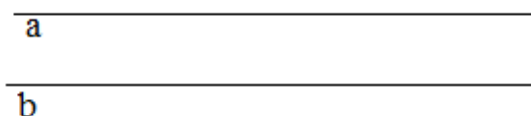


d) Nếu có một điểm nằm giữa hai điểm khác thì ba điểm đó thẳng hàng.

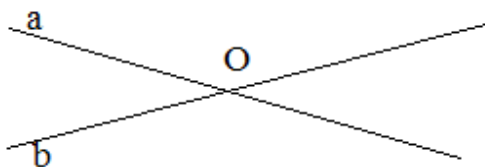
e) Quan hệ ba điểm thẳng hàng còn được mở rộng thành nhiều (4, 5, 6,...) điểm thẳng hàng

II – ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA HAI ĐIỂM

- a) Có một đường thẳng và chỉ 1 đường thẳng đi qua hai điểm A và B
- b) Có ba cách đặt tên đường thẳng:
- c) Dùng một chữ cái in thường: ví dụ a
- d) Dùng hai chữ cái in thường: ví dụ xy
- e) Dùng hai chữ cái in hoa: ví dụ AB
- c) Có ba vị trí của hai đường thẳng phân biệt:
- f) Hoặc không có điểm chung nào (gọi là hai đường thẳng song song)



- g) Hoặc chỉ có một điểm chung (gọi là đường thẳng cắt nhau)



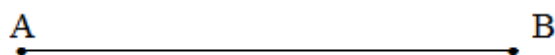
- d) Muốn chứng minh hai hay nhiều đường thẳng trùng nhau ta chỉ cần chứng tỏ chúng có hai điểm chung.
- e) Ba (hay nhiều) đường thẳng cùng đi qua một điểm gọi là ba (hay nhiều) đường thẳng đồng quy. Muốn chứng minh nhiều đường thẳng đồng quy ta có thể xác định giao điểm của đường thẳng nào đó rồi chứng minh các đường còn lại đều đi qua giao điểm này.

III – TIA

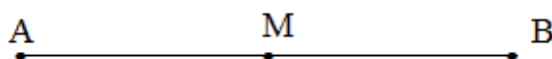
- a) Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O.
- b) Hai tia chung gốc tạo thành đường thẳng được gọi là hai tia đối nhau
- c) Quan hệ giữa một điểm nằm giữa hai điểm với hai tia đối nhau, hai tia trùng nhau:
Xét 3 điểm A, O, B thẳng hàng.
- h) Nếu OA và OB đối nhau thì gốc O nằm giữa A và B
- i) Ngược lại nếu O nằm giữa A và B thì:
 - + Hai tia OA, OB đối nhau
 - + Hai tia AO, AB trùng nhau; hai tia BO, BA trùng nhau

IV- ĐOẠN THẲNG. ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG. CỘNG ĐỘ DÀI HAI ĐOẠN THẲNG

- a) Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B

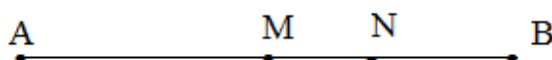


- b) Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đoạn thẳng là một số dương.
 c) $AB = CD \Leftrightarrow AB$ và CD có cùng độ dài
 $AB < CD \Leftrightarrow AB$ ngắn hơn CD
 $AB > CD \Leftrightarrow AB$ dài hơn CD .
 d) Nếu điểm M nằm giữa điểm A và điểm B thì $AM + MB = AB$
 Ngược lại, nếu $AM + MB = AB$ thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B.
 Nếu $AM + MB \neq AB$ thì điểm M không nằm giữa A và B.



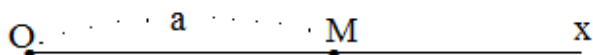
Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B; điểm N nằm giữa hai điểm M và B thì:

$$AM + MN + NB = AB$$

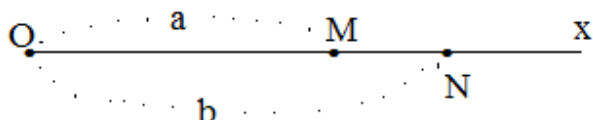


V- VẼ ĐOẠN THẲNG CHO BIẾT ĐỘ DÀI

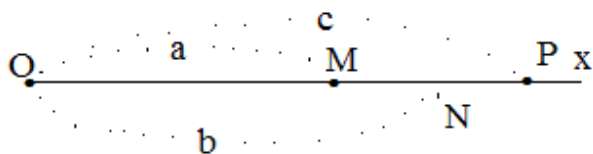
- a) Trên tia Ox bao giờ cũng vẽ được 1 và chỉ một điểm M sao cho $OM = a$ (đơn vị dài)



- b) Trên tia Ox, $OM = a$, $ON = b$, nếu $0 < a < b$ thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N

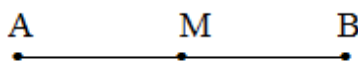


- c) Trên tia Ox có 3 điểm M, N, P; $OM = a$; $ON = b$; $OP = c$; nếu $0 < a < b$ thì điểm N nằm giữa hai điểm M và P.



VI – TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG

- a) Trung điểm của đoạn thẳng là điểm nằm giữa hai đầu đoạn thẳng và cách đều hai đầu đoạn thẳng đó



- b) Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $MA = MB = \frac{AB}{2}$.
- c) Nếu M nằm giữa hai đầu đoạn thẳng AB và $MA = \frac{AB}{2}$ thì M là trung điểm của AB
- d) Mỗi đoạn thẳng có 1 trung điểm duy nhất

B - BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. PHẦN 1: BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Điểm A không thuộc đường thẳng d được kí hiệu là:

A. $A \subset d$ B. $A \in d$ C. $A \notin d$
D. $d \subset A$

2. Cho hai tia Ax và Ay đối nhau. Lấy điểm M trên tia Ax, điểm N trên tia Ay. Ta có:

- A. Điểm M nằm giữa A và N B. Điểm A nằm giữa M và N
C. Điểm N nằm giữa A và M D. Không có điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại.
3. Số đường thẳng đi qua hai điểm S và T là :
- A.1 B.2 C.3 D.Vô số
4. L là một điểm nằm giữa hai điểm I và K. Biết $IL = 2\text{cm}$, $LK = 5\text{cm}$. Độ dài của đoạn thẳng IK là:
- A.3cm B.2cm C.5cm D.7cm.
5. Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng MN khi:
- A. $IM = IN$ B. $IM = IN = \frac{MN}{2}$
C. $IM + IN = MN$ D. $IM = 2 IN$
6. Cho các điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường thẳng. Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành từ các điểm trên ?
- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20
7. Đường thẳng có đặc điểm nào trong các đặc điểm sau ?
- A. Giới hạn ở một đầu. B. Kéo dài mãi về một phía.
C. Giới hạn ở hai đầu. D. Kéo dài mãi về hai phía.
8. Ba điểm M, N, P thẳng hàng. Trong các câu sau, câu nào sai ?
- A. Đường thẳng MP đi qua N. B. Đường thẳng MN đi qua P.
C. M, N, P thuộc một đường thẳng. D. M, N, P không cùng thuộc một đường thẳng.

9. Điểm E nằm giữa hai điểm M và N thì:

A. $ME + MN = EN$ B. $MN + EN = ME$ C. $ME + EN = MN$ D. Đáp án khác.

10. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua 5 điểm phân biệt mà trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng?

A. 15. B. 10. C. 5. D. Vô số.

1. PHẦN 2: TỰ LUẬN

Bài 1: Cho đường thẳng xy . Lấy điểm $O \notin xy$; điểm $A \in xy$ và điểm B trên tia Ay (điểm B khác điểm A)

- ❖ kể tên các tia đối nhau, các tia trùng nhau;
- ❖ Kể tên hai tia không có điểm chung;
- ❖ Gọi M là điểm di động trên xy . Xác định vị trí điểm M để cho tia Ot đi qua điểm M không cắt hai tia Ax, By .

Bài 2: Vẽ hai đường thẳng mn và xy cắt nhau tại O

- a. kể tên hai tia đối nhau;
- b. Trên tia Ox lấy điểm P , trên tia Om lấy điểm E (P và E khác O). Hãy tìm vị trí điểm Q để điểm O nằm giữa P và Q ; Tìm vị trí điểm F sao cho hai tia OE, OF trùng nhau.

Bài 3: Cho 4 điểm A, B, C, O . Biết hai tia OA, OB đối nhau; hai tia OA, OC trùng nhau.

a) Giải thích vì sao 4 điểm A, B, C, O thẳng hàng.

b) Nếu điểm A nằm giữa C và O thì điểm A có nằm giữa hai điểm O và B không? Giải thích Vì sao?

Bài 4: Cho điểm O nằm giữa hai điểm A và B ; điểm I nằm giữa hai điểm O và B . Giải thích vì sao:

a. O nằm giữa A và I ?

b. I nằm giữa A và B ?

Bài 5: Gọi A và B là hai điểm nằm trên tia Ox sao cho $OA = 4\text{ cm}$, $OB = 6\text{ cm}$. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3\text{ cm}$. So sánh AB với AC.

Bài 6: Vẽ đoạn thẳng $AB = 5\text{ cm}$. Lấy hai điểm E và F nằm giữa A và B sao cho $AE + BF = 7\text{ cm}$.

a. Chứng tỏ rằng điểm E nằm giữa hai điểm B và F.

b. Tính EF.

Bài 7: Vẽ hai tia chung gốc Ox, Oy. Trên tia Ox lấy hai điểm A và B (điểm A nằm giữa O và B). Trên tia Oy lấy hai điểm M và N sao cho $OM = OA$; $ON = OB$.

2. Chứng tỏ rằng điểm m nằm giữa O và N.

3. So sánh AB và MN.

Bài 8: Trên tia Ox lấy hai điểm A và M sao cho $OA = 3\text{ cm}$; $OB = 4,5\text{ cm}$. Trên tia Ax lấy điểm B sao cho M là trung điểm của AB. Hỏi điểm A có phải là trung điểm của đoạn thẳng OB không? Vì sao?

Bài 9: Cho đoạn thẳng $AB = 6\text{ cm}$. Lấy hai điểm C và D thuộc đoạn AB sao cho $AC = BD = 2\text{ cm}$.

Gọi M là trung điểm của AB.

1. Giải thích vì sao M cũng là trung điểm của đoạn thẳng CD.

2. Tìm trên hình vẽ những điểm khác cũng là trung điểm của đoạn thẳng.

Bài 10: Gọi O là một điểm của đoạn thẳng AB. Xác định vị trí của điểm O để:

1. Tổng $AB + BO$ đạt giá trị nhỏ nhất

2. Tổng $AB + BO = 2 BO$

3. Tổng $AB + BO = 3 BO$.

Bài 11: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB và C là một điểm của đoạn thẳng đó.

Cho biết $AB = 6\text{ cm}$; $AC = a\text{ (cm)}$ ($0 < a \leq 6$). Tính khoảng cách CM.

Bài 12: Cho đoạn thẳng $CD = 5\text{ cm}$. Trên đoạn thẳng này lấy hai điểm I và K sao cho $CI = 1\text{ cm}$; $DK = 3\text{ cm}$

1. Điểm K có là trung điểm của đoạn thẳng CD không? vì sao?

2. Chứng tỏ rằng điểm I là trung điểm của CK.

Bài 13: Cho đoạn thẳng AB; điểm O thuộc tia đối của tia AB. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB

1. Chứng tỏ $OA < OB$.
2. Trong ba điểm O, M, N điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?
3. Chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào vị trí điểm O (O thuộc tia đối của tia AB)

Bài 14: Cho đoạn thẳng $AB = 8$ cm. Trên tia AB lấy điểm C sao cho $AC = 2$ cm.

1. Tính CB
2. Lấy điểm D thuộc tia đối của tia BC sao cho $BD = 4$ cm. Tính CD .

Bài 15: Trên tia Ox , lấy hai điểm E và F sao cho $OE = 3$ cm, $OF = 6$ cm.

1. Điểm E có nằm giữa hai điểm O và F không? Vì sao?
2. So sánh OE và EF .
3. Điểm E có là trung điểm của đoạn thẳng OF không? Vì sao?
4. Ta có thể khẳng định OF chỉ có duy nhất một trung điểm hay không? Vì sao?

Bài 16: Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = 3$ cm, $OB = 6$ cm.

1. Điểm A có nằm giữa O và B không? Vì sao?
2. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
3. Điểm A có phải là trung điểm của OB không? Vì sao?
4. Gọi P là trung điểm của đoạn thẳng OA , Q là trung điểm của đoạn thẳng AB .
Chứng tỏ $OB = 2PQ$.

Bài 17:

Cho đoạn thẳng $AB = 8$ cm. Điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $BC = 2$ cm. Tính độ dài có thể có được của đoạn thẳng AC

Bài 18

Vẽ tia Ax . Lấy $B \in Ax$ sao cho $AB = 8$ cm, điểm M nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = 4$ cm.

1. Điểm M có nằm giữa A và B không? Vì sao?
2. So sánh MA và MB .
3. M có là trung điểm của AB không? Vì sao?
4. Lấy $N \in Ax$ sao cho $AN = 12$ cm. So sánh BM và BN

Câu 19

- a) Vẽ đường thẳng xy . Trên xy lấy ba điểm A, B, C theo thứ tự đó.
- b) Kể tên các tia có trên hình vẽ (Các tia trùng nhau chỉ kể một lần)
- c) Hai tia Ay và By có phải là hai tia trùng nhau không? Vì sao?

d) Kể tên hai tia đối nhau gốc B.

Câu 20

a) Trên tia Ox, vẽ hai điểm A, B sao cho $OA = 3.5\text{cm}$, $OB = 7\text{cm}$.

b) Điểm A có nằm giữa hai điểm O và B không?

c) So sánh OA và AB.

d) Điểm A có là trung điểm của đoạn thẳng OB không? Vì sao?

Câu 21:

Hãy vẽ sơ đồ trồng cây trong trường hợp sau: Có 10 cây trồng thành 5 hàng , mỗi hàng 4 cây

Câu 22: Vẽ liền 1 nét 4 đoạn thẳng đi qua 9

• • • điểm:
• • •
• • •

1. PHẦN 3: CHUYÊN ĐỀ 12: ĐIỂM – ĐƯỜNG THẲNG – ĐOẠN THẲNG

Bài 1: Cho đoạn thẳng $AB = 5\text{cm}$, điểm C nằm giữa A và B, các điểm D và E theo thứ tự là trung điểm của AC và CB. Tính độ dài DE.

Bài 2: Cho điểm C thuộc đường thẳng AB nhưng không thuộc đoạn thẳng AB. Biết $CA = a$, $CB = b$. Gọi I là trung điểm của AB. Tính độ dài IC.

Bài 3: Trên mặt phẳng có bốn đường thẳng. Số giao điểm của các đường thẳng có thể bằng bao nhiêu?

Bài 4: Cho n điểm ($n \geq 2$). Nối từng cặp hai điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng.

- Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó không có ba điểm nào thẳng hàng?
- Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó có đúng ba điểm thẳng hàng?
- Tính n biết rằng có tất cả 1770 đoạn thẳng.

Bài 5: Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n ?

Bài 6: Cho n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 780. Tính n ?

Bài 7: Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

Bài 8: Cho 20 điểm, trong đó có a điểm thẳng hàng. Cứ 2 điểm, ta vẽ một đường thẳng. Tìm a , biết vẽ được tất cả 170 đường thẳng.

Bài 9: Cho ba điểm A, B, C nằm ngoài đường thẳng a . Biết rằng cả hai đoạn thẳng BA, BC đều cắt đường thẳng a . Hỏi đường thẳng a có cắt đoạn thẳng AC không? Vì sao?

Bài 10: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 5\text{cm}$; $OD = 2\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$ và độ dài AC gấp đôi độ dài BD . Tìm độ dài các đoạn BD ; AC .

Bài 11: Gọi A và B là hai điểm trên tia Ox sao cho $OA = 4\text{cm}$; $OB = 6\text{cm}$. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3\text{cm}$. So sánh AB với AC .

Bài 12: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D . Biết rằng A nằm giữa B và C ; B nằm giữa C và D ; $OA = 7\text{cm}$; $OD = 3\text{cm}$; $BC = 8\text{cm}$ và $AC = 3BD$.

a) Tính độ dài AC .

b) Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD .

Bài 13: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N , sao cho $OM = 3\text{cm}$ và $ON = 7\text{cm}$.

- Tính độ dài đoạn thẳng MN .

2. Lấy điểm P trên tia Ox, sao cho $MP = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OP.
3. Trong trường hợp M nằm giữa O và P. Chứng tỏ rằng P là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 14: Cho đường thẳng xy. Trên xy lấy 3 điểm A; B; C sao cho $AB = a\text{ cm}$; $AC = b\text{ cm}$ ($b > a$). Gọi I là trung điểm của AB.

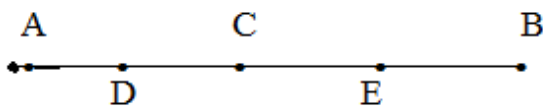
1. Tính IC ?
2. Lấy 4 điểm M; N; P; Q nằm ngoài đường thẳng xy. Chứng tỏ rằng đường thẳng xy hoặc không cắt, hoặc cắt ba, hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng sau: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ.

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

2. PHẦN 3: CHUYÊN ĐỀ 12: ĐIỂM – ĐƯỜNG THẲNG – ĐOẠN THẲNG

Bài 1: Cho đoạn thẳng $AB = 5\text{cm}$, điểm C nằm giữa A và B, các điểm D và E theo thứ tự là trung điểm của AC và CB. Tính độ dài DE.

GIẢI: (H1)



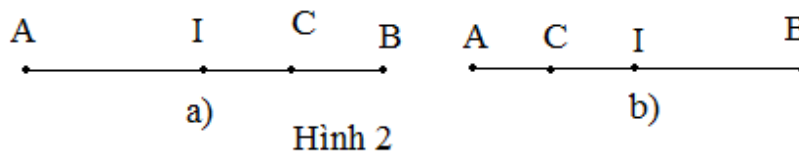
Hình 1

$$DE = DC + CE = \frac{AC}{2} + \frac{CB}{2} = \frac{AC+CB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (cm)}$$

Bài 2: Cho điểm C thuộc đường thẳng AB nhưng không thuộc đoạn thẳng AB. Biết $CA = a$, $CB = b$. Gọi I là trung điểm của AB. Tính độ dài IC.

Giải (H2)

Trường hợp $a > b$ (H2a): $IC = IB - CB = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$



Trường hợp $a < b$ (H2b): $IC = \frac{b-a}{2}$

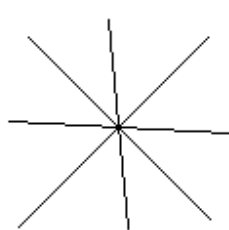
Trường hợp $a = b$ thì $I \equiv C$

Bài 3: Trên mặt phẳng có bốn đường thẳng. Số giao điểm của các đường thẳng có thể bằng bao nhiêu?

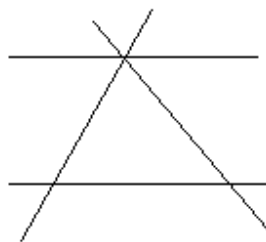
GIẢI

Bài toán đòi hỏi phải xét đủ các trường hợp:

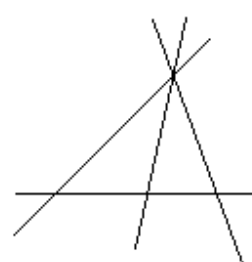
1. Bốn đường thẳng đồng quy: có 1 giao điểm (H3.1 a)



a)



b)



c)

Hình 3.1

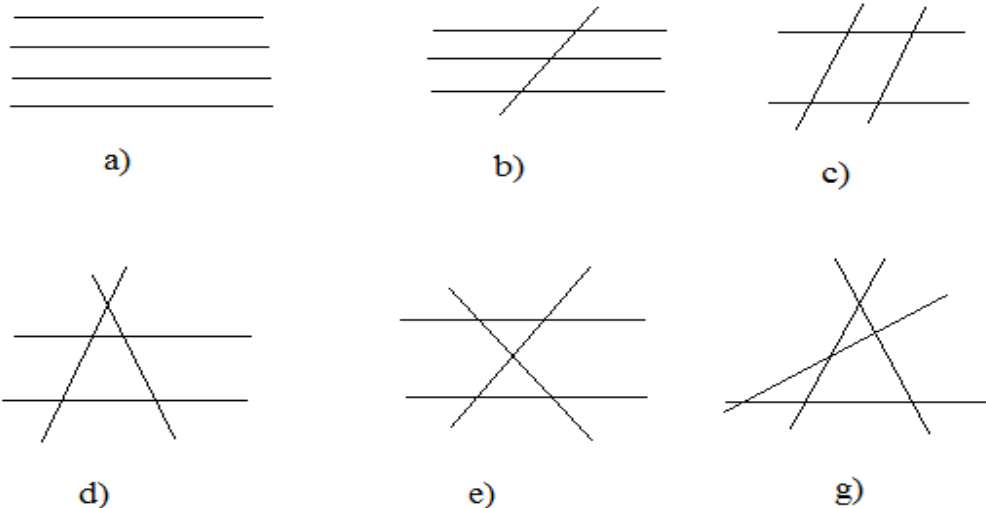
2. Có đúng ba đường thẳng đồng quy:

j) Có hai đường thẳng song song: 3 giao điểm (H3.1 b)

k) Không có hai đường thẳng nào song song: 4 giao điểm (H3.1c)

3. Không có ba đường thẳng nào đồng quy

- l) Bốn đường thẳng song song: 0 giao điểm (H3.2 a)
- m) Có đúng ba đường thẳng song song: 3 giao điểm (H3.2b)
- n) Có hai cặp đường thẳng song song: 4 giao điểm (H3.2c)
- o) Có đúng một cặp đường thẳng song song: 5 giao điểm (H3.2d,e)
- p) Không có hai đường thẳng nào song song: 6 giao điểm. (H3.2g)



Hình 3.2

Bài 4: Cho n điểm ($n \geq 2$). Nối từng cặp hai điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng.

a. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó không có ba điểm nào thẳng hàng?

Giải:

Chọn một điểm. Nối điểm đó với từng điểm trong $n - 1$ điểm còn lại, ta vẽ được $n - 1$ đoạn thẳng. Làm như vậy với n điểm, ta được $n(n-1)$ đoạn thẳng. Nhưng mỗi đoạn thẳng được tính hai lần, do đó tất cả chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

b. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nếu trong n điểm đó có đúng ba điểm thẳng hàng?

Giải:

Tuy trong hình vẽ có ba điểm thẳng hàng, nhưng số đoạn thẳng phải đếm vẫn không thay đổi, do đó vẫn có $\frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

c. Tính n biết rằng có tất cả 1770 đoạn thẳng.

Giải:

Ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 1770.$

Do đó: $n(n-1) = 2.1770 = 2^2.3.5.59 = 59.60$

Suy ra : $n = 60$

Bài 5: Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 105 đường thẳng. Tính n?

HD:

Ta có: $\frac{n(n-1)}{2} = 105$ nên $n(n-1) = 210 = 2.3.5.7 = 15.14$. Vậy $n = 15$

Bài 6: Cho n đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 780. Tính n?

HD:

Từ $\frac{n(n-1)}{2} = 780$ ta tính được $n = 40$

Bài 7: Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

HD:

Mỗi đường thẳng cắt 100 đường thẳng còn lại tạo nên 100 giao điểm. Có 101 đường thẳng nên có: 101.100 giao điểm nhưng mỗi giao điểm đã được tính hai lần nên chỉ có:

$$101.100:2 = 5050 \text{ (giao điểm)}$$

Bài 8: Cho 20 điểm, trong đó có a điểm thẳng hàng. Cứ 2 điểm, ta vẽ một đường thẳng. Tìm a, biết vẽ được tất cả 170 đường thẳng.

GIẢI

Giả sử trong 20 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó, số đường thẳng vẽ được là: $19 \cdot 20:2 = 190$

Trong a điểm, giả sử không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số đường thẳng vẽ được là : $(a - 1) : 2$.

Thực tế, trong a điểm này ta chỉ vẽ được 1 đường thẳng.

Vậy ta có : $190 - (a - 1) : 2 + 1 = 170$

$\Rightarrow a = 7$

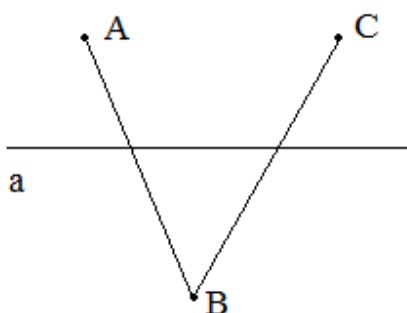
Bài 9: Cho ba điểm A, B, C nằm ngoài đường thẳng a. Biết rằng cả hai đoạn thẳng BA, BC đều cắt đường thẳng a. Hỏi đường thẳng a có cắt đoạn thẳng AC không? Vì sao?

GIẢI (H9)

Đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ a.

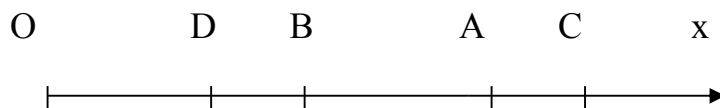
Lập luận tương tự hai điểm B, C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ a.

- Hai điểm A, C thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ a. Vậy đường thẳng a không cắt đoạn thẳng AC



Bài 10: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D. biết rằng A nằm giữa B và C; B nằm giữa C và D ; OA = 5cm; OD = 2 cm ; BC = 4 cm và độ dài AC gấp đôi độ dài BD. Tìm độ dài các đoạn BD; AC.

GIẢI



Vì A nằm giữa B và C nên $BA + AC = BC \Rightarrow BA + AC = 4$ (1)

Lập. luận $\Rightarrow$ B nằm giữa A và D.

Theo gt $OD < OA \Rightarrow$ D nằm giữa O và A.

$$\text{Mà } OD + DA = OA \Rightarrow 2 + DA = 5 \Rightarrow DA = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Ta có } DB + BA = DA \Rightarrow DB + BA = 3 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \quad AC - DB = 1 \quad (3)$$

theo đề ra : $AC = 2BD$ thay vào (3)

$$\text{Ta có } 2BD - BD = 1 \Rightarrow BD = 1$$

$$\Rightarrow AC = 2BD \Rightarrow AC = 2 \text{ cm}$$

Bài 11: Gọi A và B là hai điểm trên tia Ox sao cho $OA = 4 \text{ cm}$; $OB = 6 \text{ cm}$. Trên tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 3 \text{ cm}$. So sánh AB với AC.

GIẢI



Hai điểm A và B trên tia Ox mà $OA < OB$ ($4 < 6$) nên điểm A nằm giữa O và B suy ra $AB = OB - OA$

$$AB = 6 - 4 = 2 \text{ (cm)}$$

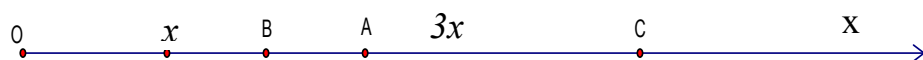
Hai điểm A và C trên tia BA mà $BA < BC$ ($2 < 3$) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và C

$$\text{Suy ra } AC = BC - BA = 3 - 2 = 1 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } AB > AC \text{ (} 2 > 1 \text{)}$$

Bài 12: Trên tia Ox cho 4 điểm A, B, C, D. Biết rằng A nằm giữa B và C; B nằm giữa C và D ; $OA = 7\text{cm}$; $OD = 3\text{cm}$; $BC = 8\text{cm}$ và $AC = 3BD$.

1. Tính độ dài AC.



$$\text{Đặt } BD = x \text{ (cm)} \Rightarrow AC = 3x \text{ (cm)}$$

$$\text{Vì D nằm giữa O và A (Do } OD < OA \text{) nên: } OD + DA = OA \Rightarrow DA = 4$$

$$\Rightarrow DB + BA = 4 \text{ hay } x + BA = 4 \quad (1)$$

$$\text{Vì A nằm giữa B và C nên: } BA + AC = BC \text{ hay } 3x + BA = 8 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } (3x + BA) - (x + BA) = 8 - 4$$

$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow AC = 3.2 = 6 \text{ (cm)}$$

2. Chứng tỏ rằng: Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AD.

$$\text{Theo (1) ta có: } x + BA = 4 \text{ mà } x = 2 \Rightarrow BA = 2$$

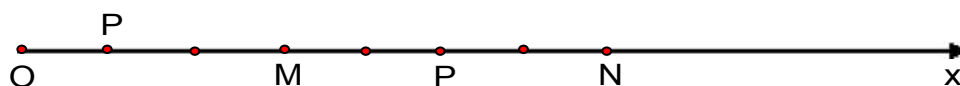
$$\text{Mà } BD = x = 2$$

$$\Rightarrow BD = BA (=2) \Rightarrow B \text{ là trung điểm của đoạn thẳng AD}$$

Bài 13: Trên tia Ox lấy hai điểm M và N, sao cho $OM = 3\text{cm}$ và $ON = 7\text{cm}$.

1. Tính độ dài đoạn thẳng MN.
2. Lấy điểm P trên tia Ox, sao cho $MP = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OP.
3. Trong trường hợp M nằm giữa O và P. Chứng tỏ rằng P là trung điểm của đoạn thẳng MN.

GIẢI



1. Do M, N cùng thuộc tia Ox mà $OM < ON$ nên M nằm giữa hai điểm O và N
 $\Rightarrow OM + MN = ON$
 $\Rightarrow 3 + MN = 7 \Rightarrow MN = 7 - 3 = 4 \text{ (cm)}$

Vậy $MN = 4\text{(cm)}$

b)

TH1: Nếu P nằm giữa M và N thì M nằm giữa O và P

$$\Rightarrow OP = OM + MP \Rightarrow OP = 3 + 2 = 5(\text{cm}).$$

TH2: Nếu P nằm giữa O và M $\Rightarrow OM = OP + PM$

1. $3 = OP + 2 \Rightarrow OP = 1(\text{cm}).$
2. c) **(1,0 đ).** M nằm giữa O và P $\Rightarrow OP = 5(\text{cm}) < ON = 7(\text{cm})$ nên P nằm giữa O và N
3. suy ra $OP + PN = ON \Rightarrow 5 + PN = 7 \Rightarrow PN = 2(\text{cm})$
4. Do đó: $MP = PN$, mà P nằm giữa M và N nên P là trung điểm của MN

Bài 14: Cho đường thẳng xy. Trên xy lấy 3 điểm A; B; C sao cho $AB = a \text{ cm}$; $AC = b \text{ cm}$ ($b > a$). Gọi I là trung điểm của AB.

1. Tính IC ?
2. Lấy 4 điểm M; N; P; Q nằm ngoài đường thẳng xy. Chứng tỏ rằng đường thẳng xy hoặc không cắt, hoặc cắt ba, hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng sau: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ.

GIẢI

1. TH1. B ; C nằm cùng phía với nhau so với điểm A



HS tính được $IC = b - \frac{a}{2}$

TH2. B; C nằm khác phía so với điểm A.



b). HS tính được $IC = b + \frac{a}{2}$

*) TH 1: Nếu cả 4 điểm cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy không cắt các đoạn thẳng: MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ.

*) TH 2: Nếu có 3 điểm (giả sử $M ; N ; P$) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng còn 1 điểm Q nằm khác phía bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy cắt 3 đoạn thẳng sau: MQ, NQ, PQ .

*) TH 3: Nếu có 2 điểm (giả sử $M ; N$) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng còn 2 điểm ($P ; Q$) nằm khác phía bờ là đường thẳng xy thì đường thẳng xy cắt 4 đoạn thẳng sau: $MP; MQ, NP; NQ$.

CHƯƠNG II – GÓC

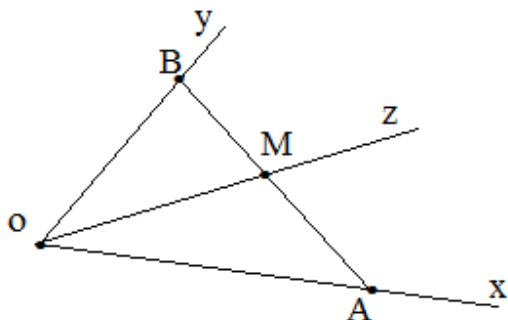
1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NỬA MẶT PHẶNG

1. Hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi a được gọi là một nửa mặt phẳng bờ a .

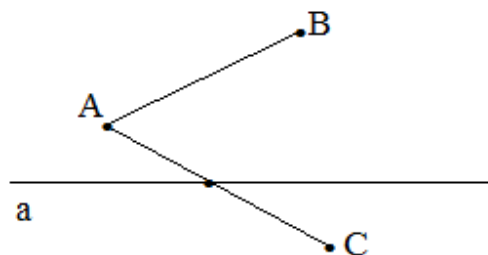
Nhận xét: bất kỳ đường thẳng nào nằm trên mặt phẳng cũng là bờ chung của hai nửa mặt phẳng đối nhau.

2. Tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy , nếu tia Oz cắt đoạn thẳng AB tại điểm M nằm giữa A và B ($A \in Ox$, $B \in Oy$; A và B khác O)

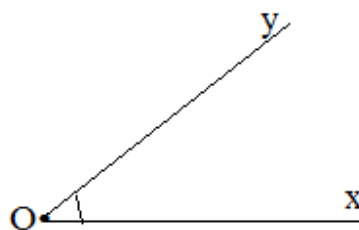


Nhận xét: Nếu hai tia Ox và Oy đối nhau thì mọi tia Oz khác Ox , Oy đều nằm giữa hai tia Ox , Oy .

3. - Hai điểm A và B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ a thì đoạn thẳng AB không cắt a
1. Hai điểm A và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ a thì đoạn thẳng AC cắt a tại điểm nằm giữa A và C

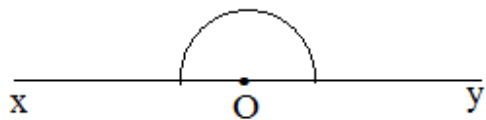


2. GÓC. SỐ ĐO GÓC. CỘNG SỐ ĐO HAI GÓC



1. Góc là hình gồm hai tia chung gốc:

Góc bẹt là góc có hai cạnh là hai tia đối nhau:



2. Mỗi góc có một số đo dương. Số đo của góc bẹt là 180^0 . Số đo của mỗi góc không vượt quá 180^0 .

3. $\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{A}$ và $\hat{B}$ cùng số đo

$\hat{A} < \hat{B} \Leftrightarrow$ số đo $\hat{A} <$ số đo $\hat{B}$

$\hat{A} > \hat{B} \Leftrightarrow$ số đo $\hat{A} >$ số đo $\hat{B}$

4. $0^0 < \text{góc nhọn} < \text{góc vuông}(90^0) < \text{góc tù} < \text{góc bẹt}(180^0)$

5. Hai góc kề nhau là hai góc có một cạnh chung và hai cạnh còn lại nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là cạnh chung

6. $\hat{A}$ phụ với $\hat{B} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 90^0$

$\hat{A}$ bù với $\hat{B} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$

Hai góc vừa kề vừa bù gọi là hai góc kề bù.

Hai góc kề bù có tổng bằng 180° và hai cạnh ngoài là hai tia đối nhau

7. Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$

Ngược lại, nếu $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$ thì Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz.

Nếu $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} \neq \widehat{xOz}$ thì tia Oy không nằm giữa hai tia Ox, Oz.

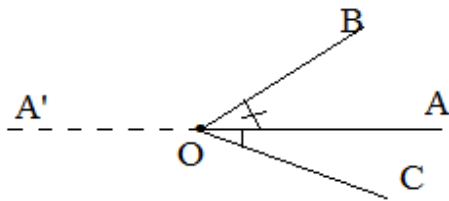
Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz; tia Ot nằm giữa hai tia Oy và Oz thì:

$$\widehat{xOy} + \widehat{yOt} + \widehat{tOz} = \widehat{xOz}$$

8. Hai góc AOB và AOC là hai góc kề, tia OA' là tia đối của OA

9. Nếu $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} < 180^\circ$ thì tia OA nằm giữa hai tia OB và OC

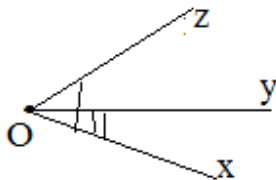
10. Nếu $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} > 180^\circ$ thì tia OA' nằm giữa hai tia OB và OC



11. VẼ GÓC CHO BIẾT SỐ ĐO

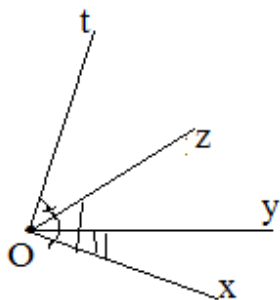
1. Trên nửa mặt phẳng cho trước có bờ chứa tia Ox, bao giờ cũng vẽ được 1 và chỉ 1 tia Oy sao cho $\widehat{xOy} = m$ (độ)

2. Trên nửa mặt phẳng cho trước bờ chứa tia Ox, có $\widehat{xOy} = m^\circ$, $\widehat{xOz} = n^\circ$; nếu $m < n$ thì tia Oy nằm giữa hai tia Ox, Oz.



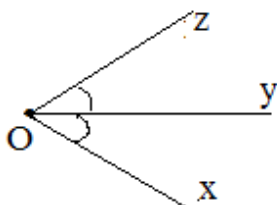
3. Trên nửa mặt phẳng cho trước bờ chứa tia Ox, có $\widehat{xOy} = m^\circ$, $\widehat{xOz} = n^\circ$; $\widehat{xOt} = p^\circ$.

Nếu $m < n < p$ thì Oz nằm giữa hai tia Oy và Ot.



4. TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

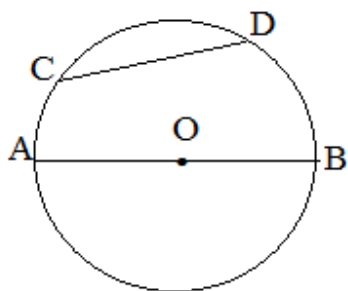
1. Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau



2. Nếu tia Oz là tia phân giác của góc xOy thì: $\widehat{xOz} = \widehat{zOy} = \frac{\widehat{xOy}}{2}$
3. Nếu tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy và $\widehat{xOz} = \frac{\widehat{xOy}}{2}$ tia Oz là tia phân giác của góc xOy
4. Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc gọi là đường phân giác của góc đó. Mỗi góc có một đường phân giác duy nhất.

5. ĐƯỜNG TRÒN

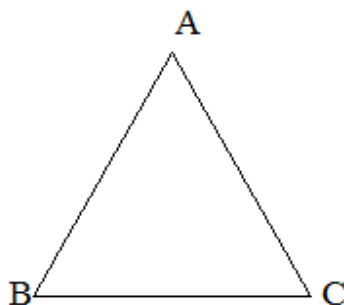
1. Đường tròn tâm O, bán kính R là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R, kí hiệu (O, R).
Hình tròn là hình gồm các điểm nằm trên đường tròn và các điểm nằm bên trong đường tròn đó
2. Hai điểm C, D của một đường tròn chia đường tròn thành hai cung. Đoạn thẳng nối hai mút của cung là dây cung. Dây cung đi qua tâm gọi là đường kính(AB).



3. Giao điểm của hai đường tròn: Hai đường tròn phân biệt có thể có hai điểm chung, một điểm chung duy nhất, hoặc không có điểm chung nào.

4. TAM GIÁC

1. Tam giác ABC là hình gồm 3 đoạn thẳng AB, BC, CA khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

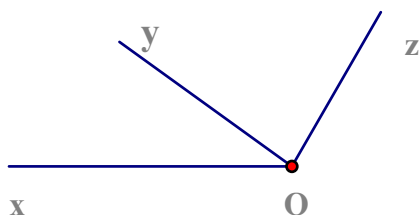


2. Cạnh và góc của tam giác:
3. Ba cạnh: AB, BC, AC
4. Ba góc: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$
5. Nếu một đường thẳng không đi qua các đỉnh của một tam giác và cắt một cạnh của tam giác ấy thì nó cắt một và chỉ một trong hai cạnh còn lại.

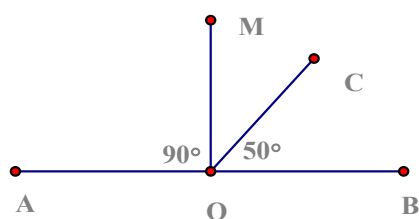
6. BÀI TẬP

1. PHẦN 1: BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Viết tên các góc trên hình vẽ sau bằng kí hiệu:



Bài 2: Viết bằng kí hiệu tên các góc nhọn, vuông, tù, bẹt trên hình vẽ sau:

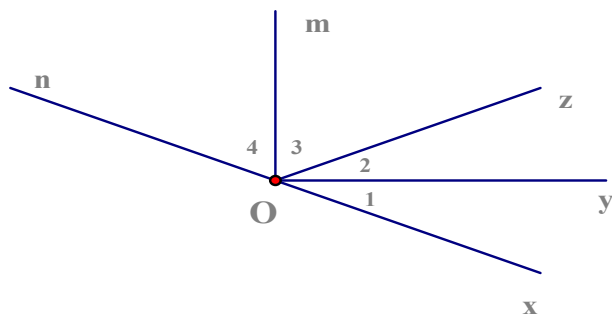


Bài 3: Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, vẽ các tia Oy và Oz sao cho góc xOy bằng 40° , góc xOz bằng 150° .

- Tính số đo của góc yOz.
- Góc xOy và yOz là cặp góc ở vị trí gì?

Bài 4: Cho hình vẽ. Biết $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$; $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$ và hai tia Ox, On đối nhau.

Chỉ ra các tia phân giác trên hình bên; Tính số đo của góc mOy.



Bài 5: Cho hai góc kề bù xOy , yOz sao cho $\widehat{xOy} = 120^\circ$.

1. Tính $\widehat{yOz}$?
2. Gọi Ot là tia phân giác của góc yOz . Chứng tỏ $\widehat{zOt} = \frac{1}{4} \widehat{xOy}$?

Bài 6: (2 đ) Cho hai tia Oy, Oz nằm trên cùng nửa mặt phẳng có bờ là tia Ox sao cho góc $xOy = 75^\circ$, góc $xOz = 25^\circ$.

- a) Trong ba tia Ox, Oy, Oz tia nào nằm giữa hai tia còn lại.
- b) Tính góc yOz .
- c) Gọi Om là tia phân giác của góc yOz . Tính góc xOm .

Bài 7 : Góc nhọn có số đo:

- | | |
|--|--|
| A) Lớn hơn 90° và nhỏ hơn 180° ; | C) Lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90° |
| B) Bằng 90° ; | D) Bằng 180° |

Bài 8 : Hai tia chung gốc đối nhau tạo thành :

- | | |
|--------------|-------------|
| A. Góc vuông | B. Góc nhọn |
| C. Góc tù | D. Góc bẹt |

Bài 9: Khi nào thì $\widehat{xOm} + \widehat{mOy} = \widehat{xOy}$

1. Khi tia Ox nằm giữa hai tia Om, Oy ;
 2. Khi tia Om nằm giữa hai tia Ox, Oy
- C) Khi tia Oy nằm giữa hai tia Ox, Om ;
- D) Khi ba tia Om, Ox, Oy nằm trên cùng một đường thẳng.

Bài 10 : Góc bù với góc có số đo 80° có số đo là :

- A. 10° B. 110° C. 100° D. 90°

Bài 11: Vẽ hai góc kề bù xOy và yOy' , biết $\widehat{xOy} = 118^\circ$. Tính $\widehat{yOy'}$

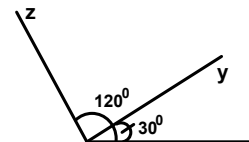
Bài 12 : Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, vẽ hai tia Oy và Ot sao cho

$$\widehat{xOy} = 30^\circ \text{ và } \widehat{xOt} = 60^\circ.$$

1. Tia nào nằm giữa hai tia còn lại? Vì sao?
2. Tính $\widehat{yOt}$? Tia Oy có là tia phân giác của $\widehat{xOt}$ không? Vì sao?
3. Gọi Om là tia đối của tia Oy. Tính $\widehat{mOt}$?
4. Kể tên các cặp góc kề bù có trong hình vẽ.

Bài 13 : Cho hình vẽ H.1 biết $\angle xOy = 30^\circ$ và $\angle xOz = 120^\circ$. Suy ra:

- A. yOz là góc nhọn. B. yOz là góc vuông.
C. yOz là góc tù. D. yOz là góc bẹt.

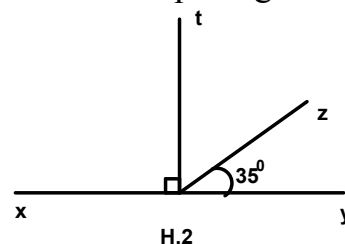


Bài 14 : Nếu $\angle A = 35^\circ$ và $\angle B = 55^\circ$. Ta nói:

- A. A và B là hai góc bù nhau. B. A và B là hai góc kề nhau.
C. A và B là hai góc kề bù. D. A và B là hai góc phụ nhau.

Bài 15 : Với những điều kiện sau, điều kiện nào khẳng định tia Ot là tia phân giác của $\angle xOy$?

- A. $\angle xOt = \angle yOt$
B. $\angle xOt + \angle tOy = \angle xOy$
C. $\angle xOt + \angle tOy = \angle xOy$ và $\angle xOt = \angle yOt$
D. Tất cả các câu trên đều sai.

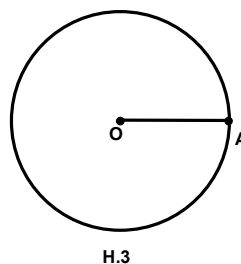


Bài 16 : Cho hình vẽ H.2, $\angle tMz$ có số đo là:

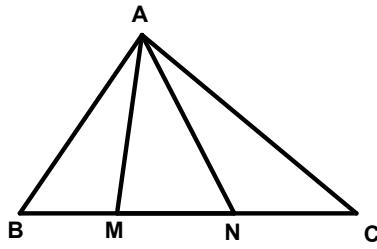
- A. 145° B. 35°
C. 90° D. 55°

Bài 17 : Cho hình vẽ H.3, đường tròn tâm O, bán kính 4cm. Một điểm $A \in (O; 4\text{cm})$ thì:

- A. $OA = 4\text{cm}$ B. $OA = 2\text{cm}$
C. $OA = 8\text{cm}$ D. Cả 3 câu trên đều sai



H.4



Bài 18 : Hình vẽ H.4 có:

- A. 4 tam giác B. 5 tam giác C. 6 tam giác D. 7 tam giác

Bài 19 : . Định nghĩa tam giác ABC

Bài 20 : vẽ và nêu cách vẽ tam giác ABC có độ dài $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$

Bài 21 : Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, xác định hai tia Oy và Ot sao cho $\angle xOy = 30^\circ$ và $\angle xOt = 70^\circ$.

1. Tia nào nằm giữa hai tia còn lại? Vì sao?
2. Tính $\angle yOt$? Tia Oy có là tia phân giác của $\angle xOt$ không? Vì sao?
3. Gọi Om là tia đối của tia Ox. Tính $\angle mOt$?

Bài 22 : Cho hai điểm M và N nằm cùng phía đối với A, nằm cùng phía đối với B.

Điểm M nằm giữa A và B. Biết $AB = 5\text{cm}$, $AM = 3\text{ cm}$, $BN = 1\text{ cm}$. Chứng tỏ rằng:

1. Bốn điểm A, B, M, N thẳng hàng
2. Điểm N là trung điểm của đoạn thẳng AB.
3. Vẽ đường tròn tâm N đi qua B và đường tròn tâm A đi qua N, chúng cắt nhau tại C. Tính chu vi tam giác CAN.

Bài 23: Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vẽ điểm N nằm giữa M và B. Cho biết $MN = a(\text{cm})$, $NB = b (\text{cm})$.

1. Tính AB
2. Lấy điểm O nằm ngoài đường thẳng AB. Giả sử $\widehat{AOB} = 100^\circ$; $\widehat{AOM} = 60^\circ$; $\widehat{MON} = 20^\circ$. Hỏi tia ON có phải tia phân giác của góc MOB không? Vì sao?

1. PHẦN 2: CHUYÊN ĐỀ 13: GÓC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 1: Cho ba điểm A, B, C không nằm trên đường thẳng a, trong đó đường thẳng a cắt các đoạn thẳng AB và AC. Đường thẳng a có cắt đoạn thẳng BC không?

Bài 2: Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả 190 góc. Tính n?

Bài 3: Bốn điểm A, B, C, D không nằm trên đường thẳng a. Chứng tỏ rằng đường thẳng a hoặc không cắt hoặc cắt ba hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Bài 4: Cho hai tia Ox, Oy đối nhau. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia Ox, vẽ các tia Om, On sao cho $\widehat{xOm} = 70^\circ$, $\widehat{yOn} = 70^\circ$. Chứng tỏ rằng Om, On là hai tia đối nhau.

Bài 5: Cho góc $\widehat{AOB} = 110^\circ$, tia OC nằm trong góc đó. Gọi OM, ON theo thứ tự là các tia phân giác của các góc AOC, BOC. Tính $\widehat{MON}$?

Bài 6: Cho góc $\widehat{AOB} = 100^\circ$ và OC là tia phân giác của góc đó. Trong góc $\widehat{AOB}$ vẽ các tia OD, OE sao cho $\widehat{AOD} = \widehat{BOE} = 20^\circ$. Chứng tỏ rằng tia OC là tia phân giác của góc $\widehat{DOE}$.

Bài 7: Cho 10 điểm thuộc đường thẳng a và một điểm nằm ngoài đường thẳng ấy. Có bao nhiêu tam giác có các đỉnh là ba trong 11 điểm trên?

Bài 8: Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa A và C, điểm E nằm giữa A và B. Các đoạn thẳng BD và CE cắt nhau ở K. Nối DE. Tính xem có bao nhiêu tam giác trong hình vẽ?

Bài 9: Cho tam giác ABC. Chứng tỏ rằng bao giờ cũng vẽ được một đường thẳng không đi qua ba đỉnh của tam giác và cắt cả ba tia AB, AC, BC.

Bài 10: Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Hãy chứng tỏ rằng:

1. Tia BO cắt đoạn thẳng AC tại một điểm D nằm giữa A và C.
2. Điểm O nằm giữa hai điểm B và D

3. Trong ba tia OA, OB, OC không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.

Bài 11: Cho bốn tia OA, OB, OC, OD tạo thành các góc AOB, BOC, COD, DOA không có điểm trong chung. Tính số đo mỗi góc ấy biết rằng:

$$\widehat{BOC} = 3\widehat{AOB}, \widehat{COD} = 5\widehat{AOB}, \widehat{DOA} = 3\widehat{AOB}.$$

Bài 12: Cho các góc $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}$ không có điểm trong chung và đều có số đo bằng góc α . Tính $\widehat{AOD}$.

Bài 13: Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia OA, vẽ cá tia OB và OC sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \alpha$. Tìm các giá trị của α để OA là tia phân giác của góc $\widehat{BOC}$.

Bài 14: Cho góc tù xOy. Bên trong góc xOy, vẽ tia Om sao cho góc xOm bằng 90° và vẽ tia On sao cho góc yOn bằng 90° .

1. Chứng minh góc xOn bằng góc yOm.
2. Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy. Chứng minh Ot cũng là tia phân giác của góc mOn.

Bài 15: Cho hai góc kề bù xOy và yOz. Trên tia Oy lấy điểm A, trên tia Ox lấy điểm B, trên tia AD lấy điểm C sao cho $AB < AC$.

1. Tia Ox có nằm giữa hai tia OA và OC không? Vì sao?
2. Cho góc yOz = 130° ; góc zOc = 150° . Tính số đo góc AOC.

Bài 16: Trên đường thẳng xx' lấy một điểm O. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xx' vẽ 3 tia Oy, Ot, Oz sao cho: Góc $x'Oy = 40^\circ$; $xOt = 97^\circ$; $xOz = 54^\circ$.

1. Chứng minh tia Ot nằm giữa hai tia Oy và Oz.
2. Chứng minh tia Ot là tia phân giác của góc zOy.

Bài 17: Cho tia Ox. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là Ox. Vẽ hai tia Oy và Oz sao cho góc xOy và xOz bằng 120° . Chứng minh rằng:

1. Góc $xOy = \text{góc } xOz = \text{góc } yOz$
2. Tia đối của mỗi tia Ox, Oy, Oz là phân giác của góc hợp bởi hai tia còn lại

Bài 18: Cho góc AOB = 135° . C là một điểm nằm trong góc AOB biết góc BOC = 90°

1. Tính góc AOC

2. Gọi OD là tia đối của tia OC. So sánh hai góc AOD và BOD

Bài 19: Cho tam giác ABC có $AB=AC$. M là một điểm nằm giữa A và C, N là một điểm nằm giữa A và B sao cho $CM=BN$.

1. Chứng minh rằng đoạn thẳng BM cắt đoạn thẳng CN,
2. Chứng minh rằng góc B = góc C, $BM=CN$

Bài 20:

1. Vẽ tam giác ABC biết $BC = 5\text{ cm}$; $AB = 3\text{ cm}$; $AC = 4\text{ cm}$.
2. Lấy điểm O ở trong tam giác ABC nói trên. Vẽ tia AO cắt BC tại H, tia BO cắt AC tại I, tia CO cắt AB tại K. Trong hình đó có có bao nhiêu tam giác.

Bài 23:

1. Cho 6 tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ ? Vì sao.
2. Vẽ với n tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ.

Bài 24: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A; A_1; A_2; A_3; \dots; A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

Bài 25: Cho tam giác ABC và $BC = 5\text{ cm}$. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3\text{ cm}$.

1. Tính độ dài BM
2. Cho biết góc $BAM = 80^\circ$, góc $BAC = 60^\circ$. Tính góc CAM.
3. Vẽ các tia Ax, Ay lần lượt là tia phân giác của góc BAC và CAM. Tính góc xAy.
4. Lấy K thuộc đoạn thẳng BM và $CK = 1\text{ cm}$. Tính độ dài BK.

Bài 26: Trên đoạn thẳng $AB = 5\text{ cm}$, lấy điểm M. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AM = AN$

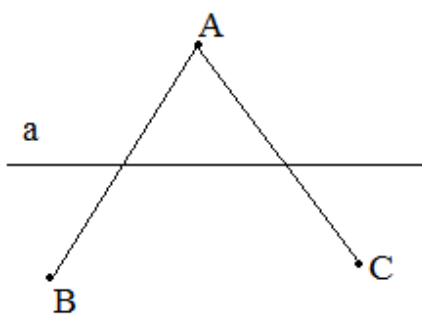
1. Tính độ dài đoạn thẳng BN khi $BM = 2\text{ cm}$.
2. Trên cùng nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, Ay sao cho $\widehat{BAx} = 40^\circ$, $\widehat{BAy} = 110^\circ$. Chứng tỏ rằng Ay là tia phân giác của $\widehat{NAx}$.
3. Hãy xác định vị trí của M trên đoạn AB để BN có độ dài lớn nhất

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

3. PHẦN 2: CHUYÊN ĐỀ 13: GÓC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 1: Cho ba điểm A, B, C không nằm trên đường thẳng a, trong đó đường thẳng a cắt các đoạn thẳng AB và AC. Đường thẳng a có cắt đoạn thẳng BC không?

Giải:



Đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB và không đi qua A, B nên A và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ a.

Tương tự như vậy, A và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ a.

Vậy B, C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ a, chúng lại không nằm trên a, do đó đoạn thẳng a không cắt đoạn thẳng BC.

Bài 2: Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả 190 góc. Tính n ?

HD: $\frac{n(n-1)}{2} = 190$ được n bằng 20

Bài 3: Bốn điểm A, B, C, D không nằm trên đường thẳng a . Chứng tỏ rằng đường thẳng a hoặc không cắt hoặc cắt ba hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Giải:

Đường thẳng a chia mặt phẳng ra hai nửa mặt phẳng. Xét 3 trường hợp:

1. Nếu cả bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một nửa mặt phẳng thì a không cắt đoạn thẳng nào trong các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD.
2. Nếu có một điểm (chẳng hạn A) thuộc một nửa mặt phẳng, ba điểm kia (B, C, D) thuộc nửa mặt phẳng đối thì đường thẳng a cắt ba đoạn thẳng AB, AC, AD.
3. Nếu có hai điểm (chẳng hạn A và B) thuộc một nửa mặt phẳng, hai điểm kia (C, D) thuộc nửa mặt phẳng đối thì đường thẳng a cắt 4 đoạn thẳng AC, AD, BC, BD.

Bài 4: Cho hai tia Ox, Oy đối nhau. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia Ox, vẽ các tia Om, On sao cho $\widehat{xOm} = 70^\circ$, $\widehat{yOn} = 70^\circ$. Chứng tỏ rằng Om, On là hai tia đối nhau.

Giải:

Các góc $\widehat{xOm}$, $\widehat{mOy}$ kề bù:

4. $\widehat{mOy} = 180^\circ - \widehat{xOm} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Các góc $\widehat{mOy}$, $\widehat{yOn}$ kề nhau và bù nhau nên Om, On là hai tia đối nhau.

Bài 5: Cho góc $\widehat{AOB} = 110^\circ$, tia OC nằm trong góc đó. Gọi OM, ON theo thứ tự là các tia phân giác của các góc AOC, BOC. Tính $\widehat{MON}$?

HD:

$$\widehat{MON} = \widehat{MOC} + \widehat{CON} = \frac{\widehat{AOC}}{2} + \frac{\widehat{COB}}{2} = \frac{\widehat{AOC} + \widehat{COB}}{2} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$$

Bài 6: Cho góc $\widehat{AOB} = 100^\circ$ và OC là tia phân giác của góc đó. Trong góc $\widehat{AOB}$ vẽ các tia OD, OE sao cho $\widehat{AOD} = \widehat{BOE} = 20^\circ$. Chứng tỏ rằng tia OC là tia phân giác của góc $\widehat{DOE}$.

HD:

Chứng tỏ rằng $\widehat{COD} = \widehat{COE} = 30^\circ$

Bài 7: Cho 10 điểm thuộc đường thẳng a và một điểm nằm ngoài đường thẳng ấy. Có bao nhiêu tam giác có các đỉnh là ba trong 11 điểm trên?

HD:

Có bao nhiêu đoạn thẳng nằm trên đường thẳng a thì có bấy nhiêu tam giác.

Đáp số: 45 tam giác

Bài 8: Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa A và C, điểm E nằm giữa A và B. Các đoạn thẳng BD và CE cắt nhau ở K. Nối DE. Tính xem có bao nhiêu tam giác trong hình vẽ?

Đ/s: Có 5 tam giác “đơn”, có 4 tam giác “đôi”, có 2 tam giác “ba”, có 1 tam giác “năm”, tất cả có 12 tam giác

Bài 9: Cho tam giác ABC. Chứng tỏ rằng bao giờ cũng vẽ được một đường thẳng không đi qua ba đỉnh của tam giác và cắt cả ba tia AB, AC, BC.

HD:

Lấy A' thuộc tia đối của tia CB và không trùng C, Lấy B' nằm giữa A và C $\Rightarrow$ A'B' là đường thẳng phải tìm

Bài 10: Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Hãy chứng tỏ rằng:

1. Tia BO cắt đoạn thẳng AC tại một điểm D nằm giữa A và C.
Điểm O nằm trong tam giác ABC nên O nằm trong góc B, do đó tia BO nằm giữa hai tia BA, BC. Ta lại có A và C là các điểm không trùng B thuộc các tia BA, BC, suy ra tia BO cắt đoạn thẳng AC tại một điểm D nằm giữa A và C.
2. Điểm O nằm giữa hai điểm B và D.
Điểm O nằm trong tam giác ABC nên O nằm trong góc C, do đó tia CO nằm giữa hai tia CA, CB. Ta lại có B và D là các điểm không trùng C thuộc các tia

CB và CA, suy ra tia CO cắt đoạn thẳng BD tại một điểm (là điểm O) nằm giữa B và D.

3. Trong ba tia OA, OB, OC không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.
Tia OB không cắt đoạn thẳng AC vì đường thẳng OB chỉ có một điểm D chung duy nhất với đoạn thẳng AC và D không thuộc tia OB (theo câu b). do đó tia OB không nằm giữa hai tia OA và OC. Lập luận tương tự, tia OC không nằm giữa hai tia OA và OB, tia OA không nằm giữa hai tia OB và OC.

Bài 14: Cho góc tù xOy. Bên trong góc xOy, vẽ tia Om sao cho góc xOm bằng 90° và vẽ tia On sao cho góc yOn bằng 90° .

1. Chứng minh góc xOn bằng góc yOm.
2. Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy. Chứng minh Ot cũng là tia phân giác của góc mOn.

Giải:

Hình vẽ

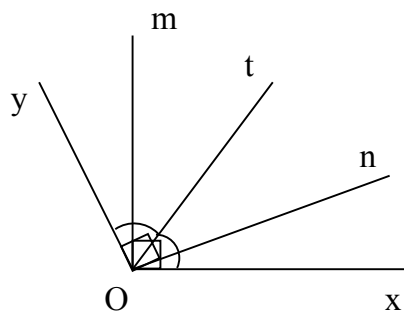
- a) Lập luận được: $\widehat{xOm} + \widehat{mOy} = \widehat{xOy}$ hay: $90^\circ + \widehat{mOy} = \widehat{xOy}$
 $\widehat{yOn} + \widehat{nOx} = \widehat{xOy}$ hay: $90^\circ + \widehat{nOx} = \widehat{xOy} \Rightarrow \widehat{xOn} = \widehat{yOm}$
 b) Lập luận được : $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$

$$\widehat{xOt} = \widehat{xOn} + \widehat{nOt}$$

$$\widehat{tOy} = \widehat{yOm} + \widehat{mOt}$$

$$\Rightarrow \widehat{nOt} = \widehat{mOt}$$

$$\Rightarrow \text{Ot là tia phân giác của góc mOn}$$

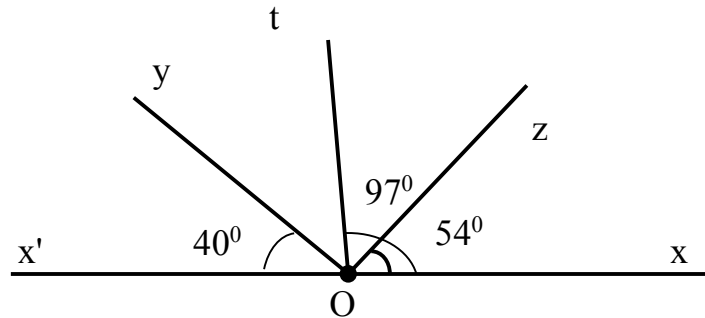


Bài 16: Trên đường thẳng xx' lấy một điểm O . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xx' vẽ 3 tia Oy , Ot , Oz sao cho: Góc $x'Oy = 40^\circ$; $xOt = 97^\circ$; $xOz = 54^\circ$.

1. Chứng minh tia Ot nằm giữa hai tia Oy và Oz .
2. Chứng minh tia Ot là tia phân giác của góc zOy .

Giải:

Hình vẽ



a) Theo đề bài ta có góc $x'Ox = 180^\circ$ mà góc $x'Oy$ và góc yOx kề bù. Mà góc $x'Oy = 40^\circ \Rightarrow$ góc $yOx = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ Suy ra: góc $xOt <$ góc xOy hay tia Ot nằm giữa hai tia Ox và Oy . Lại có: góc $xOz <$ góc xOt hay tia Oz nằm giữa hai tia Ot và Ox . Vậy tia Ot nằm giữa hai tia Oz và Oy .

b) Theo câu a ta có tia Ot nằm giữa hai tia Oz và $Oy \Rightarrow$ Góc $zOt +$ góc $tOy =$ góc zOy .

Vì tia Ot nằm giữa hai tia Ox và $Oy \Rightarrow$ Góc $xOt +$ góc $tOy =$ góc xOy hay góc $tOy = 43^\circ$ (vì góc $xOt = 97^\circ$ và góc $xOy = 140^\circ$).

Vì tia Oz nằm giữa hai tia Ox và $Ot \Rightarrow$ Góc $xOz +$ góc $zOt =$ góc xOt hay góc $zOt = 43^\circ$ (vì góc $xOt = 97^\circ$ và góc $xOz = 54^\circ$).

Suy ra góc $tOy =$ góc $zOt = 43^\circ$. Vậy tia Ot là tia phân giác của góc zOy

Bài 17: Cho tia Ox . Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là Ox . Vẽ hai tia Oy và Oz sao cho góc xOy và xOz bằng 120° . Chứng minh rằng:

1. Góc $xOy = \text{góc } xOz = \text{góc } yOz$
2. Tia đối của mỗi tia Ox, Oy, Oz là phân giác của góc hợp bởi hai tia còn lại

Giải:

Ta có: góc $x'Oy = 60^\circ$, góc $x'Oz = 60^\circ$ và tia Ox' nằm giữa hai tia Oy, Oz nên góc $yOz = yOx' + x'Oz = 120^\circ$.

Vậy Góc $xOy = \text{góc } xOz = \text{góc } yOz$

Do tia Ox' nằm giữa hai tia Oy, Oz và góc $x'Oy = \text{góc } x'Oz$ nên Ox' là tia phân giác của góc hợp bởi hai tia Oy, Oz . Tương tự tia Oy' (tia đối của Oy) và tia Oz' (tia đối của tia Oz) là phân giác của góc xOz và xOy

Bài 18: Cho góc $AOB = 135^\circ$. C là một điểm nằm trong góc AOB biết góc $BOC = 90^\circ$

1. Tính góc AOC
2. Gọi OD là tia đối của tia OC . So sánh hai góc AOD và BOD

Giải:

a) Theo giả thiết C nằm trong góc AOB nên tia OC nằm giữa hai tia OB và OA

$\Rightarrow \text{góc } AOC + \text{góc } BOC = \text{góc } AOB$

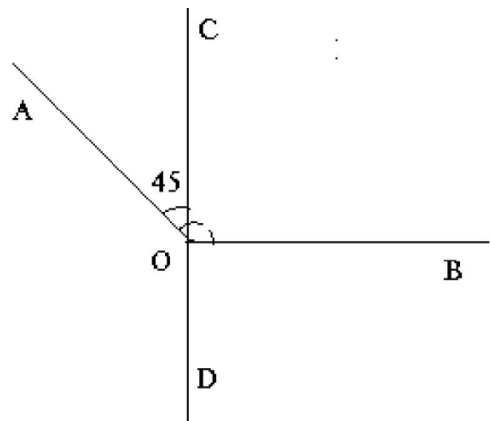
$\Rightarrow \text{góc } AOC = \text{góc } AOB - \text{góc } BOC$
 $\Rightarrow \text{góc } AOC = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$

b) Vì OD là tia đối của tia OC nên C, O, D thẳng hàng, Do đó góc $DOA + \text{góc } AOC = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \text{góc } AOD = 180^\circ - \text{góc } AOC$

$= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$\text{góc } BOD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$



Vậy góc $AOD > \text{góc } BOD$

Bài 19: Cho tam giác ABC có $AB=AC$. M là một điểm nằm giữa A và C, N là một điểm nằm giữa A và B sao cho $CM=BN$.

1. Chứng minh rằng đoạn thẳng BM cắt đoạn thẳng CN,
2. Chứng minh rằng góc B = góc C, $BM=CN$

Bài 20:

1. Vẽ tam giác ABC biết $BC = 5 \text{ cm}$; $AB = 3 \text{ cm}$; $AC = 4 \text{ cm}$.
2. Lấy điểm O ở trong tam giác ABC nói trên. Vẽ tia AO cắt BC tại H, tia BO cắt AC tại I, tia CO cắt AB tại K. Trong hình đó có có bao nhiêu tam giác.

Giải:

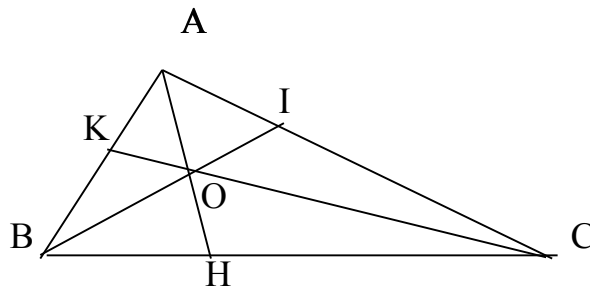
a. Vẽ đoạn thẳng $BC=5\text{cm}$

Vẽ cung tròn (B;3cm)

Vẽ cung tròn (C;4cm)

Lấy giao điểm A của hai cung trên.

Vẽ các đoạn thẳng AB, AC ta được tam giác ABC.



b. Có 6 tam giác “đơn” là AOK; AOI; BOK; BOH; COH; và COI.

Có 3 tam giác “Ghép đôi” là AOB; BOC; COA.

Có 6 tam giác “Ghép ba” Là ABH; BCI; CAK; ABI; BCK; CAH.

Có một tam giác “Ghép 6” là tam giác ABC.

Vậy trong hình có tất cả $6+3+1+6 = 16$ (Tam giác).

Bài 23:

1. Cho 6 tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ ? Vì sao.
2. Vậy với n tia chung gốc. Có bao nhiêu góc trong hình vẽ.

Giải:

a) Vì mỗi tia với 1 tia còn lại tạo thành 1 góc. Xét 1 tia, tia đó cùng với 5 tia còn lại tạo thành 5 góc. Làm như vậy với 6 tia ta được 5.6 góc. Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần do đó có tất cả là $\frac{5.6}{2} = 15$ góc

b) . Từ câu a suy ra tổng quát. Với n tia chung gốc có $n(\frac{n-1}{2})$ (góc).

Bài 24: Trên đoạn thẳng AB lấy 2006 điểm khác nhau đặt tên theo thứ tự từ A đến B là $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{2004}$. Từ điểm M không nằm trên đoạn thẳng AB ta nối M với các điểm $A; A_1; A_2; A_3; \dots; A_{2004}; B$. Tính số tam giác tạo thành.

Giải:

Trên đoạn thẳng AB có các điểm $A; A_1; A_2; A_3; \dots; A_{2004}; B$ do đó, tổng số điểm trên AB là 2006 điểm suy ra có 2006 đoạn thẳng nối từ M đến các điểm đó.

Mỗi đoạn thẳng (ví dụ MA) có thể kết hợp với 2005 đoạn thẳng còn lại và các đoạn thẳng tương ứng trên AB để tạo thành 2005 tam giác.

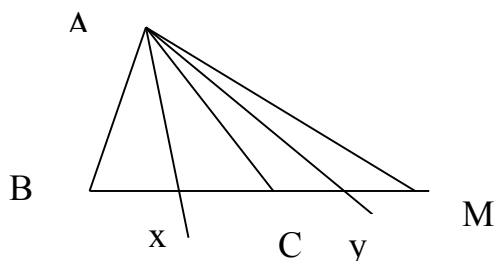
Do đó 2006 đoạn thẳng sẽ tạo thành $2005 \cdot 2006 = 4022030$ tam giác (nhưng lưu ý là MA kết hợp với MA_1 để được 1 tam giác thì MA_1 cũng kết hợp với MA được 1 tam giác và hai tam giác này chỉ là 1)

Do đó số tam giác thực có là: $4022030 : 2 = 2011015$

Bài 25: Cho tam giác ABC và $BC = 5\text{cm}$. Điểm M thuộc tia đối của tia CB sao cho $CM = 3\text{ cm}$.

1. Tính độ dài BM
2. Cho biết góc $BAM = 80^\circ$, góc $BAC = 60^\circ$. Tính góc CAM.
3. Vẽ các tia Ax, Ay lần lượt là tia phân giác của góc BAC và CAM. Tính góc xAy.
4. Lấy K thuộc đoạn thẳng BM và $CK = 1\text{ cm}$. Tính độ dài BK.

Giải:



a. M, B thuộc 2 tia đối nhau CB và CM

=> C nằm giữa B và M. => $BM = BC + CM = 8$ (cm)

b. C nằm giữa B, M => Tia AC nằm giữa tia AB, AM

$$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{BAM} - \widehat{BAC} = 20^\circ$$

$$\text{c. Có } \widehat{xAy} = \widehat{xAc} + \widehat{CAy} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} + \frac{1}{2} \widehat{CAM}$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{BAC} + \widehat{CAM}) = \frac{1}{2} \widehat{BAM} = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$

d.

+) Nếu $K \in$ tia CM => C nằm giữa B và K_1

$$\Rightarrow BK_1 = BC + CK_1 = 6 \text{ (cm)}$$

+) Nếu $K \in$ tia CB => K_2 nằm giữa B và C

$$\Rightarrow BK_2 = BC = CK_2 = 4 \text{ (cm)}$$