

CHUYÊN ĐỀ - CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN

Thời lượng: 6 tiết

Ngày soạn: 03 – 1 - 2018

Ngày dạy: 09 - 1 – 2018 và /1/2018

A. MỤC TIÊU:

- * củng cố, khắc sâu kiến thức về các bài toán chia hết giữa các số, các đa thức
- * HS tiếp tục thực hành thành thạo về các bài toán chứng minh chia hết, không chia hết, số nguyên tố, số chính phương...
- * Vận dụng thành thạo kỹ năng chứng minh về chia hết, không chia hết... vào các bài toán cụ thể

B.KIẾN THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN:

I. Dạng 1: Chứng minh quan hệ chia hết

1. Kiến thức:

* Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho một số m ta phân tích $A(n)$ thành nhân tử có một nhân tử làm hoặc bội của m , nếu m là hợp số thì ta lại phân tích nó thành nhân tử có các đôi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh $A(n)$ chia hết cho các số đó

* Chú ý:

- + Với k số nguyên liên tiếp bao giờ cũng tồn tại một bội của k
- + Khi chứng minh $A(n)$ chia hết cho m ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia $A(n)$ cho m
- + Với mọi số nguyên a, b và số tự nhiên n thì:

$$+) a^n - b^n \text{ chia hết cho } a - b (a \neq -b)$$

$$+) (a + 1)^n \text{ là BS}(a) + 1$$

$$+) a^{2n+1} + b^{2n+1} \text{ chia hết cho } a + b$$

$$+)(a - 1)^{2n} \text{ là B}(a) + 1$$

$$+ (a + b)^n = B(a) + b^n$$

$$+) (a - 1)^{2n+1} \text{ là B}(a) - 1$$

..

2. Các bài toán

Bài 1: chứng minh rằng

a) $2^{51} - 1$ chia hết cho 7

b) $2^{70} + 3^{70}$ chia hết cho 13

c) $17^{19} + 19^{17}$ chỉ hết cho 18

d) $36^{63} - 1$ chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 37

e) $2^{4n} - 1$ chia hết cho 15 với $n \in \mathbb{N}$

Giải

a) $2^{51} - 1 = (2^3)^{17} - 1 : 2^3 - 1 = 7$

Năm học: 2017 - 2018

b) $2^{70} + 3^{70} (2^2)^{35} + (3^2)^{35} = 4^{35} + 9^{35} : 4 + 9 = 13$

c) $17^{19} + 19^{17} = (17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

$17^{19} + 1 : 17 + 1 = 18$ và $19^{17} - 1 : 19 - 1 = 18$ nên $(17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

hay $17^{19} + 19^{17} : 18$

d) $36^{63} - 1 : 36 - 1 = 35 : 7$

$36^{63} - 1 = (36^{63} + 1) - 2$ chỉ cho 37 dư - 2

e) $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 : 2^4 - 1 = 15$

Bài 2: chứng minh rằng

a) $n^5 - n$ chia hết cho 30 với $n \in \mathbb{N}$;

b) $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi n lẻ $n \in \mathbb{Z}$

c) $10^n + 18n - 28$ chia hết cho 27 với $n \in \mathbb{N}$;

Giải:

a) $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) = (n - 1).n.(n + 1)(n^2 + 1)$ chia hết cho 6 vì

$(n - 1).n.(n + 1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3 (*)

Mặt khác $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1).(n^2 - 4 + 5) = n(n^2 - 1).(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1)$

$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$

Vì $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5

$5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5

Suy ra $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5 (**)

Từ (*) và (**) suy ra đpcm

b) Đặt $A = n^4 - 10n^2 + 9 = (n^4 - n^2) - (9n^2 - 9) = (n^2 - 1)(n^2 - 9) = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n + 3)$

Vì n lẻ nên đặt $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì

$A = (2k - 2).2k.(2k + 2)(2k + 4) = 16(k - 1).k.(k + 1).(k + 2) \Rightarrow A$ chia hết cho 16 (1)

Và $(k - 1).k.(k + 1).(k + 2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên A có chứa bội của 2, 3, 4 nên A là bội của 24 hay A chia hết cho 24 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 16. 24 = 384

c) $10^n + 18n - 28 = (10^n - 9n - 1) + (27n - 27)$

+ Ta có: $27n - 27 : 27$ (1)

+ $10^n - 9n - 1 = [(\underbrace{9\dots9}_n + 1) - 9n - 1] = \underbrace{9\dots9}_n - 9n = 9(\underbrace{1\dots1}_n - n) : 27$ (2)

vì $9 : 9$ và $\underbrace{1\dots1}_n - n : 3$ do $\underbrace{1\dots1}_n - n$ là một số có tổng các chữ số chia hết cho 3

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

3. Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì

a) $a^3 - a$ chia hết cho 3

b) $a^7 - a$ chia hết cho 7

Giải

a) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3 nên $(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 3

b) $a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Nếu $a = 7k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì a chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $a^2 - 1 = 49k^2 + 14k$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $a^2 + a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $a^2 - a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Trong trường hợp nào cũng có một thừa số chia hết cho 7

Vậy: $a^7 - a$ chia hết cho 7

Bài 4: Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Giải

Ta có: $B = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 101 \cdot 50$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có: $A = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \dots + (50^3 + 51^3)$

$= (1 + 100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2 + 99)(2^2 + 2 \cdot 99 + 99^2) + \dots + (50 + 51)(50^2 + 50 \cdot 51 + 51^2) = 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2 \cdot 99 + 99^2 + \dots + 50^2 + 50 \cdot 51 + 51^2)$ chia hết cho 101 (1)

Lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + \dots + (50^3 + 100^3)$

Mỗi số hạng trong ngoặc đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chia hết cho B

Bài tập về nhà

Chứng minh rằng:

a) $a^5 - a$ chia hết cho 5

b) $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với mọi n chẵn

c) Cho a là số nguyên tố lớn hơn 3. Cmr $a^2 - 1$ chia hết cho 24

d) Nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6

e) 2009^{2010} không chia hết cho 2010

f) $n^2 + 7n + 22$ không chia hết cho 9

Dạng 2: Tìm số dư của một phép chia

Bài 1:

Tìm số dư khi chia 2^{100}

a) cho 9, b) cho 25, c) cho 125

Giải

a) Luỹ thừa của 2 sát với bội của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$

Ta có : $2^{100} = 2 \cdot (2^3)^{33} = 2 \cdot (9 - 1)^{33} = 2 \cdot [B(9) - 1] = B(9) - 2 = B(9) + 7$

Vậy: 2^{100} chia cho 9 thì dư 7

b) Tương tự ta có: $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = [B(25) - 1]^{10} = B(25) + 1$

Vậy: 2^{100} chia cho 25 thì dư 1

c) Sử dụng công thức Niuton:

$$2^{100} = (5 - 1)^{50} = (5^{50} - 5 \cdot 5^{49} + \dots + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 5^2 - 50 \cdot 5) + 1$$

Không kể phần hệ số của khai triển Niuton thì 48 số hạng đầu đã chứa thừa số 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên đều chia hết cho $5^3 = 125$, hai số hạng tiếp theo: $\frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 5^2 - 50 \cdot 5$ cũng chia hết cho 125, số hạng cuối cùng là 1

Vậy: $2^{100} = B(125) + 1$ nên chia cho 125 thì dư 1

Bài 2:

Viết số 1995^{1995} thành tổng của các số tự nhiên. Tổng các lập phương đó chia cho 6 thì dư bao nhiêu?

Giải

Đặt $1995^{1995} = a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

$$\text{Gọi } S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 + a - a$$

$$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_n^3 - a_n) + a$$

Mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 6 vì mỗi dấu ngoặc là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Chỉ cần tìm số dư khi chia a cho 6

1995 là số lẻ chia hết cho 3, nên a cũng là số lẻ chia hết cho 3, do đó chia cho 6 dư 3

Bài 3: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} viết trong hệ thập phân

Giải

Tìm 3 chữ số tận cùng là tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 1000

Trước hết ta tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 125

n	1	- 1	2	- 2
n - 1	0	- 2	1	- 3
n(n - 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy: Để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức

$$B = n^2 - n \text{ thì } n \in \{-1; 2\}$$

Bài 2:

a) Tìm $n \in \mathbb{N}$ để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

b) Giải bài toán trên nếu $n \in \mathbb{Z}$

Giải

$$\text{Ta có: } n^5 + 1 : n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : n^3 + 1 \Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) : n^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1) \Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1 \text{ (Vì } n + 1 \neq 0)$$

a) Nếu $n = 1$ thì $0 : 1$

Nếu $n > 1$ thì $n - 1 < n(n - 1) + 1 < n^2 - n + 1$ nên không thể xảy ra $n - 1 : n^2 - n + 1$

Vậy giá trị của n tìm được là $n = 1$

$$\text{b) } n - 1 : n^2 - n + 1 \Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : n^2 - n + 1$$

$\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$. Có hai trường hợp xảy ra:

$$+ n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases} \text{ (Tm đề bài)}$$

$$+ n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0 \text{ (Vô nghiệm)}$$

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho:

$$\text{a) } n^2 + 2n - 4 : 11$$

$$\text{b) } 2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$$

$$\text{c) } n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 : n^4 - 1$$

$$\text{d) } n^3 - n^2 + 2n + 7 : n^2 + 1$$

Giải

a) Tách $n^2 + 2n - 4$ thành tổng hai hạng tử trong đó có một hạng tử là B(11)

$$n^2 + 2n - 4 : 11 \Leftrightarrow (n^2 - 2n - 15) + 11 : 11 \Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) + 11 : 11$$

$$\Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) : 11 \Leftrightarrow \begin{cases} n - 3 : 11 \\ n + 5 : 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = B(11) + 3 \\ n = B(11) - 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } 2n^3 + n^2 + 7n + 1 = (n^2 + n + 4)(2n - 1) + 5$$

$$\text{Để } 2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1 \text{ thì } 5 : 2n - 1 \text{ hay } 2n - 1 \text{ là Ư(5)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy: $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$

$$c) n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 : n^4 - 1$$

$$\text{Đặt } A = n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 = (n^4 - n^3) - (n^3 - n^2) + (n^2 - n) - (n - 1)$$

$$= n^3(n - 1) - n^2(n - 1) + n(n - 1) - (n - 1) = (n - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) = (n - 1)^2(n^2 + 1)$$

$$B = n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

A chia hết cho b nên $n \neq \pm 1 \Rightarrow A$ chia hết cho B $\Leftrightarrow n - 1 : n + 1 \Leftrightarrow (n + 1) - 2 : n + 1$

$$\Leftrightarrow 2 : n + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} n + 1 = -2 \\ n + 1 = -1 \\ n + 1 = 1 \\ n + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 \\ n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \text{ (không Tm)} \end{cases}$$

Vậy: $n \in \{-3; -2; 0\}$ thì $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 : n^4 - 1$

d) Chia $n^3 - n^2 + 2n + 7$ cho $n^2 + 1$ được thương là $n - 1$, dư $n + 8$

$$\text{Để } n^3 - n^2 + 2n + 7 : n^2 + 1 \text{ thì } n + 8 : n^2 + 1 \Rightarrow (n + 8)(n - 8) : n^2 + 1 \Leftrightarrow 65 : n^2 + 1$$

Lần lượt cho $n^2 + 1$ bằng 1; 5; 13; 65 ta được n bằng 0; ± 2 ; ± 8

Thử lại ta có $n = 0$; $n = 2$; $n = 8$ (T/m)

Vậy: $n^3 - n^2 + 2n + 7 : n^2 + 1$ khi $n = 0$, $n = 8$

Bài tập về nhà:

Tìm số nguyên n để:

$$a) n^3 - 2 \text{ chia hết cho } n - 2$$

$$b) n^3 - 3n^2 - 3n - 1 \text{ chia hết cho } n^2 + n + 1$$

$$c) 5^n - 2^n \text{ chia hết cho } 63$$

Dạng 4: Tồn tại hay không tồn tại sự chia hết

Bài 1: Tìm $n \in \mathbb{N}$ sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7

Giải

Nếu $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7

Nếu $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1 = \text{BS } 7 + 1$

Nếu $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3 = \text{BS } 7 + 3$

Vậy: $2^n - 1$ chia hết cho 7 khi $n = \text{BS } 3$

Bài 2: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để:

- a) $3^n - 1$ chia hết cho 8
- b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1}$ chia hết cho 25
- c) $5^n - 2^n$ chia hết cho 9

Giải

a) Khi $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1$ chia hết cho $9 - 1 = 8$

Khi $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $3^n - 1 = 3^{2k+1} - 1 = 3 \cdot (9^k - 1) + 2 = \text{BS } 8 + 2$

Vậy : $3^n - 1$ chia hết cho 8 khi $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 27 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 2^{4n} = (25 + 2) 3^{2n} + 2 \cdot 2^{4n} = 25 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 2^{4n}$
 $= \text{BS } 25 + 2(9^n + 16^n)$

Nếu $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $9^n + 16^n = 9^{2k+1} + 16^{2k+1}$ chia hết cho $9 + 16 = 25$

Nếu $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì 9^n có chữ số tận cùng bằng 1, còn 16^n có chữ số tận cùng bằng 6
suy ra $2(9^n + 16^n)$ có chữ số tận cùng bằng 4 nên A không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 25

c) Nếu $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $5^n - 2^n = 5^{3k} - 2^{3k}$ chia hết cho $5^3 - 2^3 = 117$ nên chia hết cho 9

Nếu $n = 3k + 1$ thì $5^n - 2^n = 5 \cdot 5^{3k} - 2 \cdot 2^{3k} = 5(5^{3k} - 2^{3k}) + 3 \cdot 2^{3k} = \text{BS } 9 + 3 \cdot 8^k$
 $= \text{BS } 9 + 3(\text{BS } 9 - 1)^k = \text{BS } 9 + \text{BS } 9 + 3$

Tương tự: nếu $n = 3k + 2$ thì $5^n - 2^n$ không chia hết cho 9

CHUYÊN ĐỀ : TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI ĐA THỨC

Ngày soạn: 24/1/2018

Ngày dạy: - /1/2018

A. Dạng 1: Tìm dư của phép chia mà không thực hiện phép chia

1. Đa thức chia có dạng $x - a$ (a là hằng)

a) Định lí Bodu (Bezout, 1730 – 1783):

Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ bằng giá trị của $f(x)$ tại $x = a$

Ta có: $f(x) = (x - a). Q(x) + r$

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x = a$, ta có

$f(a) = 0.Q(a) + r$ hay $f(a) = r$

Ta suy ra: $f(x)$ chia hết cho $x - a \Leftrightarrow f(a) = 0$

b) $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì chia hết cho $x - 1$

c) $f(x)$ có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì chia hết cho $x + 1$

Ví dụ : Không làm phép chia, hãy xét xem $A = x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ chia hết cho

$B = x + 1$, $C = x - 3$ không

Kết quả:

A chia hết cho B , không chia hết cho C

2. Đa thức chia có bậc hai trở lên

Cách 1: Tách đa thức bị chia thành tổng của các đa thức chia hết cho đa thức chia và dư

Cách 2: Xét giá trị riêng: gọi thương của phép chia là $Q(x)$, dư là $ax + b$ thì

$f(x) = g(x). Q(x) + ax + b$

Ví dụ 1: Tìm dư của phép chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$

Cách 1: Ta biết rằng $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$ nên ta tách:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x^7 - x) + (x^5 - x) + (x^3 - x) + 3x + 1$

$= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + 3x + 1$ chia cho $x^2 - 1$ dư $3x + 1$

Cách 2:

Gọi thương của phép chia là $Q(x)$, dư là $ax + b$, Ta có:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x - 1)(x + 1).Q(x) + ax + b$ với mọi x

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x = 1$, ta có $4 = a + b$ (1)

với $x = -1$ ta có $-2 = -a + b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = 3$, $b = 1$ nên ta được dư là $3x + 1$

Ghi nhớ:

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ ($a \neq -b$)

$a^n + b^n$ (n lẻ) chia hết cho $a + b$ ($a \neq -b$)

Ví dụ 2: Tìm dư của các phép chia

a) x^{41} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho $x^2 - 1$

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 + 1$

Giải

a) $x^{41} = x^{41} - x + x = x(x^{40} - 1) + x = x[(x^4)^{10} - 1] + x$ chia cho $x^2 - 1$ dư x nên chia cho $x^2 + 1$ dư x

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x = (x^{27} - x) + (x^9 - x) + (x^3 - x) + 4x$
 $= x(x^{26} - 1) + x(x^8 - 1) + x(x^2 - 1) + 4x$ chia cho $x^2 - 1$ dư $4x$

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = x(x^{98} + 1) + x(x^{54} + 1) + x(x^{10} + 1) - 2x + 7$
 chia cho $x^2 + 1$ dư $-2x + 7$

B. Sơ đồ HORNO

1. Sơ đồ

Để tìm kết quả của phép chia $f(x)$ cho $x - a$

(a là hằng số), ta sử dụng sơ đồ hornơ

Nếu đa thức bị chia là $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$,

đa thức chia là $x - a$ ta được thương là

$b_0x^2 + b_1x + b_2$, dư r thì ta có

Ví dụ:

Đa thức bị chia: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, đa thức chia $x - 2$

Ta có sơ đồ

	1	- 5	8	- 4
2	1	2. 1 + (- 5) = -3	2.(- 3) + 8 = 2	$r = 2. 2 + (- 4) = 0$

Vậy: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2)(x^2 - 3x + 2) + 0$ là phép chia hết

2. Áp dụng sơ đồ Hornơ để tính giá trị của đa thức tại $x = a$

Giá trị của $f(x)$ tại $x = a$ là số dư của phép chia $f(x)$ cho $x - a$

1. Ví dụ 1:

Tính giá trị của $A = x^3 + 3x^2 - 4$ tại $x = 2010$

Ta có sơ đồ:

	1	3	0	-4
a = 2010	1	$2010.1+3 = 2013$	$2010.2013 + 0$ $= 4046130$	$2010.4046130 - 4$ $= 8132721296$

Vậy: $A(2010) = 8132721296$

C. Chứng minh một đa thức chia hết cho một đa thức khác

I. Phương pháp:

1. Cách 1: Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử có một thừa số là đa thức chia
2. Cách 2: biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia hết cho đa thức chia
3. Cách 3: Biến đổi tương đương $f(x) : g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm g(x) : g(x)$
4. cách 4: Chứng tỏ mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia

II. Ví dụ

1. Ví dụ 1:

Chứng minh rằng: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

Ta có: $x^{8n} + x^{4n} + 1 = x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - x^{4n} = (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)$

Ta lại có: $x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)$

chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

Vậy: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

2. Ví dụ 2:

Chứng minh rằng: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1 = x^{3m+1} - x + x^{3n+2} - x^2 + x^2 + x + 1$
 $= x(x^{3m} - 1) + x^2(x^{3n} - 1) + (x^2 + x + 1)$

Vì $x^{3m} - 1$ và $x^{3n} - 1$ chia hết cho $x^3 - 1$ nên chia hết cho $x^2 + x + 1$

Vậy: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$

3. Ví dụ 3: Chứng minh rằng

$f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + \dots + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

Ta có: $f(x) - g(x) = x^{99} - x^9 + x^{88} - x^8 + x^{77} - x^7 + \dots + x^{11} - x + 1 - 1$
 $= x^9(x^{90} - 1) + x^8(x^{80} - 1) + \dots + x(x^{10} - 1)$ chia hết cho $x^{10} - 1$

Mà $x^{10} - 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1)$ chia hết cho $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

Suy ra $f(x) - g(x)$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

Nên $f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + \dots + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

4. Ví dụ 4: CMR: $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Đa thức $g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$

Ta có $f(0) = (-1)^{10} + 1^{10} - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của $f(x) \Rightarrow f(x)$ chứa thừa số x

$f(1) = (1^2 + 1 - 1)^{10} + (1^2 - 1 + 1)^{10} - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của $f(x)$ $f(x)$ chứa thừa số $x - 1$, mà các thừa số x và $x - 1$ không có nhân tử chung, do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x - 1)$

hay $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

5. Ví dụ 5: Chứng minh rằng

a) $A = x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

b) $C = 8x^9 - 9x^8 + 1$ chia hết cho $D = (x - 1)^2$

c) $C(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $D(x) = x(x + 1)(2x + 1)$

Giải

a) $A = x^2 - x^9 - x^{1945} = (x^2 - x + 1) - (x^9 + 1) - (x^{1945} - x)$

Ta có: $x^2 - x + 1$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

$x^9 + 1$ chia hết cho $x^3 + 1$ nên chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

$x^{1945} - x = x(x^{1944} - 1)$ chia hết cho $x^3 + 1$ (cùng có nghiệm là $x = -1$)

nên chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

Vậy $A = x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

b) $C = 8x^9 - 9x^8 + 1 = 8x^9 - 8 - 9x^8 + 9 = 8(x^9 - 1) - 9(x^8 - 1)$

$$= 8(x - 1)(x^8 + x^7 + \dots + 1) - 9(x - 1)(x^7 + x^6 + \dots + 1)$$

$$= (x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$$

$(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$ chia hết cho $x - 1$ vì có tổng hệ số bằng 0

suy ra $(x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$ chia hết cho $(x - 1)^2$

c) Đa thức chia $D(x) = x(x + 1)(2x + 1)$ có ba nghiệm là $x = 0, x = -1, x = -\frac{1}{2}$

Ta có:

$$C(0) = (0 + 1)^{2n} - 0^{2n} - 2 \cdot 0 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ là nghiệm của } C(x)$$

$$C(-1) = (-1 + 1)^{2n} - (-1)^{2n} - 2 \cdot (-1) - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ là nghiệm của } C(x)$$

$$C(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2} + 1)^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm của } C(x)$$

Mọi nghiệm của đa thức chia là nghiệm của đa thức bị chia $\Rightarrow \text{đpcm}$

6. Ví dụ 6:

Cho $f(x)$ là đa thức có hệ số nguyên. Biết $f(0)$, $f(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng $f(x)$ không có nghiệm nguyên

Giả sử $x = a$ là nghiệm nguyên của $f(x)$ thì $f(x) = (x - a) \cdot Q(x)$. Trong đó $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên, do đó $f(0) = -a \cdot Q(0)$, $f(1) = (1 - a) \cdot Q(1)$

Do $f(0)$ là số lẻ nên a là số lẻ, $f(1)$ là số lẻ nên $1 - a$ là số lẻ, mà $1 - a$ là hiệu của 2 số lẻ không thể là số lẻ, mâu thuẫn

Vậy $f(x)$ không có nghiệm nguyên

Bài tập về nhà:

Bài 1: Tìm số dư khi

a) x^{43} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{77} + x^{55} + x^{33} + x^{11} + x + 9$ cho $x^2 + 1$

Bài 2: Tính giá trị của đa thức $x^4 + 3x^3 - 8$ tại $x = 2009$

Bài 3: Chứng minh rằng

a) $x^{50} + x^{10} + 1$ chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$

b) $x^{10} - 10x + 9$ chia hết cho $x^2 - 2x + 1$

c) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $x^2 + 2x + 1$

d) $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n+2}$ chia hết cho $x^2 + 1$

e) $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ chia hết cho $(x + 1)(x - 1)^2$

Liên Phong, ngày 26 tháng 1 năm 2018

Ký duyệt

CHUYÊN ĐỀ – CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC HỮU TỈ

Ngày soạn: 01- 02 - 2018

Ngày dạy: - 02 - 2018

A. Nhắc lại kiến thức:

Các bước rút gọn biểu thức hữu tỉ

a) Tìm ĐKXĐ: Phân tích mẫu thành nhân tử, cho tất cả các nhân tử khác 0

b) Phân tích tử thành nhân tử, chia tử và mẫu cho nhân tử chung

B. Bài tập:

Bài 1: Cho biểu thức $A = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$

a) Rút gọn A

b) tìm x để A = 0

c) Tìm giá trị của A khi $|2x - 1| = 7$

Giải

a)Đkxđ :

$$\begin{aligned}x^4 - 10x^2 + 9 \neq 0 &\Leftrightarrow [(x^2)^2 - x^2] - (9x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) \neq 0 \\&\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tử : } x^4 - 5x^2 + 4 &= [(x^2)^2 - x^2] - (x^2 - 4) = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) \\&= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)\end{aligned}$$

$$\text{Với } x \neq \pm 1; x \neq \pm 3 \text{ thì } A = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)}$$

$$\text{b) } A = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\text{c) } |2x - 1| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 7 \\ 2x - 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ 2x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{* Với } x = 4 \text{ thì } A = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{(4 - 2)(4 + 2)}{(4 - 3)(4 + 3)} = \frac{12}{7}$$

* Với $x = -3$ thì A không xác định

2. Bài 2:

$$\text{Cho biểu thức } B = \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để $B > 0$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) Phân tích mẫu: } 3x^3 - 19x^2 + 33x - 9 &= (3x^3 - 9x^2) - (10x^2 - 30x) + (3x - 9) \\ &= (x - 3)(3x^2 - 10x + 3) = (x - 3)[(3x^2 - 9x) - (x - 3)] = (x - 3)^2(3x - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Đkxd: } (x - 3)^2(3x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ và } x \neq \frac{1}{3}$$

b) Phân tích tử, ta có:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 7x^2 - 12x + 45 &= (2x^3 - 6x^2) - (x^2 - 3x) - (15x - 45) = (x - 3)(2x^2 - x - 15) \\ &= (x - 3)[(2x^2 - 6x) + (5x - 15)] = (x - 3)^2(2x + 5) \end{aligned}$$

$$\text{Với } x \neq 3 \text{ và } x \neq \frac{1}{3}$$

$$\text{Thì } B = \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9} = \frac{(x - 3)^2(2x + 5)}{(x - 3)^2(3x - 1)} = \frac{2x + 5}{3x - 1}$$

$$\text{c) } B > 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 5}{3x - 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

3. Bài 3

$$\text{Cho biểu thức } C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

a) Rút gọn biểu thức C

b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên

Giải

a) Đkxd: $x \neq \pm 1$

$$C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} = \left[\frac{1+x+2(1-x)-5}{(1-x)(1+x)} \right] \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{1-2x} = \frac{-2}{2x-1}$$

b) B có giá trị nguyên khi x là số nguyên thì $\frac{-2}{2x-1}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2x - 1 \text{ là U}(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ 2x - 1 = -1 \\ 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 1,5 \\ x = -1 \end{cases}$$

Đối chiếu Đkxđ thì chỉ có $x = 0$ thỏa mãn

4. Bài 4

Cho biểu thức $D = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4}$

a) Rút gọn biểu thức D

b) Tìm x nguyên để D có giá trị nguyên

c) Tìm giá trị của D khi $x = 6$

Giải

a) Nếu $x + 2 > 0$ thì $|x + 2| = x + 2$ nên

$$D = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4} = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x(x+2) - x^2 + 4} = \frac{x(x-1)(x+2)}{x(x+2) - (x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

Nếu $x + 2 < 0$ thì $|x + 2| = -(x + 2)$ nên

$$D = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4} = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{-x(x+2) - x^2 + 4} = \frac{x(x-1)(x+2)}{-x(x+2) - (x-2)(x+2)} = \frac{-x}{2}$$

Nếu $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ thì biểu thức D không xác định

b) Để D có giá trị nguyên thì $\frac{x^2 - x}{2}$ hoặc $\frac{-x}{2}$ có giá trị nguyên

$$+) \frac{x^2 - x}{2} \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x : 2 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) : 2 \\ x > -2 \end{cases}$$

Vì $x(x-1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 với mọi $x > -2$

$$+) \frac{-x}{2} \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} x : 2 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k \text{ (} k \in \mathbb{Z}; k < -1 \text{)}$$

$$c) \text{ Khi } x = 6 \Rightarrow x > -2 \text{ nên } D = \frac{x^2 - x}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

* Dạng 2: Các biểu thức có tính quy luật

Bài 1: Rút gọn các biểu thức

$$a) A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

Phương pháp: Xuất phát từ hạng tử cuối để tìm ra quy luật

Ta có $\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ Nên

$$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{(n+1)^2}$$

b) $B = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Ta có $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{k^2}$ Nên

$B =$

$$\frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1.3.2.4 \dots (n-1)(n+1)}{2^2.3^2.4^2 \dots n^2} = \frac{1.2.3 \dots (n-1)}{2.3.4 \dots (n-1)n} \cdot \frac{3.4.5 \dots (n+1)}{2.3.4 \dots n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

c) $C = \frac{150}{5.8} + \frac{150}{8.11} + \frac{150}{11.14} + \dots + \frac{150}{47.50} = 150 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{47} - \frac{1}{50}\right)$

$$= 50 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{50}\right) = 50 \cdot \frac{9}{10} = 45$$

d) $D = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$$

Bài 2:

a) Cho $A = \frac{m-1}{1} + \frac{m-2}{2} + \dots + \frac{2}{m-2} + \frac{1}{n-1}$; $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$. Tính $\frac{A}{B}$

Ta có

$$A = \left(\frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-1}\right) - \left(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n-1}\right) = n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) - (n-1)$$

$$= n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) + 1 = n\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) = nB \Rightarrow \frac{A}{B} = n$$

b) $A = \frac{1}{1.(2n-1)} + \frac{1}{3.(2n-3)} + \dots + \frac{1}{(2n-3).3} + \frac{1}{(2n-1).1}$; $B = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}$

Tính $A : B$

Giải

Năm học: 2017 - 2018

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2n} \left[\left(1 + \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n-3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \dots + \frac{1}{3} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2n} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} \right) = \frac{1}{2n} \cdot 2 \cdot B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Bài tập về nhà

Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} & \text{b)} \quad & \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \frac{5^2}{6^2-1} \dots \frac{n^2}{(n+1)^2-1} \\ \text{c)} \quad & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Liêm Phong, ngày 02 tháng 02 năm 2018

Ký duyệt

CHUYÊN ĐỀ – CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC HỮU TỈ (T2)

Ngày soạn: - 02 - 2018

Ngày dạy: - 02 - 2018

* Dạng 3: Rút gọn; tính giá trị biểu thức thỏa mãn điều kiện của biến

Bài 1: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị các biểu thức sau :

a) $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$; b) $B = x^3 + \frac{1}{x^3}$; c) $C = x^4 + \frac{1}{x^4}$; d) $D = x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Lời giải

a) $A = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$;

b) $B = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 - 9 = 18$;

c) $C = x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 49 - 2 = 47$;

d) $A.B = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5} = D + 3 \Rightarrow D = 7.18 - 3 = 123$.

Bài 2: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$ (1); $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ (2).

Tính giá trị biểu thức $D = \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2$

Từ (1) suy ra $bcx + acy + abz = 0$ (3)

Từ (2) suy ra

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 = 4 - 2 \cdot \left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right)$$

(4)

Thay (3) vào (4) ta có $D = 4 - 2.0 = 4$

Bài 3

a) Cho $abc = 2$; rút gọn biểu thức $A = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2c}{ac + 2c + 2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{abc + ab + a} + \frac{2c}{ac + 2c + 2} = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2c}{ac + 2c + abc} \\ &= \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2c}{c(a + 2 + ab)} = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2}{a + 2 + ab} = \frac{ab + a + 2}{ab + a + 2} = 1 \end{aligned}$$

b) Cho $a + b + c = 0$; rút gọn biểu thức $B = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}$

$$\text{Từ } a + b + c = 0 \Rightarrow a = -(b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$$

Tương tự ta có: $b^2 - a^2 - c^2 = 2ac$; $c^2 - b^2 - a^2 = 2ab$ (Hoán vị vòng quanh), nên

$$B = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a + b + c = 0 &\Rightarrow -a = (b + c) \Rightarrow -a^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b + c) \Leftrightarrow -a^3 = b^3 + c^3 - 3abc \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có } B = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2} \quad (\text{Vì } abc \neq 0)$$

c) Cho a, b, c từng đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\text{Rút gọn biểu thức } C = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$$

$$\text{Từ } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - (ab + ac + bc) = a^2 - ab + bc - ac = (a - b)(a - c)$$

$$\text{Tương tự: } b^2 + 2ac = (b - a)(b - c); \quad c^2 + 2ab = (c - a)(c - b)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)} = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} - \frac{b^2}{(a - b)(b - c)} + \frac{c^2}{(a - c)(b - c)} \\ &= \frac{a^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} - \frac{b^2(a - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} + \frac{c^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = 1 \end{aligned}$$

* Dạng 4: Chứng minh đẳng thức thỏa mãn điều kiện của biến

1. Bài 1: Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ (1); $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$ (2).

Chứng minh rằng: $a + b + c = abc$

Từ (1) suy ra

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) = 4 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) = 4 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 1 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 1 \Leftrightarrow a+b+c = abc$$

2. Bài 2: Cho $a, b, c \neq 0$ và $a+b+c \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau.

$$\text{Từ đó suy ra rằng: } \frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b) \cdot \frac{c(a+b+c) + ab}{abc(a+b+c)} = 0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{(-c)^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009}}$$

$$\frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009} + (-c)^{2009} + c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = \frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}}.$$

3. Bài 3: Cho $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ (1)

chứng minh rằng: trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow a^2c + ab^2 + bc^2 = b^2c + ac^2 + a^2b \Rightarrow a^2(b-c) - a(c^2-b^2) + bc(c-b) = 0$$

$$\Rightarrow (c-b)(a^2 - ac = ab + bc) = 0 \Rightarrow (c-b)(a-b)(a-c) = 0 \Rightarrow \text{đpcm}$$

4. Bài 4: Cho $(a^2 - bc)(b - abc) = (b^2 - ac)(a - abc)$; $abc \neq 0$ và $a \neq b$

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$$

$$\text{Từ GT} \Rightarrow a^2b - b^2c - a^3bc + ab^2c^2 = ab^2 - a^2c - ab^3c + a^2bc^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2b - ab^2) + (a^2c - b^2c) = abc^2(a-b) + abc(a-b)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(ab + ac + bc) = abc(a-b)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab + ac + bc}{abc} = a + b + c \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$$

5. Bài 5:

Cho $a + b + c = x + y + z = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

$$\text{Từ } x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 = (y + z)^2; y^2 = (x + z)^2; z^2 = (y + x)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 &= a(y + z)^2 + b(x + z)^2 + c(y + x)^2 = \dots \\ &= (b + c)x^2 + (a + c)y^2 + (a + b)z^2 + 2(ayz + bxz + cxy) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Từ } a + b + c = 0 \Rightarrow -a = b + c; -b = a + c; -c = a + b \quad (2)$$

$$\text{Từ } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0 \quad (3). \text{ Thay (2), (3) vào (1); ta có:}$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = -(ax^2 + by^2 + cz^2) \Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

6. Bài 6:

Cho $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$; chứng minh: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$

$$\text{Từ } \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b-c} = \frac{b}{a-c} + \frac{c}{b-a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)} \quad (1) \quad (\text{Nhân hai vế với } \frac{1}{b-c})$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{b}{(c-a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a-b)(c-a)(b-c)} \quad (2); \quad \frac{c}{(a-b)^2} = \frac{a^2 - ac + cb - b^2}{(a-b)(c-a)(b-c)} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta có đpcm

7. Bài 7:

Cho $a + b + c = 0$; chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9 \quad (1)$

$$\text{Đặt } \frac{a-b}{c} = x; \frac{b-c}{a} = y; \frac{c-a}{b} = z \Rightarrow \frac{c}{a-b} = \frac{1}{x}; \frac{a}{b-c} = \frac{1}{y}; \frac{b}{c-a} = \frac{1}{z}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 9$$

$$\text{Ta có: } (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}\right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có: } \frac{y+z}{x} &= \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)} = \frac{c(c-a-b)}{ab} \\ &= \frac{c[2c - (a+b+c)]}{ab} = \frac{2c^2}{ab} \quad (3) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có: $\frac{x+z}{y} = \frac{2a^2}{bc}$ (4); $\frac{x+y}{z} = \frac{2b^2}{ac}$ (5)

Thay (3), (4) và (5) vào (2) ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 3 + \frac{2}{abc}(a^3 + b^3 + c^3) \quad (6)$$

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (7) ?

Thay (7) vào (6) ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{2}{abc} \cdot 3abc = 3 + 6 = 9$

Bài tập về nhà:

Bài 1: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2-x}{x+3} - \frac{3-x}{x+2} + \frac{2-x}{x^2+5x+6}\right) : \left(1 - \frac{x}{x-1}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $A = 0$; $A > 0$

Bài 2: Cho biểu thức $B = \frac{3y^3 - 7y^2 + 5y - 1}{2y^3 - y^2 - 4y + 3}$

a) Rút gọn B

b) Tìm số nguyên y để $\frac{2D}{2y+3}$ có giá trị nguyên

c) Tìm số nguyên y để $B \geq 1$

Bài 3 : cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$; tính giá trị biểu thức $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

HD: $A = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$; vận dụng $a+b+c=0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Bài 4: Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{b}{c} + 1\right)\left(\frac{c}{a} + 1\right)$

Bài 5: Cho $x+y+z=0$; chứng minh rằng: $\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + 3 = 0$

Liên Phong, ngày tháng 02 năm 2018

Ký duyệt

CHUYÊN ĐỀ : SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

Ngày soạn: 01 – 03 - 2018

Ngày dạy: - 03 - 2018

A. Một số kiến thức:

1. Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2} a.h \text{ (a – độ dài một cạnh, h – độ dài đường cao tương ứng)}$$

2. Một số tính chất:

Hai tam giác có chung một cạnh, có cùng độ dài đường cao thì có cùng diện tích

Hai tam giác bằng nhau thì có cùng diện tích

B. Một số bài toán:

1. Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ có $AC = 6\text{cm}$; $AB = 4\text{ cm}$; các đường cao AH ;

BK ; CI . Biết $AH = \frac{CI + BK}{2}$

Tính BC

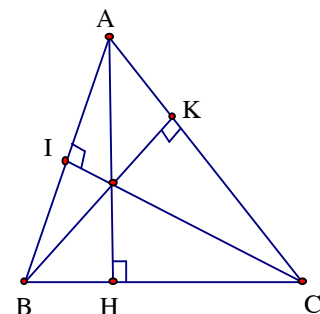
Giải

$$\text{Ta có: } BK = \frac{2S_{ABC}}{AC} ; CI = \frac{2S_{ABC}}{AB}$$

$$\Rightarrow BK + CI = 2 \cdot S_{ABC} \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2AH = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} \right) \Leftrightarrow BC \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} \right) = 2$$

$$\Rightarrow BC = 2 : \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} \right) = 2 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = 4,8 \text{ cm}$$



Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là a, b, c ; độ dài các đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c .

Biết rằng $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác đều

Giải

Gọi $S_{ABC} = S$

$$\text{Ta xét } a + h_a = b + h_b \Rightarrow a - b = h_a - h_b = \frac{2S}{b} - \frac{2S}{a} = 2S \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = 2S \cdot \frac{a - b}{ab}$$

$$\Rightarrow a - b = 2S \cdot \frac{a - b}{ab} \Rightarrow (a - b) \left(1 - \frac{2S}{ab} \right) = 0 \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân ở } C \text{ hoặc vuông ở } C \quad (1)$$

Tương tự ta có: ΔABC cân ở A hoặc vuông ở A (2); ΔABC cân ở B hoặc vuông ở B (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra ΔABC cân hoặc vuông ở ba đỉnh (Không xảy ra vuông tại ba đỉnh) $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều

Bài 3:

Cho điểm O nằm trong tam giác ABC, các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1 \quad \text{b) } \frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = 2$$

$$\text{c) } M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = 6. \text{ Tìm vị trí của O để tổng M có giá trị nhỏ nhất}$$

$$\text{d) } N = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{OC}{OC'} = 8. \text{ Tìm vị trí của O để tích N có giá trị nhỏ nhất}$$

Giải

Gọi $S_{ABC} = S$, $S_1 = S_{BOC}$, $S_2 = S_{COA}$, $S_3 = S_{AOB}$. Ta có:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{S_2}{S_{OA'C}} = \frac{S_3}{S_{OA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \quad (1)$$

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \frac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \frac{S_1}{S} \quad (2)$$

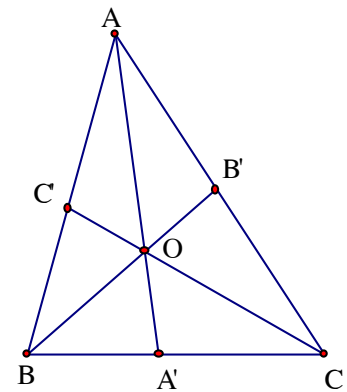
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{OA}{AA'} = \frac{S_2 + S_3}{S}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{OB}{OB'} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}; \frac{OC}{OC'} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}; \frac{OB'}{BB'} = \frac{S_2}{S};$$

$$\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}$$

$$\text{a) } \frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1$$

$$\text{b) } \frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2S}{S} = 2$$



$$c) M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_1 + S_3}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} \right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3} \right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1} \right)$$

$$\text{Áp dụng Bất Cô si ta có } \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} \right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3} \right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1} \right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

Đẳng thức xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow O$ là trọng tâm của tam giác ABC

$$d) N = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \cdot \frac{S_1 + S_3}{S_2} \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{(S_2 + S_3)(S_1 + S_3)(S_1 + S_2)}{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$$

$$\Rightarrow N^2 = \frac{(S_2 + S_3)^2 (S_1 + S_3)^2 (S_1 + S_2)^2}{(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3)^2} \geq \frac{4S_1 S_2 \cdot 4S_2 S_3 \cdot 4S_1 S_3}{(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3)^2} \geq 64 \Rightarrow N \geq 8$$

Đẳng thức xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow O$ là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 4:

Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF; gọi A', B', C' là hình chiếu của M (nằm bên trong tam giác ABC) trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng: Khi M thay đổi vị trí trong tam giác ABC thì:

- A'D + B'E + C'F không đổi
- AA' + BB' + CC' không đổi

Giải

Gọi $h = AH$ là chiều cao của tam giác ABC thì h không đổi

Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh AB; BC; CA là MP; MQ;

MR thì $A'D + B'E + C'F = MQ + MR + MP$

Vì M nằm trong tam giác ABC nên $S_{BMC} + S_{CMA} + S_{BMA} = S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow BC \cdot (MQ + MR + MP) = BC \cdot AH \Rightarrow MQ + MR + MP = AH$$

$$\Rightarrow A'D + B'E + C'F = AH = h$$

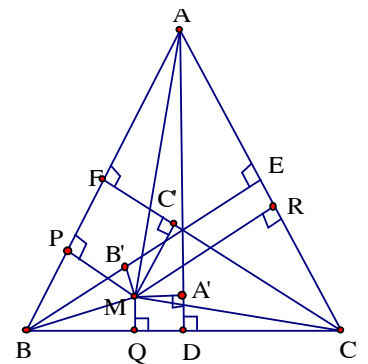
Vậy: $A'D + B'E + C'F = AH = h$ không đổi

$$\begin{aligned} b) AA' + BB' + CC' &= (AH - A'D) + (BE - B'E) + (CF - C'F) \\ &= (AH + BE + CF) - (A'D + B'E + C'F) = 3h - h = 2h \text{ không đổi} \end{aligned}$$

Bài 5:

Cho tam giác ABC có BC bằng trung bình cộng của AC và AB; Gọi I là giao điểm của các phân giác, G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh: $IG \parallel BC$

Giải



Năm học: 2017 - 2018

Gọi khoảng cách từ a, I, G đến BC lần lượt là AH, IK, GD

Vì I là giao điểm của ba đường phân giác nên khoảng cách từ I đến ba cạnh AB, BC, CA bằng nhau và bằng IK

Vì I nằm trong tam giác ABC nên:

$$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} \Leftrightarrow BC \cdot AH = IK(AB+BC+CA) \quad (1)$$

$$\text{Mà } BC = \frac{AB + CA}{2} \Rightarrow AB + CA = 2 BC \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có: } BC \cdot AH = IK \cdot 3BC \Rightarrow IK = \frac{1}{3} AH \quad (a)$$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$S_{BGC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Leftrightarrow BC \cdot GD = \frac{1}{3} BC \cdot AH \Rightarrow GD = \frac{1}{3} AH \quad (b)$$

Từ (a) và (b) suy ra $IK = GD$ hay khoảng cách từ I, G đến BC bằng nhau nên $IG \parallel BC$

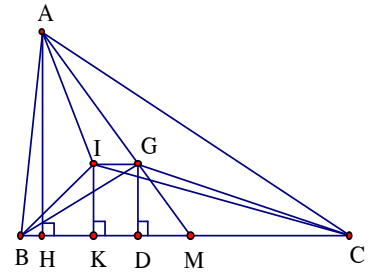
Bài tập về nhà:

1) Cho C là điểm thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy} = 60^\circ$, M là điểm bất kỳ nằm trên đường vuông góc với OC tại C và thuộc miền trong của $\widehat{xOy}$, gọi MA, MB thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Tính độ dài OC theo MA, MB

2) Cho M là điểm nằm trong tam giác đều ABC. A', B', C' là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB. Các đường thẳng vuông góc với BC tại C, vuông góc với CA tại A, vuông góc với AB tại B cắt nhau ở D, E, F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DEF là tam giác đều

b) $AB' + BC' + CA'$ không phụ thuộc vị trí của M trong tam giác ABC



Liêm Phong, ngày tháng 03 năm 2018

Ký duyệt

CHUYÊN ĐỀ : CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐỊNH LÝ TA-LÉT

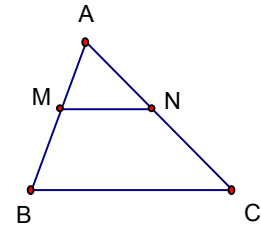
Ngày soạn: 07 – 03 - 2018

Ngày dạy: 16 - 03 - 2018

A. Kiến thức:

1. Định lý Ta-lét:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC \\ MN \parallel BC \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



$$\text{* Hệ quả: } MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

B. Bài tập áp dụng:

1. Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, đường thẳng qua A song song với BC cắt BD ở E, đường thẳng qua B song song với AD cắt AC ở G

a) chứng minh: EG // CD

b) Giả sử AB // CD, chứng minh rằng $AB^2 = CD \cdot EG$

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\text{a) Vì } AE \parallel BC \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \quad (1)$$

$$BG \parallel AC \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OA} \quad (2)$$

$$\text{Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: } \frac{OE}{OD} = \frac{OG}{OC} \Rightarrow EG \parallel CD$$

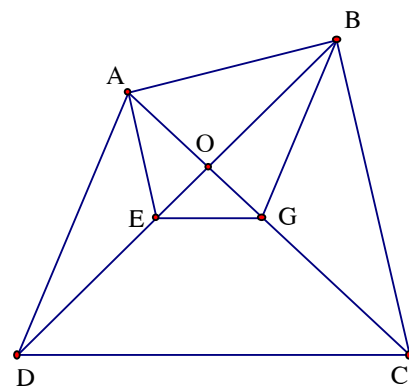
b) Khi AB // CD thì EG // AB // CD, BG // AD nên

$$\frac{AB}{EG} = \frac{OA}{OG} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{EG} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EG$$

Bài 2:

Cho ABC vuông tại A, Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng:

a) AH = AK



b) $AH^2 = BH \cdot CK$

Giải

Đặt $AB = c$, $AC = b$.

$BD \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB)

$$\text{nên } \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB + AH} = \frac{b}{b + c}$$

$$\text{Hay } \frac{AH}{AB} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow AH = \frac{b \cdot c}{b + c} \quad (1)$$

$$AB \parallel CF \text{ (cùng vuông góc với } AC) \text{ nên } \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC + AK} = \frac{c}{b + c}$$

$$\text{Hay } \frac{AK}{AC} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow AK = \frac{b \cdot c}{b + c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = AK$

$$\text{b) Từ } \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \text{ và } \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \text{ suy ra } \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AH} \text{ (Vì } AH = AK)$$

$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot KC$$

3. Bài 3: Cho hình bình hành $ABCD$, đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD , BC , DC theo thứ tự tại E , K , G . Chứng minh rằng:

a) $AE^2 = EK \cdot EG$

b) $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c) Khi đường thẳng a thay đổi vị trí nhưng vẫn qua A thì tích $BK \cdot DG$ có giá trị không đổi

Giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành và $K \in BC$ nên

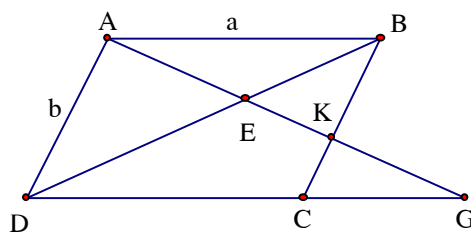
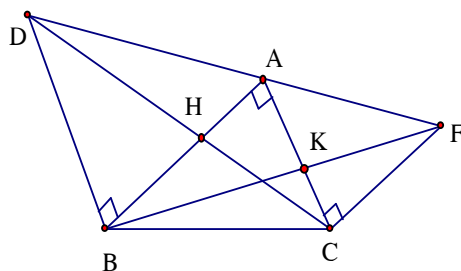
$AD \parallel BK$, theo hệ quả của định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow \frac{EK}{AE} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK \cdot EG$$

b) Ta có: $\frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$; $\frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ nên

$$\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD} + \frac{DE}{DB} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow AE \left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \text{ (đpcm)}$$

c) Ta có: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CG} \Rightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{a}{CG} \quad (1); \frac{KC}{AD} = \frac{CG}{DG} \Rightarrow \frac{KC}{b} = \frac{CG}{DG} \quad (2)$



Nhân (1) với (2) về theo về ta có: $\frac{BK}{b} = \frac{a}{DG} \Rightarrow BK \cdot DG = ab$ không đổi (Vì $a = AB$; $b = AD$ là độ dài hai cạnh của hình bình hành ABCD không đổi)

4. Bài 4:

Cho tứ giác ABCD, các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1:2. Chứng minh rằng:

- $EG = FH$
- EG vuông góc với FH

Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CF, DG

$$\text{Ta có } CM = \frac{1}{2} CF = \frac{1}{3} BC \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow EM \parallel AC \Rightarrow \frac{EM}{AC} = \frac{BM}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow EM = \frac{2}{3} AC \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } NF \parallel BD \Rightarrow \frac{NF}{BD} = \frac{CF}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow NF = \frac{2}{3} BD \quad (2)$$

$$\text{mà } AC = BD \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra : } EM = NF \quad (a)$$

$$\text{Tương tự như trên ta có: } MG \parallel BD, NH \parallel AC \text{ và } MG = NH = \frac{1}{3} AC \quad (b)$$

$$\text{Mặt khác } EM \parallel AC; MG \parallel BD \text{ và } AC \perp BD \Rightarrow EM \perp MG \Rightarrow \widehat{EMG} = 90^\circ \quad (4)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \widehat{FNH} = 90^\circ \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \widehat{EMG} = \widehat{FNH} = 90^\circ \quad (c)$$

$$\text{Từ (a), (b), (c) suy ra } \triangle EMG = \triangle FNH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow EG = FH$$

b) Gọi giao điểm của EG và FH là O; của EM và FH là P; của EM và FN là Q thì

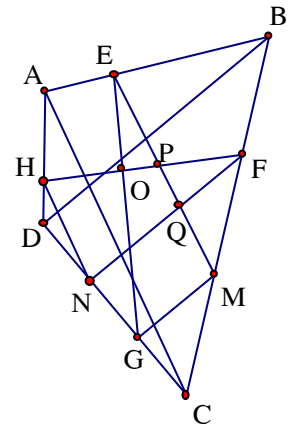
$$\widehat{PQF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{QPF} + \widehat{QFP} = 90^\circ \text{ mà } \widehat{QPF} = \widehat{OPE} \text{ (đối đỉnh), } \widehat{OEP} = \widehat{QFP} \text{ (} \triangle EMG = \triangle FNH \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{EOP} = \widehat{PQF} = 90^\circ \Rightarrow EO \perp OP \Rightarrow EG \perp FH$$

5. Bài 5:

Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại M và AB tại K, Từ C vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB tại F, qua F ta lại vẽ đường thẳng song song với AC, cắt BC tại P. Chứng minh rằng

- $MP \parallel AB$
- Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy



Giải

$$a) EP // AC \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB} \quad (1)$$

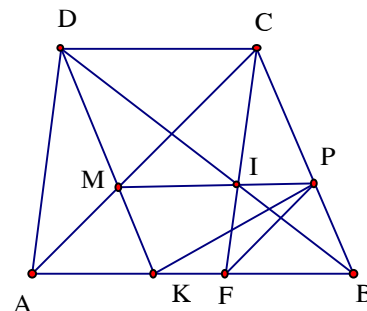
$$AK // CD \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} \quad (2)$$

các tứ giác AFCD, DCBK là các hình bình hành nên

$$AF = DC, FB = AK \quad (3)$$

$$\text{Kết hợp (1), (2) và (3) ta có } \frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow MP // AB \quad (\text{Định}$$

lí Ta-lét đảo) (4)



$$b) \text{ Gọi I là giao điểm của BD và CF, ta có: } \frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$$

$$\text{Mà } \frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB} \quad (\text{Do } FB // DC) \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow IP // DC // AB \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra : qua P có hai đường thẳng IP, PM cùng song song với $AB // DC$ nên theo tiên đề Ôclit thì ba điểm P, I, M thẳng hàng hay MP đi qua giao điểm của CF và DB hay ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

6. Bài 6:

Cho $\triangle ABC$ có $BC < BA$. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác BE của $\widehat{ABC}$; đường thẳng này cắt BE tại F và cắt trung tuyến BD tại G. Chứng minh rằng đoạn thẳng EG bị đoạn thẳng DF chia làm hai phần bằng nhau

Giải

Gọi K là giao điểm của CF và AB; M là giao điểm của DF và BC

$\triangle KBC$ có BF vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle KBC$ cân tại B $\Rightarrow BK = BC$ và $FC = FK$

Mặt khác D là trung điểm AC nên DF là đường trung bình của $\triangle AKC \Rightarrow DF // AK$ hay $DM // AB$

Suy ra M là trung điểm của BC

$DF = \frac{1}{2} AK$ (DF là đường trung bình của $\triangle AKC$), ta có

$$\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} \quad (\text{do } DF // BK) \Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK} \quad (1)$$

Năm học: 2017 - 2018

Mặt khác $\frac{CE}{DE} = \frac{DC - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$ (Vì $AD = DC$) $\Rightarrow$

$$\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$$

Hay $\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} - 1 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2$ (vì $\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DF}$:

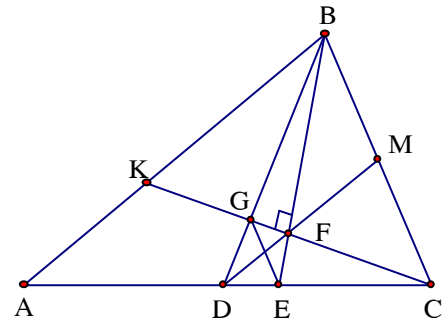
Do $DF \parallel AB$)

Suy ra $\frac{CE}{DE} = \frac{AK + BK}{DE} - 2 = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2$ (Do $DF =$

$$\frac{1}{2} AK) \Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2 = \frac{2BK}{AK} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow EG \parallel BC$

Gọi giao điểm của EG và DF là O ta có $\frac{OG}{MC} = \frac{OE}{MB} \left(= \frac{FO}{FM} \right) \Rightarrow OG = OE$



Bài tập về nhà

Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với BC cắt AB ở E; đường thẳng song song với CD qua O cắt AD tại F

a) Chứng minh $FE \parallel BD$

b) Từ O kẻ các đường thẳng song song với AB, AD cắt BD, CD tại G và H.

Chứng minh: $CG \cdot DH = BG \cdot CH$

Bài 2:

Cho hình bình hành ABCD, điểm M thuộc cạnh BC, điểm N thuộc tia đối của tia BC sao cho $BN = CM$; các đường thẳng DN, DM cắt AB theo thứ tự tại E, F.

Chứng minh:

a) $AE^2 = EB \cdot FE$

b) $EB = \left(\frac{AN}{DF} \right)^2 \cdot EF$

Liêm Phong, ngày 09 tháng 3 năm 2018

Ký duyệt

Nguyễn Mạnh Thắng

CHUYÊN ĐỀ - CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ TALÉT VÀ TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Ngày soạn: 14- 3 - 2018

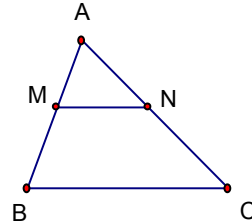
Ngày dạy: - 3 - 2018

A. Kiến thức:

1. Định lý Ta-lét:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC \\ MN \parallel BC \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

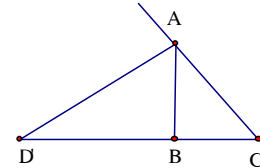
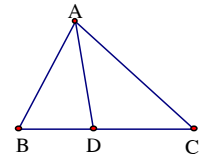
$$\text{* Hệ quả: } MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



2. Tính chất đường phân giác:

$$\Delta ABC, AD \text{ là phân giác góc } A \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$$AD' \text{ là phân giác góc ngoài tại } A: \frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC}$$



B. Bài tập vận dụng

1. Bài 1:

Cho ΔABC có $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$, phân giác AD

a) Tính độ dài BD , CD

b) Tia phân giác BI của góc B cắt AD ở I ; tính tỉ số: $\frac{AI}{ID}$

Giải

$$\text{a) } AD \text{ là phân giác của } \widehat{BAC} \text{ nên } \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b + c}$$

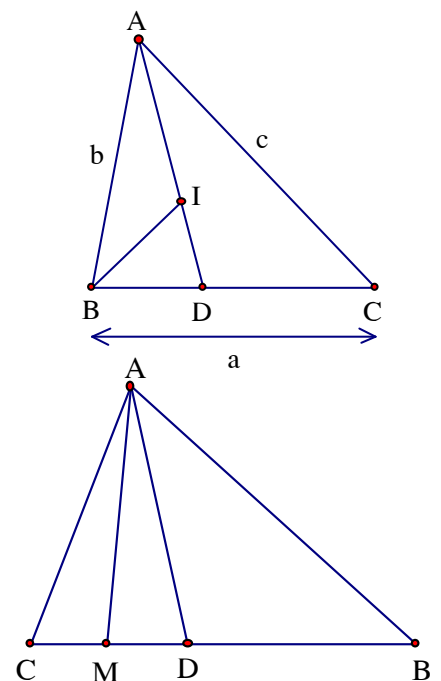
$$\text{Do đó } CD = a - \frac{ac}{b + c} = \frac{ab}{b + c}$$

b) BI là phân giác của $\widehat{ABC}$ nên

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = c : \frac{ac}{b + c} = \frac{b + c}{a}$$

2. Bài 2:

Cho ΔABC , có $\widehat{B} < 60^\circ$ phân giác AD



a) Chứng minh $AD < AB$

b) Gọi AM là phân giác của $\triangle ADC$. Chứng minh rằng $BC > 4 DM$

Giải

$$a) \text{Ta có } \widehat{ADB} = \widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2} > \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} > \widehat{B} \Rightarrow AD < AB$$

b) Gọi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = d$

Trong $\triangle ADC$, AM là phân giác ta có

$$\frac{DM}{CM} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{DM}{CM + DM} = \frac{AD}{AD + AC} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{AD}{AD + AC}$$

$$\Rightarrow DM = \frac{CD \cdot AD}{AD + AC} = \frac{CD \cdot d}{b + d}; CD = \frac{ab}{b + c} \text{ (Vận dụng bài 1) } \Rightarrow DM = \frac{abd}{(b + c)(b + d)}$$

$$\text{Để c/m } BC > 4 DM \text{ ta c/m } a > \frac{4abd}{(b + c)(b + d)} \text{ hay } (b + d)(b + c) > 4bd \text{ (1)}$$

Thật vậy : do $c > d \Rightarrow (b + d)(b + c) > (b + d)^2 \geq 4bd$. Bất đẳng thức (1) được c/m

Bài 3:

Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM, các tia phân giác của các góc AMB , AMC cắt AB, AC theo thứ tự ở D và E

a) Chứng minh $DE \parallel BC$

b) Cho $BC = a$, $AM = m$. Tính độ dài DE

c) Tìm tập hợp các giao điểm I của AM và DE nếu $\triangle ABC$ có BC cố định, $AM = m$ không đổi

d) $\triangle ABC$ có điều kiện gì thì DE là đường trung bình của nó

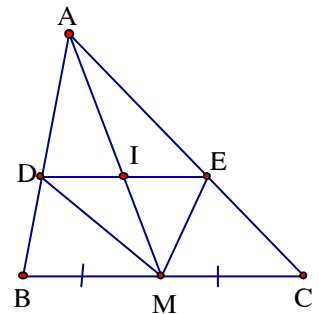
Giải

$$a) MD \text{ là phân giác của } \widehat{AMB} \text{ nên } \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} \text{ (1)}$$

$$ME \text{ là phân giác của } \widehat{AMC} \text{ nên } \frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1), (2) và giả thiết } MB = MC \text{ ta suy ra } \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$b) DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AM}. \text{ Đặt } DE = x \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow x = \frac{2a \cdot m}{a + 2m}$$



c) Ta có: $MI = \frac{1}{2} DE = \frac{a.m}{a+2m}$ không đổi $\Rightarrow I$ luôn cách M một đoạn không đổi nên tập

hợp các điểm I là đường tròn tâm M , bán kính $MI = \frac{a.m}{a+2m}$ (Trừ giao điểm của nó với

BC

d) DE là đường trung bình của $\triangle ABC \Leftrightarrow DA = DB \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông ở A

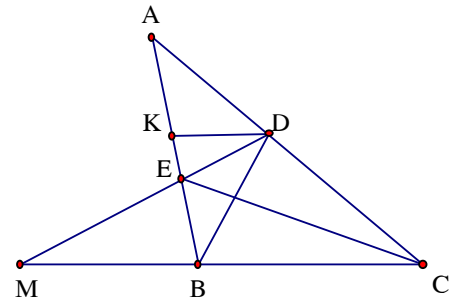
4. Bài 4:

Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) các phân giác BD, CE

a) Đường thẳng qua D và song song với BC cắt AB ở K ,
chứng minh E nằm giữa B và K

b) Chứng minh: $CD > DE > BE$

Giải



a) BD là phân giác nên

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} < \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AD}{DC} < \frac{AE}{EB} \quad (1)$$

Mặt khác $KD \parallel BC$ nên $\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{KB} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KB} < \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AK + KB}{KB} < \frac{AE + EB}{EB} \Rightarrow \frac{AB}{KB} < \frac{AB}{EB} \Rightarrow KB > EB$

$\Rightarrow E$ nằm giữa K và B

b) Gọi M là giao điểm của DE và CB . Ta có $\widehat{CBD} = \widehat{KDB}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{KBD} = \widehat{KDB}$

mà E nằm giữa K và B nên $\widehat{KDB} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{KBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{EBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow EB < DE$

Ta lại có $\widehat{CBD} + \widehat{ECB} = \widehat{EDB} + \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{DCE}$ (Vì $\widehat{DCE} = \widehat{ECB}$)

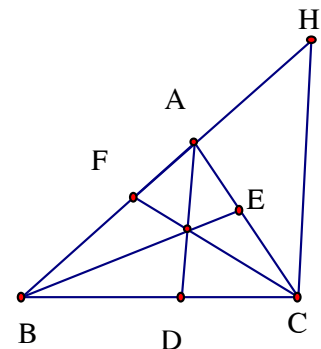
Suy ra: $CD > ED \Rightarrow CD > ED > BE$

5. Bài 5: Cho $\triangle ABC$. Ba đường phân giác AD, BE, CF . Chứng minh

a. $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$.

b. $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} > \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}$.

Giải



a) AD là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ nên ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

Tương tự: với các phân giác BE, CF ta có: $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$ (2); $\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$

b) Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AD = d_a$.

Qua C kẻ đường thẳng song song với AD, cắt tia BA ở H.

Theo DL Talét ta có: $\frac{AD}{CH} = \frac{BA}{BH} \Rightarrow AD = \frac{BA \cdot CH}{BH} = \frac{c \cdot CH}{BA + AH} = \frac{c}{b + c} \cdot CH$

Do $CH < AC + AH = 2b$ nên: $d_a < \frac{2bc}{b + c} \Rightarrow \frac{1}{d_a} > \frac{b + c}{2bc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{d_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Chúng minh tương tự ta có: $\frac{1}{d_b} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ và $\frac{1}{d_c} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ Nên:

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \Leftrightarrow \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{đpcm})$$

Bài tập về nhà

Cho ΔABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ($b > c$), các phân giác BD, CE

a) Tính độ dài CD, BE rồi suy ra $CD > BE$

b) Vẽ hình bình hành BEKD. Chứng minh: $CE > EK$

c) Chứng minh $CE > BD$

Liêm Phong, ngày 16 tháng 3 năm 2018

Ký duyệt

Nguyễn Mạnh Thắng

CHUYÊN ĐỀ – TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

Ngày soạn: 20/3/2018

Giáo án bồi dưỡng HSG Toán 8

Trang 36 |

A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức:

1) Khái niệm: Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biến thuộc khoảng xác định nói trên

2) Phương pháp

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh $A \geq k$ với k là hằng số

+ Chỉ ra dấu “=” có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh $A \leq k$ với k là hằng số

+ Chỉ ra dấu “=” có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

Kí hiệu : $\min A$ là giá trị nhỏ nhất của A; $\max A$ là giá trị lớn nhất của A

B. Các bài tập tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức:

I) Dạng 1: Tam thức bậc hai

Ví dụ 1 :

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 8x + 1$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = -5x^2 - 4x + 1$

Giải

$$a) A = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$$

$$\min A = -7 \Leftrightarrow x = 2$$

$$b) B = -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x\right) + 1 = -5\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{25}\right) + \frac{9}{5} = \frac{9}{5} - 5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 \leq \frac{9}{5}$$

$$\max B = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

b) Ví dụ 2: Cho tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$

a) Tìm $\min P$ nếu $a > 0$

b) Tìm $\max P$ nếu $a < 0$

Giải

Ta có: $P = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ nên:

a) Nếu $a > 0$ thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ do đó $P \geq k \Rightarrow \min P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

b) Nếu $a < 0$ thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \leq 0$ do đó $P \leq k \Rightarrow \max P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

II. Dạng 2: Đa thức có dấu giá trị tuyệt đối

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = (3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 5$

đặt $|3x - 1| = y$ thì $A = y^2 - 4y + 5 = (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

$$\min A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

b) $B = |x - 2| + |x - 3|$

$$B = |x - 2| + |x - 3| = B = |x - 2| + |3 - x| \geq |x - 2 + 3 - x| = 1$$

$$\Rightarrow \min B = 1 \Leftrightarrow (x - 2)(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

2) Ví dụ 2: Tìm GTNN của $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

Ta có $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = |x^2 - x + 1| + |2 + x - x^2| \geq |x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2| = 3$

$$\min C = 3 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(2 + x - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Ta có $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq |x-1+4-x| = 3$ (1)

Và $|x-2| + |x-3| = |x-2| + |3-x| \geq |x-2+3-x| = 1$ (2)

Vậy $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| \geq 1 + 3 = 4$

Ta có từ (1) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $1 \leq x \leq 4$

(2) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $2 \leq x \leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2 \leq x \leq 3$

III. Dạng 3: Đa thức bậc cao

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$a) A = x(x-3)(x-4)(x-7) = (x^2-7x)(x^2-7x+12)$$

$$\text{Đặt } x^2-7x+6 \text{ thì } A = (y-6)(y+6) = y^2-36 \geq -36$$

$$\text{Min } A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2-7x+6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 6$$

$$b) B = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2$$

$$= (x-y)^2 + (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

$$c) C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 - 2x + y^2 - 2y + xy - x - y$$

$$\text{Ta có } C + 3 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (xy - x - y + 1)$$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)(y-1). \text{ Đặt } x-1 = a; y-1 = b \text{ thì}$$

$$C + 3 = a^2 + b^2 + ab = (a^2 + 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}) + \frac{3b^2}{4} = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\text{Min } (C + 3) = 0 \text{ hay min } C = -3 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$$

2) Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$a) C = (x+8)^4 + (x+6)^4$$

$$\text{Đặt } x+7 = y \Rightarrow C = (y+1)^4 + (y-1)^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 \\ = 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \text{min } A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = -7$$

$$b) D = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9)$$

$$= (x^2 - 3x)^2 + (x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{min } D = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

IV. Dạng phân thức:

1. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Biểu thức dạng này đạt GTNN khi mẫu đạt GTLN

$$\text{Ví dụ : Tìm GTNN của } A = \frac{2}{6x-5-9x^2} = \frac{-2}{9x^2-6x+5} = \frac{-2}{(3x-1)^2+4}$$

$$\text{Vì } (3x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (3x-1)^2+4 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(3x-1)^2+4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x-1)^2+4} \geq \frac{-2}{4} \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{min } A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

2. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

a) Ví dụ 1: Tìm GTNN của $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

+) Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1) + 1}{(x - 1)^2} = 3 - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}. \text{ Đặt } y = \frac{1}{x - 1} \text{ Thì}$$

$$A = 3 - 2y + y^2 = (y - 1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

+) Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 4x + 4)}{(x - 1)^2} = 2 + \frac{(x - 2)^2}{(x - 1)^2} \geq 2$$

$$\Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

b) Ví dụ 2: Tìm GTLN của $B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100}$

$$\text{Ta có } B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100} = \frac{x}{(x + 10)^2}. \text{ Đặt } y = \frac{1}{x + 10} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 10 \text{ thì}$$

$$B = \left(\frac{1}{y} - 10\right) \cdot y^2 = -10y^2 + y = -10\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{400}\right) + \frac{1}{40} = -10\left(y - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{40} \leq \frac{1}{40}$$

$$\max B = \frac{1}{40} \Leftrightarrow y - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 10$$

c) Ví dụ 3: Tìm GTNN của $C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

$$\text{Ta có: } C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}[(x + y)^2 + (x - y)^2]}{(x + y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$$

3. Các phân thức có dạng khác

a) Ví dụ : Tìm GTNN, GTLN (Cực trị) của $A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1}$

$$\text{Ta có: } A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1} = \frac{(4x^2 - 4x + 4) - (x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 1} - 1 \geq -1 \Rightarrow \min A = -1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Ta lại có: } A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1} = \frac{(4x^2 + 4) - (4x^2 + 4x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x + 1)^2}{x^2 + 1} \leq 4 \Rightarrow \max A = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Liêm Phong, ngày tháng năm 2018

Ký duyệt

Nguyễn Mạnh Thắng

Ngày soạn: 20/3/2018

Ngày dạy /3/2018

CHUYÊN ĐỀ – TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC (2)

C. Tìm GTNN, GTLN của một biểu thức biết quan hệ giữa các biến

1) Ví dụ 1: Cho $x + y = 1$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$

Ta có $A = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$ (vì $x + y = 1$)

a) Cách 1: Biểu thị ẩn này qua ẩn kia, rồi đưa về một tam thức bậc hai

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

$$\text{nên } A = (1 - y)^2 + y^2 = 2(y^2 - y) + 1 = 2\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

b) Cách 2: Sử dụng đk đã cho, làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

$$\text{Từ } x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1(1). \text{ Mặt khác } (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) vế theo vế, ta có:

$$2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

2) Ví dụ 2: Cho $x + y + z = 3$

a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2$

b) Tìm GTLN của $B = xy + yz + xz$

$$\text{Từ } x + y + z = 3 \Rightarrow \text{Cho } (x + y + z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 9 \quad (1)$$

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$$= \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

a) Từ (1) và (2) suy ra

$$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \Rightarrow \min A = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

b) Từ (1) và (2) suy ra

$$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq xy + yz + zx + 2(xy + yz + zx) = 3(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3 \Rightarrow \max B = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị lớn nhất của $S = xyz \cdot (x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)$ với $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$

Vì $x, y, z > 0$, áp dụng BĐT Côsi ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27}$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $x+y$; $y+z$; $x+z$ ta có

$$(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x) \geq 3\sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (x+z)} \Rightarrow 2 \geq 3\sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)}$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{3} \Rightarrow S \leq \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{27} = \frac{8}{729}$$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

4) Ví dụ 4: Cho $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$

Áp dụng BĐT Bunhiacópski cho 6 số $(x, y, z); (x, y, z)$

$$\text{Ta có } (xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Rightarrow 1 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \quad (1)$$

áp dụng BĐT Bunhiacópski cho (x^2, y^2, z^2) và $(1, 1, 1)$

$$\text{Ta có } (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 1 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \leq \frac{1}{3}$$

Vậy $x^4 + y^4 + z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi $x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

D. Một số chú ý:

1) Khi tìm GTNN, GTLN ta có thể đổi biến

Ví dụ : Khi tìm GTNN của $A = (x - 1)^2 + (x - 3)^2$, ta đặt $x - 2 = y$ thì

$$A = (y + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2y^2 + 2 \geq 2 \dots$$

2) Khi tìm cực trị của một biểu thức, ta có thể thay đk của biểu thức này đạt cực trị bởi đk tương đương là biểu thức khác đạt cực trị:

$$+) -A \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow A \text{ nhỏ nhất}; \quad +) \frac{1}{B} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow B \text{ nhỏ nhất (với } B > 0)$$

$$+) C \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow C^2 \text{ lớn nhất}$$

Ví dụ: Tìm cực trị của $A = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

a) Ta có $A > 0$ nên A nhỏ nhất khi $\frac{1}{A}$ lớn nhất, ta có

$$\frac{1}{A} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 + 1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \geq 1 \Rightarrow \min \frac{1}{A} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \max A = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

b) Ta có $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 \geq 2x^2$. (Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = 1$)

$$\text{Vì } x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow \max \frac{1}{A} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

3) Nhiều khi ta tìm cực trị của biểu thức trong các khoảng của biến, sau đó so sánh các cực trị đó để tìm GTNN, GTLN trong toàn bộ tập xác định của biến

Ví dụ: Tìm GTLN của $B = \frac{y}{5 - (x + y)}$

a) xét $x + y \leq 4$

- Nếu $x = 0$ thì $A = 0$

- Nếu $1 \leq y \leq 3$ thì $A \leq 3$

- Nếu $y = 4$ thì $x = 0$ và $A = 4$

b) xét $x + y \geq 6$ thì $A \leq 0$

So sánh các giá trị trên của A , ta thấy $\max A = 4 \Leftrightarrow x = 0; y = 4$

4) Sử dụng các hằng bất đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTLN của $A = |2x + 3y|$ biết $x^2 + y^2 = 52$

Năm học: 2017 - 2018

Áp dụng Bất Bunhiacốpxki: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ cho các số 2, x, 3, y ta có:

$$(2x + 3y)^2 \leq (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = (4 + 9).52 = 26^2 \Rightarrow |2x + 3y| \leq 26$$

$$\text{Max } A = 26 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 52 \Leftrightarrow 13x^2 = 52.4 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Vậy: Ma x A = 26 $\Leftrightarrow$ x = 4; y = 6 hoặc x = - 4; y = - 6

5) Hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

Hai số có tích không đổi thì tổng của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

a) Ví dụ 1: Tìm GTLN của $A = (x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$

Vì $(x^2 - 3x + 1) + (21 + 3x - x^2) = 22$ không đổi nên tích $(x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 - 3x + 1 = 21 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = - 2$

Khi đó $A = 11.11 = 121 \Rightarrow \text{Max } A = 121 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = - 2$

b) Ví dụ 2: Tìm GTNN của $B = \frac{(x + 4)(x + 9)}{x}$

$$\text{Ta có: } B = \frac{(x + 4)(x + 9)}{x} = \frac{x^2 + 13x + 36}{x} = x + \frac{36}{x} + 13$$

Vì các số x và $\frac{36}{x}$ có tích $x \cdot \frac{36}{x} = 36$ không đổi nên $x + \frac{36}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{36}{x} \Leftrightarrow x = 6$

$$\Rightarrow A = x + \frac{36}{x} + 13 \text{ nhỏ nhất là min } A = 25 \Leftrightarrow x = 6$$

6) Trong khi tìm cực trị chỉ cần chỉ ra rằng tồn tại một giá trị của biến để xảy ra đẳng thức chứ không cần chỉ ra mọi giá trị để xảy ra đẳng thức

Liêm Phong, ngày tháng năm 2018

Ký duyệt

Nguyễn Mạnh Thắng

CHUYÊN ĐỀ – BẤT ĐẲNG THỨC

Ngày soạn: 5 / 4/2018

Ngày dạy: / 4 /2018

Phần I : các kiến thức cần lưu ý

$$1-\text{Định nghĩa: } \begin{cases} A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \\ A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0 \end{cases}$$

2-tính chất

$+ A > B \Leftrightarrow B < A$ $+ A > B \text{ và } B > C \Leftrightarrow A > C$ $+ A > B \Rightarrow A + C > B + C$ $+ A > B \text{ và } C > D \Rightarrow A + C > B + D$ $+ A > B \text{ và } C > 0 \Rightarrow A.C > B.C$ $+ A > B \text{ và } C < 0 \Rightarrow A.C < B.C$ $+ 0 < A < B \text{ và } 0 < C < D \Rightarrow 0 < A.C < B.D$	$+ A > B > 0 \Rightarrow A^n > B^n \quad \forall n$ $+ A > B \Rightarrow A^n > B^n \text{ với } n \text{ lẻ}$ $+ A > B \Rightarrow A^n > B^n \text{ với } n \text{ chẵn}$ $+ m > n > 0 \text{ và } A > 1 \Rightarrow A^m > A^n$ $+ m > n > 0 \text{ và } 0 < A < 1 \Rightarrow A^m < A^n$ $+ A < B \text{ và } A.B > 0 \Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B}$
---	--

3 - một số hằng bất đẳng thức

- $+ A^2 \geq 0 \text{ với } \forall A \text{ (dấu = xảy ra khi } A = 0)$
- $+ A^n \geq 0 \text{ với } \forall A \text{ (dấu = xảy ra khi } A = 0)$
- $+ |A| \geq 0 \text{ với } \forall A \text{ (dấu = xảy ra khi } A = 0)$
- $+ -|A| < A = |A|$
- $+ |A+B| \geq |A|+|B| \text{ (dấu = xảy ra khi } A.B > 0)$
- $+ |A-B| \leq |A|-|B| \text{ (dấu = xảy ra khi } A.B < 0)$

Phần II : một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1) Phương pháp 1: dùng định nghĩa

Kiến thức : Để chứng minh $A > B$ Ta chứng minh $A - B > 0$

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với $\forall M$

Ví dụ 1 $\forall x, y, z$ chứng minh rằng :

- a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta xét hiệu : } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] \geq 0 \text{ đúng với mọi } x; y; z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vì $(x-y)^2 \geq 0$ với $\forall x; y$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

$(x-z)^2 \geq 0$ với $\forall x; z$. Dấu bằng xảy ra khi $x = z$

$(y-z)^2 \geq 0$ với $\forall z; y$. Dấu bằng xảy ra khi $z = y$

Năm học: 2017 - 2018

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

b) Ta xét hiệu:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \geq 0$$

đúng với mọi $x; y; z \in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi $x; y; z \in R$

Dấu bằng xảy ra khi $x + y = z$

Ví dụ 2: chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ c) Hãy tổng quát bài toán

giải

a) Ta xét hiệu

$$\frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2(a^2 + b^2)}{4} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

Vậy $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

b) Ta xét hiệu: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$

Vậy $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

c) Tổng quát: $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^2$

* Tóm lại các bước để chứng minh $A \geq B$ theo định nghĩa

Bước 1: Ta xét hiệu $H = A - B$

Bước 2: Biến đổi $H = (C+D)^2$ hoặc $H = (C+D)^2 + \square + (E+F)^2$

Bước 3: Kết luận $A \geq B$

2) Phương pháp 2 : Dùng phép biến đổi tương đương

Lưu ý:

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Ví dụ 1: Cho a, b, c, d, e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Giải:

$$a) a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 \geq 0 \quad (\text{Bđt này luôn đúng})$$

$$\text{Vậy } a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \quad (\text{dấu bằng xảy ra khi } 2a = b)$$

$$b) a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) \geq 2(ab + a + b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a = b = 1$$

$$c) a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e) \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 4a(b + c + d + e)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$

Giải:

$$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4) \Leftrightarrow a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} \geq a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12}$$

$$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2 - b^2) + a^2b^8(b^2 - a^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2 - b^2)(a^6 - b^6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2(a^2 - b^2)^2(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 0$$

Ví dụ 4: cho ba số thực khác không x, y, z thỏa mãn:
$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < x + y + z \end{cases}$$

Chứng minh rằng : có đúng một trong ba số x,y,z lớn hơn 1

Giải: Xét $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz + (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$

$$= (xyz - 1) + (x + y + z) - xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = x + y + z - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) > 0$$

(vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < x + y + z$ theo gt) $\rightarrow$ 2 trong 3 số x-1, y-1, z-1 âm hoặc cả ba số x-1, y-1, z-1 là dương.

Nếu trường hợp sau xảy ra thì $x, y, z > 1 \rightarrow x \cdot y \cdot z > 1$ Mâu thuẫn gt $x \cdot y \cdot z = 1$ bắt buộc phải xảy ra trường hợp trên tức là có đúng 1 trong ba số x, y, z là số lớn hơn 1

3) Phương pháp 3: dùng bất đẳng thức quen thuộc

A) một số bất đẳng thức hay dùng

1) Các bất đẳng thức phụ:

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$ b) $x^2 + y^2 \geq |xy|$ dấu(=) khi $x = y = 0$

c) $(x + y)^2 \geq 4xy$ d) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

2) Bất đẳng thức Cô si: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ Với $a_i > 0$

3) Bất đẳng thức Bunhiacopski

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^2$$

4) Bất đẳng thức Trê-bư - sếp:

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \leq B \leq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \geq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{A + B + C}{3}$

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \geq B \geq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \leq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{A + B + C}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ A = B = C \end{cases}$

B) các ví dụ

ví dụ 1

Cho a, b, c là các số không âm chứng minh rằng $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Giải: Dùng bất đẳng thức phụ: $(x + y)^2 \geq 4xy$

Ta có $(a + b)^2 \geq 4ab$; $(b + c)^2 \geq 4bc$; $(c + a)^2 \geq 4ac$

$$\Rightarrow (a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2 \geq 64a^2 b^2 c^2 = (8abc)^2 \Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$

ví dụ 2: Cho $a > b > c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$

Do a, b, c đối xứng, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{a+c} \geq \frac{c}{a+b} \end{cases}$

áp dụng BĐT Trê- bư-sếp ta có

$$a^2 \cdot \frac{a}{b+c} + b^2 \cdot \frac{b}{a+c} + c^2 \cdot \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ví dụ 3: Cho $a, b, c, d > 0$ và $abcd = 1$. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + d(c+a) \geq 10$$

Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $c^2 + d^2 \geq 2cd$

Do $abcd = 1$ nên $cd = \frac{1}{ab}$ (dùng $x + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$)

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + cd) = 2(ab + \frac{1}{ab}) \geq 4$ (1)

Mặt khác:

$$a(b+c) + b(c+d) + d(c+a) = (ab + cd) + (ac + bd) + (bc + ad)$$

$$= \left(ab + \frac{1}{ab}\right) + \left(ac + \frac{1}{ac}\right) + \left(bc + \frac{1}{bc}\right) \geq 2 + 2 + 2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + d(c+a) \geq 10$$

ví dụ 4: Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Xét cặp số $(1, 1, 1)$ và (a, b, c) ta có $(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1.a + 1.b + 1.c)^2$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

(đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

4) Phương pháp 4: dùng tính chất của tỷ số

A. Kiến thức

1) Cho a, b, c là các số dương thì

a) Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$ b) Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

2) Nếu $b, d > 0$ thì từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

B. Các ví dụ:

ví dụ 1: Cho $a, b, c, d > 0$

Chứng minh rằng : $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

Mặt khác : $\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

Tương tự ta có : $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{a+b+c+d}$ (5); $\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$ (6)

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2 \quad (\text{đpcm})$$

ví dụ 2 : Cho: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b, d > 0$

Chúng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

Giải: Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$ (đpcm)

ví dụ 3 : Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn : $a + b = c + d = 1000$

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$

giải : Không mất tính tổng quát ta giả sử : $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \frac{b}{d}$; $\frac{a}{c} \leq 1$ vì $a + b = c + d$

a, Nếu: $b \leq 998$ thì $\frac{b}{d} \leq 998 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \leq 999$

b, Nếu: $b = 998$ thì $a = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{1}{c} + \frac{999}{d}$ Đạt giá trị lớn nhất khi $d = 1$; $c = 999$

Vậy: giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = 999 + \frac{1}{999}$ khi $a = d = 1$; $c = b = 999$

Ví dụ 4 : Với mọi số tự nhiên $n > 1$ chứng minh rằng : $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}$

Ta có $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ với $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$

Do đó: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 5: CMR: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ với $n \geq 2$ không là số tự nhiên

HD: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \dots$

Ví dụ 6: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng :

$$2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Giải :

Vì $a, b, c, d > 0$ nên ta có: $\frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} < \frac{b+c}{b+c+d} < \frac{b+c+a}{a+b+c+d}$$
 (2)

$$\frac{d+a}{a+b+c+d} < \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d}$$
 (3)

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có :

$$2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3 \quad (\text{đpcm})$$

5. Phương pháp 5: Dùng bất đẳng thức trong tam giác

Lưu ý: Nếu a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác thì : $a, b, c > 0$

Và $|b-c| < a < b+c$; $|a-c| < b < a+c$; $|a-b| < c < b+a$

Ví dụ 1:

Cho a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

a, $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b, $abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$

Giải

a) Vì a, b, c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có
$$\begin{cases} 0 < a < b+c \\ 0 < b < a+c \\ 0 < c < a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a(b+c) \\ b^2 < b(a+c) \\ c^2 < c(a+b) \end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b) Ta có $a > |b-c| \Rightarrow a^2 > a^2 - (b-c)^2 > 0$

$$b > |a-c| \Rightarrow b^2 > b^2 - (c-a)^2 > 0$$

$$c > |a-b| \Rightarrow c^2 > c^2 - (a-b)^2 > 0$$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được: $a^2b^2c^2 > [a^2 - (b-c)^2][b^2 - (c-a)^2][c^2 - (a-b)^2]$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \Rightarrow abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

Ví dụ2: (đổi biến số)

Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (1)

Đặt $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$ ta có $a = \frac{y+z-x}{2}$; $b = \frac{z+x-y}{2}$; $c = \frac{x+y-z}{2}$

$$\text{ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 6 \text{ là Bđt đúng?}$$

Ví dụ 3: (đổi biến số)

Cho a, b, c > 0 và $a + b + c < 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$ (1)

Giải: Đặt $x = a^2 + 2bc$; $y = b^2 + 2ac$; $z = c^2 + 2ab$

$$\text{Ta có } x + y + z = (a + b + c)^2 < 1$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9 \text{ Với } x + y + z < 1 \text{ và } x, y, z > 0$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow (x + y + z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$$

6) phương pháp làm trội :

Chứng minh BĐT sau :

$$\text{a) } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} < \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} < 2$$

Giải :

$$\text{a) Ta có : } \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1).(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

Cho n chạy từ 1 đến k .Sau đó cộng lại ta có

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) < \frac{1}{2} \quad (\text{đpcm})$$

b) Ta có : $1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n}$

$$< 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad (\text{đpcm})$$

Bài tập về nhà:

1) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

HD: Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

2) Cho a, b, c là số đo ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng : $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

(HD: $\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c} = \frac{2a}{a+b+c}$ và $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$)

3) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < 2$

áp dụng phương pháp làm trội

4) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

HD: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = c \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \geq 2c$; $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} ?$; $\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} ?$

Liêm Phong, ngày tháng 4 năm 2018

Ký duyệt

Nguyễn Mạnh Thắng