

ĐỀ SỐ 7

SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2017

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 3 + \frac{1}{x-3}$.

- A. $y = -3$. B. $x = 3$. C. $x = -3$. D. $y = 3$.

Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5$ và đường thẳng $y = 9$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Tính $x_1 + x_2$.

- A. $x_1 + x_2 = 3$. B. $x_1 + x_2 = 0$.
C. $x_1 + x_2 = 18$. D. $x_1 + x_2 = 5$.

Câu 3: Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây, không có cực trị?

- A. $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$. B. $y = -x^4 - 4x^2 + 3$.
C. $y = x^3 - 3x + 5$. D. $y = \frac{x+4}{x-1}$.

Câu 4: Tìm các khoảng đồng biến hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(1; +\infty)$.
C. $(1; 3)$. D. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		+		+
y	-2	$+\infty$	-1	$+\infty$	2

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $[-2; 2]$. B. $(-2; 2)$.
C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 6: Tìm điểm cực đại x_{CD} (nếu có) của hàm số $y = \sqrt{x-3} - \sqrt{6-x}$.

- A. $M(0; 2; 1)$.
B. $x_{CD} = 6$.

C. $x_{CD} = \sqrt{6}$.

D. Hàm số không có điểm cực đại.

Câu 7: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x) = 0,024x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

- A. 20 mg. B. 0,5 mg. C. 2,8 mg. D. 15 mg.

Câu 8: Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 20}{x^2 - 5x - 14}$.

- A. $x = -2$ và $x = 7$. B. $x = -2$.
C. $x = 2$ và $x = -7$. D. $x = 7$.

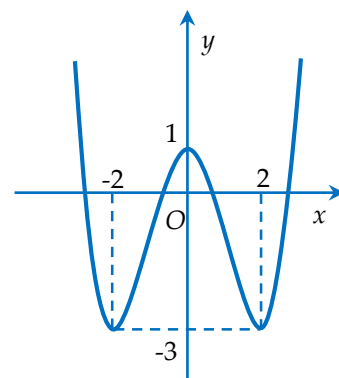
Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2 + \tan^2 x} = m + \tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

- A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. B. $-1 < m < 1$.
C. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + (1 - m^2)x + 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía khác nhau đối xứng với trục tung?

- A. $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{3}$. B. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.
C. $-1 < m < 1$. D. $-1 < m < 1$.

Câu 11: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^4 + 8x^2 + 1$. B. $y = x^4 - 8x^2 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. D. $y = |x|^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{-2}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.

B. $D = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.

C. $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty \right)$.

D. $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{\frac{2}{3}} |x|$

A. $y' = \frac{\ln 3}{x \ln 2}$. B. $y' = \frac{\ln 3}{|x| \ln 2}$.

C. $y' = \frac{1}{|x|(\ln 2 - \ln 3)}$. D. $y' = \frac{1}{x(\ln 2 - \ln 3)}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \frac{2^x}{5^{x^2-1}}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x > (x^2 - 1) \cdot \log_2 5$.

B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1 + \log_2 5} > \frac{x^2 - 1}{1 + \log_2 5}$.

C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \cdot \log_{\frac{1}{3}} 2 > (x^2 - 1) \cdot \log_2 5$.

D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \cdot \ln 2 > (x^2 - 1) \cdot \ln 5$.

Câu 15: Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_3(1 - x^2) \leq \log_{\frac{1}{3}}(1 - x)$

A. $x = 0$. B. $x = 1$.

C. $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. D. $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 16: Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\log_m 8m = \frac{3+a}{a}$. B. $\log_m 8m = (3-a)a$.

C. $\log_m 8m = \frac{3-a}{a}$. D. $\log_m 8m = (3+a)a$.

Câu 17: Một học sinh giải bất phương trình:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{-5}$$

Bước 1: Điều kiện $x \neq 0$.

Bước 2: Vì $0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ nên

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{-5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 5$$

Bước 3: Từ đó suy ra $1 \leq 5x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[\frac{1}{5}; +\infty \right)$.

A. Sai ở bước 1.

B. Sai ở bước 2.

C. Sai ở bước 3.

D. Đúng.

Câu 18: Cho hàm số $y = \left(\frac{3}{4} \right)^{x^2 - 2x + 2}$. Trong các

khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 19: Với những giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = 3^{x+1}$ nằm phía trên đường thẳng $y = 27$.

A. $x > 2$. B. $x > 3$. C. $x \leq 2$. D. $x \leq 3$.

Câu 20: Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức:

$$P(t) = 100 \cdot \left(0,5 \right)^{\frac{t}{5350}} \%$$

Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21%. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

A. 3574 (năm).

B. 3754 (năm).

C. 3475 (năm).

D. 3547 (năm).

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + f\left(\frac{3}{2015}\right) + \dots + f\left(\frac{2013}{2015}\right) + f\left(\frac{2014}{2015}\right)$$

A. 2014. B. 2015. C. 1008. D. 1007.

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(2x+1)$.

A. $\int f(x)dx = \cos(2x+1) + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$.

D. $\int f(x)dx = -\cos(2x+1) + C$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn:

$$\int_0^{10} f(x)dx = 7, \int_2^6 f(x)dx = 3.$$

Tính $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P = 10$. B. $P = 4$. C. $P = 7$. D. $P = -4$.

Câu 24: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm

số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 + 2$. B. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$.

C. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 - 2$. D. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 - 2$.

Câu 25: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x \cos x dx$.

A. $I = 2$. B. $I = -2$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

Câu 26: Giả sử:

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3; a, b \in \mathbb{Q}.$$

Tính $P = a.b$.

A. $P = 8$. B. $P = -6$. C. $P = -4$. D. $P = -5$.

Câu 27: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V = -\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $V = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $V = \pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $V = \pi\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 28: Một vận động viên đua xe F đang chạy với vận tốc $10(\text{m/s})$ thì anh ta tăng tốc với vận tốc $a(t) = 6t(\text{m/s}^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian $10(\text{s})$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A. 1100m.

B. 100m.

C. 1010m.

D. 1110m.

Câu 29: Cho số phức $z_1 = 1+3i$ và $z_2 = 3-4i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $\sqrt{17}$.

B. $\sqrt{15}$.

C. 4.

D. 8.

Câu 30: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. 15.

B. 20.

C. 19.

D. 17.

Câu 31: Tìm điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (2+i)\bar{z} = 3+i$.

A. $(1;-1)$.

B. $(1;2)$.

C. $(1;1)$.

D. $(-1;1)$.

Câu 32: Cho số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Tính $z^5 + z^6 + z^7 + z^8$.

A. 4.

B. 0.

C. $4i$.

D. 2.

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z = -1+i$.

B. $z = -2+2i$.

C. $z = 2+2i$.

D. $z = 3+2i$.

Câu 34: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2.$$

A. $P = 1-i$.

B. $P = -1-i$.

C. $P = -1$.

D. $P = 1+i$.

Câu 35: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $a\sqrt{2}$, các cạnh

bên có chiều dài là $2a$. Tính chiều cao của hình chóp đó theo a .

- A. $a\sqrt{2}$. B. $2a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 36: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Tổng số đỉnh, số cạnh và số mặt của một hình tứ diện đều bằng 14.

B. Số cạnh của một hình hai mươi mặt đều bằng 30.

C. Số mặt của một hình mười hai mặt đều bằng 12.

D. Số đỉnh của một hình bát diện đều bằng 8.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC=a$, $ACB=60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a .

- A. $V = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = a^3\sqrt{6}$.
C. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 39: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=2$, $AC=\sqrt{5}$ quay xung quanh cạnh AC tạo thành hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

- A. $S_{xq} = 2\sqrt{5}\pi$. B. $S_{xq} = 12\pi$.
C. $S_{xq} = 6\pi$. D. $S_{xq} = 3\sqrt{5}\pi$.

Câu 40: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

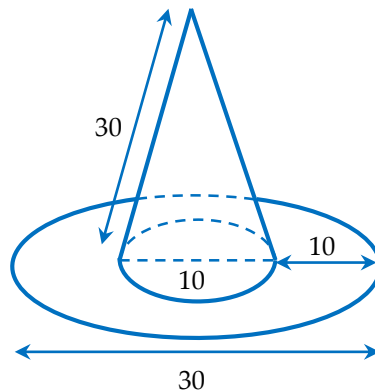
- A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.
C. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt

phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $\frac{5\pi a^3\sqrt{15}}{18}$. B. $\frac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$.
C. $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 42: Tính diện tích vải cần có để may một cái mũ có hình dạng và kích thước (cùng đơn vị đo) được cho bởi hình vẽ bên (không kể riềm, mép)



- A. 350π . B. 400π .
C. 450π . D. 500π .

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0; 2; 1)$ và $N(1; 3; 0)$. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng Oxz .

- A. $E(2; 0; 3)$. B. $H(-2; 0; 3)$.
C. $F(2; 0; -3)$. D. $K(-2; 1; 3)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 3)$ và $B(1; -2; 1)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B .

- A. $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$.
B. $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$.
C. $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.
D. $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{1-z}{-2}$ và

$$d': \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' .

- A. d và d' song song với nhau.
 B. d và d' trùng nhau.
 C. d và d' cắt nhau.
 D. d và d' chéo nhau.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 0; 2)B(2; -1; 3)$, Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B .

A. $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=2+t \end{cases}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

C. $\Delta: x-y+z-3=0$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

- A. $(Q): 2y+3z-1=0$.
 B. $(Q): 2x+3z-11=0$.
 C. $(Q): 2y+3z-12=0$.
 D. $(Q): 2y+3z-11=0$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$

và cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-18=0$. Tìm phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) đồng thời (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

- A. $(Q): 2x+2y-z+22=0$.
 B. $(Q): 2x+2y-z-28=0$.
 C. $(Q): 2x+2y-z-18=0$.
 D. $(Q): 2x+2y-z+12=0$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -3; 2)$, $B(1; 0; 1)$, $C(2; 3; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

- A. $3x-y-3z=0$. B. $3x+y+3z-6=0$.
 C. $15x-y-3z-12=0$. D. $y+3z-3=0$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. $(P): x+2y+3z-11=0$.
 B. $(P): x+2y+3z-14=0$.
 C. $(P): x+2y+z-14=0$.
 D. $(P): x+y+z-6=0$.

ĐÁP ÁN

1.D	6.D	11.D	16.A	21.D	26.B	31.C	36.D	41.B	46.A
2.B	7.A	12.A	17.C	22.B	27.C	32.B	37.C	42.A	47.D
3.D	8.D	13.D	18.C	23.B	28.A	33.C	38.B	43.B	48.D
4.D	9.C	14.C	19.A	24.B	29.A	34.C	39.C	44.A	49.D
5.B	10.B	15.A	20.D	25.B	30.B	35.D	40.C	45.A	50.B

Đính chính:

– Câu 20: Sửa đề thành “ $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}} \%$ ”

ĐÁP ÁN

1D	2B	3D	4D	5B	6D	7A	8D	9C	10B
11D	12A	13D	14C	15A	16A	17C	18C	19A	20D
21D	22B	23B	24B	25B	26B	27C	28A	29A	30B
31C	32B	33C	34C	35D	36D	37C	38B	39C	40C
41B	42A	43B	44A	45A	46A	47D	48D	49D	50B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 5: Đáp án B.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ cũng là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (song song với Ox).

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi đồ thị $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Câu 9: Đáp án C.

$$\text{Điều kiện: } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Phương trình } m\sqrt{2 + \tan^2 x} = m + \tan x \Leftrightarrow m = \frac{\tan x}{\sqrt{2 + \tan^2 x} - 1} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \tan x, t \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành: } m = \frac{t}{\sqrt{2 + t^2} - 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{\sqrt{2 + t^2} - 1} \text{ trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{(\sqrt{2 + t^2} - 1) - t \cdot \frac{t}{\sqrt{2 + t^2}}}{(\sqrt{2 + t^2} - 1)^2} = \frac{2 - \sqrt{2 + t^2}}{\sqrt{2 + t^2} (\sqrt{2 + t^2} - 1)^2};$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 + t^2} = 2 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{Giới hạn } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{\frac{2}{t^2} + 1} - \frac{1}{t}} = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{t^2} + 1} - \frac{1}{t}} = 1.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	-1		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	1

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm thực khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $f(t)$ tại ít nhất một điểm

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

Câu 20: Đáp án D.

Khi phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Cacbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21% nên ta có:

$$65,21 = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}} = 0,6521 \Leftrightarrow \frac{t}{5750} = \log_{0,5}(0,6521) \Leftrightarrow t \approx 3547.$$

Câu 21: Đáp án D.

Phân tích: Ta có $f(1-x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x} + 2} = \frac{4}{2(4^x + 2)} = \frac{2}{4^x + 2}.$

Suy ra $f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{2}{4^x + 2} = 1.$

Lời giải:

Ta có $S = f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + f\left(\frac{3}{2015}\right) + \dots + f\left(\frac{2013}{2015}\right) + f\left(\frac{2014}{2015}\right)$

$$= \left[f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2014}{2015}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2015}\right) + f\left(\frac{2013}{2015}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1007}{2015}\right) + f\left(\frac{1008}{2015}\right) \right]$$

$$= 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (tổng của 1007 số 1).}$$

Vậy $S = 1007.$

Câu 24: Đáp án B.

Cách 1: Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} \frac{d(1 + 3 \cos x)}{-3 \sin x}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1 + 3 \cos x)}{1 + 3 \cos x} = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{2}{3} \ln 2.$$

$$\text{Mà } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \text{ nên } F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2 - \frac{2}{3} \ln 2.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{1+3\cos x} \frac{d(1+3\cos x)}{-3\sin x}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C.$$

$$\text{Từ giả thiết: } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow -\frac{1}{3} \ln\left|1+3\cos\frac{\pi}{2}\right| + C = 2 \Leftrightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } F(0) = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos 0| + 2 = -\frac{1}{3} \ln 4 + 2 = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$$

Câu 26: Đáp án B.

Nhắc lại lý thuyết về tích phân bất định $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$, với $a \neq 0$ và phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

- Ta phân tích được $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$.
- Gọi α, β là các hệ số thỏa mãn:

$$\alpha(x-x_1) + \beta(x-x_2) = mx+n \Leftrightarrow (\alpha+\beta)x - (\alpha x_1 + \beta x_2) = mx+n$$

Sử dụng đồng nhất thức, ta được $\begin{cases} \alpha+\beta = m \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = -n \end{cases}$, giải hệ phương trình ta tìm được α, β .
- Khi đó $I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\alpha(x-x_1) + \beta(x-x_2)}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx$

$$\Rightarrow I = \int \left[\frac{\alpha}{a(x-x_2)} + \frac{\beta}{a(x-x_1)} \right] dx = \frac{\alpha}{a} \int \frac{dx}{x-x_2} + \frac{\beta}{a} \int \frac{dx}{x-x_1}.$$

Phân tích: Ta thấy phương trình $x^2+4x+3=0$ có hai nghiệm $x_1=-1, x_2=-3$ nên $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$.

$$\text{Gọi } \alpha, \beta \text{ là các hệ số thỏa mãn } \alpha(x+1) + \beta(x+3) = x-1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)x + (\alpha+3\beta) = x-1.$$

$$\text{Đồng nhất hệ số, ta có hệ phương trình } \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha+3\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } x-1 = 2(x+1) - (x+3).$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \frac{2(x+1) - (x+3)}{(x+1)(x+3)} dx = \int_0^2 \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right) dx.$$

Lời giải:

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2 \ln|x+3| \Big|_0^2 - \ln|x+1| \Big|_0^2 = 2 \ln 5 - 3 \ln 3.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}. \text{ Vậy } P=ab=-6.$$

Câu 27: Đáp án C.

Nhắc lại lý thuyết: Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$,

$$x=b(a < b) \text{ khi quay xung quanh trục } Ox \text{ là: } V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Lời giải:

Thể tích khối tròn xoay là:

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \pi \left(\tan x - x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ (đvtt)}.$$

Câu 28: Đáp án A.

Phân tích: Ta có $s' = v(t) \Rightarrow s = \int v(t) dt$ và $a(t) = v'(t) \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt$.

Lời giải: Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int 6t dt = 3t^2 + C$.

Theo bài ra, ta có $v(0) = 10 \Leftrightarrow C = 10$. Suy ra $v(t) = 3t^2 + 10$.

Vậy quãng đường mà anh ta đi được trong khoảng thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (3t^2 + 10) dt = 1100(m)$.

Câu 32: Đáp án B.

$$\text{Ta có } z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2017} = \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \right]^{2017} = i^{2017} = i \cdot (i^2)^{1008} = i.$$

$$\text{Khi đó: } P = z^5 + z^6 + z^7 + z^8 = i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = (i^2)^2 \cdot i + (i^2)^3 + (i^2)^3 \cdot i + (i^2)^4$$

$$\Rightarrow P = (-1)^2 \cdot i + (-1)^3 + (-1)^3 \cdot i + (-1)^4 = i - 1 - i + 1 = 0.$$

Câu 33: Đáp án C.

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có } |z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(x-2) + (y-4)i| = |x + (y-2)i|$$

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^2 dx$$

0.6741915533

$$\pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

0.6741915533

STUDY TIP

Hàm vận tốc là đạo hàm của hàm quãng đường, hàm gia tốc là đạo hàm của hàm vận tốc.

$$\int_0^{10} (3x^2 + 10) dx$$

1100

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x. \text{ Suy ra } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4-x)^2}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x^2 - 4x + 4) + 8} = \sqrt{2(x-2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2; y = 4 - x = 2$. Vậy số phức cần tìm là $z = 2 + 2i$.

Câu 34: Đáp án C.

Cách 1: Phương pháp tự luận

STUDY TIP
Với số phức z , ta luôn có:
 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$$\text{Ta có } \begin{cases} z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 = 1 \\ z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2 = 1 \\ (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1 - z_2|^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1) - (z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_1)$$

$$\Rightarrow z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 1.$$

$$\text{Lại có } \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} + \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} + \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_1|^2} = z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 = 1$$

$$\text{Vậy } P = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 = \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right)^2 - 2 = -1.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm (chuẩn hóa số liệu)

$$\text{Chọn } z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ thỏa mãn } |z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|.$$

$$\text{Suy ra } P = \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} \right)^2.$$

Sử dụng máy tính CASIO, ta tính được $P = -1$.

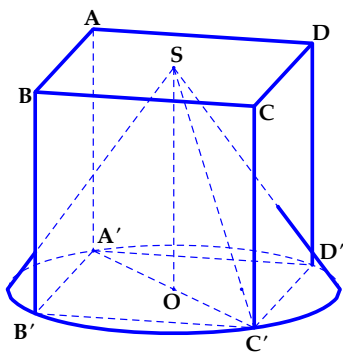
Câu 40: Đáp án C.

Phân tích: Gọi S, O lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Suy ra hình nón đã cho có đường cao là $h = SO = AA'$, bán kính đáy của hình nón là $r = OC' = \frac{1}{2}A'C'$ và đường sinh $l = SC'$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } A'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow r = OC' = \frac{1}{2}A'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}; h = SO = AA' = a.$$



Suy ra đường sinh của hình nón là $l = SC' = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

Câu 41: Đáp án B.

Phân tích: Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$ do $\triangle SAB$ đều.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC), (SAB) \cap (ABC) = AB \\ AH \subset (SAB): SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$ đều, qua G kẻ đường thẳng $d \perp (ABC) \Rightarrow d \parallel SH$ và d là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Lại có $CH \perp AB, CH \perp SH \Rightarrow CH \perp (SAB)$. Gọi K là trọng tâm của $\triangle SAB$ đều, qua K kẻ đường thẳng $d' \perp (SAB) \Rightarrow d' \parallel CH$ và d' là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

Gọi $I = d \cap d'$. Khi đó I chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = SI$.

Lời giải:

Do H là trung điểm của AB , $\triangle ABC$ và $\triangle SAB$ đều cạnh a nên $SH = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

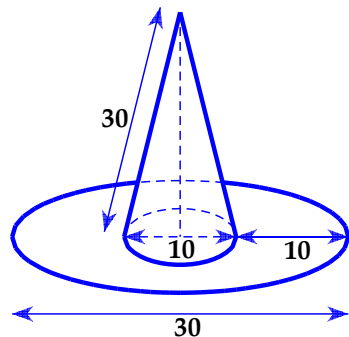
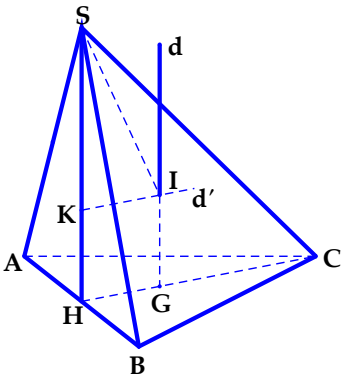
Suy ra $HG = \frac{1}{3}CH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, do G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Lại có $GHKI$ là hình chữ nhật nên $IK = GH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$\triangle SAB$ đều, K là trọng tâm nên $SK = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $R = SI = \sqrt{SK^2 + IK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$ và thể tích khối cầu ngoại

tiếp hình chóp $S.ABC$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \frac{5\pi a^3 \sqrt{15}}{54}$ (đvtt).



Câu 42: Đáp án A.

Phân tích: Dễ thấy rằng, diện tích vải để may cái mũ (kích thước và hình dạng như hình bên) bằng tổng diện tích của hai phần:

– **Phần I:** Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h , bán kính đáy $r = \frac{10}{2} = 5$ và đường sinh $l = 30$.

– **Phần II:** Diện tích của hình vành khăn được giới hạn bởi hai đường tròn bán kính lần lượt là $R = \frac{30}{2} = 15$ và $r = \frac{10}{2} = 5$.

Lời giải:

Diện tích xung quanh của phần hình trụ là: $S_1 = \pi r l = \pi \cdot 5 \cdot 30 = 150\pi$ (đvdt).

Diện tích của hình vành khăn được giới hạn bởi hai đường tròn bán kính R, r là:

$$S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi (15^2 - 5^2) = 200\pi \text{ (đvdt)}.$$

Vậy diện tích vải cần để may cái mũ là: $S = S_1 + S_2 = 150\pi + 200\pi = 350\pi$ (đvdt).

Câu 50: Đáp án B.

Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng $(P) \Rightarrow OH \perp (P)$.

Suy ra $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}$ có giá trị nhỏ nhất khi OH lớn nhất.

Với mọi điểm $M \in (P)$, ta luôn có $OH \leq OM$. Khi đó: $OH_{\max} = OM$ khi $H \equiv M$ hay $OM \perp (P)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$ nên phương trình tổng quát có dạng:

$$1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Cách 2: Phương pháp đại số

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$.

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

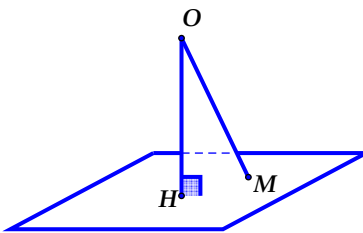
Do $M \in (P)$ nên ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$1^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{1}{b} + 3 \cdot \frac{1}{c}\right)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}.$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{3c} \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b = 3c \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 7 \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{3z}{14} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.



STUDY TIP

Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz (Bunyakovsky): Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$