

ĐỀ SỐ 5 – ĐOÀN TRÍ DŨNG - 0902.920.389

Ngọc Huyền LB sưu tầm và giới thiệu



Câu 1. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số chẵn là hàm số có đồ thị hàm số đối xứng qua trục tung.

C. Nếu hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có 2 đường tiệm cận là $x = m; y = n$ thì đồ thị hàm số đó có tâm đối xứng là $I(n; m)$.

D. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì chắc chắn hàm $f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_0$.

Câu 2. Hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ có hệ số góc nhỏ nhất là?

A. $y = 6x + 3$ **B.** $y = -6x + 7$

C. $y = -6x + 5$ **D.** $y = 6x + 5$

Câu 4. Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định của chúng trong các hàm số sau?

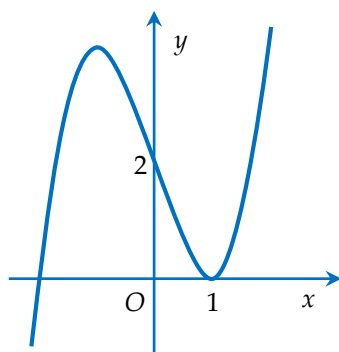
(1): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; (2): $y = \frac{2x-1}{2x+1}$;

(3): $y = \sqrt{x^2 + 4}$; (4): $y = x^3 + x - \sin x$;

(5): $y = x^4 + x^2 + 2$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 5. Đồ thị ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các phương án sau:



A. $y = x^3 - 3x - 2$ **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = x^3 - 3x + 2$ **D.** $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2017

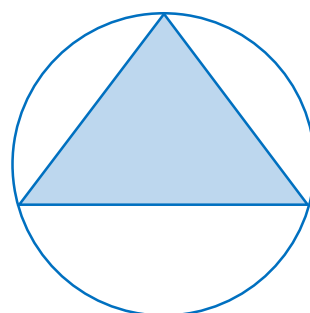
Môn: Toán

Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 6. Tổng của GTLN và GTNN của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-5; 2]$ là:

A. -1 **B.** 102 **C.** 92 **D.** 82

Câu 7. Ông Năm có một mảnh đất hình tròn bán kính 15m. Trên mảnh đất này, ông Năm muốn để dành ra một phần đất canh tác hoa màu có hình dáng một tam giác cân nội tiếp đường tròn. Mỗi mét vuông hoa màu, vào mùa thu hoạch ông Năm lãi được 5 triệu đồng. Hỏi số tiền lớn nhất mà ông Năm có thể có sau mỗi mùa thu hoạch là bao nhiêu?



A. 1,46 tỷ đồng. **B.** 1,54 tỷ đồng.

C. 2,01 tỷ đồng. **D.** 1,32 tỷ đồng.

Câu 8. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = (m-3)x^3 - 2mx^2 + 3$ không có cực trị:

A. $m = 3$

B. $m = 3 \vee m = 0$

C. $m = 0$

D. $m \in \mathbb{R}$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m-2)x^2 + (2m+3)x + 1$.

Giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $[0; 3]$ là?

A. -1

B. -2

C. 1

D. 2

Câu 10. Một anh nông dân vay 100 triệu để làm vốn và trả góp ngân hàng với lãi suất 0,5% mỗi tháng, mỗi tháng trả một số tiền như nhau trong vòng 3 năm. Với số tiền vay được anh mua một con bò với giá 30 triệu đồng. Sau 1 năm anh bán được 50 triệu đồng và tiếp tục mua một con bò khác với giá 70 triệu đồng. Tròn 3 năm kể từ thời điểm vay ngân hàng, anh bán con bò đó và thu về 90 triệu đồng. Hỏi anh lãi được bao nhiêu tiền sau khi hoàn trả hết nợ?

A. 30 triệu 450 nghìn. **B.** 30 triệu 480 nghìn.

C. 30 triệu 120 nghìn. D. 30 triệu 690 nghìn.

Câu 11. Cho $(a-1)^{\frac{-2}{3}} \leq (a-1)^{\frac{-1}{3}}$. Khi đó ta có thể kết luận về a là:

- A. $\begin{cases} a < 1 \\ a \geq 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a < 1 \\ a \geq 2 \end{cases}$ C. $1 < a \leq 2$ D. $a \geq 2$

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ là:

- A. $x \in [-1; 1]$ B. $x \in (-1; 1)$
C. $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$ D. $x \geq 1$

Câu 13. Cho phương trình:

$$\log_3 x \cdot \log_5 x = \log_3 x + \log_5 x.$$

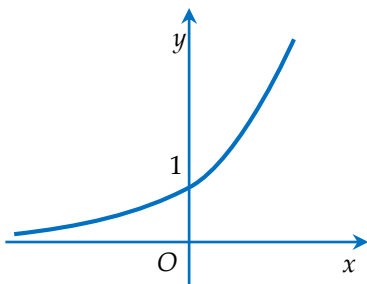
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Phương trình có nghiệm đúng với mọi $x > 0$
B. Nếu x là nghiệm của phương trình trên thì x nguyên
C. Phương trình vô nghiệm
D. Phương trình có 2 nghiệm hữu tỉ và 1 nghiệm vô tỉ

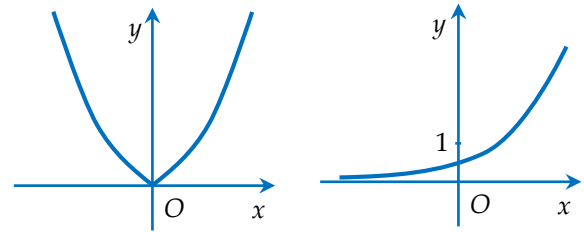
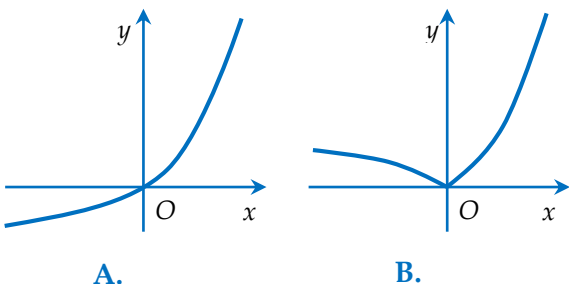
Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của hàm số: $f(x) = 2^{x-1} + 3^{3-x}$

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 1

Câu 15. Cho biết hàm số $y = 2^x$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khi đó đồ thị hàm số $y = |2^x - 1|$ là đồ thị nào trong số các đồ thị được nêu từ các phương án A, B, C, D sau đây?



C.

D.

Câu 16. Tìm đạo hàm của hàm số sau:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

- A. $f'(x) = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$ B. $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - e^{-x})^2}$
C. $f'(x) = e^x + e^{-x}$ D. $f'(x) = \frac{5}{(e^x - e^{-x})^2}$

Câu 17. Phương trình $2 \ln x + \ln(2x-1)^2 = 0$ có số nghiệm là:

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Câu 18. Biết $I = \int_1^a \frac{x^3 - 2 \ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2} + \ln 2$. Giá trị của a là:

- A. 3 B. 2 C. $\ln 2$ D. $\frac{\pi}{4}$

Câu 19. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = a\pi + b$. Phần nguyên của tổng $a+b$ là?

- A. 0 B. -1 C. 1 D. -2

Câu 20. Cho $f(x), g(x)$ là hàm số liên tục lần lượt có $F(x), G(x)$ là nguyên hàm. Xét các mệnh đề sau:

- (I): $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$
(II): $k \cdot F(x)$ là một nguyên hàm của $k f(x)$ ($k \in \mathbb{R}$)
(III): $F(x) \cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot g(x)$.

Mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

- A. Chỉ I B. I và II
C. I, II và III D. Chỉ II

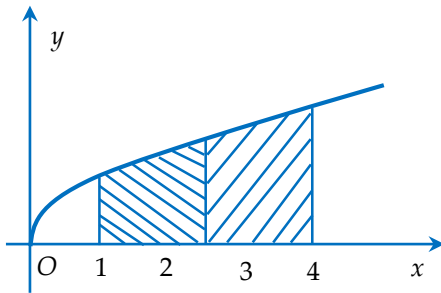
Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C): $y = |x^2 - 4x + 3|$ và (d): $y = x + 3$

- A. $\frac{109}{6}$ B. $\frac{105}{6}$ C. $\frac{103}{6}$ D. $\frac{127}{7}$

Câu 22. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x^2 + x^3 - 4$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 0$ là?

- A. $3x^2 + 4x$ B. $2x^3 - 4x^4$
C. $\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - 4x$ D. $x^3 - x^4 + 2x$

Câu 23: Gọi S_1 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, Ox, x = 1, x = a$. Đồng thời S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, Ox, x = a, x = 4$. Xác định giá trị của a để $S_1 = S_2$?



- A. $a = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ B. $a = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$
C. $a = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ D. $a = 2\sqrt{2}$

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $(3+i)z - i\bar{z} = 7 - 6i$. Môđun của số phức z bằng:

- A. $2\sqrt{5}$ B. 25 C. 5 D. $\sqrt{5}$

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn: $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2z|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là:

- A. $20x - 16y - 47 = 0$ B. $20x + 16y + 47 = 0$
C. $20x + 16y - 47 = 0$ D. $20x - 16y + 47 = 0$

Câu 26. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = -1 + 3i; z_2 = -3 - 2i; z_3 = 4 + i$. Chọn kết luận **đúng** nhất về tam giác ABC :

- A. Tam giác cân B. Tam giác vuông cân
C. Tam giác vuông D. Tam giác đều

Câu 27. Gọi $z_1; z_2$ là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + 7 = 0$. Tính: $A = z_1^4 + z_2^4$.

- A. 23 B. $\sqrt{23}$ C. 13 D. $\sqrt{13}$

Câu 28. Cho chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , đường cao của hình chóp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng:

- A. 30° B. Đáp số khác
C. 45° D. 60°

Câu 29. Cho khối đa diện đều. Khẳng định nào sau đây là sai.

- A. Số đỉnh của khối lập phương bằng 8
B. Số mặt của khối tứ diện đều bằng 4
C. Khối bát diện đều là loại $\{4; 3\}$
D. Số cạnh của khối bát diện đều bằng 12

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. I là trung điểm BB' . Mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{7}{17}$ C. $\frac{4}{14}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $AMND$ và $ABCD$ là:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{2}{5}$

Câu 32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C , cạnh góc vuông bằng a , chiều cao bằng $2a$. G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Thể tích khối chóp $G.ABC$ là:

- A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{2a^3}{3}$ C. $\frac{a^3}{6}$ D. a^3

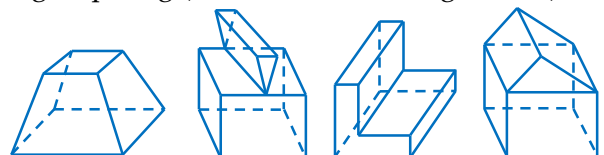
Câu 33. Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO . Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng 2 và $\angle SAO = 30^\circ; \angle SAB = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh hình nón?

- A. $4\pi\sqrt{3}$ B. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$ C. $2\pi\sqrt{3}$ D. $3\pi\sqrt{2}$

Câu 34. Cho một hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón thì có diện tích bề mặt bằng:

- A. $\frac{a^2\pi^3\sqrt{12}}{4}$ B. $\frac{a^2\pi^3\sqrt{9}}{16}$ C. $\frac{a^2\pi^3\sqrt{12}}{16}$ D. $a^2\pi\sqrt{12}$

Câu 35: Mỗi hình dưới đây gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó).



Số đa diện lồi trong các hình vẽ trên là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 36. Bán kính của mặt cầu tâm $I(3;3;-4)$ tiếp xúc với trục Oy bằng:

A. $\sqrt{5}$ B. 4 C. 5 D. $\frac{5}{2}$

Câu 37. Cho mặt phẳng $(\alpha): 4x - 2y + 3z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 0$. Khi đó mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai:

A. (α) cắt (S) theo một đường tròn
B. (α) tiếp xúc với (S)
C. (α) có điểm chung với (S)
D. (α) đi qua tâm của (S)

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC có $A(1;0;0), B(0;2;0), C(3;0;4)$. Tọa độ điểm M trên mặt phẳng Oyz sao cho MC vuông góc với (ABC) là:

A. $M\left(0; \frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$ B. $M\left(0; \frac{3}{2}; -\frac{11}{2}\right)$
C. $M\left(0; -\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$ D. $M\left(0; -\frac{3}{2}; -\frac{11}{2}\right)$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định các cặp giá trị $(l; m)$ để các cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau: $2x + ly + 3z - 5 = 0$; $mx - 6y - 6z - 2 = 0$.

A. $(-3; 3)$ B. $(3; -4)$ C. $(-4; 3)$ D. $(3; -3)$

Câu 40. Trong đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(d) // (P)$
B. (d) cắt (P) tại $M(1; -1; -1)$.
C. $(d) \subset (P)$
D. (d) cắt (P) tại $M(-1; -2; 2)$.

Câu 41: Biết rằng khi $a \in (-1; 0)$, các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1)^3 + a + 1}{x}$ luôn nằm trên một parabol cố định $y = mx^2 + nx + p$. Khi đó giá trị của $A = mnp$ là bao nhiêu?

A. 27 B. -54 C. -81 D. 9

Câu 42: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;0;0), B(0;0;m), C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Gọi D là hình chiếu của gốc tọa độ O trên đường thẳng AB . Chứng minh rằng khi m thay đổi nhưng luôn khác 0 thì đường thẳng CD luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

A. $R = \frac{1}{2}$ B. $R = 1$ C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $R = \sqrt{2}$

Câu 43: Giả sử hàm chi mức sản xuất của một hãng DVD trong 1 ngày là $q(m; n) = m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}$, trong đó m, n lần lượt là số lượng nhân viên và số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu của khách hàng. Biết rằng tiền lương cho mỗi nhân viên là 16 USD/ngày và của mỗi lao động chính là 27 USD/ngày. Tính chi phí nhỏ nhất để trả công trong 1 ngày của hãng.

A. 1250 USD B. 1440 USD
C. 1500 USD D. 1920 USD

Câu 44: Biết rằng tích phân:

$$\int_0^1 \frac{x \ln(1+x)}{e^x} dx = a - \frac{b + \ln c}{e}.$$

Khi đó giá trị của $a + b + c$ là?

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+1| + |z^2 - z + 1|$. Tính giá trị của biểu thức Mm .

A. $\frac{12\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{15\sqrt{6}}{7}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$

Câu 46: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(0;0;1)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 1 = 0$. Trên đường thẳng Δ tồn tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại A và có trọng tâm G nằm trên mặt phẳng (P) . Tọa độ trung điểm M của BC là?

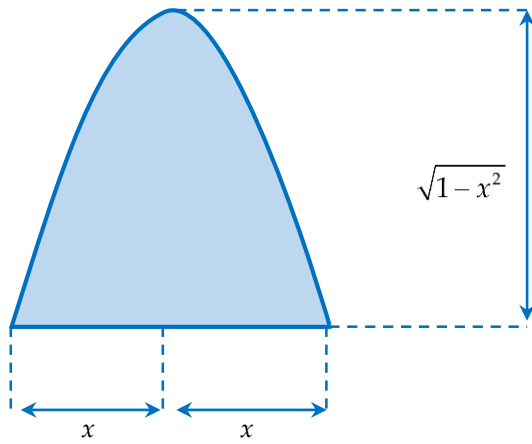
A. $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$
C. $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ D. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Câu 47: Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z+2|=1$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $\frac{z}{1-i}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

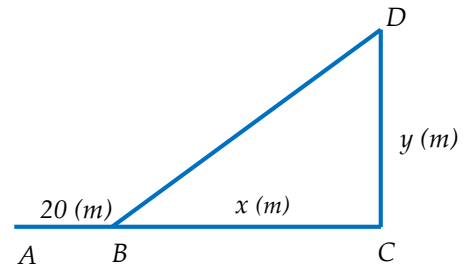
- A. $R = \frac{1}{2}$ B. $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $R = 1$ D. $R = \frac{\sqrt{2}}{6}$

Câu 48: Một chiếc ống của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 1$) là một hình phẳng có dạng parabol với các kích thước như hình vẽ bên. Tính thể tích của chiếc ống.



- A. $V = \frac{5}{9}$ (đvtt) B. $V = \frac{4}{9}$ (đvtt)
C. $V = \frac{1}{3}$ (đvtt) D. $V = \frac{2}{9}$ (đvtt)

Câu 49: Đấu trường La Mã (*Anfiteatro Flavio*) được xây dựng từ những năm 70 sau Công nguyên dưới thời hoàng đế *Titus Flavius Vespasianus* và là một trong các kỳ quan của thế giới.



Để xây dựng khu vực khán đài cho một đấu trường có hình dạng của một nửa vật thể tròn xoay, cần số lượng đất đá có thể tích gần với giá trị nào nhất (theo đơn vị m^3) trong số các đáp án dưới đây biết rằng thiết diện qua tâm của vật tròn xoay đó cắt vật thể dưới hình tam giác BCD có các kích thước như hình vẽ trên đồng thời tổng các giá trị của x và y là $100m$.

- A. 195000 B. 217000 C. 433500 D. 337000

Câu 50: Gọi a, b, c là các số thực khác 0 thay đổi nhưng thỏa mãn điều kiện: $3^a = 5^b = 15^{-c}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c).$$

- A. $-3 - \log_5 3$ B. -4
C. $-2 - \sqrt{3}$ D. $-2 - \log_3 5$

ĐÁP ÁN

1.B	6.C	11.D	16.A	21.A	26.B	31.B	36.C	41.B	46.C
2.A	7.A	12.A	17.D	22.C	27.A	32.A	37.B	42.C	47.A
3.C	8.C	13.B	18.B	23.A	28.D	33.A	38.C	43.B	48.B
4.A	9.B	14.B	19.B	24.D	29.C	34.A	39.B	44.C	49.B
5.C	10.B	15.B	20.A	25.A	30.B	35.B	40.D	45.D	50.B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

(Được thực hiện bởi thầy Đoàn Trí Dũng - facebook.com/toanthaydung - 0902.920.389)

Câu 1. Đáp án B.

A sai vì $f(x)$ phải là hàm số lẻ

C sai vì tâm đối xứng phải là $I(m;n)$

D sai vì theo như câu 1 vẫn tồn tại trường hợp $f'(x)=0$ nhưng $x=x_0$ lại không phải là điểm cực trị.

Câu 2. Đáp án A.

$y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}; y'=0 \Leftrightarrow x=0$. Suy ra hàm số đạt cực

đại tại $x=0$. Như vậy hàm số không có cực tiểu.

Câu 3. Đáp án C.

Nhắc lại kiến thức: Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ của đồ thị hàm số (C) cho trước là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (*)

Suy ra hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là

$$y'(x_0) = 6x^2 - 12x = 6(x-1)^2 - 6 \geq -6$$

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ đạt nhỏ nhất là -6 khi $x=1$

Thay vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Câu 4. Đáp án A.

Các hàm số 1;4

Câu 5. Đáp án C.

Câu 6. Đáp án C.

Lưu ý bài toán bắt tìm tổng GTLN và GTNN chứ không phải tổng giá trị cực tiểu và giá trị cực đại, cần chú ý điều này để tránh sai sót không đáng có.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$.

Phương trình

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in [-5; 2] \\ x = 1 \in [-5; 2] \end{cases}$$

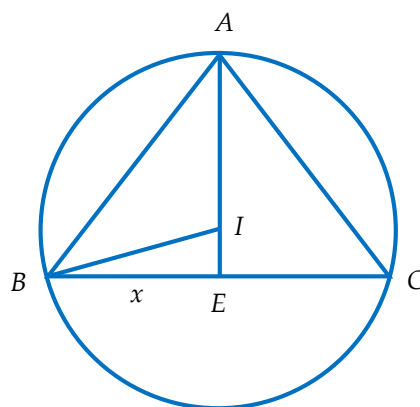
Tính các giá trị

$$y_{(-5)} = 30; y_{(-3)} = 62; y_{(1)} = 30; y_{(2)} = 37$$

So sánh các giá trị ta suy ra GTLN là 62 và GTNN là 30

Tổng cần tìm là 92.

Câu 7. Đáp án A.



Đặt $BE = x$. Khi đó ta có: $IE = \sqrt{225 - x^2}$. Do đó ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: I nằm giữa A và E. Khi đó: Diện tích trồng hoa màu là: $S = x(15 + \sqrt{225 - x^2}) \Rightarrow$ Sử dụng máy tính ta được diện tích đất lớn nhất khoảng 292 mét vuông.

Trường hợp 2: E nằm giữa A và I. Khi đó: Diện tích trồng hoa màu là: $S = x(15 - \sqrt{225 - x^2}) \Rightarrow$ Sử dụng máy tính ta được diện tích đất lớn nhất khoảng 225 mét vuông.

Vậy rõ ràng số tiền lớn nhất ông Năm có thể thu được khoảng: 1,46 tỷ đồng.

Câu 8. Đáp án C.

Đơn giản với điều kiện không có cực trị:

$$b^2 - 3ac \leq 0. \text{ Chọn đáp án C.}$$

Câu 9. Đáp án B.

$$y' = x^2 + 2(m-2)x + 2m + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m(x+1) \leq -x^2 + 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{-x^2 + 4x - 3}{2(x+1)} \forall x \in [0; 3]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0;3]} \frac{-x^2 + 4x - 3}{2(x+1)} = -\frac{3}{2}. \text{ Giá trị nguyên lớn}$$

nhất của m thỏa mãn điều kiện là đáp án B.

Câu 10. Đáp án B.

Ta có công thức vay trả góp:

$$P(1+r\%)^n = a \left(\frac{(1+r\%)^n - 1}{r\%} \right) \text{ do đó trong 36}$$

tháng trả góp, mỗi tháng số tiền anh nông dân

$$\text{cần trả là: } a = \frac{Pr\%(1+r\%)^n}{(1+r\%)^n - 1} = \frac{0,5.1,005^{36}}{1,005^{36} - 1}$$

Do đó số tiền lãi anh thu được sau 36 tháng trả góp kết hợp với số tiền bán bò là:

$$100 - 30 + 50 - 70 + 90 - 36 \left(\frac{0,5.1,005^{36}}{1,005^{36} - 1} \right) = 30480000$$

Câu 11. Đáp án D.

Điều kiện $a \neq 1$

$$\text{Ta có thể viết lại } (a-1)^{\frac{2}{3}} \leq (a-1)^{\frac{-1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(a-1)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{(a-1)^2} \geq \sqrt[3]{a-1} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{a-1}} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 \geq a-1 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-2) \geq 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 2.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $a \geq 2$.

Sai lầm thường gặp: Không để ý đến điều kiện

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a-1}} > 0 \text{ khi biến đổi tương đương.}$$

Câu 12. Đáp án A.

Đặt $3^x = t > 0$ suy ra $3t^2 - 10t + 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (3t-1)(t-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 3^{-1} \leq 3^x \leq 3^1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Câu 13. Đáp án B.

Từ phương trình đã cho ta suy ra:

$$\log_5 x \cdot \log_3 x - \log_5 x - \frac{\log_5 x}{\log_5 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x \left(\log_3 x - 1 - \frac{1}{\log_5 3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x (\log_3 x - \log_3 3 - \log_3 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x \cdot \log_3 \frac{x}{15} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = 0 \\ \log_3 \frac{x}{15} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 15 \end{cases}$$

Vậy đáp án B là đáp án chính xác

Nhận xét: Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE của máy tính ta có thể dễ dàng tìm nghiệm $x=1$ do đó có thể loại luôn 2 đáp án A và C.

Câu 14. Đáp án B Áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$f(x) = \frac{2^x}{2} + \frac{2^3}{2^x} \geq 3 \sqrt{\frac{2^x \cdot 2^3}{2 \cdot 2^x}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{2^x}{2} = \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^4 \Rightarrow x = 2$$

Câu 15. Đáp án B.

Bằng sự hiểu biết của đồ thị hàm trị tuyệt đối ta biết thừa rằng đáp án chỉ có thể là B.

Câu 16. Đáp án A.

Ở dạng bài toán tìm đạo hàm, ngoài cách đặt bút ra nháp và tính đạo hàm thì ta cũng có thể thử trực tiếp bằng máy tính. Cách thử là ta sẽ tính giá trị của $f'(x)$ tại 4 đáp án và giá trị đạo hàm $f(x)$ tại cùng một giá trị. Ví dụ tại giá trị $x=1$.

$$\text{Bấm máy tính } \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) \Big|_{x=1} \text{ cho kết quả } -0,724061661$$

Tính giá trị tại các đáp án:

$$\text{Đáp án A } f'(1) = -0,724061661$$

$$\text{Đáp án B } f'(1) = 0,4920509139$$

$$\text{Đáp án C } f'(1) = 3,08616127$$

$$\text{Đáp án D } f'(1) = -0,9050770762$$

Câu 17. Đáp án D.

$$\text{Điều kiện } x \in (0; +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}. \text{ Phương trình}$$

$$2\ln x + \ln(2x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x + 2\ln|2x-1| = 0 \Leftrightarrow \ln(x \cdot |2x-1|) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x|2x-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{2} \right) \\ x(1-2x) = 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ x(2x-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Nhận xét: Ở bài toán này việc chuyển $\ln(2x-1)^2 = 2\ln|2x-1|$ nếu bị nhầm thành $(2x-1)^2 = 2\ln(2x-1)$ không gây ảnh hưởng tới kết quả.

Tuy nhiên ở một số bài toán tương tự, trong việc phá bình phương ở logarit chúng ta cần chú ý là cần có dấu giá trị tuyệt đối để tránh sai lầm không đáng có.

Câu 18. Đáp án B.

Nếu với phương thức thi tự luận, đây có thể là câu gây khó dễ với nhiều thí sinh, tuy nhiên với phương thức thi trắc nghiệm ta có thể đơn giản thử từng đáp án để có được kết quả nhanh nhất.

Câu 19. Đáp án B.

Đối với bài toán này, chúng ta sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$\begin{aligned} I &= \left(x \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos x} \\ &= \left(x \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &\Leftrightarrow I = \left(x \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{1}{\sqrt{3}}; b = -\ln 2.$$

$$\text{Tổng } a + b = \frac{1}{\sqrt{3}} - \ln 2 \approx -0,1157969114.$$

Lưu ý khái niệm phần nguyên của x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , vậy đáp án đúng là đáp án B.

Nhận xét: Bài toán trên đòi hỏi khả năng biến đổi của thí sinh và nhắc lại kiến thức về khái niệm phần nguyên, sẽ có thí sinh khi đi thi đã tìm ra kết quả phân tích nhưng lúng túng trong việc lựa chọn đáp án vì không nhớ rõ khái niệm phần nguyên.

Câu 20. Đáp án A.

Câu 21. Đáp án A.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned} |x^2 - 4x + 3| &= x + 3 \\ \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty) \\ x^2 - 4x + 3 = x + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (1; 3) \\ x^2 - 4x + 3 = -x - 3 \end{cases} &\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \int_0^5 |x^2 - 4x + 3| - x - 3 dx = \frac{127}{7}$$

Câu 22. Đáp án C.

Ta có hạ nguyên hàm của $f(x) = 2x^2 + x^3 - 4$ là

$$\int f(x) dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x + C$$

Vì $F(0) = 0$ nên C sẽ nhận giá trị 0, nguyên hàm

$$\text{cần tìm là } F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 4x$$

Sai lầm thường gặp: Thí sinh đọc không kỹ đề bài nhầm lẫn chọn đạo hàm của hàm đã cho dẫn đến lựa chọn đáp án A.

Câu 23. Đáp án A.

$$\begin{aligned} \int_1^a \sqrt{x} dx &= \int_a^4 \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_1^a = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_a^4 \\ &\Leftrightarrow a\sqrt{a} - 1 = 8 - a\sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3^3 \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Câu 24. Đáp án D.

Việc sử dụng máy tính Casio trong bài toán này duy nhất chỉ có thể ở bước thử lại đáp án. Để giải quyết bài toán chúng ta cần giải phương trình đã cho theo phương pháp “cổ điển”:

Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Phương trình đã cho tương đương: $3z + i(z - \bar{z}) = 7 - 6i$

$$\Leftrightarrow 3(a + bi) + i(2bi) = 7 - 6i$$

$$\Leftrightarrow 3a - 2b + 3bi = 7 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 7 \\ 3b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra mô đun số phức } z \text{ là } |z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Câu 25. Đáp án A.

Ngoài cách biến đổi thông thường là đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ sau đó biến đổi tương đương, ta cũng có thể thử các đáp án bằng cách chọn một điểm trên mỗi đường rồi sau đó lấy số phức z mà điểm đó biểu diễn thay vào đề bài kiểm tra lại.

Câu 26. Đáp án B.

Ta có tọa độ các điểm lần lượt là $A(-1;3); B(-3;-2); C(4;1)$

Tiếp theo ta tính các vectơ tạo thành từ 3 điểm trên: $\overrightarrow{AB} = (-2; -5); \overrightarrow{AC} = (5; -2); \overrightarrow{BC} = (7; 3)$

Dễ dàng thấy rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ và $AB = AC = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. Do đó tam giác ABC vuông cân tại A

Câu 27. Đáp án A.

Sử dụng chức năng tìm nghiệm trên máy tính ta

$$\text{tính được } z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i; z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$$

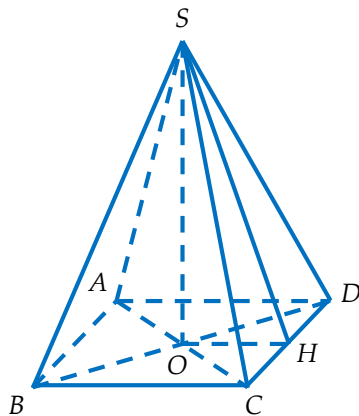
Tuy nhiên máy tính không thể tính được lũy thừa bậc bốn của một số phức nên ta sẽ phải tính lần lượt.

$$\text{Ta có } z_1^2 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i \right)^2 = \frac{-11}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow z_1^4 = (z_1^2)^2 = \left(\frac{-11}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i \right)^2 = \frac{23}{2} + \frac{53\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Tương tự thì } z_2^4 = \frac{23}{2} - \frac{53\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_1^4 + z_2^4 = 23$$

Câu 28. Đáp án D.



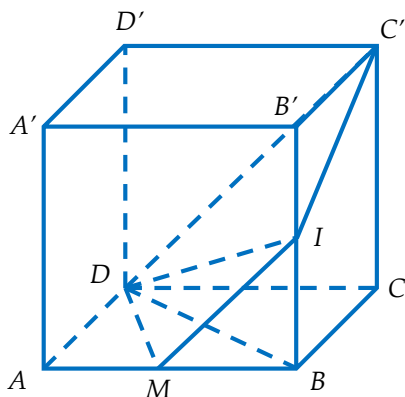
Gọi H là trung điểm của CD ta có $\begin{cases} SH \perp CD \\ OH \perp CD \end{cases}$

Suy ra góc SHO là góc giữa mặt bên (SCD) và đáy $(ABCD)$

$$\text{Ta có: } \tan SHO = \frac{SO}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} \Rightarrow SHO = 60^\circ$$

Câu 29. Đáp án C.

Câu 30. Đáp án B.



Coi như khối lập phương có cạnh bằng 1.

Để giải bài toán này, ta phải xác định đúng thiết diện cắt bởi mặt phẳng (DIC')

Lấy M là trung điểm AB thì IM là đường trung bình tam giác ABB' nên $IM \parallel AB' \parallel DC'$

Suy ra bốn điểm I, M, C', D cùng thuộc một mặt phẳng $(C'DI)$

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (DIC') là tứ giác $C'DMI$

Phần có thể tích nhỏ hơn là khối đa diện $C'IBMD$

Để thuận tiện tính toán ta chia khối trên thành 2 phần là tứ diện $IMBD$ và hình chóp $DIBCC'$.

$$V_{IMBD} = \frac{1}{3} \cdot IB \cdot S_{BDM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot IB \cdot DA \cdot MB = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$\begin{aligned} V_{DIBCC'} &= \frac{1}{3} \cdot DC \cdot S_{IBCC'} = \frac{1}{3} \cdot DC \cdot \frac{1}{2} \cdot (IB + CC') \cdot BC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Suy ra thể tích khối có thể tích nhỏ hơn là

$$V_n = V_{IMBD} + V_{DIBCC'} = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{7}{24}$$

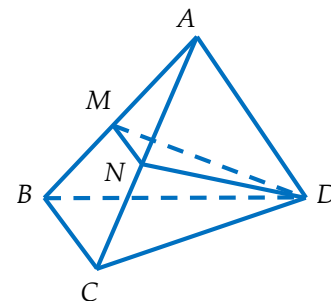
Thể tích phần lớn hơn là

$$V_l = V_{ABCD A'B'C'D'} - V_n = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

Vậy tỉ lệ cần tìm là $V_n : V_l = 7 : 17$

Nhận xét: Đây là một bài toán khá khó đòi hỏi khả năng dựng hình và xác định điểm phù hợp của thí sinh. Có một số bạn xác định đúng thiết diện nhưng gặp khó khăn trong việc tính thể tích các phần vì chưa chia được khối thể tích thành các hình nhỏ hơn để tính cho phù hợp.

Câu 31. Đáp án B.



Vì đây là các khối tứ diện nên ta có thể áp dụng công thức tính tỉ lệ thể tích:

$$\frac{V_{AMND}}{V_{ABCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AD}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

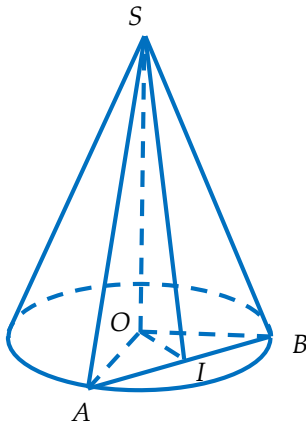
Câu 32. Đáp án A.

$$\text{Diện tích tam giác ABC: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB = \frac{a^2}{2}$$

$G \in (A'B'C') \Rightarrow d_{(G; (ABC))} = 2a$. Suy ra thể tích cần

$$\text{tìm là } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 2a = \frac{a^3}{3}$$

Câu 33. Đáp án A.



Gọi I là trung điểm của AB thì

$$OI \perp AB; SI \perp AB; OI = 2$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} AO = SA \cdot \cos \angle SAO = SA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ AI = SA \cdot \cos \angle SAI = \frac{SA}{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta có } \frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mặt khác

$$\frac{AI}{AO} = \cos \angle IAO \Rightarrow \sin \angle IAO = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{OA} \Rightarrow OA = \sqrt{6}$$

$$\text{Mà } SA = \frac{OA}{\cos 30^\circ} = \sqrt{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}. \text{ Diện tích xung}$$

$$\text{quanh cần tính là: } S_{xq} = \pi \cdot OA \cdot SA = 4\pi\sqrt{3}$$

Nhận xét: Điểm mẫu chốt của bài toán nằm ở việc lấy thêm điểm I

Câu 34. Đáp án A.

Hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao thì sẽ có chiều cao

$$\text{bằng chiều cao của tam giác đó, tức là } h = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{đường kính bằng cạnh tam giác } \Rightarrow 2r = a \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}$$

$$\text{Thể tích của khối nón đó là } V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{24}$$

Gọi R là bán kính khối cầu có cùng thể tích với

$$\text{khối nón trên thì ta có } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{24}$$

$$\Rightarrow R^3 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{32} \Leftrightarrow R = \frac{a \sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4} \Rightarrow \text{Diện tích khối cầu}$$

$$\text{là } S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \frac{\sqrt[3]{12}}{16} = \frac{a^2 \pi \sqrt[3]{12}}{4}$$

Câu 35. Đáp án: B.

Chỉ có hai hình đầu và cuối là đa diện lồi.

Câu 36. Đáp án C.

$$\text{Phương trình trục Oy là: } \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \text{ có vecto pháp}$$

$$\text{tuyến } \vec{u} = (0; 1; 0)$$

Gọi $M(0; t; 0)$ là hình chiếu của I trên Oy

$$\Rightarrow \vec{IM} = (-3; t-3; 4)$$

$$\vec{IM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \vec{IM} = (-3; 0; 4) \Rightarrow IM = 5$$

Bán kính mặt cầu chính là khoảng cách từ I đến Oy hay IM

Câu 37. Đáp án B.

$$\text{Mặt cầu (S): } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$$

$$\text{Suy ra mặt cầu (S) có tâm } I(1; -2; -3)$$

Khoảng cách từ I đến $(\alpha): 4x - 2y + 3z + 1 = 0$ là

$$d = \frac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2}} = 0$$

Vậy mặt cầu (S) không tiếp xúc với (α) ; (α) đi qua I và (α) cắt (S) theo một đường tròn

Câu 38. Đáp án C.

Nhận thấy rằng nếu MC vuông góc với (ABC) thì MC sẽ vuông góc với các đường nằm trong mặt phẳng (ABC). Từ đó ta sẽ có 2 phương trình là

$$\vec{CM} \cdot \vec{AB} = 0; \vec{CM} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\text{Gọi } M(0; b; c) \Rightarrow \vec{CM} = (-3; b; c-4)$$

$$\text{Dễ dàng tính được } \vec{AB} = (-1; 2; 0); \vec{AC} = (2; 0; 4);$$

$$\vec{CM} \cdot \vec{AB} = 0; \vec{CM} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 1 + 2b = 0 \\ -3 \cdot 2 + 4(c-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(0; -\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

Câu 39. Đáp án B.

Hai mặt phẳng song song với nhau khi vecto pháp tuyến của chúng tỉ lệ với nhau.

Hai mặt phẳng đã cho đều đã biết hệ số của z nên ta có thể dễ dàng tính tỉ lệ của 2 vecto pháp tuyến

$$\text{là } k = \frac{-6}{3} = -2. \text{ Do đó:}$$

$$m = 2 \cdot (-2) = -4; l = \frac{-6}{-2} = 3 \Leftrightarrow (l; m) = (3; -4)$$

Câu 40. Đáp án D.

Ta có $\vec{u}_d = (2; 4; 1); \vec{n}_p = (1; 1; 1) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_p \neq 0$.

Vậy (d) cắt (P), loại đáp án A và C

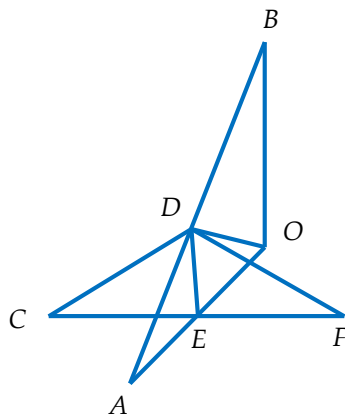
Thử hai giá trị điểm M ở hai đáp án B và D ta thấy đáp án D thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 41. Đáp án B. Đây là bài toán đã được nêu từ một công thức trong đề 4: cực trị của hàm $y = \frac{u}{v}$

luôn nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{u'}{v'}$. Do đó

parabol đó là: $y = \frac{3x^2 - 6x + 3}{1}$.

Câu 42. Đáp án C.



Gọi E là trung điểm AO, gọi $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ là điểm đối xứng của C qua E. Khi đó vì tam giác ODA vuông tại D nên $DE = EO = EA = EC = EF = \frac{1}{2}$ vậy tam giác CDF vuông cân tại D mà $FD = \sqrt{EF^2 + ED^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy ta mặt cầu đó tâm F bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là mặt cầu cố định cần tìm.

Câu 43. Đáp án B.

Chi phí mỗi ngày là: $C = 16m + 27n$ USD trong đó: $q(m; n) = m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}} \geq 40 \Leftrightarrow n \geq \frac{64000}{m^2}$.

Do vậy: $C \geq 16m + \frac{1728000}{m^2} = 8m + 8m + \frac{1728000}{m^2}$
 $\geq 3\sqrt{(8m)(8m)\left(\frac{1728000}{m^2}\right)} = 1440$ USD.

Câu 44. Đáp án C.

$$\int_0^1 xe^{-x} \ln(1+x) dx = -\int_0^1 x \ln(1+x) de^{-x}$$

$$= -xe^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right) dx$$

$$= -xe^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \ln(1+x) dx + \int_0^1 e^{-x} \frac{x}{1+x} dx$$

$$= -xe^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x) de^{-x} + \int_0^1 e^{-x} \frac{x}{1+x} dx$$

$$= -xe^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 - e^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x} dx + \int_0^1 e^{-x} \frac{x}{1+x} dx$$

$$= -xe^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 - e^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= -xe^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 - e^{-x} \ln(1+x) \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1 + \ln 4}{e}$$

Câu 45. Đáp án D.

Đặt $z = a + bi$ và $t = |1+z|$. Khi đó:

$$t^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 1 + |z|^2 + z + \bar{z} = 2 + 2a \Rightarrow a = \frac{t^2 - 2}{2}$$

Ta có:

$$|z^2 - z + 1| = |a^2 - b^2 + 2abi - a - bi + 1|$$

$$= \sqrt{(a^2 - b^2 - a + 1)^2 + b^2(2a - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow |z^2 - z + 1| = \sqrt{(2a^2 - a)^2 + b^2(2a - 1)^2}$$

$$= |2a - 1| = |t^2 - 3|$$

Vậy $|z+1| + |z^2 - z + 1| = t + |t^2 - 3|$. Chú ý rằng:

$$t = |1+z| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{2+2a} \in [0; 2] \text{ vì } a^2 \leq 1.$$

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2 - 3|$ với $t \in [0; 2]$. Ta có:

Trường hợp 1:

$$t \in [0; \sqrt{3}] \Rightarrow f(t) = t + 3 - t^2$$

$$\Rightarrow f'(t) = 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vì } f(0) = 3; f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\text{do đó } \max = \frac{13}{4}; \min = \sqrt{3}.$$

Trường hợp 2:

$$t \in [\sqrt{3}; 2] \Rightarrow f(t) = t + t^2 - 3 \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 > 0.$$

Hàm đồng biến.

$$\min = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}; \max = f(2) = 3$$

Kết luận: Giá trị lớn nhất là $\frac{13}{4}$ khi và chỉ khi

$$z = -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i.$$

Giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Câu 46. Đáp án C. Gọi

$$B(b-1; b; b), C(c-1; c; c) \Rightarrow G\left(\frac{b+c-2}{3}; \frac{b+c}{3}; \frac{b+c+1}{3}\right)$$

Tam giác ABC vuông tại A do đó

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 3bc - 2(b+c) + 2 = 0.$$

G nằm trên mặt phẳng (P) do đó $b+c=1$. Vậy giải ra ta được $B(0;1;1), C(-1;0;0)$.

Câu 47. Đáp án A.

$$|(1-i)z+2|=1 \Leftrightarrow \left| (1-i)^2 \frac{z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| -2i \frac{z}{1-i} + 2 \right| = 1$$

Đặt $\frac{z}{1-i} = x + yi$. Khi đó:

$$|-2i(x+yi)+2|=1 \Leftrightarrow |(y+1)-xi| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$$

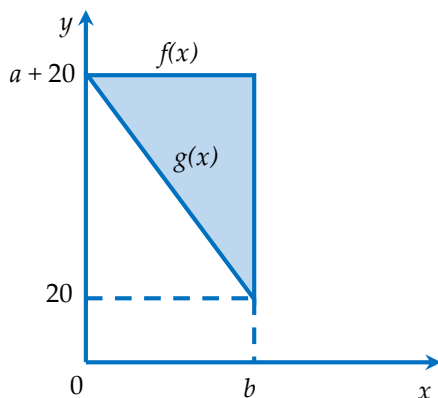
Câu 48. Đáp án B.

Công thức diện tích của parabol:

$$S = \frac{4}{3}x\sqrt{1-x^2}. \text{ Thể tích cần tìm:}$$

$$V = \int_0^1 \frac{4}{3}x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{4}{9} \text{ (đvtt)}$$

Câu 49. Đáp án B.



Để tiện cho việc tính toán ta thay x, y lần lượt bởi a, b . Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ trên.

Ta có $y = f(x) = a+20$. Còn phương trình đường thẳng $y = g(x) = x$ đi qua hai điểm $A(b;20)$ và $B(0;a+20)$ là:

$$\overrightarrow{AB} = (-b; a) \Rightarrow ax + b(y - a - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = g(x) = -\frac{a}{b}x + a + 20$$

Thể tích phần khảm đài của đấu trường La Mã là:

$$V = \frac{1}{2}\pi \int_0^b \left((a+20)^2 - \left(-\frac{a}{b}x + a + 20 \right)^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int_0^b \left(2\frac{a}{b}x(a+20) - \frac{a^2}{b^2}x^2 \right) dx = \pi \left(\frac{a^2b}{3} + 10ab \right)$$

Thay $a = 100 - b$ ta được:

$$V = \frac{1}{3}\pi(b^3 - 230b^2 + 13000b) \text{ khi đó:}$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi(3b^2 - 460b + 13000) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{230 - 10\sqrt{139}}{3}$$

Từ đây ta có:

$$V(0) = 0; V(100) = 0; V\left(\frac{230 - 10\sqrt{139}}{3}\right) \approx 216799.$$

Câu 50. Đáp án B.

$$\text{Đặt } 3^a = 5^b = 15^c = k.$$

Khi đó: $3 = k^{\frac{1}{a}}; 5 = k^{\frac{1}{b}}; 15 = k^{\frac{1}{c}}$. Vì $3.5 = 15$ do đó:

$$k^{\frac{1}{a}}k^{\frac{1}{b}} = k^{\frac{1}{c}}$$

Khi đấy: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c} \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$. Do vậy:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow P = (a+b+c)^2 - 4(a+b+c) = (a+b+c-2)^2 - 4 \geq -4$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -4 khi a, b, c là các số thực khác 0 thay đổi nhưng luôn

$$\text{thỏa mãn: } \begin{cases} a+b+c=2 \\ ab+bc+ca=0 \\ 3^a=5^b=15^{-c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ -a^2 \log_5 3 \log_{15} 3 + a(2-a) = 0 \\ b = a \log_5 3; c = -a \log_{15} 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{1 + \log_5 3 \log_{15} 3} \\ b = \frac{2 \log_5 3}{1 + \log_5 3 \log_{15} 3} \\ c = -\frac{2 \log_{15} 3}{1 + \log_5 3 \log_{15} 3} \end{cases}$$