

9 PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

-----000-----

Phương pháp 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b ; \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b .$$

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

a) $3^{x^2-5x+4} = 81$; b) $\log_2(3x-4) = 3$.

Giải:

a) $3^{x^2-5x+4} = 81 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = \log_3 81 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = \log_3 3^4$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 5$.

b) $\log_2(3x-4) = 3$.

ĐK: $3x-4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$.

$$\log_2(3x-4) = 3 \Leftrightarrow 3x-4 = 2^3 \Leftrightarrow 3x-4 = 8 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4 .$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

Phương pháp 2: ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

- 1) Đối với phương trình mũ: biến đổi phương trình về dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.
- Nếu cơ số a là một số dương khác 1 thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
 - Nếu cơ số a thay đổi thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$.

- 2) Đối với phương trình logarit: biến đổi phương trình về dạng

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

a) $3^{x^2-5x+4} = 81$; b) $\log_2(3x-4) = 3$.

Giải:

a) $3^{x^2-5x+4} = 81 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+4} = 3^4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 4$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 5$.

b) ĐK: $3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$.

$$\log_2(3x-4) = 3 \Leftrightarrow \log_2(3x-4) = \log_2 2^3 \Leftrightarrow 3x-4 = 2^3 \Leftrightarrow 3x-4 = 8$$
$$\Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

a) $3^{x^2-x+8} = 9^{1-3x}$; b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$.
c) $2.5^{x^2-3} = 5.2^{x^2-3}$; d) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

Giải:

a) $3^{x^2-x+8} = 9^{1-3x} \Leftrightarrow 3^{x^2-x+8} = 3^{2(1-3x)} \Leftrightarrow x^2 - x + 8 = 2(1 - 3x)$
 $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2$ và $x = -3$.

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^{x-1} + 2^{x-1} + 2 \cdot 2^{x-1} = 28 \Leftrightarrow 2^{x-1}(2^2 + 1 + 2) = 28$
 $\Leftrightarrow 2^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

c) $2.5^{x^2-3} = 5.2^{x^2-3} \Leftrightarrow \frac{5^{x^2-3}}{2^{x^2-3}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^1$
 $\Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 2$.

d) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2} \Leftrightarrow 2^{x^2-1} - 3 \cdot 3^{x^2-1} = 3^{x^2-1} - 2^3 \cdot 2^{x^2-1}$
 $\Leftrightarrow 2^{x^2-1} + 2^3 \cdot 2^{x^2-1} = 3^{x^2-1} + 3 \cdot 3^{x^2-1} \Leftrightarrow 2^{x^2-1}(1 + 2^3) = 3^{x^2-1}(1 + 3)$
 $\Leftrightarrow 2^{x^2-1} \cdot 9 = 3^{x^2-1} \cdot 4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2$
 $\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\sqrt{3}$ và $x = \sqrt{3}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình:

a) $\lg x + \lg x^2 = \lg 4x$; b) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$.

Giải:

b) ĐK: $x > 0$.

$$\lg x + \lg x^2 = \lg 4x \Leftrightarrow \lg x + 2\lg|x| = \lg 4 + \lg x \Leftrightarrow 2\lg|x| = \lg 4$$

$$\Leftrightarrow 2\lg|x| = \lg 2^2 \Leftrightarrow \lg|x| = \lg 2 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Do $x > 0$ nên nghiệm của phương trình là $x = 2$.

b) ĐK: $x > 0$.

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_5 x \Leftrightarrow \log_2 x + \log_3 2 \cdot \log_2 x + \log_4 2 \cdot \log_2 x = \log_5 2 \cdot \log_2 x$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot (1 + \log_3 2 + \log_4 2 - \log_5 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Phương pháp 3: BIẾN ĐỔI ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

a) $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20$; b) $\log_2(3x-4) \cdot \log_2 x = \log_2 x$.

Giải:

a) $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20 \Leftrightarrow 12 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x \cdot 5^x - 5 \cdot 5^x - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 3^x (4 + 5^x) - 5(5^x + 4) = 0 \Leftrightarrow (5^x + 4)(3 \cdot 3^x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + 4 = 0 \\ 3 \cdot 3^x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \log_3 \left(\frac{5}{3} \right).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \log_3\left(\frac{5}{3}\right)$.

$$\text{b) ĐK: } \begin{cases} 3x-4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}.$$

$$\log_2(3x-4) \cdot \log_2 x = \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x [\log_2(3x-4) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2(3x-4) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2(3x-4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3x-4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do $x > \frac{4}{3}$ nên nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Phương pháp 4: LÔGARIT HÓA, MŨ HÓA

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

$$\text{a) } 3^x \cdot 2^{x^2} = 1 \quad ; \quad \text{b) } 3^{\log_2 x} + x = 2.$$

Giải:

a) Lấy lô garit hai vế với cơ số 2, ta được

$$\log_2(3^x \cdot 2^{x^2}) = \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 3^x + \log_2 2^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \cdot \log_2 3 + x^2 \cdot \log_2 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \log_2 3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(\log_2 3 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \log_2 3 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\log_2 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -\log_2 3$.

$$\text{b) ĐK: } x > 0.$$

Đặt $\log_2 x = t \Rightarrow x = 2^t$ ta thu được phương trình mũ theo biến t :

$$3^t + 2^t = 2 \quad (*).$$

Vế trái của (*) là hàm số đồng biến, vế phải là hàm hằng nên phương trình (*) nếu có nghiệm thì có nhiều nhất là một nghiệm. Mà $t = 0$ là một nghiệm của (*) nên đó là nghiệm duy nhất của (*).

$$\Rightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Phương pháp 5: DÙNG ẨN PHỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình: $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$

Giải: Chia cả 2 vế phương trình cho $2^{2x+2} \neq 0$ ta được:

$$2^{2x^2-2x-1} - 9.2^{x^2-2x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.2^{2x^2-2x} - \frac{9}{4}.2^{x^2-x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x} - 9.2^{x^2-x} + 4 = 0$$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ điều kiện $t > 0$. Khi đó phương trình tương đương với :

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} = 2^2 \\ 2^{x^2-x} = 2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 2 \\ x^2 - x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1, x = 2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0$

Giải: Nhận xét rằng: $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2; (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

Do đó nếu đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$ điều kiện $t > 0$, thì: $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$ và $(7 + 4\sqrt{3})^x = t^2$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t - 1 \quad t^2 + t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow 2 + \sqrt{3}^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $3^{2x} - 2^x + 9 \cdot 3^x + 9 \cdot 2^x = 0$

Giải: Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$t^2 - 2^x + 9t + 9 \cdot 2^x = 0$$

$$\Delta = 2^x + 9^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2^x = 2^x - 9^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 2^x \end{cases}.$$

Khi đó :

$$+ \text{ Với } t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$$

$$+ \text{ Với } t = 2^x \Rightarrow 3^x = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 2, x = 0$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $2^{2x} - \sqrt{2^x + 6} = 6$

Giải: Đặt $u = 2^x$, điều kiện $u > 0$. Khi đó phương trình thành: $u^2 - \sqrt{u + 6} = 6$

Đặt $v = \sqrt{u + 6}$, điều kiện $v \geq \sqrt{6} \Rightarrow v^2 = u + 6$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = v + 6 \\ v^2 = u + 6 \end{cases} \Leftrightarrow u^2 - v^2 = -u - v \Leftrightarrow (u - v)(u + v + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ u + v + 1 = 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } u = v \text{ ta được: } u^2 - u - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ u = -2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 3 \Rightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$$

+ Với $u + v + 1 = 0$ ta được :

$$u^2 + u - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ u = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow u = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{\sqrt{21} - 1}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = \log_2 3$ và $x = \log_2 \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$.

Phương pháp 6: DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2)$.

Giải: ĐK : $x > 0$.

Đặt $t = \log_7 x \Rightarrow x = 7^t$. Khi đó phương trình trở thành :

$$t = \log_3(\sqrt{7^t} + 2) \Leftrightarrow 3^t = \sqrt{7^t} + 2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1 \quad (*).$$

Vế trái của (*) là hàm số nghịch biến, vế phải là hàm hằng nên phương trình (*) nếu có nghiệm thì có nhiều nhất là một nghiệm. Mà $t = 2$ là một nghiệm của (*) nên đó là nghiệm duy nhất của (*).

$$\Rightarrow \log_7 x = 2 \Rightarrow x = 49.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 49$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $7^{x-1} = 6\log_7(6x-5) + 1$

Giải: ĐK : $6x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$.

Đặt $y-1 = \log_7(6x-5)$. Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7^{x-1} = 6(y-1) + 1 \\ y-1 = \log_7(6x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{x-1} = 6y-5 \\ 7^{y-1} = 6x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{x-1} - 6y = -5 \\ 7^{y-1} - 6x = -5 \end{cases} \Rightarrow 7^{x-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y.$$

Xét hàm số $f(t) = 7^{t-1} + 6t$. $f'(t) = 7^{t-1} \cdot \ln 7 + 6 > 0, \forall t > \frac{5}{6}$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$. Mà $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Khi đó: $7^{x-1} - 6x + 5 = 0$. Xét hàm số $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$. $g'(x) = 7^{x-1} \ln 7 - 6$. $g''(x) = 7^{x-1} (\ln 7)^2 > 0$. Suy ra, $g'(x)$ là hàm số đồng biến trên $D = \left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$, do đó phương trình $g'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm. Suy ra, phương trình $g(x) = 0$ nếu có nghiệm thì có nhiều nhất là hai nghiệm.

Nhẩm nghiệm ta được 2 nghiệm của phương trình là: $x = 1, x = 2$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $3^x + 4^x = 2 - 7x$ (*).

Giải:

Vế trái của (*) là hàm số đồng biến, vế phải của (*) là hàm số nghịch biến nên phương trình (*) nếu có nghiệm thì có nhiều nhất là một nghiệm. Mà $x = 0$ là một nghiệm của (*) nên đó là nghiệm duy nhất của (*).

Phương pháp 7: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Ví dụ 1. Giải phương trình: $2^{x^2+1} = 2 - \sqrt{x}$.

Giải: ĐK : $x \geq 0$.

Ta có $VT = 2^{x^2+1} \geq 2^{0+1} = 2$ và $VP = 2 - \sqrt{x} \leq 2 - 0 = 2$. Suy ra $VT \geq VP$, dấu bằng xảy ra khi $x = 0$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $1 - 4^x + 2^{x+1} = 2^x + 2^{-x}$.

Giải:

Ta có $1 - 4^x + 2^{x+1} = 2^x + 2^{-x} \Leftrightarrow 2 - (4^x - 2 \cdot 2^x + 1) = 2^x + 2^{-x}$

$$\Leftrightarrow 2 - (2^x - 1)^2 = 2^x + 2^{-x}.$$

$VT = 2 - (2^x - 1)^2 \leq 2 - 0 = 2$ và $VP = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$. Suy ra $VT \leq VP$, dấu

bằng xảy ra khi $\begin{cases} 2^x - 1 = 0 \\ 2^x = 2^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\log_3(9 - \sqrt{x-1}) = \log_2(x^2 - 2x + 5)$.

Giải:

$$\text{ĐK : } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 9 - \sqrt{x-1} > 0 \\ x^2 - 2x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 9 > \sqrt{x-1} \\ (x-1)^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 82 \\ (x-1)^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 82) .$$

Ta có :

$$VT = \log_3(9 - \sqrt{x-1}) \leq \log_3 9 = 2 \text{ và}$$

$$VP = \log_2(x^2 - 2x + 5) = \log_2[(x-1)^2 + 4] \geq \log_2 4 = 2. \text{ Suy ra } VT \leq VP, \text{ dấu bằng}$$

$$\text{xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Phương pháp 8: PHƯƠNG PHÁP QUAN NIỆM HẲNG SỐ LÀ ẨN

Ví dụ 1. Giải phương trình: $16^x - 4^{x-1} + 2^{x+2} = 16$.

Giải:

$$\text{Ta có } 16^x - 4^{x-1} + 2^{x+2} = 16 \Leftrightarrow 4^2 - 2^x \cdot 4 + 4^{x-1} - 16^x = 0 (*).$$

Xét phương trình ẩn t sau đây $t^2 - 2^x t + 4^{x-1} - 16^x = 0 (**)$. Giả sử (*) đúng với giá trị x_0 nào đó thì phương trình ẩn t sau có nghiệm $t = 4$: $t^2 - 2^{x_0} t + 4^{x_0-1} - 16^{x_0} = 0$.

Biệt thức $\Delta = (-2^{x_0})^2 - 4(4^{x_0-1} - 16^{x_0}) = 4.16^{x_0} > 0$.

Suy ra $t = 4 = \frac{2^{x_0} + \sqrt{4.16^{x_0}}}{2}$; $t = 4 = \frac{2^{x_0} - \sqrt{4.16^{x_0}}}{2}$.

$$\text{TH1: } 4 = \frac{2^{x_0} + \sqrt{4.16^{x_0}}}{2} \Leftrightarrow 2^{x_0} + 2.4^{x_0} = 8 \Leftrightarrow 2.(2^{x_0})^2 + 2^{x_0} - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x_0} = \frac{-1 + \sqrt{65}}{4} (n) \\ 2^{x_0} = \frac{-1 - \sqrt{65}}{4} (l) \end{cases}$$

$$x_0 = \log_2 \left(\frac{-1 + \sqrt{65}}{4} \right).$$

$$\text{TH2: } 4 = \frac{2^{x_0} - \sqrt{4.16^{x_0}}}{2} \Leftrightarrow 2^{x_0} - 2.4^{x_0} = 8 \Leftrightarrow 2.(2^{x_0})^2 - 2^{x_0} + 8 = 0 \text{ (pt vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x = \log_2 \left(\frac{-1 + \sqrt{65}}{4} \right).$$

Phương pháp 9: SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ LAGRANGE

Ví dụ 1. Giải phương trình: $5^x + 4^x = 2^x + 7^x$ (1).

Giải:

Giả sử x_0 là một nghiệm của (1), hay ta có:

$$5^{x_0} + 4^{x_0} = 2^{x_0} + 7^{x_0} \Leftrightarrow 5^{x_0} - 2^{x_0} = 7^{x_0} - 4^{x_0} (*).$$

Xét hàm số $f(t) = (t+3)^{x_0} - t^{x_0}$ trên đoạn $[2;4]$ thì $f(t)$ là hàm số liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[2;4]$. Áp dụng định lý Lagrange thì có số $k \in (2;4)$ sao cho

$$f'(k) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{(7^{x_0} - 4^{x_0}) - (5^{x_0} - 2^{x_0})}{4 - 2} = 0 \quad (\text{do } (*)) \quad \text{mà} \quad f'(t) = x_0(t+3)^{x_0-1} - x_0t^{x_0-1}$$
$$= x_0 \left[(t+3)^{x_0-1} - t^{x_0-1} \right].$$

$$\text{Suy ra } x_0 \left[(k+3)^{x_0-1} - k^{x_0-1} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ (k+3)^{x_0-1} - k^{x_0-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ (k+3)^{x_0-1} = k^{x_0-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \left(\frac{k+3}{k} \right)^{x_0-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases}.$$

Thay $x=0; x=1$ vào (1) ta thấy chúng đều thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0; x=1$.