

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

(Đề thi gồm 06 trang)

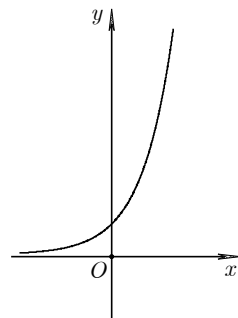
Mã đề thi 123

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2017-LẦN 3

Bài thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề
(50 câu hỏi trắc nghiệm)

Câu 1: [2D2-2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x)$ là một trong bốn hàm số được đưa ra trong các phương án A, B, C, D dưới đây. Tìm $f(x)$.



- A. $f(x) = e^x$. B. $f(x) = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$.
C. $f(x) = \ln x$. D. $f(x) = x^{\frac{e}{\pi}}$.

Câu 2: [2D1-1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(a; b)$.
B. Hàm số đã cho có cực trị trên đoạn $[a; b]$.
C. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.
D. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[a; b]$.

Câu 3: [2D3-2] Cho tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$ và $u = x^2$, $dv = \cos x \, dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$. B. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.
C. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$. D. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

Câu 4: [2D1-1] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-		+	0	-
y	$+\infty$		3		$-\infty$

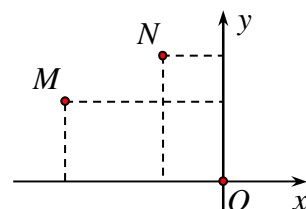
Arrows indicate the function values at the boundaries: from $+\infty$ to -1 at $x=0$, from -1 to 3 at $x=2$, and from 3 to $-\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

- A. Hàm số có hai điểm cực trị. B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
C. Hàm số có một điểm cực trị. D. Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.

Câu 5: [2D2-1] Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(e^x + 1)$ là

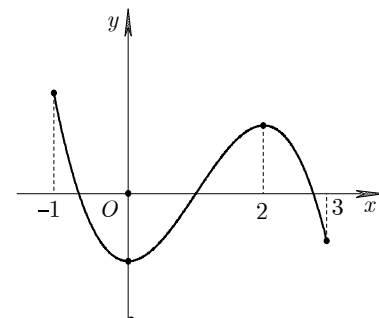
- A. $y' = \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln 2}$. B. $y' = \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$. C. $y' = \frac{2^x}{(2^x + 1) \ln 2}$. D. $y' = \frac{e^x \ln 2}{e^x + 1}$.

Câu 6: [2D4-3] Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1 , z_2 như hình vẽ bên. Khi đó khẳng định nào sau đây sai?



- A. $|z_1 - z_2| = MN$. B. $|z_1| = OM$.
C. $|z_2| = ON$. D. $|z_1 + z_2| = MN$.

Câu 7: [2D1-2] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. Hàm số có hai điểm cực đại là $x = -1, x = 2$.
 B. Hàm số có hai điểm cực tiểu là $x = 0, x = 3$.
 C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = 2$.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = -1$.

Câu 8: [2D1-2] Số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ và $y = x^2 - x - 1$ là

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 9: [2D2-2] Cho hai số thực dương x, y bất kỳ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\log_2 \frac{x^2}{y} = \frac{2\log_2 x}{\log_2 y}$. B. $\log_2 (x^2 y) = 2\log_2 x + \log_2 y$.
 C. $\log_2 (x^2 + y) = 2\log_2 x \cdot \log_2 y$. D. $\log_2 (x^2 y) = \log_2 x + 2\log_2 y$.

Câu 10: [2H1-1] Trong một hình đa diện lồi, mỗi cạnh là cạnh chung của tất cả bao nhiêu mặt?

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 11: [2D4-3] Cho z là một số phức tùy ý khác 0. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\frac{z}{\bar{z}}$ là số ảo. B. $z - \bar{z}$ là số ảo. C. $z \cdot \bar{z}$ là số thực. D. $z + \bar{z}$ là số thực.

Câu 12: [2D2-2] Tập xác định của hàm số $y = (1 - 2x)^{\frac{1}{3}}$ là:

- A. $\mathbb{R}$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Câu 13: [2D1-2] Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Câu 14: [2D1-3] Tìm m để hàm số $y = x^3 + 2x^2 - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < -\frac{4}{3}$. B. $m \leq -\frac{4}{3}$. C. $m \geq -\frac{4}{3}$. D. $m > -\frac{4}{3}$.

Câu 15: [2D3-3] Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\int \tan x \cdot dx = -\ln |\cos x| + C$. B. $\int \cot x \cdot dx = -\ln |\sin x| + C$.
 C. $\int \sin \frac{x}{2} \cdot dx = 2 \cos \frac{x}{2} + C$. D. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot dx = -2 \sin \frac{x}{2} + C$.

Câu 16: [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; -3; 1)$ lên Δ .

- A. $H(-3; -1; -2)$. B. $H(-1; -2; 0)$. C. $H(3; -4; 4)$. D. $H(1; -3; 2)$.

Câu 17: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + ay + 3z - 5 = 0$ và $(Q): 4x - y - (a+4)z + 1 = 0$. Tìm a để (P) và (Q) vuông góc với nhau.

- A. $a = 1$. B. $a = 0$. C. $a = -1$. D. $a = \frac{1}{3}$.

Câu 18: [2D2-1] Cho biểu thức $P = \sqrt{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}}$ với x là số dương khác 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $P = \sqrt[6]{x^{13}}$. B. $P = x^{\frac{13}{6}}$. C. $P = x\sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$. D. $P = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$.

Câu 19: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 6 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Oz sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 3.

- A. $M(0; 0; 21)$. B. $M(0; 0; 3)$.
C. $M(0; 0; 3), M(0; 0; -15)$. D. $M(0; 0; -15)$.

Câu 20: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 13 = 0$ là phương trình của mặt cầu.

- A. $m > 0$. B. $m \neq 0$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m < 0$.

Câu 21: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$

và $d_2: \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Tìm giá trị của k để d_1 cắt d_2 .

- A. $k = 0$. B. $k = 1$. C. $k = -1$. D. $k = -\frac{1}{2}$.

Câu 22: [2D3-2] Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x$ và $\int f(x)dx = (ax+b)e^x + c$, với a, b, c là các hằng số. Khi đó

- A. $a+b=0$. B. $a+b=3$. C. $a+b=2$. D. $a+b=1$.

Câu 23: [2D2-2] Tập xác định của hàm số $y = \ln(1 - \sqrt{x+1})$ là

- A. $[-1; 0]$. B. $[-1; +\infty)$. C. $(-1; 0)$. D. $[-1; 0)$.

Câu 24: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(-1; 1; 2)$, $N(1; 4; 3)$, $P(5; 10; 5)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. M, N, P là ba đỉnh của một tam giác.
B. $MN = \sqrt{14}$.
C. Trung điểm của NP là $I(3; 7; 4)$.
D. Các điểm O, M, N, P cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 25: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 10$ và mặt phẳng $(P): -2x + y + \sqrt{5}z + 9 = 0$. Gọi (Q) là tiếp diện của (S) tại $M(5; 0; 4)$. Tính góc giữa (P) và (Q)

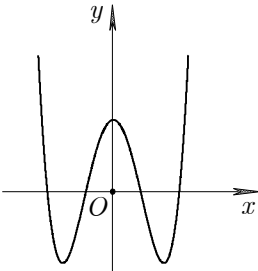
- A. 60° . B. 120° . C. 30° . D. 45° .

Câu 26: [2D2-2] Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1} \leq 0$ là:

- A. $-1 < x \leq 0$. B. $-1 \leq x \leq 0$. C. $-1 < x \leq 1$. D. $x \leq 0$.

Câu 27: [4D2-2] Biết rằng phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$) có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$. Khi đó:

- A. $b+c=2$. B. $b+c=3$. C. $b+c=0$. D. $b+c=7$.

- Câu 28:** [2D2-2] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + 1) - x$ trên đoạn $[2; 4]$ là
 A. $2\ln 2 - 3$. B. $2\ln 3 - 4$. C. -2 . D. -3 .
- Câu 29:** [3D2-3] Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2-x}$, $y = x$, $y = 0$ xung quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?
 A. $V = \pi \int_0^1 (2-x) dx + \pi \int_1^2 x^2 dx$. B. $V = \pi \int_0^2 (2-x) dx$.
 C. $V = \pi \int_0^1 x dx + \pi \int_1^2 \sqrt{2-x} dx$. D. $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx$.
- Câu 30:** [4D2-2] Cho các số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 - 3i$. Khẳng định nào sau đây là **sai** về số phức $w = z_1 \cdot \bar{z}_2$?
 A. Môđun của w là $\sqrt{65}$. B. Số phức liên hợp của w là $8 + i$.
 C. Điểm biểu diễn w là $M(8; 1)$. D. Phần thực của w là 8, phần ảo là -1 .
- Câu 31:** [2D3-2] Cho $I = \int_1^2 x\sqrt{4-x^2} dx$ và $t = \sqrt{4-x^2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
 A. $I = \sqrt{3}$. B. $I = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}}$. C. $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt$. D. $I = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}}$.
- Câu 32:** [2D1-3] Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?
 A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a < 0, b > 0, c > 0$.
 C. $a > 0, b > 0, c > 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- 
- Câu 33:** [2H1-3] Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AB' và $A'B$. Cho biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
 A. $3a^3$. B. a^3 . C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{4}$.
- Câu 34:** [2H2-3] Cho hình nón đỉnh S . Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác ngoại tiếp đường tròn đáy của hình nón và có $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$ góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối nón đã cho.
 A. $9\pi a^3$. B. $27\pi a^3$. C. $3\pi a^3$. D. $12\pi a^3$.
- Câu 35:** [2D1-2] Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$. Khi đó
 A. $M - m = 2\sqrt{2} - 2$. B. $M - m = 4$. C. $M - m = 2\sqrt{2} + 2$. D. $M - m = 2\sqrt{2}$.
- Câu 36:** [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và hai điểm $A(-1; 3; 1)$, $B(0; 2; -1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho diện tích của tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$.
 A. $C(-1; 0; 2)$. B. $C(1; 1; 1)$. C. $C(-3; -1; 3)$. D. $C(-5; -2; 4)$.

Câu 37: [2D1-2] Tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4x + 3}$ là

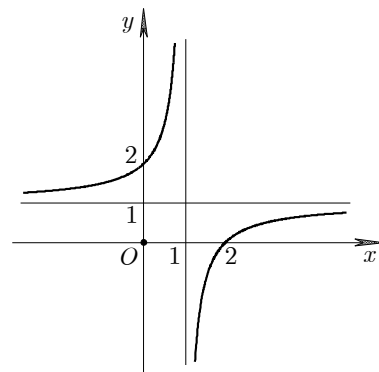
- A. $y = 1$ và $x = 3$. B. $y = 0$, $y = 1$ và $x = 3$.
C. $y = 0$, $x = 1$ và $x = 3$. D. $y = 0$ và $x = 3$.

Câu 38: [2H1-2] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° .

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. B. $2\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 39: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của m để phương trình $|f(x)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt là

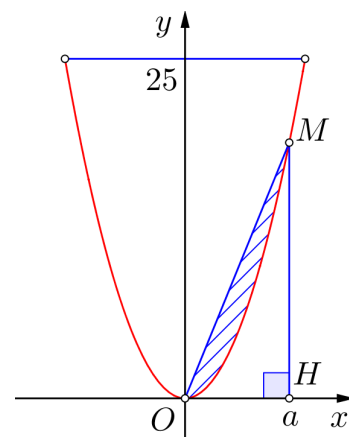
- A. $m \geq 2$ và $m \leq 1$. B. $0 < m < 1$ và $m > 1$.
C. $m > 2$ và $m < 1$. D. $0 < m < 1$.



Câu 40: [2H2-4] Cho hàm số $y = \log_2 x$. Khẳng định nào sau đây sai?

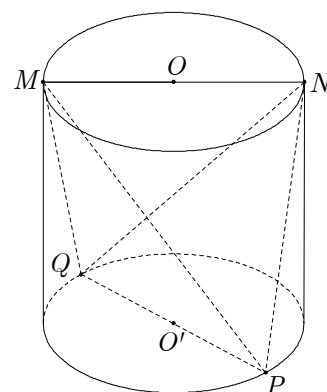
- A. Tập xác định của hàm số là $(0; +\infty)$.
B. Đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = x$.
C. Tập giá trị của hàm số là $(-\infty; +\infty)$.
D. Đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = x - 1$ tại hai điểm phân biệt.

Câu 41: [2D3-4] Ông B có một khu vườn giới hạn bởi một đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng là $y = 25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi một đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng một loại hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$.

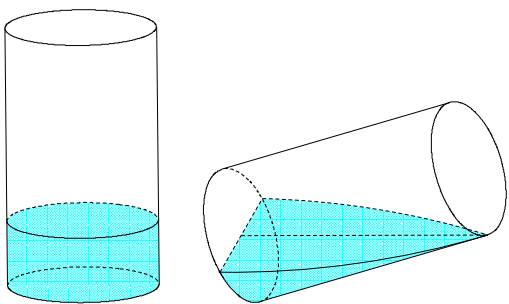


- A. $OM = 2\sqrt{5}$. B. $OM = 15$.
C. $OM = 10$. D. $OM = 3\sqrt{10}$.

Câu 42: [2H2-3] Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN , PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M , N , P , Q để thu được khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết rằng $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng 30 dm^3 . Hãy tìm thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).



- A. $101,3 \text{ dm}^3$. B. $141,3 \text{ dm}^3$.
C. $121,3 \text{ dm}^3$. D. $111,4 \text{ dm}^3$.

- Câu 43:** [2D4-4] Cho số phức z thay đổi luôn có $|z|=2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1-2i)\bar{z}+3i$ là
- A. Đường tròn $x^2+(y-3)^2=20$. B. Đường tròn $x^2+(y-3)^2=2\sqrt{5}$.
C. Đường tròn $x^2+(y+3)^2=20$. D. Đường tròn $(x-3)^2+y^2=2\sqrt{5}$.
- Câu 44:** [2H1-3] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC=2a$ và $SC \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và có $AB=a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua C và vuông góc với SA , (α) cắt SA , SB lần lượt tại D , E . Tính thể tích khối chóp $S.CDE$.
- A. $\frac{4a^3}{9}$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. $\frac{2a^3}{9}$. D. $\frac{a^3}{3}$.
- Câu 45:** [2D4-4] Cho các số phức z, w khác 0 và thỏa mãn $|z-w|=2|z|=|w|$. Phần thực của số phức $u=\frac{z}{w}$ là
- A. $a=\frac{1}{4}$. B. $a=1$. C. $a=\frac{1}{8}$. D. $a=-\frac{1}{8}$.
- Câu 46:** [0D4-3] Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)^2$ là
- A. $\max P=8$. B. $\max P=4$. C. $\max P=12$. D. $\max P=16$.
- Câu 47:** [2D3-4] Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao trong lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc.
- A. 60cm^3 . B. $15\pi\text{cm}^3$.
C. 70cm^3 . D. $60\pi\text{cm}^3$.
- 
- Câu 48:** [2H2-4] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=4a$, $CD=6a$, các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{22}$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
- A. $\frac{5a}{2}$. B. $3a$. C. $\frac{a\sqrt{85}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{79}}{3}$.
- Câu 49:** [2D1-3] Tất cả các giá trị của m để phương trình $e^x=m(x+1)$ có nghiệm duy nhất là
- A. $m>1$. B. $m<0, m\geq 1$. C. $m<0, m=1$. D. $m<1$.
- Câu 50:** [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3; 4; -4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?
- A. $H(-2; -1; 3)$. B. $I(-1; -2; 3)$.
C. $K(3; 0; 15)$. D. $J(-3; 2; 7)$.

-----HẾT-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	A	C	A	D	C	D	B	D	A	B	D	B	A	D	C	D	B	B	A	A	D	A	A
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	B	C	D	C	B	D	A	A	C	B	D	B	B	B	D	D	A	C	C	C	A	C	C	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: [2D2-2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

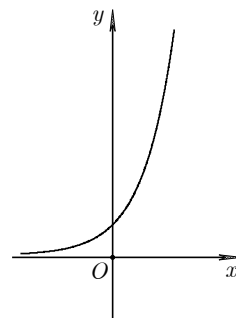
Biết rằng $f(x)$ là một trong bốn hàm số được đưa ra trong các phương án A, B, C, D dưới đây. Tìm $f(x)$.

A. $f(x) = e^x$.

B. $f(x) = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$.

C. $f(x) = \ln x$.

D. $f(x) = x^{\frac{e}{\pi}}$.



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Với $f(x) = \ln x$ và $f(x) = x^{\frac{e}{\pi}}$ thì điều kiện $x > 0$ nên loại C và D.

Với $f(x) = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$ thì $f(x)$ là hàm nghịch biến nên loại B.

Câu 2: [2D1-1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(a; b)$.

B. Hàm số đã cho có cực trị trên đoạn $[a; b]$.

C. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

D. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[a; b]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 3: [2D3-2] Cho tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$ và $u = x^2$, $dv = \cos x \, dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

B. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

C. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

D. $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx$, $dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x$.

Suy ra $I = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

Câu 4: [2D1-1] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

- A. Hàm số có hai điểm cực trị. B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
C. Hàm số có một điểm cực trị. D. Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

- A sai vì hàm số chỉ đạt cực trị tại $x = 2$.
B sai vì trên $(0; 2)$ hàm số đồng biến.
C đúng vì hàm số chỉ đạt cực trị tại $x = 2$.
D sai vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 5: [2D2-1] Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(e^x + 1)$ là

- A. $y' = \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln 2}$. B. $y' = \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$. C. $y' = \frac{2^x}{(2^x + 1) \ln 2}$. D. $y' = \frac{e^x \ln 2}{e^x + 1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: Áp dụng công thức $(\log_a u)' = \frac{u'}{\ln a \cdot u}$. Ta có: $y' = \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1) \ln 2} = \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln 2}$

Câu 6: [2D4-3] Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 như hình vẽ bên. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $|z_1 - z_2| = MN$. B. $|z_1| = OM$.
C. $|z_2| = ON$. D. $|z_1 + z_2| = MN$.

Hướng dẫn giải

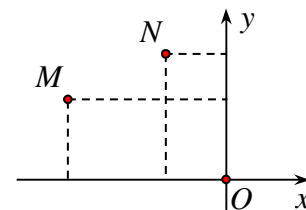
Chọn D.

Ta có $|z_1 + z_2| = MN$ là khẳng định sai.

Vì giả sử: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di; a, b, c, d \in \mathbb{R}$

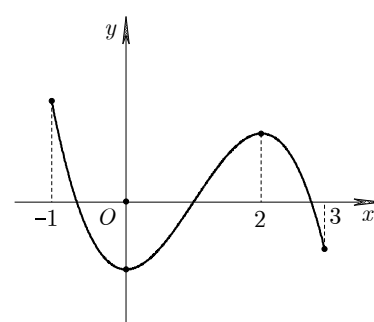
$$\Rightarrow M(a; b); N(c; d) \Rightarrow MN = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$\text{và } z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \neq MN.$$



Câu 7: [2D1-2] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có hai điểm cực đại là $x = -1, x = 2$.
B. Hàm số có hai điểm cực tiểu là $x = 0, x = 3$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = 2$.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = -1$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, cực đại tại $x = 2$.

- Câu 8:** [2D1-2] Số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ và $y = x^2 - x - 1$ là
A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

- Câu 9:** [2D2-2] Cho hai số thực dương x, y bất kỳ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\log_2 \frac{x^2}{y} = \frac{2\log_2 x}{\log_2 y}$. **B.** $\log_2 (x^2 y) = 2\log_2 x + \log_2 y$.
C. $\log_2 (x^2 + y) = 2\log_2 x \cdot \log_2 y$. **D.** $\log_2 (x^2 y) = \log_2 x + 2\log_2 y$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\log_2 (x^2 y) = \log_2 x^2 + \log_2 y = 2\log_2 x + \log_2 y$.

- Câu 10:** [2H1-1] Trong một hình đa diện lồi, mỗi cạnh là cạnh chung của tất cả bao nhiêu mặt?
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trong một hình đa diện lồi, mỗi cạnh là cạnh chung của hai mặt.

- Câu 11:** [2D4-3] Cho z là một số phức tùy ý khác 0. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** $\frac{z}{\bar{z}}$ là số ảo. **B.** $z - \bar{z}$ là số ảo. **C.** $z \cdot \bar{z}$ là số thực. **D.** $z + \bar{z}$ là số thực.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt: $z = a + bi$ ($a^2 + b^2 > 0$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$. Suy ra $\frac{z}{\bar{z}}$ không là số ảo.

- Câu 12:** [2D2-2] Tập xác định của hàm số $y = (1-2x)^{\frac{1}{3}}$ là:

- A.** $\mathbb{R}$. **B.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số xác định khi: $1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$. Vậy tập xác định là $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

- Câu 13:** [2D1-2] Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. $y' = 4x^3 - 4x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			-3			-4		$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 14: [2D1-3] Tìm m để hàm số $y = x^3 + 2x^2 - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < -\frac{4}{3}$. B. $m \leq -\frac{4}{3}$. C. $m \geq -\frac{4}{3}$. D. $m > -\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3x^2 + 4x - m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{4}{3}$.

Câu 15: [2D3-3] Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\int \tan x \cdot dx = -\ln |\cos x| + C$. B. $\int \cot x \cdot dx = -\ln |\sin x| + C$.
C. $\int \sin \frac{x}{2} \cdot dx = 2 \cos \frac{x}{2} + C$. D. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot dx = -2 \sin \frac{x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Kiểm tra lần lượt các đáp án

$$+ \int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln |\cos x| + C \Rightarrow \text{Đáp án A đúng.}$$

$$+ \int \cot x \cdot dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \ln |\sin x| + C \Rightarrow \text{Đáp án B sai.}$$

$$+ \int \sin \frac{x}{2} \cdot dx = 2 \int \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \cos \frac{x}{2} + C \Rightarrow \text{Đáp án C sai.}$$

$$+ \int \cos \frac{x}{2} \cdot dx = 2 \int \cos \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} + C \Rightarrow \text{Đáp án D sai.}$$

Câu 16: [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa

độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; -3; 1)$ lên Δ .

- A. $H(-3; -1; -2)$. B. $H(-1; -2; 0)$. C. $H(3; -4; 4)$. D. $H(1; -3; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $H \in \Delta$ nên $H(-1+2t; -2-t; 2t)$. Vì H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ nên $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0$.

$$\text{Vì } \overrightarrow{AH} = (-3+2t; 1-t; 2t-1), \vec{u}_{\Delta} = (2; -1; 2) \text{ nên } 2(2t-3) + t - 1 + 2(2t-1) = 0 \Rightarrow t = 1$$

Vậy $H(1; -3; 2)$.

Câu 17: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + ay + 3z - 5 = 0$ và $(Q): 4x - y - (a + 4)z + 1 = 0$. Tìm a để (P) và (Q) vuông góc với nhau.

- A. $a = 1$. B. $a = 0$. C. $a = -1$. D. $a = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (2; a; 3)$, $\vec{n}_{(Q)} = (4; -1; -(a + 4))$

Để (P) và (Q) vuông góc với nhau thì $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 0 \Leftrightarrow 8 - a - 3a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Câu 18: [2Đ2-1] Cho biểu thức $P = \sqrt{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}}$ với x là số dương khác 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $P = \sqrt[6]{x^{13}}$. B. $P = x^{\frac{13}{6}}$. C. $P = x\sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$. D. $P = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $P = \sqrt{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt{x^{4 + \frac{1}{3}}} = x^{\frac{13}{6}}$. Mà $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{7}{3}}$ nên chọn đáp án D.

Câu 19: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 6 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Oz sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 3.

- A. $M(0; 0; 21)$. B. $M(0; 0; 3)$.
C. $M(0; 0; 3), M(0; 0; -15)$. D. $M(0; 0; -15)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì M thuộc tia Oz nên $M(0; 0; z_M)$ với $z_M > 0$.

Vì khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 3 nên ta có $\frac{|z_M + 6|}{3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} z_M = 3 \\ z_M = -15 \end{cases}$

Vì $z_M > 0$ nên $M(0; 0; 3)$.

Câu 20: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 13 = 0$ là phương trình của mặt cầu.

- A. $m > 0$. B. $m \neq 0$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 13 = 0$ là phương trình của mặt cầu thì

$$4 + m^2 + 3^2 - 13 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Câu 21: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$

$$\text{và } d_2: \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}. \text{ Tìm giá trị của } k \text{ để } d_1 \text{ cắt } d_2.$$

A. $k = 0$.

B. $k = 1$.

C. $k = -1$.

D. $k = -\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Giả sử } M = d_1 \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} M \in d_1 \Rightarrow M(1+m; 2-2m; 3+m) \\ M \in d_2 (*) \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} 1+m = 1+kt & (1) \\ 2-2m = t & (2) \\ 3+m = -1+2t & (3) \end{cases}$$

$$(2), (3) \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ t = 2 \end{cases} \xrightarrow{(1)} k = 0.$$

Câu 22: [2D3-2] Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x$ và $\int f(x)dx = (ax+b)e^x + c$, với a, b, c là các hằng số. Khi đó

A. $a+b=0$.

B. $a+b=3$.

C. $a+b=2$.

D. $a+b=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta sử dụng kết quả $\int g(x).de^x = g(x).e^x - \int e^x.d(g(x)) = g(x).e^x - \int e^x.g'(x)dx$.

$$\Rightarrow \int (g'(x) + g(x))e^x dx = g(x).e^x. \text{ Do đó ta có } f(x) = \int f'(x)dx = \int (x+1)e^x dx = x.e^x$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int (x-1+1)e^x dx = (x-1)e^x \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

Do đó $a+b=0$.

Câu 23: [2D2-2] Tập xác định của hàm số $y = \ln(1-\sqrt{x+1})$ là

A. $[-1; 0]$.

B. $[-1; +\infty)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $[-1; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 1-\sqrt{x+1} > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow D = [-1; 0).$$

Câu 24: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(-1; 1; 2)$, $N(1; 4; 3)$, $P(5; 10; 5)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. M, N, P là ba đỉnh của một tam giác.

B. $MN = \sqrt{14}$.

C. Trung điểm của NP là $I(3; 7; 4)$.

D. Các điểm O, M, N, P cùng thuộc một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (2; 3; 1), \overrightarrow{MP} = (6; 9; 3) = 3(2; 3; 1)$$

Dễ thấy $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ cùng phương. Suy ra M, N, P thẳng hàng nên A sai.

- Câu 25:** [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 10$ và mặt phẳng $(P): -2x + y + \sqrt{5}z + 9 = 0$. Gọi (Q) là tiếp diện của (S) tại $M(5; 0; 4)$. Tính góc giữa (P) và (Q)
- A. 60° . B. 120° . C. 30° . D. 45° .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n_p} = (-2; 1; \sqrt{5})$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 4)$, $R = \sqrt{10}$. Suy ra (Q) nhận $\vec{IM} = (3; 1; 0)$ làm VTPT.

Suy ra góc giữa (P) và (Q) là: $\cos((P), (Q)) = \cos \alpha = \frac{|\vec{IM} \cdot \vec{n_p}|}{|\vec{IM}| \cdot |\vec{n_p}|} = \frac{|-6+1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

- Câu 26:** [2D2-2] Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1} \leq 0$ là:

A. $-1 < x \leq 0$. B. $-1 \leq x \leq 0$. C. $-1 < x \leq 1$. D. $x \leq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

$$\log_2(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \log_2(x+1) - \log_2\sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $-1 < x \leq 0$.

- Câu 27:** [4D2-2] Biết rằng phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$) có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$. Khi đó:

A. $b+c = 2$. B. $b+c = 3$. C. $b+c = 0$. D. $b+c = 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$

$$\Leftrightarrow (1+2i)^2 + b(1+2i) + c = 0 \Leftrightarrow -3+4i+b+2bi+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3+b+c=0 \\ 4+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b+c=3.$$

- Câu 28:** [2D2-2] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + 1) - x$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. $2\ln 2 - 3$. B. $2\ln 3 - 4$. C. -2 . D. -3 .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$y = \ln(x^2 - 2x + 1) - x$ xác định và liên tục trên $[2; 4]$.

$$y' = \frac{(x^2 - 2x + 1)'}{x^2 - 2x + 1} - 1 = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} - 1 = \frac{2-x+1}{x-1} = \frac{3-x}{x-1}$$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $y(2) = -2$, $y(4) = \ln 9 - 4$, $y(3) = \ln 4 - 3 \Rightarrow \min_{[2;4]} y = -2$.

Câu 29: [3D2-3] Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2-x}$, $y = x$, $y = 0$ xung quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \pi \int_0^1 (2-x) dx + \pi \int_1^2 x^2 dx$.

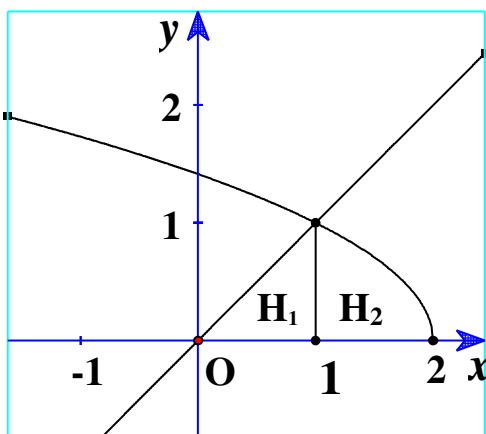
B. $V = \pi \int_0^2 (2-x) dx$.

C. $V = \pi \int_0^1 x dx + \pi \int_1^2 \sqrt{2-x} dx$.

D. $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi H_1 là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x, y = 0, x = 1 \Rightarrow$ thể tích khi quay hình H_1 quanh trục Ox là: $V_1 = \pi \int_0^1 x^2 dx$.

Gọi H_2 là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2-x}, y = 0, x = 1 \Rightarrow$ thể tích khi quay hình H_2 quanh trục Ox là: $V_2 = \pi \int_1^2 (2-x) dx$.

$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx.$$

Câu 30: [4D2-2] Cho các số phức $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 2-3i$. Khẳng định nào sau đây là **sai** về số phức $w = z_1 \cdot \bar{z}_2$?

A. Môđun của w là $\sqrt{65}$.

B. Số phức liên hợp của w là $8+i$.

C. Điểm biểu diễn w là $M(8; 1)$.

D. Phần thực của w là 8, phần ảo là -1 .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$w = z_1 \cdot \bar{z}_2 = (1-2i)(2+3i) = 8-i.$$

Khẳng định “điểm biểu diễn w là $M(8; 1)$ ” là khẳng định sai.

Câu 31: [2D3-2] Cho $I = \int_1^2 x\sqrt{4-x^2} dx$ và $t = \sqrt{4-x^2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $I = \sqrt{3}$.

B. $I = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}}$.

C. $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt$.

D. $I = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t^2 = 4-x^2 \Rightarrow 2tdt = -2xdx$ hay $tdt = -xdx$

Đổi cận: khi $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{3}$; $x=2 \Rightarrow t=0$.

Khi đó
$$I = \int_{\sqrt{3}}^0 t \cdot (-t) dt = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

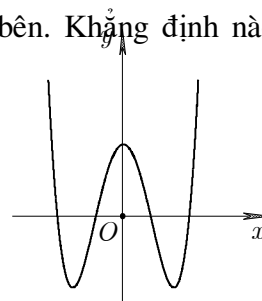
Câu 32: [2D1-3] Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đây là đồ thị của hàm số trùng phương có ba cực trị nên a và b trái dấu, $a > 0$ nên $b < 0$.

Với $x=0$ đồ thị cắt trục tung tại điểm nằm phía trên trục Ox nên $c > 0$.

Câu 33: [2H1-3] Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AB' và $A'B$. Cho biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$

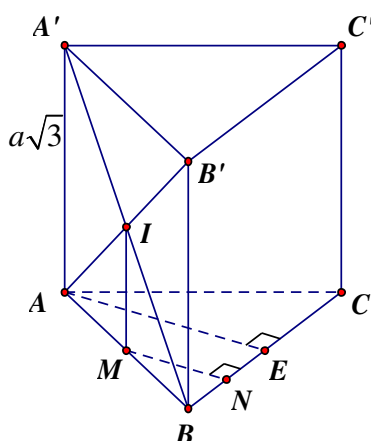
B. a^3 .

C. $\frac{3a^3}{4}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi E là trung điểm BC , N là trung điểm của BE , M là trung điểm của AB .

Ta có $IM \parallel (BCC'B')$ nên $d(I, (BCC'B')) = d(M, (BCC'B')) = MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi b là cạnh của tam giác đều ABC . Ta có: $EA = 2MN = a\sqrt{3}$,

Mà $AE = \frac{b\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow b = 2a$

Diện tích mặt đáy là: $S_{\triangle ABC} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$

Thể tích hình lăng trụ là $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = a^2 \sqrt{3} \cdot a \sqrt{3} = 3a^3$.

Câu 34: [2H2-3] Cho hình nón đỉnh S . Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác ngoại tiếp đường tròn đáy của hình nón và có $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$ góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối nón đã cho.

A. $9\pi a^3$.

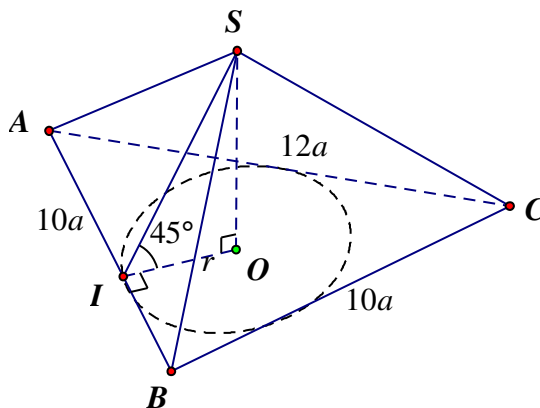
B. $27\pi a^3$.

C. $3\pi a^3$.

D. $12\pi a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Nửa chu vi tam giác ABC : $p = \frac{10a + 10a + 12a}{2} = 16a$

Diện tích tam giác ABC là

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16a(16a-10a)(16a-10a)(16a-12a)} = 48a^2.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{48a^2}{16a} = 3a,$$

với r là bán kính của đường tròn đáy nội tiếp tam giác ABC .

$$\tan \angle SIO = \frac{SO}{IO} \Rightarrow SO = IO \cdot \tan 45^\circ = IO = 3a$$

$$\text{Thể tích khối nón là: } V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} SO \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{3} \cdot 3a \pi \cdot (3a)^2 = 9\pi a^3$$

Câu 35: [2D1-2] Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$.

Khi đó

A. $M - m = 2\sqrt{2} - 2$.

B. $M - m = 4$.

C. $M - m = 2\sqrt{2} + 2$.

D. $M - m = 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện: } 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\text{Xét } -2 < x < 2 \Rightarrow y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$$y(-2) = -2; y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}; y(2) = 2$$

$$\text{Do đó: } M = 2\sqrt{2}; m = -2$$

$$\text{Suy ra } M - m = 2\sqrt{2} + 2.$$

- Câu 36:** [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và hai điểm $A(-1; 3; 1)$, $B(0; 2; -1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho diện tích của tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$.
- A. $C(-1; 0; 2)$. B. $C(1; 1; 1)$. C. $C(-3; -1; 3)$. D. $C(-5; -2; 4)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $C \in d \Rightarrow C(-1-2t; -t; 2+t)$,

$$\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2t; -t-3; t+1).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3t-7; 3t-1; -3t-3)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-3t-7)^2 + (3t-1)^2 + (-3t-3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{27t^2 + 54t + 59}.$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{27t^2 + 54t + 59} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 27t^2 + 54t + 27 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow C(1; 1; 1).$$

- Câu 37:** [2D1-2] Tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4x + 3}$ là
- A. $y = 1$ và $x = 3$. B. $y = 0$, $y = 1$ và $x = 3$.
C. $y = 0$, $x = 1$ và $x = 3$. D. $y = 0$ và $x = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{TXĐ: } D = (-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$$

$$\text{Xét pt: } x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \Rightarrow x = 3 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = 0;$$

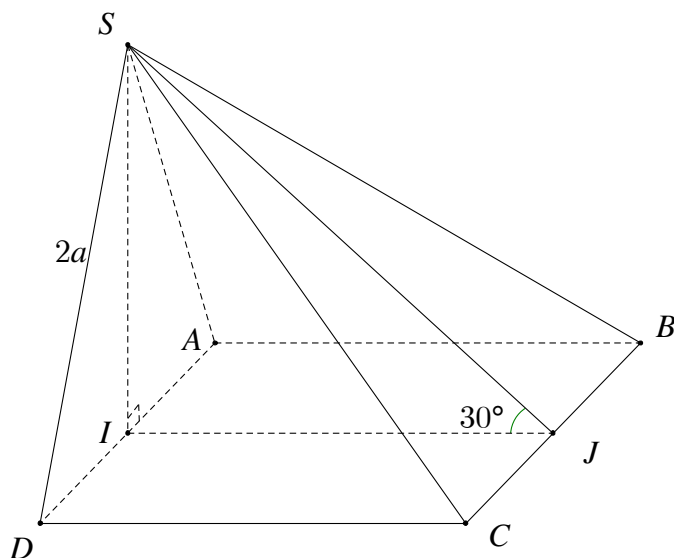
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(x^2 - 4x + 3)(x + \sqrt{x^2 - 4})} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.

- Câu 38:** [2H1-2] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° .
- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. B. $2\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $AD, BC \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ (SI là đường cao của tam giác đều SAD).

Ta có $\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ SI \perp AD, SI \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow JI$ là hình chiếu vuông góc của JS lên $(ABCD)$.

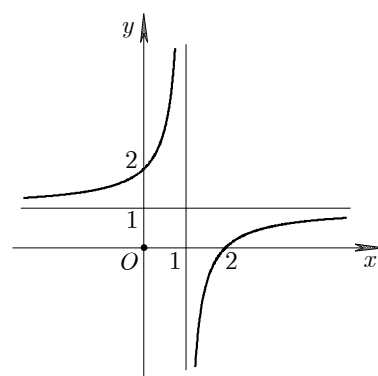
Khi đó, $((SBC), (ABCD)) = (JS, JI) = \widehat{SJI} = 30^\circ$

ΔSIJ vuông tại $I \Rightarrow \tan \widehat{SJI} = \frac{SI}{IJ} \Rightarrow IJ = \frac{SI}{\tan \widehat{SJI}} = \frac{a\sqrt{3}}{\tan 30^\circ} = 3a$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{1}{3} AD \cdot IJ \cdot SI = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$ (đơn vị thể tích).

Câu 39: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của m để phương trình $|f(x)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt là

- A. $m \geq 2$ và $m \leq 1$.
- B. $0 < m < 1$ và $m > 1$.
- C. $m > 2$ và $m < 1$.
- D. $0 < m < 1$.



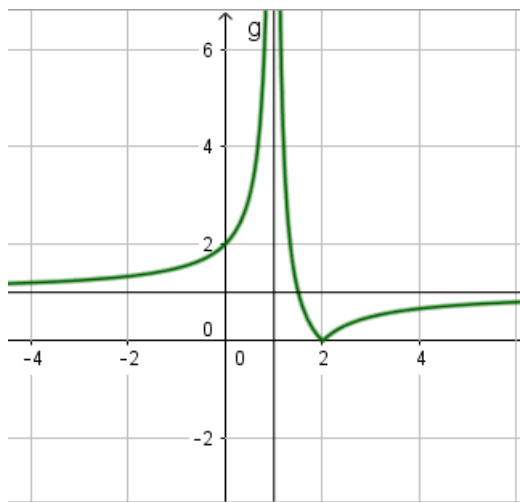
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số có

- $a \neq 0$
- Tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow \frac{-d}{c} = 1 \Rightarrow c = -d$
- Tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c$
- Đi qua điểm $A(0; 2) \Rightarrow 2 = \frac{b}{d} \Rightarrow b = 2d$

- Đi qua điểm $B(2; 0) \Rightarrow 0 = \frac{2a+b}{2c+d} \Rightarrow b = -2a$
- Vậy: $y = f(x) = \frac{ax-2a}{ax-a} = \frac{x-2}{x-1}$



Hay $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

Khi đó đồ thị gồm 2 phần

+ Phần 1: là phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên Ox .

+ Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới Ox qua Ox .

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

Khi đó, phương trình $|f(x)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$ và $m > 1$.

Câu 40: [2H2-4] Cho hàm số $y = \log_2 x$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Tập xác định của hàm số là $(0; +\infty)$.
- B.** Đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = x$.
- C.** Tập giá trị của hàm số là $(-\infty; +\infty)$.
- D.** Đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = x - 1$ tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dễ nhận thấy Câu A, C đúng.

Hàm số $y = \log_2 x$ có điều kiện: $x > 0$

$$\log_2 x = x \Leftrightarrow 2^x = x$$

- Nếu $x \in (0; 1)$ thì $2^x > 2^0 > 1 > x$
- Nếu $x \in [1; +\infty)$ thì xét hàm số $g(x) = 2^x - x$ có

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Rightarrow \text{hàm số luôn đồng biến trên } [1; +\infty) \Rightarrow g(x) \geq g(1) = 1 > 0$$

Suy ra phương trình trên vô nghiệm.

Vậy B sai.

Hàm số $y = \log_2 x$ có điều kiện: $x > 0$

$$\log_2 x = x - 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} = x \Leftrightarrow 2^x = 2x.$$

▪ Xét hàm số $g(x) = 2^x - 2x$ có

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 2, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{2}{\ln 2} \right)$$

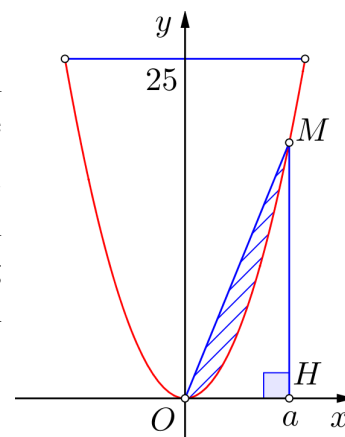
$\Rightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm

Nhận thấy $g(1) = 0, g(2) = 0$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy D đúng.

Câu 41: [2D3-4] Ông B có một khu vườn giới hạn bởi một đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng là $y = 25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi một đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng một loại hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$.



A. $OM = 2\sqrt{5}$.

B. $OM = 15$.

C. $OM = 10$.

D. $OM = 3\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi điểm H có hoành độ a , ($a > 0$) là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox .

Khi đó ta có pt đường thẳng OM có dạng $y = \tan \alpha \cdot x$, (với

$$\alpha = \widehat{MOH}) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{MH}{OH} = \frac{a^2}{a} = a \Rightarrow y = ax.$$

Vậy diện tích mảnh vườn cần tính là:

$$S = \int_0^a (ax - x^2) dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^3}{6} \Leftrightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a = 3.$$

$$\text{Suy ra } OM = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}.$$

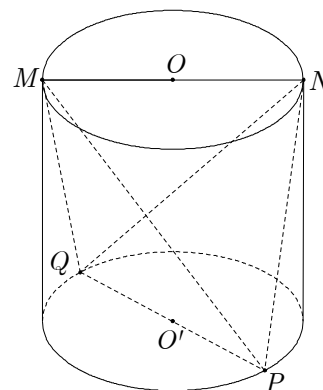
Câu 42: [2H2-3] Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để thu được khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết rằng $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng 30 dm^3 . Hãy tìm thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

A. $101,3 \text{ dm}^3$.

B. $141,3 \text{ dm}^3$.

C. $121,3 \text{ dm}^3$

D. $111,4 \text{ dm}^3$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Chú ý: Ta có công thức tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là:

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \cdot MN \cdot PQ \cdot d(MN, PQ) \cdot \sin(MN, PQ).$$

$$\text{Trong đó } d(MN, PQ) = OO' = h \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 60^2 \cdot h \cdot 1 = 30 \cdot 10^3 \Leftrightarrow h = 50 \text{ cm}.$$

Vậy thể tích của lượng đá bị cắt bỏ bằng:

$$V = V_t - V_{MNPQ} = \pi R^2 \cdot h - 30 = \frac{\pi}{10^3} \cdot \left(\frac{60}{2}\right)^2 \cdot 50 - 30 \approx 111,4 \text{ dm}^3.$$

Câu 43: [2D4-4] Cho số phức z thay đổi luôn có $|z| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 - 2i)\bar{z} + 3i$ là

A. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 20$.

B. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 2\sqrt{5}$.

C. Đường tròn $x^2 + (y + 3)^2 = 20$.

D. Đường tròn $(x - 3)^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } w = (1 - 2i)\bar{z} + 3i \Leftrightarrow w - 3i = (1 - 2i)\bar{z} \Leftrightarrow |w - 3i| = |1 - 2i| \cdot |\bar{z}| = 2\sqrt{5}, (*)$$

$$\text{Giả sử } w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó } (*) \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 20.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 20$.

Câu 44: [2H1-3] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = 2a$ và $SC \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và có $AB = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua C và vuông góc với SA , (α) cắt SA , SB lần lượt tại D , E . Tính thể tích khối chóp $S.CDE$.

A. $\frac{4a^3}{9}$.

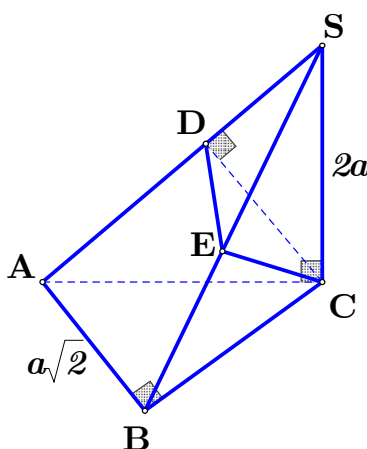
B. $\frac{2a^3}{3}$.

C. $\frac{2a^3}{9}$.

D. $\frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



$$\text{Ta có } \frac{V_{S.CDE}}{V_{S.CAB}} = \frac{SD}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \Rightarrow V_{S.CDE} = \frac{SD}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \cdot V_{S.CAB}.$$

$$+) V_{S.CAB} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a^2 = \frac{2a^3}{3}.$$

$$\text{Xét } \Delta SAC \text{ ta có } SC^2 = SD \cdot SA \Rightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{SC^2}{SA^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp CE \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB.$$

$$\text{Tương tự xét } \Delta SBC \text{ ta có } SC^2 = SE \cdot SB \Leftrightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SC^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + 2a^2} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy suy ra } V_{S.CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{2a^3}{9}.$$

Câu 45: [2D4-4] Cho các số phức z, w khác 0 và thỏa mãn $|z - w| = 2|z| = |w|$. Phần thực của số phức

$$u = \frac{z}{w} \text{ là}$$

A. $a = \frac{1}{4}.$

B. $a = 1.$

C. $a = \frac{1}{8}.$

D. $a = -\frac{1}{8}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } |z - w| = 2|z| = |w| \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{1}{2} \\ \left| \frac{z - w}{w} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u| = \frac{1}{2} \\ |u - 1| = 1 \end{cases}, (*)$$

$$\text{Giả sử } u = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \\ (a - 1)^2 + b^2 = 1 \end{cases} (*).$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow -2a + 1 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 46: [0D4-3] Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x - y)^2 \text{ là}$$

A. $\max P = 8.$

B. $\max P = 4.$

C. $\max P = 12.$

D. $\max P = 16.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Từ } x^2 + 2xy + 3y^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\text{Nếu } y = 0 \text{ thì } x = \pm 2 \Rightarrow P = 4.$$

$$\text{Nếu } y \neq 0. \text{ Ta có: } P = (x - y)^2 = \frac{4(x - y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{4\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 3}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow P = \frac{4t^2 - 8t + 4}{t^2 + 2t + 3} \Leftrightarrow P(t^2 + 2t + 3) = 4t^2 - 8t + 4$$

$$\Leftrightarrow (P - 4)t^2 + (2P + 8)t + 3P - 4 = 0. (\text{Xét } P \neq 4)$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm: } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (P + 4)^2 - (P - 4)(3P - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2P^2 + 24P \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 12$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 12

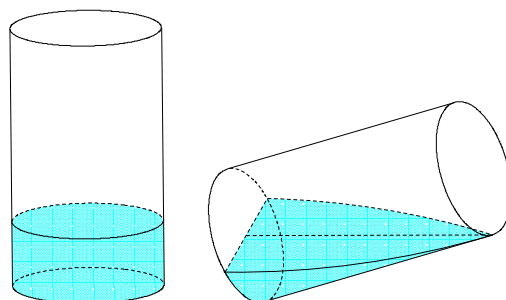
Câu 47: [2D3-4] Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao trong lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc.

A. 60cm^3 .

B. $15\pi\text{cm}^3$.

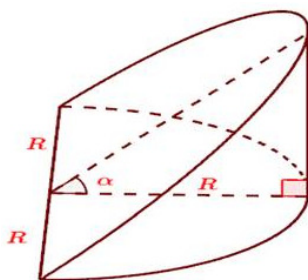
C. 70cm^3 .

D. $60\pi\text{cm}^3$.



Hướng dẫn giải

Chọn A.



Cách 1. Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có :

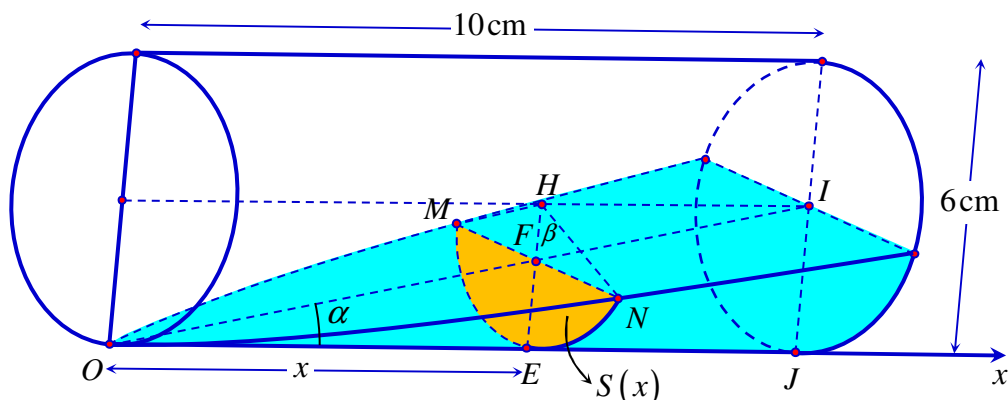
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha$$

$$\text{Thể tích hình cái nêm là: } V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 60\text{cm}^3$$

Cách 2. Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \geq x \geq 0$.

Gọi $\widehat{IOJ} = \alpha, \widehat{FHN} = \beta, OE = x$

$$\tan \alpha = \frac{OI}{OJ} = \frac{3}{10} = \frac{EF}{OE} \Rightarrow EF = \frac{3x}{10} \Rightarrow HF = 3 - \frac{3x}{10}.$$

$$\cos \beta = \frac{HF}{HN} = \frac{3 - \frac{3x}{10}}{3} = 1 - \frac{x}{10} \quad \beta = \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$S(x) = S_{(\text{hình quạt})} - S_{HMN} = \frac{1}{2} HN^2 \cdot 2\beta - \frac{1}{2} HM \cdot HN \cdot \sin 2\beta$$

$$\Rightarrow S(x) = 3^2 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{10} S(x) dx = \int_0^{10} \left(9 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - 9 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2} \right) dx = 60.$$

Câu 48: [2H2-4] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a$, $CD = 6a$, các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{22}$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{5a}{2}$.

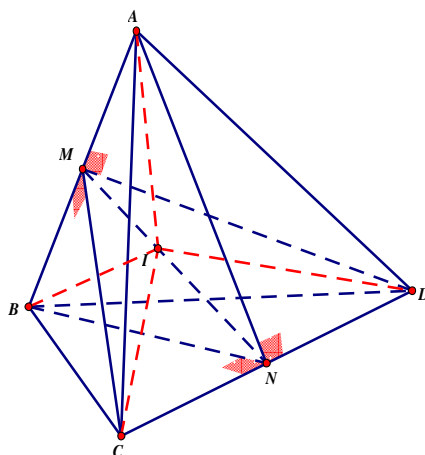
B. $3a$.

C. $\frac{a\sqrt{85}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{79}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD

Ta có: $AB \perp MD$, $AB \perp MC \Rightarrow AB \perp (MCD)$

Tương tự: $CD \perp BN$, $CD \perp AN \Rightarrow CD \perp (ANB)$

$\Rightarrow (MCD), (NAB)$ là mặt phẳng trung trực của AB và CD

Gọi I là điểm thuộc MN

Do $I \in MN \Rightarrow I \in (MCD) \Rightarrow IA = IB$

Do $I \in MN \Rightarrow I \in (NAB) \Rightarrow IC = ID$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thì $ID = IB$

Xét $\triangle AMD$ vuông tại M : $MD = \sqrt{AD^2 - AM^2} = 3\sqrt{2}a$

Xét $\triangle NMD$ vuông tại N : $MN = \sqrt{MD^2 - ND^2} = 3a$

Đặt $MI = x$, $NI = 3a - x$ ($0 < x < 3a$)

Ta có: $R^2 = BI^2 = x^2 + 4a^2$

Mà $R^2 = ID^2 = (3a - x)^2 + 9a^2$

$$\Rightarrow x^2 + 4a^2 = (3a - x)^2 + 9a^2 \Rightarrow x = \frac{7a}{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{85}}{3}.$$

- Câu 49:** [2D1-3] Tất cả các giá trị của m để phương trình $e^x = m(x+1)$ có nghiệm duy nhất là
A. $m > 1$. **B.** $m < 0, m \geq 1$. **C.** $m < 0, m = 1$. **D.** $m < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $m(x+1) > 0$

Thấy $x = -1$ không là nghiệm. Ta có: $e^x = m(x+1) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x+1} = m \Leftrightarrow f(x) = g(m)$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. Ta có: $f'(x) = \frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

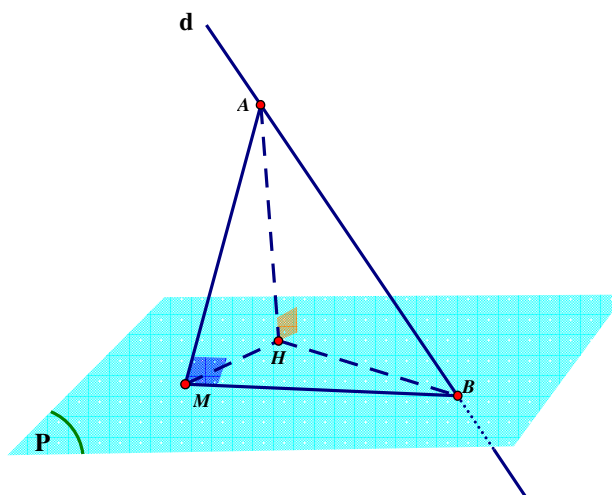
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$+\infty$	1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình có nghiệm duy nhất khi hàm số $g(m)$ cắt đồ thị $f(x)$ tại đúng một điểm $\Rightarrow m < 0 \vee m = 1$

- Câu 50:** [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?
A. $H(-2; -1; 3)$. **B.** $I(-1; -2; 3)$. **C.** $K(3; 0; 15)$. **D.** $J(-3; 2; 7)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Phương trình đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$B \in d \Rightarrow B(1 + 3t; 2 + 4t; -3 - 4t)$$

$$\text{Mà } B \in (P) \Leftrightarrow 18t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1)$$

$$\text{Do } \Delta MAB \text{ vuông tại } M \Rightarrow MB = \sqrt{AB^2 - MA^2}$$

Để MB lớn nhất $\Rightarrow MA$ nhỏ nhất

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P)

$$\text{Xét } \Delta AHM \text{ vuông tại } H \Rightarrow AM \geq AH$$

Để MA nhỏ nhất $\Rightarrow M \equiv H \Rightarrow MB$ là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (α) ;

((α) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P))

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (-4; 5; 2) \Rightarrow \vec{u}_{MB} = [\vec{n}_P, \vec{n}_\alpha] = 9(1; 0; 2)$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } MB: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Thấy ngay điểm $I(-1; -2; 3)$ thỏa mãn.