

MOON.VN

LUYỆN THI ĐẠI HỌC TRỰC TUYẾN

ĐẶNG VIỆT HÙNG

BÀI GIẢNG TRỌNG TÂM **MŨ – LOGA**

DVH

01. ĐẠI CƯƠNG VỀ MŨ VÀ LOGARITH

I. CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN VỀ LŨY THỪA

1) Khái niệm về Lũy thừa

- Lũy thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = a.a.a...a$, với n là số tự nhiên.
- Lũy thừa với số nguyên âm: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, với n là số tự nhiên.
- Lũy thừa với số mũ hữu tỉ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ với m, n là số tự nhiên.

Đặt biệt, khi $m = 1$ ta có $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

2) Các tính chất cơ bản của Lũy thừa

- Tính chất 1:** $\begin{cases} a^0 = 1, \forall a \\ a^1 = a, \forall a \end{cases}$
- Tính chất 2** (tính đồng biến, nghịch biến): $\begin{cases} a > 1: a^m > a^n \Leftrightarrow m > n \\ 0 < a < 1: a^m > a^n \Leftrightarrow m < n \end{cases}$
- Tính chất 3** (so sánh lũy thừa khác cơ số): với $a > b > 0$ thì $\begin{cases} a^m > b^m \Leftrightarrow m > 0 \\ a^m < b^m \Leftrightarrow m < 0 \end{cases}$

Chú ý:

- + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.
- + Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

3) Các công thức cơ bản của Lũy thừa

• Nhóm công thức 1:

$$\begin{cases} a^m . a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m \end{cases}$$

• Nhóm công thức 2:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \longrightarrow \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}, \quad \forall a, b \geq 0 \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \forall a \geq 0, b > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ, (coi các biểu thức đã tồn tại)

a) $A = \sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}$.

b) $B = \sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$.

c) $C = \sqrt[5]{2 \sqrt[3]{2 \sqrt{2}}}$.

d) $D = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$.

e) $D = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}$.

f) $F = \frac{\sqrt[5]{b^2 \sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b \sqrt{b}}}$.

Ví dụ 2: Có thể kết luận gì về số a trong các trường hợp sau?

a) $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$.

b) $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$.

c) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2$.

d) $(1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}}$.

e) $(2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2$.

f) $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Ví dụ 3: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \left[\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \right] \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right]^{-1}$

b) $B = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}.$

a) Chứng minh rằng nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = 1.$

b) Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2011}\right) + f\left(\frac{2}{2011}\right) + \dots + f\left(\frac{2010}{2011}\right).$

Ví dụ 5: So sánh các cặp số sau

a) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ và $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\sqrt{10}}{3}}$

b) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{3}}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{\sqrt{10}}{4}}$ và $\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

d) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{3}}$ và $\left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}$

e) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{5}}$ và $\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$

Ví dụ 6: Tìm x thỏa mãn các phương trình sau?

1) $4^x = \sqrt[5]{1024}$

2) $\sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \frac{8}{125}$

3) $8^{1-3x} = \frac{1}{32}$

4) $(3\sqrt{3})^{2x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$

5) $\left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{-x} = \frac{27}{64}$

6) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-5x+6} = 1$

7) $\frac{1}{0,125} \cdot 32^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{8}}\right)^{-x}$

8) $0,2^x = \sqrt{0,008}$

9) $\left(\frac{9}{49}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

10) $(\sqrt{12})^x \cdot (\sqrt{3})^x = \frac{1}{6}$

11) $7^{1-x} \cdot 4^{1-x} = \frac{1}{28}$

II. CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN VỀ LOGARITH

1) Khái niệm về Logarith

Logarith cơ số a của một số $x > 0$ được ký hiệu là y và viết dạng $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Ví dụ: Tính giá trị các biểu thức logarith sau

$\log_2 4; \log_3 81; \log_{\sqrt{2}} 32; \log_{\sqrt{2}} (8\sqrt{2})$

Hướng dẫn giải:

• $\log_2 4 = y \Leftrightarrow 2^y = 4 \Leftrightarrow y = 2 \longrightarrow \log_2 4 = 2$

• $\log_3 81 = y \Leftrightarrow 3^y = 81 = 3^4 \Leftrightarrow y = 4 \longrightarrow \log_3 81 = 4$

• $\log_{\sqrt{2}} 32 = y \Leftrightarrow (\sqrt{2})^y = 32 = 2^5 = (\sqrt{2})^{10} \Leftrightarrow y = 10 \longrightarrow \log_{\sqrt{2}} 32 = 10$

• $\log_{\sqrt{2}} (8\sqrt{2}) = y \Leftrightarrow (\sqrt{2})^y = 8\sqrt{2} = 2^3 \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^7 \Leftrightarrow y = 7 \longrightarrow \log_{\sqrt{2}} (8\sqrt{2}) = 7$

Chú ý:

Khi $a = 10$ thì ta gọi là logarith cơ số thập phân, ký hiệu là $\lg x$ hoặc $\log x$

Khi $a = e$, (với $e \approx 2,718281\dots$) được gọi là logarith cơ số tự nhiên, hay logarith Nepe, ký hiệu là $\ln x$, (đọc là len-x)

2) Các tính chất cơ bản của Logarith

• Biểu thức logarith tồn tại khi cơ số $a > 0$ và $a \neq 1$, biểu thức dưới dấu logarith là $x > 0$.

• $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1, \forall a$

• Tính đồng biến, nghịch biến của hàm logarith: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow \begin{cases} b > c \Leftrightarrow a > 1 \\ b < c \Leftrightarrow 0 < a < 1 \end{cases}$

3) Các công thức tính của Logarith

★ **Công thức 1:** $\log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}, (1)$

Chứng minh:

Theo định nghĩa thì hiển nhiên ta có $\log_a a^x = x \Leftrightarrow a^x = a^x$

Ví dụ 1: $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5; \log_{\sqrt{2}} 16 = \log_{\sqrt{2}} 2^4 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^8 = 8...$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $P = \log_{\frac{1}{a}} \frac{a^5 \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a^4 \sqrt{a}}}$.

b) $Q = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}}$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $\frac{a^5 \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a^4 \sqrt{a}}} = \frac{a \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{1+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{28}{15}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{28}{15} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{67}{60}} \longrightarrow P = \log_{\frac{1}{a}} a^{\frac{67}{60}} = \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} \right)^{-\frac{67}{60}} = -\frac{67}{60}$.

b) Ta có $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}} = \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt{a \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{7}{8}}} = a^{\frac{15}{16}} \longrightarrow Q = \log_{\sqrt{a}} a^{\frac{15}{16}} = \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{a})^{\frac{15}{8}} = \frac{15}{8}$.

Ví dụ 3: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = \dots\dots\dots$

2)

$\log_{\sqrt{2}} 64 = \dots\dots\dots$

3) $\log_{16} 0,125 = \dots\dots\dots$

4) $\log_{0,125} \sqrt{2\sqrt{2}} = \dots\dots\dots$

5) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \dots\dots\dots$

6)

$\log_{\sqrt[7]{7}} \sqrt[8]{7\sqrt[7]{343}} = \dots\dots\dots$

Ví dụ 4: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $P = \log_a (a^3 \sqrt[5]{a}) = \dots\dots\dots$

b) $Q = \log_a (a^3 \sqrt[2]{a^2 \sqrt[4]{a^5 \sqrt{a}}}) = \dots\dots\dots$

★ Công thức 2: $a^{\log_a x} = x, \forall x > 0, (2)$

Chứng minh:

Đặt $\log_a x = t \Rightarrow x = a^t, (2) \Leftrightarrow a^t = a^t$

Ví dụ 1: $2^{\log_2 3} = 3, 5^{\log_5 6} = 6, (\sqrt{3})^{\log_3 4} = \left[(3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\log_3 4} = \left[(3)^{\log_3 4} \right]^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{1}{2}} = 2...$

Ví dụ 3: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) $2^{\log_8 15} = \dots\dots\dots$

2) $2^{\log_{2\sqrt{2}} 64} = \dots\dots\dots$

3) $\left(\frac{1}{3} \right)^{\log_{81} 5} = \dots\dots\dots$

4)

$(\sqrt[3]{9})^{\log_3 4} = \dots\dots\dots$

★ Công thức 3: $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y, (3)$

Chứng minh:

Áp dụng công thức (2) ta có $\begin{cases} x = a^{\log_a x} \\ y = a^{\log_a y} \end{cases} \longrightarrow x.y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$

Áp dụng công thức (1) ta được: $\log_a (x.y) = \log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y \Rightarrow dpcm$

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 24 = \log_2 (8.3) = \log_2 8 + \log_2 3 = \log_2 2^3 + \log_2 3 = 3 + \log_2 3$

b) $\log_3 81 = \log_3 (27.3) = \log_3 27 + \log_3 3 = \log_3 3^3 + \log_3 3 = 3 + 1 = 4$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 4\sqrt[3]{16} = \log_2 4 + \log_2 \sqrt[3]{16} = \log_2 2^2 + \log_2 2^{\frac{4}{3}} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$.

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{3} = \log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3} = \log_{\frac{1}{3}} 3^3 + \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = -3 - \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}.$$

$$\text{c) } \log_{\sqrt{2}} 8\sqrt[5]{32} = \log_{\sqrt{2}} 8 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{32} = \log_{\sqrt{2}} 2^3 + \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6 + \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = 6 + 2 = 8.$$

★ Công thức 4: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, (4)

Chứng minh:

Áp dụng công thức (2) ta có $\begin{cases} x = a^{\log_a x} \\ y = a^{\log_a y} \end{cases} \longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$

Áp dụng công thức (1) ta được : $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a a^{\log_a x - \log_a y} = \log_a x - \log_a y \Rightarrow \text{dpcm}$

Ví dụ: $\log_2 \frac{\sqrt{32}}{\sqrt[3]{16}} = \log_2 \sqrt{32} - \log_2 \sqrt[3]{16} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} - \log_2 2^{\frac{4}{3}} = \frac{5}{2} - \frac{4}{3} = \frac{7}{6}.$

★ Công thức 5: $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$, (5)

Chứng minh:

Theo công thức (2) ta có $b = a^{\log_a b} \Rightarrow b^m = (a^{\log_a b})^m = a^{m \cdot \log_a b}$

Khi đó $\log_a b^m = \log_a a^{m \cdot \log_a b} = m \cdot \log_a b \Rightarrow \text{dpcm}$

Ví dụ 1: $\begin{cases} \log_2 27 = \log_2 3^3 = 3 \log_2 3; \log_5 36 = \log_5 6^2 = 2 \log_5 6 \\ \log_2 \sqrt[4]{32} = \log_2 (32)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_2 32 = \frac{5}{4} \end{cases}$

Ví dụ 2:

$$2 \log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45} = \log_{\frac{1}{3}} 6^2 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{400} + \log_{\frac{1}{3}} 45 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{6^2 \cdot 45}{20} = \log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = -4.$$

Ví dụ 3: $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{12} + \log_5 50 = \log_5 \frac{50\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \log_5 25 = 2.$

★ Công thức 6: $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$, (6)

Chứng minh:

Đặt $\log_{a^n} b = y \Rightarrow (a^n)^y = b \Leftrightarrow a^{ny} = b$

Lấy logarith cơ số a cả hai vế ta được : $\log_a a^{ny} = \log_a b \Leftrightarrow ny = \log_a b \Rightarrow y = \frac{1}{n} \log_a b$

hay $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b \Rightarrow \text{dpcm}$

Ví dụ 1: $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2^2}} 16 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 16 = 2 \cdot 4 = 8. \\ \log_{\sqrt[5]{2}} 64 = \log_{\frac{1}{2^5}} 64 = \frac{1}{\frac{1}{5}} \log_2 64 = 5 \cdot 6 = 30. \end{cases}$

Hệ quả: Từ các công thức (5) và (6) ta có : $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$

Ví dụ 2: $\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt[4]{125} = \log_{\frac{1}{5^3}} (5^3)^{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}} \log_5 5 = \frac{9}{4}; \quad \log_{2\sqrt{2}} (32\sqrt{2}) = \log_{(\sqrt{2})^3} (\sqrt{2})^{11} = \frac{11}{3} \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \frac{11}{3}.$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\log_{3\sqrt{3}} 27 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{27}{\sqrt[5]{9}} \right)}{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^4}$.

Hướng dẫn giải:

- $\log_{3\sqrt{3}} 27 = \log_{3\sqrt{3}} (3\sqrt{3})^2 = 2$
- $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{27}{\sqrt[5]{9}} \right) = \log_{3^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{3^3}{3^{\frac{2}{5}}} \right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \log_3 3^{\frac{13}{5}} = -2 \cdot \frac{13}{5} = -\frac{26}{5}$.
- $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{-4} = -4 \cdot 2 \log_3 3 = -8 \longrightarrow A = \frac{\log_{3\sqrt{3}} 27 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{27}{\sqrt[5]{9}} \right)}{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^4} = \frac{2 - \frac{26}{5}}{-8 + 4} = \frac{4}{5}$.

★ Công thức 7: (Công thức đổi cơ số) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, (7)

Chứng minh:

Theo công thức (2) ta có $b = a^{\log_a b} \Rightarrow \log_c b = \log_c (a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log_c a \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow dpcm$

Nhận xét:

+ Để cho dễ nhớ thì đôi khi (7) còn được gọi là công thức “chồng” cơ số viết theo dạng dễ nhận biết như sau $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$

+ Khi cho $b = c$ thì (7) có dạng $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$.

Ví dụ 1: Tính các biểu thức sau theo ẩn số đã cho:

a) Cho $\log_2 14 = a \longrightarrow A = \log_2 49 = ?$

b) Cho $\log_{15} 3 = a \longrightarrow B = \log_{25} 15 = ?$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $\log_2 14 = a \Leftrightarrow a = \log_2 (2 \cdot 7) = 1 + \log_2 7 \Rightarrow \log_2 7 = a - 1$.

Khi đó $A = \log_2 49 = 2 \log_2 7 = 2(a - 1)$.

b) Ta có $\log_{15} 3 = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{\log_3 15} = \frac{1}{1 + \log_3 5} \longrightarrow \begin{cases} \log_3 5 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \\ \log_5 3 = \frac{a}{1-a} \end{cases}$

$$B = \log_{25} 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 25} = \frac{\frac{1}{a}}{2 \log_3 5} = \frac{\frac{1}{a}}{2 \frac{1-a}{a}} = \frac{1}{2(1-a)} \longrightarrow B = \frac{1}{2(1-a)}$$

Ví dụ 2: Cho $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính

a) $A = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$.

b) $B = \log_{\sqrt{ab}} \frac{b}{\sqrt{a}}$.

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết ta có $\log_a b = \sqrt{3} \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

a)

$$A = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{b} - \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{a} = \frac{1}{\log_{\sqrt{b}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a} \right)} - \frac{1}{\log_{\sqrt{a}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a} \right)} = \frac{1}{\log_{\sqrt{b}} \sqrt{b} - \log_{\sqrt{b}} a} - \frac{1}{\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} - \log_{\sqrt{a}} a} =$$

$$= \frac{1}{1-2\log_b a} - \frac{1}{\log_a b-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}.$$

Cách khác: Ta có được $A = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \log_{\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right)^2} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 = \log_{\frac{b}{a^2}} \frac{b}{a} = \frac{\log_a \frac{b}{a}}{\log_a \frac{b}{a^2}} = \frac{\log_a b - 1}{\log_a b - 2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}$

b) $B = \log_{\sqrt{ab}} \frac{b}{\sqrt{a}} = \log_{\sqrt{ab}} b - \log_{\sqrt{ab}} \sqrt{a} = \frac{1}{\log_b \sqrt{ab}} - \frac{1}{\log_{\sqrt{a}} \sqrt{ab}} = \frac{1}{\log_b \sqrt{a} + \log_b \sqrt{b}} - \frac{1}{\log_{\sqrt{a}} \sqrt{a} + \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b}} =$
 $= \frac{1}{\frac{1}{2}\log_b a + \frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\log_a b} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \rightarrow B = \frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$

Cách khác: Ta có $B = \log_{\sqrt{ab}} \frac{b}{\sqrt{a}} = \log_{(\sqrt{ab})^2} \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 = \log_{ab} \frac{b^2}{a} = \frac{\log_a \frac{b^2}{a}}{\log_a ab} = \frac{2\log_a b - 1}{1+\log_a b} = \frac{2\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}.$

Ví dụ 3: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 = \dots\dots\dots$

b) $\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81 = \dots\dots\dots$

c) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2} = \dots\dots\dots$

Ví dụ 4: Cho $\log_a b = \sqrt{7}$. Tính

a) $A = \log_{a\sqrt{b}} \frac{a}{\sqrt{b^3}}.$

b) $B = \log_{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{ab^2}.$

Ví dụ 5: Tính các biểu thức sau theo ẩn số đã cho:

a) Cho $\log_{25} 7 = a; \log_2 5 = b \rightarrow P = \log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8} = ?$

b) Cho $\log_{ab} a = 2 \rightarrow Q = \log_{ab} \frac{b}{\sqrt{a}} = ?$

★ Công thức 8: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, (8)$

Chứng minh:

Theo công thức (7): $\log_b c = \log_b a \cdot \log_a c \Rightarrow a^{\log_b c} = a^{\log_b a \cdot \log_a c} \Leftrightarrow a^{\log_b c} = (a^{\log_a c})^{\log_b a} = c^{\log_b a} \Rightarrow dpcm$

Ví dụ 1: $49^{\log_7 2} = 2^{\log_7 49} = 2^2 = 4; (\sqrt{2})^{\log_2 27} = 27^{\log_2 \sqrt{2}} = 27^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3} \dots$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 36^{\log_6 5} + \sqrt{3}^{\log_3 4} - 3^{\log_9 36} = \dots\dots\dots$

b) $B = \frac{3^{2-\log_3 2} \cdot 4^{\log_{\sqrt{2}} 3}}{27^{\log_3 4}} = \dots\dots\dots$

c) $C = 81^{\log_3 5} + 27^{\log_9 36} + 3^{4\log_9 7} = \dots\dots\dots$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP :

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau

1) $\log_{25^{-1}} 5\sqrt{5}$

2) $\log_{3\sqrt{3}} 729$

3) $\log_{\frac{9}{\sqrt{3}}} 27$

4) $\log_{9\sqrt{3}} \sqrt{3}$

5) $\log_3^3(3\sqrt{3})$

6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$

7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{27} 81}$

8) $10^{3+2\log_{10} 3}$

9) $4^{3\log_8 3 + 2\log_{16} 5}$

$$10) 9^{\frac{1}{2} \log_3 2 - 2 \log_{27} 3}$$

$$11) 4^{2 + \log_2 3}$$

$$12) 3^{\frac{\log_9 2 - \log_1 5}{3}}$$

$$13) 25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}$$

$$14) 10^{3 \log_{10} 8}$$

$$15) \frac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30}$$

$$16) 3^{1 + \log_9 4} + 4^{2 - \log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}$$

$$17) \sqrt{25^{\frac{1}{\log_8 5}} + 49^{\frac{1}{\log_6 7}}}$$

Bài 2. Quy đổi các biểu thức sau theo các ẩn đã cho

a) Cho $\log_2 3 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $\log_2 \sqrt{3}$; $\log_2 \sqrt[3]{135}$; $\log_2 180$ theo a, b .

b) Cho $\log_5 3 = a$, tính $\log_{25} 15$.

c) Cho $\log_9 6 = a$, tính $\log_{18} 32$.

d) Cho $\lg 5 = a$; $\lg 3 = b$. Tính $\log_{30} 8$.

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức sau (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa)

$$a) \lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b), \text{ với } a^2 + b^2 = 7ab.$$

$$b) \lg(a+2b) - 2\lg 2 = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b), \text{ với } a^2 + 4b^2 = 12ab$$

$$c) \log_c \frac{2a+3b}{4} = \frac{\log_c a + \log_c b}{2}, \text{ với } 4a^2 + 9b^2 = 4ab$$

d) Cho $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$, chứng minh rằng: $ab + 5(a-b) = 1$.

$$e) \frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$$

$$f) \log_{ax} bx = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$$

$$g) \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} = \frac{\log_a N}{\log_c N}, \text{ với } b^2 = ac.$$

$$h) \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^k} x} = \frac{k(k+1)}{2 \log_a x}$$

02. HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARITH

1. Hàm số mũ $y = a^x$ (với $a > 0, a \neq 1$).

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

2. Hàm số logarit $y = \log_a x$ (với $a > 0, a \neq 1$)

- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

3. Giới hạn đặc biệt

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \longrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \longrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{2x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{3x}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 \right) = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{\frac{-x}{3}} \cdot \left(\frac{-1}{3} \right) \right) = -\frac{1}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1) - (e^{2x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 3 - 2 = 1.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot 3 \right] = 3$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+4x)}{4x} \cdot 2 \right] = 2$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-4x} - 1}{-4x} \cdot \left(\frac{-4}{3} \right) \right] = -\frac{4}{3}$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Tính các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$$

4. Đạo hàm của hàm mũ và logarith

• Hàm mũ: $\begin{cases} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \cdot \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \end{cases}$

Đặc biệt, khi $a = e$ thì ta có $\begin{cases} y = e^x \longrightarrow y' = e^x \\ y = e^u \longrightarrow y' = u' \cdot e^u \end{cases}$

• Hàm logarith: $\begin{cases} y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \end{cases}$

Đặc biệt, khi $a = e$ thì ta có $\begin{cases} y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x} \\ y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} \end{cases}$

Chú ý: Bảng đạo hàm của một số hàm cơ bản thường gặp:

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
$y = k \longrightarrow y' = 0$ $y = x^n \longrightarrow y' = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \longrightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \\ y = \sqrt{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ $\begin{cases} y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x \\ y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} y = \tan x \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ y = \cot x \longrightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x} \end{cases}$	$y = ku \longrightarrow y' = k \cdot u'$ $y = u^n \longrightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{u} \longrightarrow y' = -\frac{u'}{u^2} \\ y = \sqrt{u} \longrightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{cases}$ $\begin{cases} y = \sin u \longrightarrow y' = u' \cdot \cos u \\ y = \cos u \longrightarrow y' = -u' \cdot \sin u \end{cases}$ $\begin{cases} y = \tan u \longrightarrow y' = \frac{u'}{\cos^2 u} \\ y = \cot u \longrightarrow y' = \frac{-u'}{\sin^2 u} \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{u}{v} \longrightarrow y' = \frac{uv' - u'v}{v^2} \\ y = u \cdot v \longrightarrow y' = uv' + u'v \end{cases}$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$1) y = \sqrt[4]{x^3 - 3x + 2}$$

$$2) y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x + 3}} \quad y = \sqrt[4]{x^3 - 3x + 2}$$

$$3) y = \sqrt[3]{\sin^2(2x - 1)}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) y = \sqrt[4]{x^3 - 3x + 2} = (x^3 - 3x + 2)^{\frac{1}{4}} \longrightarrow y' = \frac{1}{4} \cdot (3x^2 - 3) \cdot (x^3 - 3x + 2)^{\frac{-3}{4}}$$

$$2) y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x + 3}} = \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 3} \right)^{\frac{1}{3}} \longrightarrow y' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 3} \right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 3} \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 3} \right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \left(\frac{(2x - 1)(x + 3) - x^2 + x - 1}{(x + 3)^2} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 3} \right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{x^2 + 5x - 4}{(x + 3)^2}$$

$$3) y = \sqrt[3]{\sin^2(2x-1)} = [\sin(2x-1)]^{\frac{2}{3}} \longrightarrow y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\sin(2x-1)}} \cdot (\sin(2x-1))' = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\sin(2x-1)}} \cos(2x-1)$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$1) y = \frac{1 + \sqrt[3]{1+5x}}{1 + \sqrt{2x}}$$

$$2) y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$$

$$3) y = \sqrt[4]{\sin \frac{x+4}{3}}$$

$$4) y = (x^2 - 4x + 4)e^x$$

$$5) y = (x^5 - x)e^{-2x}$$

$$6) y = e^{-3x} \cdot \sin 4x$$

$$7) y = x \cdot e^{\sqrt{x} - \frac{1}{3}}$$

$$8) y = \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} - e^x}$$

$$9) y = e^{\sin 3x - \sqrt{4x}}$$

$$10) y = \cos x \cdot e^{\cot x}$$

$$11) y = 2^x \cdot e^{\cos x}$$

$$12) y = \ln(x^2 + 4\sqrt{x} - \sin x)$$

$$13) y = e^{\cos x} \cdot \ln(\cos x)$$

$$14) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$15) y = \frac{\ln(2x+1)}{x+1}$$

$$16) y = \log_{\frac{1}{2}}(x^4 - \cos^2 x)$$

$$17) y = \frac{\ln(\sqrt{x} - \cot x)}{\sqrt{3x-4}}$$

$$18) y = (2x-1)\ln(3x^2 + x)$$

Bài 2: Chứng minh rằng các hàm số sau thỏa mãn hệ thức chỉ ra tương ứng?

$$1) y = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \longrightarrow xy' = (1 - x^2)y$$

$$2) y = (x+1) \cdot e^x \longrightarrow y' - y = e^x$$

$$3) y = e^{4x} + 2e^{-x} \longrightarrow y''' - 13y' - 12y = 0$$

$$5) y = e^{-x} \cdot \sin x \longrightarrow y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$6) y = e^{\sin x} \longrightarrow y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x - y'' = 0$$

$$7) y = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x \longrightarrow y'' - 2y' + y = e^x$$

$$8) y = (x^2 + 1) \cdot (e^x + 2011) \longrightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 + 1} + e^x(x^2 + 1)$$

$$9) y = \ln \frac{1}{1+x} \longrightarrow xy' + 1 = e^y$$

$$10) y = \frac{1}{1+x+\ln x} \longrightarrow xy' = y(y \cdot \ln x - 1)$$

$$11) y = \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)} \longrightarrow 2x^2 y' = (x^2 y^2 + 1)$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình và bất phương trình sau, với các hàm số cho dưới đây?

$$1) f'(x) = 2f(x); f(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$$

$$2) f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 0; f(x) = x^3 \ln x$$

$$3) f'(x) = 0; f(x) = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 5$$

$$4) f'(x) > g'(x); f(x) = x + \ln(x-5); g(x) = \ln(x-1)$$

$$5) f'(x) < g'(x); f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{2x+1}; g(x) = 5^x + 4x \ln 5$$

03. PHƯƠNG TRÌNH MŨ - PHẦN 1

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

• **Khái niệm:** Là phương trình có dạng $a^x = b$, trong đó $0 < a \neq 1$.

• **Cách giải:**

+ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $b > 0$ thì $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

• **Ví dụ mẫu:**

Giải phương trình $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 5^x + 2.5^{x-1}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 5^x + 2.5^{x-1} \Leftrightarrow 2^x + 2^x.2 + 2^x.2^2 = 5^x + 2.5^x \cdot \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow (1+2+4).2^x = \left(1+\frac{2}{5}\right).5^x \Leftrightarrow 7.2^x = \frac{7}{5}.5^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{2}} 5$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = \log_{\frac{5}{2}} 5$.

• **BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**

1) $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 342$

2) $5^x + 10.5^{x-1} + 18 = 3.5^{x+1}$

3)

$2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^{x-1} + 3^{x-2}$

4) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 351$

5) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^{x-2} + 3^{x-3}$

6) $7.5^x - 2.5^{x-1} = 11$

7) $14.7^x + 4.3^{2x} = 19.3^{2x} - 7^x$

8) $4^{x+1} + 4^{x-1} = 2.6^x - 4.6^{x-2}$

9)

$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 22$

DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

• **Cơ sở phương pháp:** Sử dụng các công thức lũy thừa đưa phương trình về dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

• **Các công thức lũy thừa cơ bản:**

$$\begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m \\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \longrightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{cases}$$

• **Ví dụ mẫu:**

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1) $2^{x^2+3x-2} = 16^{x+1}$

2) $3^{-x^2+4x} = \frac{1}{243}$

3) $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$

Hướng dẫn giải:

1) $2^{x^2+3x-2} = 16^{x+1} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-2} = 2^{4x+4} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -3$.

2) $3^{-x^2+4x} = \frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^{-x^2+4x} = 3^{-5} \Leftrightarrow -x^2 + 4x = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=5 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$; $x = 5$.

3) $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$, (1).

Điều kiện: $\begin{cases} x-10 \neq 0 \\ x-15 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10 \\ x \neq 15 \end{cases}$

Do $16 = 2^4$; $0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$; $8 = 2^3$ nên ta có (1) $\Leftrightarrow 2^{\frac{4 \cdot (x+10)}{x-10}} = 2^{-3} \cdot 2^{\frac{3 \cdot (x+5)}{x-15}} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x+10}{x-10} = -3 + 3 \cdot \frac{x+5}{x-15}$
 $\Leftrightarrow \frac{4(x+10)}{x-10} = \frac{60}{x-15} \Leftrightarrow (x^2 - 5x - 150) = 15x - 150 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$; $x = 20$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

2) $4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$

3) $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

Hướng dẫn giải:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \longrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

2) $4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}} \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 9^{x-1}}{3 \cdot 2^{\frac{2x+1}{2}}} = 1 \Leftrightarrow 3^{2x-3} \cdot 2^{\frac{2x+1}{2}} = 1 \Leftrightarrow 3^{2x-3} \cdot (\sqrt{2})^{3-2x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2x-3} = 1 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$.

Cách khác: $4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}} \Leftrightarrow 16 \cdot 81^{x-1} = 9 \cdot 2^{2x+1} \Leftrightarrow 16 \cdot \frac{81^x}{81} = 9 \cdot 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{81}{4}\right)^x = \frac{18 \cdot 81}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{9}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

3) $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$, (1).

Điều kiện: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Do $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1 \longrightarrow \sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = (\sqrt{5} + 2)^{-1}$

(1) $\Leftrightarrow x-1 = \frac{1-x}{x+1} \Leftrightarrow (x-1)\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

1) $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$

2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x^2-5x} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6$

3) $5^{x^2} - 3^{x^2+1} = 2(5^{x^2-1} - 3^{x^2-2})$

Hướng dẫn giải:

1) $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$, (1). Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow 2^{\frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 2^2 \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2 \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 9$.

2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x^2-5x} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6$, (2).

Do $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1 \longrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1}$.

(2) $\Leftrightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x^2-5x} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-6} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$ và $x = 3$.

$$3) 5^{x^2} - 3^{x^2+1} = 2(5^{x^2-1} - 3^{x^2-2}) \Leftrightarrow 5^{x^2} - 3 \cdot 3^{x^2} = \frac{2}{5} 5^{x^2} - \frac{2}{9} 3^{x^2} \Leftrightarrow 5^{x^2} - \frac{2}{5} 5^{x^2} = 3 \cdot 3^{x^2} - \frac{2}{9} 3^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} 5^{x^2} = \frac{25}{9} 3^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} = \frac{125}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \longrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.

• BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

1) $(0,2)^{x-x^2} = 5^{6x-10}$	2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3}$	3)
$(3+2\sqrt{2})^{4x-1} = (3-2\sqrt{2})^{2x+3}$		
4) $(9\sqrt{3})^{x^2-x} = 81^{x-1}$	5) $10^{5x^2-4x-1} = 1$	6) $e^{x^2-1} = \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-3}$
7) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 16 \cdot (\sqrt[3]{4})^x$	8) $9^{x^2-4x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-7}$	9) $27^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{9} \cdot 81^{\frac{4x-2}{x+2}}$
10) $3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{27}\right)^x$	11) $(\sqrt{10}-3)^{5x-3x^3} = (19+6\sqrt{10})^{2x^2-1}$	

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THEO MỘT HÀM SỐ MŨ

• Cơ sở phương pháp: Biến đổi phương trình về dạng $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0 \longrightarrow \begin{cases} a^{f(x)} = \dots \\ a^{f(x)} = \dots \end{cases}$

• Chú ý: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{2n} = (a^n)^2$

• Ví dụ mẫu:

Ví dụ 1. Giải các phương trình: $25^x - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho tương đương: $(5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$.

Đặt $t = 5^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 30t + 125 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 25 \end{cases}$

+ Với $t = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

+ Với $t = 25 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $3^{x+2} + 3^{-x} = 10$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } 3^{x+2} + 3^{-x} = 10 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x + \frac{1}{3^x} = 10 \Leftrightarrow 9 \cdot (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 = 3^0 \\ 3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0$, $x = -2$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

1) $5^{\sqrt{x}} - 5^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0$	2) $3^x - 8 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 15 = 0$	3) $3^{2x+8} - 4 \cdot 3^{x+5} + 27 = 0$
--	---	--

Hướng dẫn giải:

1) $5^{\sqrt{x}} - 5^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0, (1).$

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow 5^{\sqrt{x}} - \frac{5}{5^{\sqrt{x}}} + 4 = 0 \Leftrightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 + 4 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} 5^{\sqrt{x}} = 1 \\ 5^{\sqrt{x}} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

$$2) 3^x - 8.3^{\frac{x}{2}} + 15 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^{2x} - 8.(\sqrt{3})^x + 15 = 0 \longrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3})^x = 3 \\ (\sqrt{3})^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_{\sqrt{3}} 5 = \log_3 25 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2$; $x = \log_3 25$.

$$3) 3^{2x+8} - 4.3^{x+5} + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(x+4)} - 4.3^{x+4}.3 + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(x+4)} - 12.3^{x+4} + 27 = 0 \longrightarrow \begin{cases} 3^{x+4} = 3 \Rightarrow x = -3 \\ 3^{x+4} = 9 = 3^2 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = -3$.

• **BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**

1) $9^{2x} - 3^{2x} - 6 = 0$

2) $2^x - 4^{x-1} = 1$

3) $25^x - 5^x - 12 = 0$

4) $100^x - 10^{x+1} + 16 = 0$

5) $9^x - 10.3^x + 9 = 0$

6) $3^x + 2.3^{2-x} = 9$

DẠNG 4. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Loại 1: Phương trình có chứa $a^{f(x)}, b^{f(x)}, c^{f(x)}, d^{f(x)}$

trong đó $\frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{d}{b}\right)^n$. Để giải phương trình dạng này ta chia cả hai vế cho $b^{f(x)}$ với $b = \min\{a, b, c, d\}$ hay gọi một cách dân dã, ta chia cả hai vế của phương trình cho biểu thức lũy thừa mà có cơ số nhỏ nhất.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $3.9^x + 7.6^x - 6.4^x = 0$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Phương trình đã cho tương đương: } 3.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 7.\left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -3 < 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = -1$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

1) $64.9^x - 84.12^x + 27.16^x = 0$

2) $4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$

3) $3^{2x+4} + 45.6^x - 9.2^{2x+2} = 0$

4) (ĐH khối A – 2006): $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$

Hướng dẫn giải:

1) Chia cả hai vế của (1) cho 9^x ta được

$$(1) \Leftrightarrow 64 - 84.\left(\frac{12}{9}\right)^x + 27.\left(\frac{16}{9}\right)^x = 0 \Leftrightarrow 27.\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 84.\left(\frac{4}{3}\right)^x + 64 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{3} \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

2) Điều kiện: $x \neq 0$.

$$\text{Đặt } -\frac{1}{x} = t, \quad (2) \Leftrightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t - \left(\frac{6}{4}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} - \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta được } \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \longrightarrow x = -\frac{1}{t} = -\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left(\frac{3}{2}\right).$$

3) $3^{2x+4} + 45.6^x - 9.2^{2x+2} = 0 \Leftrightarrow 81.9^x + 45.6^x - 36.4^x = 0$

$$\Leftrightarrow 81 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x + 45 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^x - 36 = 0 \Leftrightarrow 81 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 45 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -1 < 0 \end{cases} \longrightarrow x = -2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$.

4) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

$$\Leftrightarrow 3 + 4 \cdot \left(\frac{12}{8}\right)^x - \left(\frac{18}{8}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^x = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2 < 0 \end{cases} \longrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

• **BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**

1) $10 \cdot 25^x - 29 \cdot 10^x + 10 \cdot 4^x = 0$

2) $5 \cdot 36^x = 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x$

3) $25^x + 3 \cdot 15^x + 2 \cdot 9^x = 0$

4) $15 \cdot 25^{x^2} - 34 \cdot 15^{x^2} + 15 \cdot 9^{x^2} = 0$

5) $4 \cdot 49^x - 17 \cdot 14^x = 392 \cdot 4^x$

6) $25^x + 4 \cdot 9^x = 5 \cdot 15^x$

Loại 2: Phương trình có tích cơ số bằng 1

Cách giải:

Do $ab = 1 \Leftrightarrow (ab)^{f(x)} = 1 \longrightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{a^{f(x)}}$

Từ đó ta đặt $a^{f(x)} = t, (t > 0) \longrightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

⚠️Chú ý:

▪ Một số cặp a, b liên hợp thường gặp: $\begin{cases} (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1; & (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1 \\ (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1; & (7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})=1... \end{cases}$

▪ Một số dạng hằng đẳng thức thường gặp: $\begin{cases} 3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2 \\ 7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2 ... \end{cases}$

Ví dụ mẫu. Giải các phương trình sau:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^x + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^x = 4$

2) $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{8})^x + (\sqrt[3]{3}-\sqrt{8})^x = 6$

3) $(5-\sqrt{21})^x + 7(5+\sqrt{21})^x = 2^{x+3}$

4) $(2+\sqrt{3})^{(x-1)^2} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^x + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^x = 4, \quad (1).$

Do $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^x \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})^x = 1 \longrightarrow (\sqrt{2}-\sqrt{3})^x = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^x}$

Đặt $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^x = t, (t > 0) \longrightarrow (\sqrt{2}-\sqrt{3})^x = \frac{1}{t}.$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 2 + \sqrt{3} \\ t = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

▪ Với $t = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \longrightarrow x = 2.$

▪ Với $t = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{-1} = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-2} \longrightarrow x = -2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm 2$.

2) $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6, \quad (2).$

Do $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right) = \sqrt[3]{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x \cdot \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 1 \longrightarrow \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x}$

Đặt $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = t, (t > 0) \longrightarrow \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó $(2) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 3 + \sqrt{8} \\ t = 3 - \sqrt{8} \end{cases}$

▪ Với $t = 3 + \sqrt{8} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 3 + \sqrt{8} \Leftrightarrow \left(3 + \sqrt{8}\right)^{\frac{x}{3}} = 3 + \sqrt{8} \longrightarrow x = 3$.

▪ Với $t = 3 - \sqrt{8} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 3 - \sqrt{8} = (3 - \sqrt{8})^{-1} \Leftrightarrow \left(3 + \sqrt{8}\right)^{\frac{x}{3}} = (3 - \sqrt{8})^{-1} \longrightarrow x = -3$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm 3$.

3) $(5 - \sqrt{21})^x + 7(5 + \sqrt{21})^x = 2^{x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x + 7 \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x = 8, \quad (3).$

Ta có $\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x = \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2} \cdot \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x = 1 \longrightarrow \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x}$

Đặt $\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x = t, (t > 0) \longrightarrow \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó $(3) \Leftrightarrow \frac{1}{t} + 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow 7t^2 - 8t + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{7} \end{cases}$

▪ Với $t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x = 1 \longrightarrow x = 0$.

▪ Với $t = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{7} \longrightarrow x = \log_{\frac{5 + \sqrt{21}}{2}}\left(\frac{1}{7}\right)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ x = \log_{\frac{5 + \sqrt{21}}{2}}\left(\frac{1}{7}\right) \end{cases}$

4) $(2 + \sqrt{3})^{(x-1)^2} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = 4$

$(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x} = 4 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{x^2-2x} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x} = 4, \quad (4).$

Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^{x^2-2x}, (t > 0) \longrightarrow (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x} = \frac{1}{t}$.

$$\text{Khi đó } (4) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 2 + \sqrt{3} \\ t = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = 2 + \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \end{cases}$$

- Với phương trình $x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$
- Với phương trình $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{cases}$

• **BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**

1) $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 10$

2) $\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^x + 7\left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$

3) $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x + (5 + 2\sqrt{6})^x = 10$

4) $(\sqrt{4 - \sqrt{15}})^x + (4 + \sqrt{15})^x = 8$

5) $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

6) $(\sqrt{10} + 3)^{x^2} + (\sqrt{10} - 3)^{x^2 - 1} = \sqrt{10} + 4$

7) $(\sqrt{5 + \sqrt{21}})^x + (\sqrt{5 - \sqrt{21}})^x = 5.2^{\frac{x}{2}}$

04. PHƯƠNG TRÌNH LOGARITH

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH LOGARITH CƠ BẢN

▪ Khái niệm:

Là phương trình có dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x), (1)$.

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số chứa ẩn x cần giải.

▪ Cách giải:

- Đặt điều kiện cho phương trình có nghĩa $\begin{cases} a > 0; a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- Biến đổi (1) về các dạng sau: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ a = 1 \end{cases}$

▪ Chú ý:

- Với dạng phương trình $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

- Đẩy lũy thừa bậc chẵn: $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$, nếu $x > 0$ thì $n \log_a x = \log_a x^n$

- Với phương trình sau khi biến đổi được về dạng $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

- Các công thức Logarith thường sử dụng: $\begin{cases} \log_a a^x = x; a^{\log_a x} = x \\ \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y; \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x; \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \end{cases}$

▪ Ví dụ mẫu:

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

$$1) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 4) = \log_{\frac{1}{3}}(2x + 2)$$

$$2) \lg x = \frac{1}{2} \lg(x + 1)$$

$$3) \log_2 \frac{\sqrt{8-x}}{4} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$4) \log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 4) = \log_{\frac{1}{3}}(2x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 2x + 2 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -4 \\ x > -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \longrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

$$2) \lg x = \frac{1}{2} \lg(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ 2 \lg x = \lg(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg(x^2) = \lg(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \longrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$3) \log_2 \frac{\sqrt{8-x}}{4} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x, \quad (3).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 8-x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 8.$$

$$\text{Khi đó } (3) \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{8-x}}{4} = -\frac{1}{2} \log_2 x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{8-x}}{4} = x^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{8-x}}{4} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x(8-x)} = 4$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x = 16 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \longrightarrow x = 4.$$

Nghiệm $x = 4$ thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

$$4) \log_{5-x} (x^2 - 2x + 65) = 2, \quad (4)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5-x > 0 \\ 5-x \neq 1 \\ x^2 - 2x + 65 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \\ (x-1)^2 + 64 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (4) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 65 = (5-x)^2 \Leftrightarrow 8x + 40 = 0 \longrightarrow x = -5.$$

Nghiệm $x = -5$ thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình có nghiệm $x = -5$.

Bình luận:

Trong các ví dụ 3 và 4 chúng ta cần phải tách riêng điều kiện ra giải trước rồi sau đó mới giải phương trình. Ở ví dụ 1 và 2 do các phương trình tương đối đơn giản nên ta mới gộp điều kiện vào việc giải phương trình ngay.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

$$1) \lg(x+3) - 2\lg(x-2) = \lg 0,4$$

$$2) \frac{1}{2} \log_5 (x+5) + \log_5 \sqrt{x-3} = \frac{1}{2} \log_5 (2x+1)$$

$$3) \log_2 (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) - 2 \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} \right) = 0$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \lg(x+3) - 2\lg(x-2) = \lg 0,4, \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

$$\text{Khi đó, } (1) \Leftrightarrow \lg(x+3) - \lg(x-2)^2 = \lg 0,4 \Leftrightarrow \lg \frac{(x+3)}{(x-2)^2} = \lg 0,4 \Leftrightarrow \frac{(x+3)}{(x-2)^2} = 0,4 = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2(x-2)^2 - 5(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 13x - 7 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 7$.

$$2) \frac{1}{2} \log_5 (x+5) + \log_5 \sqrt{x-3} = \frac{1}{2} \log_5 (2x+1), \quad (2).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+5 > 0 \\ x-3 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x > 3 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

$$\text{Khi đó, } (2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_5 (x+5) + \frac{1}{2} \log_5 (x-3) = \frac{1}{2} \log_5 (2x+1) \Leftrightarrow \log_5 [(x+5)(x-3)] = \log_5 (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-3) = 2x+1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 2x+1 \Leftrightarrow x^2 = 16 \longrightarrow x = \pm 4.$$

Đổi chiều với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 4$.

$$3) \log_2 (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) - 2 \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} \right) = 0, \quad (3).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 4^x + 15 \cdot 2^x + 27 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4 \cdot 2^x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (3) \Leftrightarrow \log_2 (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2 \log_2 \left(\frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} \right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 \left[(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) \left(\frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} \right)^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) \left(\frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{2^{2x} + 15 \cdot 2^x + 27}{16 \cdot 2^{2x} - 24 \cdot 2^x + 9} = 1 \Leftrightarrow 15 \cdot 2^{2x} - 39 \cdot 2^x - 18 = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 \\ 2^x = -\frac{2}{5} < 0 \end{cases}$$

Giá trị $2^x = 3$ thỏa mãn điều kiện, từ đó ta được $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$ là nghiệm của phương trình.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

1) $\log_3 (2x+1)(x-3) = 2$

2) $\log_5 (x^2 - 11x + 43) = 2$

3) $\log_3 (2x+1) + \log_3 (x-3) = 2$

4) $\log_3 (x^2 - 4x + 3) = \log_3 (3x + 21)$

5) $\log_5 (x^2 - 11x + 43) = 2$

6) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x+2}{10} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{x+1}$

7) $\log_{x-1} 4 = 2$

8) $\log_x^2 10 - \log_x 10 - 6 = 0$

9) $\log_x (3x^2 - 5x - 3) = 2$

10) $\log_x (2x^2 - 3x - 4) = 2$

11) $\log_{x+1} (x^2 - 3x + 1) = 1$

12) $\log_x (3x^2 - 8x + 3) = 2$

13) $\log_{x-1} (3x^2 - 7x - 2) = 2$

14) $\log_3 (x-2) + \log_3 x = \log_3 8$

15) $\lg (x-9) + 2 \lg \sqrt{2x-1} = 2$

16) $\log_4 (x+3) - \log_4 (x-1) = 2 - \log_4 8$

17) $2 \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$

18) $\log_9 (x+1) - \log_9 (1-x) = \log_9 (2x+3)$

DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ GIẢI TRÌNH LOGARITH

• Chúng ta thường đặt ẩn phụ khi phương trình có chứa biểu thức phức tạp khi thực hiện các phép biến đổi.

Đặt $t = \log_a x$ thì ta không cần điều kiện gì của t .

• Một số biểu thức cần lưu ý khi đẩy lũy thừa $\begin{cases} \log_a [f(x)]^{2n} = 2n \log_a |f(x)| \\ \log_a^2 f(x) = [\log_a f(x)]^2 \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

1) $\log_2^2 (x-1) = 5 + \log_2 (x-1)$

2) $\log_2^2 (2-x) - 8 \log_{\frac{1}{4}} (2-x) = 5$

3) $\log_{\frac{1}{3}} x - 3 \cdot \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0$

4) $\left[\log_{\frac{1}{2}} (4x) \right]^2 + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$

Hướng dẫn giải:

1) $\log_2^2 (x-1) = 5 + \log_2 (x-1), \quad (1).$

Điều kiện: $x > 1$.

Đặt $t = \log_2 (x-1) \longrightarrow \log_2^2 (x-1) = [\log_2 (x-1)]^2 = [2 \log_2 (x-1)]^2 = 4t^2$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow 4t^2 - t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{5}{4} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \log_2(x-1) = -1 \\ \log_2(x-1) = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{2} \\ x-1 = 2^{\frac{5}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 1 + 2^{\frac{5}{4}} \end{cases}$$

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{3}{2}; x = 1 + 2^{\frac{5}{4}}$.

$$2) \log_2^2(2-x) - 8\log_1(2-x) = 5, \quad (2).$$

Điều kiện: $x < 2$.

$$(2) \Leftrightarrow \log_2^2(2-x) - \frac{8}{-2}\log_2(2-x) = 5 \Leftrightarrow \log_2^2(2-x) + 4\log_2(2-x) - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2-x) = 1 \\ \log_2(2-x) = -5 \end{cases}$$

$$\text{▪ Với } \log_2(2-x) = 1 \Leftrightarrow 2-x = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{▪ Với } \log_2(2-x) = -5 \Leftrightarrow 2-x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow x = \frac{63}{32}.$$

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0; x = \frac{63}{32}$.

$$3) \log_{\frac{1}{3}} x - 3 \cdot \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0, \quad (3).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

$$(3) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} \right)^2 - 3 \cdot \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} = 1 \\ \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x = 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{81} \end{cases}$$

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{1}{3}; x = \frac{1}{81}$.

$$4) \left[\log_{\frac{1}{2}}(4x) \right]^2 + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8, \quad (4).$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \left[\log_{\frac{1}{2}}(4x) \right]^2 = [-\log_2(4x)]^2 = [-(\log_2 4 + \log_2 x)]^2 = (\log_2 x + 2)^2 \\ \log_2 \frac{x^2}{8} = \log_2 x^2 - \log_2 8 = 2\log_2 x - 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (4) \Leftrightarrow (\log_2 x + 2)^2 + 2\log_2 x - 3 = 8 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + 6\log_2 x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-7} = \frac{1}{128} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2; x = \frac{1}{128}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

$$1) 2\log_5 \sqrt{x} - 2 = \log_x \frac{1}{5}$$

$$2) \log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$$

$$3) \log_{2x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$$

$$4) \log_3 \left(\frac{3}{x} \right) \cdot \log_2 x - \log_3 \left(\frac{x^3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) 2\log_5 \sqrt{x} - 2 = \log_x \frac{1}{5}, \quad (1).$$

Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \log_5 x - 2 = -\log_5 x \Leftrightarrow \log_5 x - 2 + \frac{1}{\log_5 x} = 0 \Leftrightarrow (\log_5 x)^2 - 2 \log_5 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_5 x = 1 \longrightarrow x = 5.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

$$2) \log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}, \quad (2).$$

Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$.

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_x 5 + (1 + \log_x 5) = \frac{9}{4} + \left(\frac{1}{2} \log_x 5\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \log_x 5\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \log_x 5\right) + \frac{5}{4} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \log_x 5 = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \log_x 5 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta được } \begin{cases} \log_x 5 = 5 \\ \log_x 5 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^5 = 5 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[5]{5} \\ x = 5 \end{cases}$$

Các nghiệm này đều thỏa mãn, vậy phương trình có hai nghiệm $x = 5; x = \sqrt[5]{5}$.

$$3) \log_{2x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0, \quad (3).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 16x \neq 1 \\ 4x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{16} \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (3) \Leftrightarrow 2 \log_{2x} x - 42 \log_{16x} x + 20 \log_{4x} x = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\log_x (2x)} - \frac{42}{\log_x (16x)} + \frac{20}{\log_x (4x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\log_x x + \log_x 2} - \frac{42}{\log_x x + \log_x 16} + \frac{20}{\log_x x + \log_x 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{1 + \log_x 2} - \frac{42}{1 + \log_x 16} + \frac{20}{1 + \log_x 4} = 0, \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = \log_x 2, \quad (*) \Leftrightarrow \frac{1}{1+t} - \frac{21}{1+4t} + \frac{10}{1+2t} = 0 \Leftrightarrow (1+4t)(1+2t) - 21(1+t)(1+2t) + 10(1+t)(1+4t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 + 6t + 1 - 21(2t^2 + 3t + 1) + 10(4t^2 + 5t + 1) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 7t - 10 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } t = 2 \Leftrightarrow \log_x 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \longrightarrow x = \pm \sqrt{2}.$$

$$\bullet \text{ Với } t = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow \log_x 2 = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow x^{-\frac{5}{6}} = 2 \Leftrightarrow \left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{6}{5}} = 2^{-\frac{6}{5}} \longrightarrow x = 2^{-\frac{6}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{64}}$$

Đổi chiều với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \sqrt{2}; x = \frac{1}{\sqrt[5]{64}}$.

$$4) \log_3 \left(\frac{3}{x}\right) \cdot \log_2 x - \log_3 \left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}, \quad (4).$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$(4) \Leftrightarrow (1 - \log_3 x) \cdot \log_2 x - (\log_3 x^3 - \log_3 \sqrt{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 x \Leftrightarrow (1 - \log_3 x) \cdot \log_2 x - 3 \log_3 x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 x \cdot \log_3 x - 3 \log_3 x - \frac{1}{2} \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x - 2 \log_2 x \cdot \log_3 x - 6 \log_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x (1 - 2 \log_3 x) - 6 \log_3 x = 0, \quad (*).$$

$$\text{Do } \log_3 x = \log_3 2 \cdot \log_2 x \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \log_2 x (1 - 2 \log_3 x) - 6 \log_3 2 \cdot \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x (1 - 2 \log_3 x - 6 \log_3 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ 1 - 2 \log_3 x - 6 \log_3 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_3 x = \frac{1 - 6 \log_3 2}{2} = \frac{1}{2} \log_3 \left(\frac{3}{64}\right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Ví dụ 1. Giải phương trình sau:

$$\text{a)} \frac{\log_3 x}{\log_9(3x)} = \frac{\log_{27} x}{\log_{243}(27x)}$$

Giải.

Điều kiện $0 < x \neq \frac{1}{3}; x \neq \frac{1}{27}$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} \frac{\log_3 x}{\log_9(3x)} = \frac{\log_{27} x}{\log_{243}(27x)} &\Leftrightarrow \frac{2\log_3 x}{\log_3(3x)} = \frac{5\log_3 x}{3\log_3(27x)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ 5(1 + \log_3 x) = 6(\log_3 27 + \log_3 x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3^{-13} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận nghiệm

$$\text{b)} \frac{\log_2 x}{\log_4(2x)} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16}(8x)}$$

Giải.

Điều kiện $x > 0; x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{1}{8}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\Leftrightarrow \frac{2\log_2 x}{\log_2(2x)} = \frac{4\log_2(4x)}{3\log_2(8x)} \Leftrightarrow \frac{2\log_2 x}{1 + \log_2 x} = \frac{4(2 + \log_2 x)}{3(3 + \log_2 x)}$

$$\text{Đặt } \log_2 x = t \text{ ta có } 3t(t+3) = 2(t+2)(t+1) \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{16}; 2 \right\}$.

$$\text{c)} \log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 6$$

Giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$

Phương trình đã cho tương đương

$$\log_2(2^x + 1) [\log_2 2 + \log_2(2^x + 1)] = 6 \Leftrightarrow \log_2^2(2^x + 1) + \log_2(2^x + 1) - 6 = 0$$

$$\text{Đặt } \log_2(2^x + 1) = t \text{ ta thu được } t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 1 = 4 \\ 2^x + 1 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 \\ 2^x = -\frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow x = \log_2 3$$

Kết luận nghiệm $S = \{\log_2 3\}$.

$$\text{d)} 4\sqrt{\log_3 x - 1} - \log_3 \sqrt{x} = 4$$

Giải.

Điều kiện $x \geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với $4\sqrt{\log_3 x - 1} - \frac{1}{2}\log_3 x = 4 \Leftrightarrow 8\sqrt{\log_3 x - 1} - \log_3 x = 8$

Đặt $\log_3 x = t$ ($t \geq 1$) thu được $8\sqrt{t-1} = t+8 \Leftrightarrow 64(t-1) = t^2 + 16t + 64 \Leftrightarrow t^2 - 48t + 128 = 0$

Ví dụ 2. Giải phương trình sau:

a) $\log_{3x}(9x^4) + 2\log_{9x^3}(27x^4) + 3\log_{\sqrt{3}x} 9 = \frac{49}{5}$

Điều kiện $x > 0; 3x \neq 1; 9x^3 \neq 1; \sqrt{3}x \neq 1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\log_{3x} 3 + 4\log_{3x} x + 6\log_{9x^3} 3 + 8\log_{9x^3} x + 6\log_{\sqrt{3}x} 3 = \frac{49}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+\log_3 x} + \frac{4}{1+\log_3 x} + \frac{6}{2+3\log_3 x} + \frac{8}{2\log_3 x + 3} + \frac{6}{\log_3 x + \frac{1}{2}} = \frac{49}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+4\log_3 x}{1+\log_3 x} + \frac{6+8\log_3 x}{2+3\log_3 x} + \frac{12}{2\log_3 x + 1} = \frac{49}{5}$$

Đặt $\log_3 x = t \Rightarrow \frac{2+4t}{1+t} + \frac{6+8t}{2+3t} + \frac{12}{2t+1} = \frac{49}{5}$

$$\Leftrightarrow (4t+2)(6t^2+7t+2) + (8t+6)(2t^2+3t+1) + 12(3t^2+5t+2) = \frac{49}{5}(2t+1)(3t^2+5t+2)$$

$$\Leftrightarrow 5(40t^3+112t^2+108t+34) = 49(6t^3+13t^2+9t+2)$$

$$\Leftrightarrow 94t^3+77t^2-99t-72=0 \Leftrightarrow (t-1)(94t^2+171t+72)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{-171-3\sqrt{2497}}{188} \\ t=\frac{-171+3\sqrt{2497}}{188} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=3^{\frac{-171-3\sqrt{2497}}{188}} \\ x=3^{\frac{-171+3\sqrt{2497}}{188}} \end{cases}$$

b) $\log_{2x}(4x^3) + 2\log_{2x^2} \frac{x^3}{8} = \frac{58}{15}$

Giải.

Điều kiện $x > 0; 2x \neq 1; 2x^2 \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3 - \log_{2x} 2 + 6(\log_{2x^2} x - 3\log_{2x^2} 2) = \frac{58}{15} \Leftrightarrow \frac{6}{\log_x 2 + 2} - \frac{18}{1+2\log_2 x} + 3 - \frac{1}{1+\log_2 x} = \frac{58}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\log_2 x - 18}{1+2\log_2 x} - \frac{1}{1+\log_2 x} = \frac{13}{15}$$

Đặt $\log_2 x = t$ thu được

$$\frac{6\log_2 x - 18}{1 + 2\log_2 x} - \frac{1}{1 + \log_2 x} = \frac{13}{15}$$

$$\frac{6t - 18}{2t + 1} - \frac{1}{t + 1} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow 15(6t^2 - 14t - 19) = 13(2t^2 + 3t + 1) \Leftrightarrow 64t^2 - 249t - 298 = 0$$

c) $\log_2 \sqrt{|x|} - 4\sqrt{\log_4 |x|} - 5 = 0$

Điều kiện $|x| \geq 1$.

Đặt $\sqrt{\log_4 |x|} = t$ ($t \geq 0$), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -1 \end{cases} (L) \Rightarrow t = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\log_4 |x|} = 5 \Leftrightarrow |x| = 4^5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4^5 \\ x = -4^5 \end{cases}$$

Kết luận nghiệm $S = \{-4; 4\}$.

d) $\log_2 x + \sqrt{10\log_2 x + 6} = 9$

Điều kiện $x > 0; \log_2 x \geq -\frac{6}{10}$

Đặt $\sqrt{10\log_2 x + 6} = t$ ($t \geq 0$), phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{t^2 - 6}{10} + t = 9 \Leftrightarrow t^2 + 10t - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -16 \end{cases} (L) \Rightarrow 10\log_2 x + 6 = 36 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Kết luận $S = \{8\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình sau:

a) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 - 12\log_{16x} 4 = 0$

Điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4x \neq 1; 16x \neq 1$

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{1 + \log_4 x} - \frac{12}{\log_4 x + 2} = 0$

Đặt $\log_4 x = t$ ($t \neq -2; -1; 0$) thu được

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{12}{t+2} \Leftrightarrow 3(t^2 + 3t + 2) + 2(t^2 + 2t) = 12(t^2 + t) \Leftrightarrow 7t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

- $t = 1 \Leftrightarrow \log_4 x = 1 \Leftrightarrow x = 4.$

- $t = -\frac{6}{7} \Leftrightarrow \log_4 x = -\frac{6}{7} \Leftrightarrow x = 4^{-\frac{6}{7}}.$

b) $x + \lg(4 - 5^x) = x \lg 2 + \lg 3$

Điều kiện $5^x < 4$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x + \lg(4 - 5^x) = \lg 2^x + \lg 3 \Leftrightarrow x = \lg \frac{3 \cdot 2^x}{4 - 5^x} = x \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 10^x (4 - 5^x) \Leftrightarrow 3 = 5^x (4 - 5^x)$$

$$\text{Đặt } 5^x = t \ (t > 0) \text{ thu được } 3 = t(4-t) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_5 3 \end{cases}$$

Kết luận $S = \{0; \log_5 3\}$.

$$\text{c) } \sqrt{\log_4 x + 1} + \sqrt{\log_2 x + 3} = 5$$

$$\text{Điều kiện } x > \frac{1}{4}$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } \sqrt{\log_4 x + 1} + \sqrt{2\log_4 x + 3} = 5$$

Đặt $\log_4 x = t \ (t \geq -1)$ thu được

$$\begin{aligned} \sqrt{t+1} + \sqrt{2t+3} = 5 &\Leftrightarrow 3t+4+2\sqrt{2t^2+5t+3} = 25 \Leftrightarrow 2\sqrt{2t^2+5t+3} = 21-3t \\ &\Leftrightarrow 4(2t^2+5t+3) = 9t^2-126t+441 \Leftrightarrow t^2-146t+429 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 143 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4^{143} \\ x = 4^3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5$$

Điều kiện $x > 0$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = 5 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình sau:

$$\text{a) } \log_2 x(x-1)^2 + \log_2 x \cdot \log_2(x^2 - x) - 2 = 0$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \log_2 x(x-1)^2 + \log_2 x \cdot \log_2(x^2 - x) - 2 &= 0 \\ \log_2 x + 2\log_2(x-1) + \log_2 x(\log_2 x + \log_2(x-1)) &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x + 2\log_2(x-1) + \log_2^2 x + \log_2 x \cdot \log_2(x-1) &= 2 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x + 2)\log_2(x-1) + \log_2^2 x + \log_2 x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x + 2)\log_2(x-1) + (\log_2 x + 2)(\log_2 x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x + 2)[\log_2(x-1) + \log_2 x - 1] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2(x^2 - x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{4} \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \log_2^2 x - \log_2 x + \log_3 x - \log_2 x \cdot \log_3 x = 0$$

Điều kiện $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2^2 x - \log_2 x + \log_3 x - \log_2 x \cdot \log_3 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x (\log_2 x - 1) + \log_3 x (1 - \log_2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - \log_3 x)(\log_2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_x 2 = \log_x 3 \quad (\text{VN}) \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

c) $\log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) + 3\log_2 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2$

Điều kiện $x - \sqrt{x^2 - 1} > 0; x + \sqrt{x^2 - 1} > 0; |x| \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow \log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_2 (x + \sqrt{x^2 - 1})^3 = 2 \Leftrightarrow \log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})^3 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 4 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

Điều kiện $x > 0; x^2 \neq 1; 2x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3$

Đặt $\log_2 x = t$ ($t \neq 0; t \neq -1$) thu được

$$\frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3 \Leftrightarrow 2t + 2 + 6t = 3t^2 + 3t \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{3}} \\ x = 4 \end{cases}$$

b) $\log_{4x} 8 - \log_{2x} 2 + \log_9 243 = 0$

Điều kiện $x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{3}{\log_2 x + 2} - \frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{5}{2} = 0$

Đặt $\log_2 x = t$ thu được

$$\frac{3}{t+2} - \frac{1}{t+1} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 - 2t - 2 + 5(t^2 + 3t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 19t + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2^{-\frac{14}{5}} \end{cases}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$

Điều kiện $0 < x \neq 1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{12}{\log_2 x} - \log_2 x = 2\log_2 x \Leftrightarrow 3\log_2^2 x = 12 \Leftrightarrow \log_2^2 x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

b) $\log_2(4^{x+1} + 4) \cdot \log_2(4^x + 1) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1}{8}}$

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$[\log_2 4 + \log_2(4^x + 1)] \cdot \log_2(4^x + 1) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow [2 + \log_2(4^x + 1)] \log_2(4^x + 1) = 3$$

Đặt $\log_2(4^x + 1) = t$ ($t > 0$) ta có $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} (L) \Rightarrow \log_2(4^x + 1) = 1 \Leftrightarrow 4^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$

Điều kiện $x > 0$

Đặt $\lg x = t$ thu được $t^2 - 3t = 2t - 4 \Leftrightarrow (t-1)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 10000 \end{cases}$

Kết luận $S = \{10; 10000\}$.

b) $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Đặt $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} = t$ ($t \geq 0$), phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

▪ $t = 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

▪ $t = 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\frac{3}{x}} 3 - \log_3^2 x = 1$

Điều kiện $0 < x \neq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{\log_3 3 - \log_3 x} - \log_3^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_3^2 x + 1)(1 - \log_3 x) = 1$

Đặt $\log_3 x = t$ thu được $(t^2 + 1)(1 - t) = 1 \Leftrightarrow t^2 - t^3 - t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow x = 1$.

b) $\frac{1 + 2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9(12 - x)$

Điều kiện $0 < x < 12; x \neq 1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1 + 2\log_9 2 - \log_9 x}{\log_3 x} = \frac{\log_9(12 - x)}{\log_3 x} \Leftrightarrow \log_9 36 = \log_9 [x(12 - x)] \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $\log_5(5^x - 1) \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1$

Điều kiện $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với $\log_5(5^x - 1) [1 + \log_5(5^x - 1)] = 2$

$$\text{Đặt } \log_5(5^x - 1) = t \text{ thu được } t(1 + t) = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 1 = 5 \\ 5^x - 1 = \frac{1}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 6 \\ x = \log_5 \frac{26}{5} \end{cases}$$

b) $\log_2 x + 2\log_7 x = 2 + \log_2 x \cdot \log_7 x$

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \log_2 x - \log_2 x \cdot \log_7 x &= 2 - 2\log_7 x \Leftrightarrow \log_2 x(1 - \log_7 x) = 2(1 - \log_7 x) \\ \Leftrightarrow (1 - \log_7 x)(\log_2 x - 2) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

c) $\log_2 x \cdot \log_3 x + 3 = 3\log_3 x + \log_2 x$

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_3 x - \log_2 x &= 3\log_3 x - 3 \Leftrightarrow \log_2 x(\log_3 x - 1) = 3(\log_3 x - 1) \\ \Leftrightarrow (\log_3 x - 1)(\log_2 x - 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$

Điều kiện $-\frac{3}{2} < x \neq -1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{3x+7} (2x+3)^2 + \log_{2x+3} (2x+3)(3x+7) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7} (2x+3) + 1 + \frac{1}{\log_{3x+7} (2x+3)} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7} (2x+3) + \frac{1}{\log_{3x+7} (2x+3)} = 3$$

$$\text{Đặt } \log_{3x+7} (2x+3) = t \text{ ta có } 2t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\blacksquare \quad t = 1 \Leftrightarrow \log_{3x+7} (2x+3) = 1 \Leftrightarrow 2x+3 = 3x+7 \Leftrightarrow x = -4.$$

$$\blacksquare \quad t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{3x+7} (2x+3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+3 = \sqrt{3x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x^2 + 12x + 9 = 3x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm } S = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}.$$

$$\text{b) } \log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\text{Điều kiện } |x| \geq 1; x - \sqrt{x^2 - 1} > 0; x + \sqrt{x^2 - 1} > 0.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\log_3 (x - \sqrt{x^2 - 1})}{\log_3 2} \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 [x^2 - (x^2 - 1)]}{\log_3 2} = \log_6 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \Leftrightarrow \log_6 (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta có nghiệm } S = \{1\}.$$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{2}{\log_3 x + 1} - \frac{4}{\log_9 3x - 2} = \frac{26}{3}$$

$$\text{Điều kiện } x > 0; x \neq \frac{1}{3}; x \neq 27$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \frac{2}{\log_3 x + 1} - \frac{4}{\frac{1}{2}(1 + \log_3 x) - 2} = \frac{26}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\log_3 x + 1} - \frac{8}{\log_3 x - 3} = \frac{26}{3}$$

Đặt $\log_3 x = t$ thu được

$$\frac{2}{t+1} - \frac{8}{t-3} = \frac{26}{3} \Leftrightarrow 6t - 18 - 24(t+1) = 26(t^2 - 2t - 3)$$

$$\Leftrightarrow 26t^2 - 34t - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{9}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = 3^{-\frac{9}{13}} \end{cases}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\log_2(4x^2)+3} + \frac{2}{\log_4 16x^3-2} = -1$$

Điều kiện $x > 0; 4x^2 \neq \frac{1}{8}; x \neq 1$

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{5+2\log_2 x} + \frac{2}{2+\frac{3}{2}\log_2 x-2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{5+2\log_2 x} + \frac{4}{3\log_2 x} = -1$

Đặt $\log_2 x = t$ ta có

$$\frac{1}{2t+5} + \frac{4}{3t} = -1 \Leftrightarrow 3t+8t+20+6t^2+15t=0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2+13t+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=2^{-\frac{10}{3}} \end{cases}$$

$$\text{c) } \log_4 2x + \sqrt{\log_2 4x+3} = 2$$

Điều kiện $x \geq \frac{1}{32}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2}(1+\log_2 x) + \sqrt{\log_2 x+5} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\log_2 x+5} + \log_2 x = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{\log_2 x+5} = 3 - \log_2 x$$

Đặt $\log_2 x = t$ thu được

$$2\sqrt{t+5} = 3-t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ 4t+20 = t^2-6t+9 \end{cases} \Leftrightarrow t=-1 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 8. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \sqrt{\log_3 9x+2} + \sqrt{\log_9 3x+1} = 5$$

Điều kiện $x \geq \frac{1}{27}$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_3 x+4} + \sqrt{\frac{1}{2}(\log_3 x+3)} = 5$

Đặt $\log_3 x = t$ ($t \geq -3$) ta có

$$\sqrt{t+4} + \sqrt{\frac{1}{2}(t+3)} = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}t + \frac{11}{2} + \sqrt{2(t^2+7t+12)} = 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2(t^2+7t+12)} = 39-3t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 13 \\ 8t^2+56t+96 = 9t^2-234t+1521 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 13 \\ t^2-290t+1425=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=5 \Rightarrow x=243$$

$$\text{b) } \log_2(8x^2) + \sqrt{\log_2^2(4x)-5} = 7$$

Điều kiện $x > 0; \log_2^2(4x) \geq 5$

Phương trình đã cho tương đương với

$$3 + 2\log_2 x + \sqrt{(2 + \log_2 x)^2 - 5} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x + 4\log_2 x - 1} = 4 - 2\log_2 x$$

Đặt $\log_2 x = t$ ta có

$$\sqrt{t^2 + 4t - 1} = 4 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t^2 + 4t - 1 = 4t^2 - 16t + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ 3t^2 - 20t + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2$$

Kết hợp điều kiện, kết luận $S = \{2\}$.

Bài 9. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\frac{x}{2}}(4x^2) + 2\log_{\frac{x^3}{8}}(2x) + \log_{2x}\left(\frac{x^4}{4}\right) = -\frac{14}{3}$

Điều kiện $x > 0; x \neq 2; x \neq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{\log_{2x}\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{\log_{2x}\left(\frac{x^3}{8}\right)} + \log_{2x}\left(\frac{x^4}{4}\right) - 1 = -\frac{17}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\log_{2x}\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{3\log_{2x}\left(\frac{x}{2}\right)} + \log_{2x}\left(\frac{x^3}{8}\right) = -\frac{17}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3\log_{2x}\left(\frac{x}{2}\right)} + 3\log_{2x}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{17}{3}$$

Đặt $\log_{2x}\left(\frac{x}{2}\right) = t$ ta có $\frac{8}{3t} + 3t = -\frac{17}{3} \Leftrightarrow 9t^2 + 8 + 17t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{8}{9} \end{cases}$

- $t = 1 \Leftrightarrow \log_{2x}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2x \Leftrightarrow x(4x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.
- $t = -\frac{8}{9} \Leftrightarrow \log_{2x}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{8}{9}$

b) $\log_{x^3}(4x^2) + 4\log_{\frac{x^2}{2}}\sqrt{2x} - \frac{1}{2}\log_{16x^2}\frac{x}{4} = \frac{65}{12}$

Điều kiện $x > 0; x \neq 1; x \neq \sqrt{2}; x \neq \frac{1}{4}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{3}(1+\log_x 2) + \frac{2}{\log_{2x} \left(\frac{x^2}{2} \right)} - \frac{1}{4} \cdot (\log_{4x} x - \log_{4x} 4) = \frac{65}{12} \\
 & \Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+\log_x 2) + \frac{2}{\log_{2x} x^2 - \log_{2x} 2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+2\log_x 2} - \frac{1}{1+\log_x 4} \right) = \frac{65}{12} \\
 & \Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+\log_x 2) + \frac{2}{\frac{2}{\log_x 2 + 1} - \frac{1}{1+\log_x 2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+2\log_x 2} - \frac{1}{1+\frac{1}{2\log_x 2}} \right) = \frac{65}{12} \\
 & \Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+\log_x 2) + \frac{2}{\frac{2}{\log_x 2 + 1} - \frac{1}{1+\frac{1}{2\log_x 2}}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+2\log_x 2} - \frac{2\log_x 2}{2\log_x 2 + 1} \right) = \frac{65}{12} \\
 & \Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+\log_x 2) + \frac{2}{\frac{2-\log_x 2}{\log_x 2 + 1}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2\log_x 2}{2\log_x 2 + 1} = \frac{65}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+\log_x 2) + \frac{2(\log_x 2 + 1)}{2-\log_x 2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2\log_x 2}{2\log_x 2 + 1} = \frac{65}{12}
 \end{aligned}$$

Đặt $\log_x 2 = t$ ta thu được

$$\begin{aligned}
 & \frac{2+2t}{3} + \frac{2t+2}{2-t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2t}{2t+1} = \frac{65}{12} \Leftrightarrow \frac{(2t+2)(5-t)}{3(2-t)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2t}{2t+1} = \frac{65}{12} \\
 & \Leftrightarrow 4(2t+2)(5-t)(2t+1) - 3(1-2t)(2-t) = 65(2-t)(2t+1) \\
 & \Leftrightarrow 2(t^2 - 4t - 5)(2t+1) + (2-t)(31t+17) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 45t^2 + 17t + 24 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{41 - \sqrt{1297}}{8} \\ t = \frac{41 + \sqrt{1297}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_{\frac{41 - \sqrt{1297}}{8}} 2 \\ x = \log_{\frac{41 + \sqrt{1297}}{8}} 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

c) $\log_{\frac{x}{3}}(9x^2) + \frac{1}{2} \log_{3x^3}(27x) = -\frac{1}{2}$

Điều kiện $x > 0; 3x^3 \neq 1; x \neq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\log_{3x} \frac{x}{3}} + \frac{1}{2\log_{27} 3x^3} + \frac{1}{2\log_x 3x^3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{\log_{3x} x - \log_{3x} 3} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{3} + \log_3 x\right)} + \frac{1}{2(\log_x 3 + 3)} = -\frac{1}{2} \\
 & \Leftrightarrow \frac{3}{\frac{1}{\log_x 3 + 1} - \frac{1}{1 + \log_3 x}} + \frac{3}{2\left(1 + \frac{3}{\log_x 3}\right)} + \frac{1}{2(\log_x 3 + 3)} = -\frac{1}{2} \\
 & \Leftrightarrow \frac{3}{\frac{1}{\log_x 3 + 1} - \frac{\log_x 3}{\log_x 3 + 1}} + \frac{3\log_x 3}{2(\log_x 3 + 3)} + \frac{1}{2(\log_x 3 + 3)} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3(\log_x 3 + 1)}{1 - \log_x 3} + \frac{3\log_x 3 + 1}{2(\log_x 3 + 3)} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Đặt $\log_x 3 = t$ ta thu được

$$\frac{3(t+1)}{1-t} + \frac{3t+1}{2(t+3)} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 6(t+1)(t+3) + (3t+1)(1-t) = (t-1)(t+3)$$

$$\Leftrightarrow 6(t+1)(t+3) = 4(t-1)(t+1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -11 \end{cases} \begin{matrix} (L) \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{11}}$$

d) $\log_2^2 \frac{x^2}{8} + 4\log_8(16x) = 9$

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(2\log_2 x - 3)^2 + \frac{4}{3}(4 + \log_2 x) = 9 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x - \frac{32}{3}\log_2 x + \frac{16}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

e) $\log_2^2 \frac{\sqrt{x}}{16} + 3\log_{4x}(8x^2) = \frac{57}{4}$

Điều kiện $x > 0; 4x \neq 1$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\log_2 x - 4\right)^2 + 9\log_{4x} 2 + 6\log_{4x} x = \frac{57}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\log_2 x - 4\right)^2 + \frac{9}{2+\log_2 x} + \frac{6}{1+\frac{2}{\log_2 x}} = \frac{57}{4} \Leftrightarrow (\log_2 x - 8)^2 + 4 \cdot \frac{9+6\log_2 x}{2+\log_2 x} = 57$$

Đặt $\log_2 x = t$ ta có

$$(t-8)^2 + 4 \cdot \frac{9+6t}{t+2} = 57 \Leftrightarrow (t+2)(t^2 - 16t + 64) + 36 + 24t = 57t + 114$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 14t^2 - t + 50 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 - 12t - 25) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 6 + \sqrt{61} \\ t = 6 - \sqrt{61} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2^{\frac{6+\sqrt{61}}{2}} \\ x = 2^{\frac{6-\sqrt{61}}{2}} \end{cases}$$

MỘT SỐ CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC KHÁC

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x)^2 + \log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}-x) = 6$

Giải:

Do $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \\ (\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x) = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}-x > 0 \\ \sqrt{x^2+1}+x > 0 \end{cases} (\forall x \in \mathbb{R})$

Ta có: $PT \Leftrightarrow 2\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x) + \log_{(2+\sqrt{3})^{-1}}(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1} = 6 \Leftrightarrow 3\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x) = 6$

$$\Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = (2+\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3} (*)$$

Nhận thấy PT (*) có vế trái là hàm số đồng biến và vế phải là hằng số nên PT này có nhiều nhất 1 nghiệm, nhận thấy $x = 4\sqrt{3}$ là nghiệm của PT này. Vậy PT đã cho có 1 nghiệm duy nhất $x = 4\sqrt{3}$

b) $\log_{\frac{2}{x}} 2 + \log_2(4x) = 3$

Giải:

ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có: $PT \Leftrightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{2}{x}} + \log_2 4 + \log_2 x = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\log_2 x} + \log_2 x = 1 \Leftrightarrow PT \Leftrightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{2}{x}} + \log_2 4 + \log_2 x = 3$

$$\Leftrightarrow \log_2 x (\log_2 x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} (TM)$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = 1; x = 4$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + \log_3(3x^4) = 3$

Giải:

ĐK: $x > 0$

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_3 x - 3\log_3 x + 1 + 4\log_3 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy PT có $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

b) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

Giải:

ĐK: $x > 0; x \neq 1$

Ta có: $PT \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{7}{6} = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 8$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\log_5 x + \log_3 x = \log_5 3 \cdot \log_9 225$

Giải:

ĐK: $x > 0$

Ta có: $\log_5 3 \cdot \log_3 15^2 = \log_5 3 \cdot \log_3 15 = \log_5 3 \cdot (1 + \log_3 5) = \log_5 3 + 1$

Đặt $\log_3 x = t \Leftrightarrow x = 3^t$

PT đã cho trở thành: $\log_5 3^t + t = \log_5 3 + 1 \Leftrightarrow t = 1$ hay $x = 3$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$

b) $\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_{x+3} 2} = 2 + \log_2(x+1)$

Giải:

ĐK: $x > \frac{1}{3}$

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_2(3x-1) - \log_2(x+3) = \log_2 4 + \log_2(x+1) \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+3} = 4(x+1) (VN)$

Vậy PT đã cho vô nghiệm.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$

Giải:

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_2 (4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2 (2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow 4^x + 4 = 2^x (2^{x+1} - 3)$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

b) $4 \cdot \log_9 x + \log_x 3 = 3$

Giải:

ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $PT \Leftrightarrow 2 \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x = 3; x = \sqrt{3}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}}} = \sqrt{\log_2 x}$

Giải:

ĐK: $x > 2$

Ta có: $PT \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 2x + \log_x 2x} + \sqrt{\log_2 \frac{x}{2}} = 2\sqrt{\log_2 x} \Leftrightarrow \sqrt{2 + \log_2 x + \log_x 2} + \sqrt{\log_2 x - 1} = 2\sqrt{\log_2 x}$

Đặt $t = \log_2 x > 1$ PT đã cho trở thành:

$\sqrt{2+t+\frac{1}{t}} + \sqrt{t-1} = 2\sqrt{t} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(t+1)^2}{t}} + \sqrt{t-1} = 2\sqrt{t} \Leftrightarrow t+1 = \sqrt{t(t-1)} + 2t \Leftrightarrow \sqrt{t(t-1)} + (t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Từ đó suy ra $x = 2$ là nghiệm PT đã cho.

b) $\log_3(3x) \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$

Giải:

ĐK: $x > 0$

Ta có: $(1 + \log_3 x) \log_2 x - 3 \log_3 x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 x \Leftrightarrow (1 + \log_3 x) \log_2 x - 3 \log_3 x = \frac{1}{2} \log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x + 2 \log_2 x \cdot \log_3 x - 6 \log_3 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x + 2 \log_2 x \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 3} - 6 \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = 0 \Leftrightarrow \log_2 x \left(1 + 2 \frac{\log_2 x}{\log_2 3} - \frac{6}{\log_2 3} \right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ 1 + 2 \frac{\log_2 x}{\log_2 3} - \frac{6}{\log_2 3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = \frac{\log_2 64 - \log_2 3}{2} = \log_2 \frac{8}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{8}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $3 \log_{\frac{1}{2}}(8x) + 2 \log_{\sqrt{2}}(4x) + \log_4 \frac{x^2}{2} = \frac{29}{2}$ (Đ/s: $x = \frac{1}{2}$)

b) $2 \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2}{4} + \log_4 8x - 3 \log_2 \frac{x^3}{16} = -\frac{3}{2}$ (Đ/s: $x = 4$)

a) ĐK: $x > 0$

$PT \Leftrightarrow 3 \log_2^2(8x) + 4 \log_2(4x) + \frac{1}{2} \log_2 \frac{x^2}{2} = \frac{29}{2} \Leftrightarrow 3(3 + \log_2 x)^2 + 4(2 + \log_2 x) + \frac{1}{2}(2 \log_2 x - 1) = \frac{29}{2}$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 21 \cdot \log_2 x + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ \log_2 x = -20 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^{20}} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm như trên

b) ĐK: $x > 0$

$$PT \Leftrightarrow 2\log_2^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log_2 8x - 3(3\log_2 x - 4) = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow 2(\log_2 x - 1)^2 + \frac{1}{2}(3 + \log_2 x) - 9\log_2 x + 12 = \frac{-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x - \frac{25}{2} \log_2 x + 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4 \\ \log_2 x = \frac{-17}{4} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{-17}{4}} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm như trên

Bài 7: Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\sqrt{3}}^2 \frac{x^2}{3} + 2\log_9^2(3x) + \log_9(27x) = 8$ (Đ/s: $x = 3$)

b) $\log_{\sqrt{3}}(9x) + \log_x \frac{27}{x^2} + \log_9(3x) + 3 = 0$ (Đ/s: $x = \frac{1}{3}$)

a) ĐK: $x > 0$

$$PT \Leftrightarrow 4\log_3^2 \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \log_3^2(3x) + \frac{1}{2} \log_3 27x = 8 \Leftrightarrow 4(2\log_3 x - 1)^2 + \frac{1}{2}(1 + \log_3 x)^2 + \frac{1}{2}(3 + \log_3 x) = 8$$

$$\Leftrightarrow 33\log_3^2 x - 29\log_3 x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3 \\ \log_3 x = \frac{-4}{33} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{-4}{33}} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm như trên

b) ĐK: $0 < x \neq 1$

$$PT \Leftrightarrow 2\log_3(9x) + \log_x 27 - 2 + \frac{1}{2} \log_3(3x) + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\log_3 x + 4 + \frac{3}{\log_3 x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_3 x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} + \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow 5\log_3^2 x + 11 \cdot \log_3 x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\ \log_3 x = \frac{-6}{5} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{-6}{5}} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm như trên

Bài 8: Giải các phương trình sau:

a) $\log_4(4x^2) + \log_x(8x) = \frac{11}{2}$ (Đ/s: $x = 4$)

b) $3\log_3(9x^2) + \frac{1}{2} \log_x(3x) = \frac{21}{2}$ (Đ/s: $x = \sqrt{3}$)

c) $\log_{25}(125x^2) + 2\log_{x^2}(5x) = 5$ (Đ/s: $x = \sqrt{5}$)

a) ĐK: $0 < x \neq 1$

$$PT \Leftrightarrow 1 + \log_4 x^2 + \log_x 8 + 1 = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} - \frac{7}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x - 7\log_2 x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4 \\ \log_2 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm như trên

b) ĐK: $0 < x \neq 1$

$$PT \Leftrightarrow 6 + 6\log_3 x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\log_3 x} = \frac{21}{2} \Leftrightarrow 12\log_2^2 x - 8\log_2 x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \\ \log_2 x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{2} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm như trên

c) ĐK: $0 < x \neq 1$

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_5(125x^2) + \log_x(5x) = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\log_5^2 x - 5\log_5 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 25 \\ \log_5 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm như trên

Bài 9: Giải các phương trình sau:

a) $\log_3^2 x + \sqrt{1 + \log_3^2 x} - 5 = 0$

(Đ/s: $x = 3^{\pm\sqrt{3}}$)

b) $4\log_{\frac{1}{4}} x + \log_2 x^2 = \log_x(4x)$

(Đ/s: $x = 2; x = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{4}$)

a) ĐK: $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} > 0$ ta có:

$$PT \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \log_3^2 x = 3 \Leftrightarrow x = 3^{3 \pm \sqrt{3}}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm như trên

b) ĐK: $0 < x \neq 1$

$$PT \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{-1}{2} \log_2 x \right)^2 + 2\log_2 x = \log_x 4 + 1 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 2\log_2 x = \frac{2}{\log_2 x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2^3 x + 2\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2 \\ \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ \log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm như trên

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

1) $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x = \log_2 x^2 - 4$

2) $\log_2^2(x-1) = 3 + \log_2(x-1)^2$

3) $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2(4x) = 0$

4) $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$

5) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$

6) $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 6$

7) $2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 9x + 3 = 0$

8) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

$$9) \log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$$

$$10) \log_2 \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\log_2 x} = -\frac{2}{3}$$

$$11) \frac{1}{5 - 4\lg x} + \frac{4}{1 + \lg x} = 3$$

$$12) \frac{1}{4 - \log_3 x} + \frac{3}{\log_3 x} = 2$$

$$13) \frac{2}{7 - \lg x} + \frac{9}{11 + \lg x} = \frac{13}{12}$$

$$14) \frac{1}{2 - \log_2 x} + \frac{2}{4 + \log_2 x} = 1$$

$$15) \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$$

$$16) \frac{\log_3 x}{\log_9 (3x)} = \frac{\log_{27} x}{\log_{243} (27x)}$$

$$17) \frac{1 + 2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9 (12 - x)$$

05. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÔNG CHÍNH TẮC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARITH

DẠNG 1. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Cơ sở của phương pháp:

Xét phương trình $f(x) = g(x)$, (1).

- Nếu $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và $f(x)$ là hàm hằng thì (1) có nghiệm duy nhất $x = x_0$.
- Nếu $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và $f(x)$ nghịch biến (hoặc đồng biến) thì (1) có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Các bước thực hiện:

- Biến đổi phương trình đã cho về dạng (1), dự đoán $x = x_0$ là một nghiệm của (1).
- Chứng minh tính đồng biến, nghịch biến hay hằng số của (1).
- Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến kết luận ở trên để chứng tỏ khi $x > x_0$ và $x < x_0$ thì (1) vô nghiệm. Từ đó ta được $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

⚠️Chú ý:

- Hàm $f(x)$ đồng biến thì $x_2 > x_1 \longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$; $f(x)$ nghịch biến thì $x_2 > x_1 \longrightarrow f(x_2) < f(x_1)$
- Hàm $f(x) = a^{u(x)} \longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \ln a$. Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến, ngược lại hàm nghịch biến.
- Tổng hoặc tích của hai hàm đồng biến (hoặc nghịch biến) là một hàm đồng biến (hoặc nghịch biến), không có tính chất tương tự cho hiệu hoặc thương của hai hàm.
- Với những phương trình có dạng $f(x; a^{u(x)}) = 0$, hay đơn giản là phương trình có chứa x ở cả hệ số và trên lũy thừa, ta coi đó là phương trình ẩn là hàm mũ và giải như bình thường. Bài toán sẽ quy về việc giải phương trình bằng phương pháp hàm số để thu được nghiệm cuối cùng.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

$$\begin{array}{lll} 1) 3^x = 5 - 2x & 2) 2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1 & 3) \\ (3 + 2\sqrt{2})^x + (3 - 2\sqrt{2})^x = 6^x \end{array}$$

Hướng dẫn giải:

1) $3^x = 5 - 2x$, (1). Đặt $\begin{cases} f(x) = 3^x \\ g(x) = 5 - 2x \longrightarrow g'(x) = -2 < 0 \end{cases}$

Từ đó ta thấy $f(x)$ đồng biến, còn $g(x)$ nghịch biến.

Nhận thấy $x = 1$ là một nghiệm của (1).

- Khi $x > 1$ thì $\begin{cases} f(x) > f(1) = 3 \\ g(x) < g(1) = 3 \end{cases} \longrightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$
- Khi $x < 1$ thì $\begin{cases} f(x) < f(1) = 3 \\ g(x) > g(1) = 3 \end{cases} \longrightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$ Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

2) $2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1 \Leftrightarrow 2^x = \left(\sqrt{3}\right)^x + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$, (2).

Đặt $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \longrightarrow f'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} < 0 \longrightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến.

Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của (2).

- Khi $x > 2$ thì $f(x) < f(2) = 1 \longrightarrow (2) \text{ vô nghiệm.}$
- Khi $x < 2$ thì $f(x) > f(2) = 1 \longrightarrow (2) \text{ vô nghiệm.}$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

3) $(3 + 2\sqrt{2})^x + (3 - 2\sqrt{2})^x = 6^x \Leftrightarrow \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}\right)^x + \left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}\right)^x = 1$, (3).

Đặt $f(x) = \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}\right)^x + \left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}\right)^x \longrightarrow f'(x) = \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}\right)^x \ln \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6} + \left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}\right)^x \ln \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6} < 0$.

Do đó $f(x)$ là hàm nghịch biến.

Nhận thấy $x = 1$ là một nghiệm của (3).

▪ Khi $x > 1$ thì $f(x) < f(1) = 1 \rightarrow (3)$ vô nghiệm.

▪ Khi $x < 1$ thì $f(x) > f(1) = 1 \rightarrow (3)$ vô nghiệm.

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^x - (3x+11) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3x+10 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow t > 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 - (3x+11)t + 3x+10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3x+10 \\ t = 1 \end{cases}$

+ Với $t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

+ Với $t = 3x+10 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3x+10$ (*).

Ta có $x = -2$ thỏa mãn phương trình (*) nên là nghiệm của phương trình (*).

Mà hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = 3x + 10$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $x = -2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*). Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0, x = -2$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

1) $25^x - 2(3-x) \cdot 5^x + 2x - 7 = 0$

2) $3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10) \cdot 5^{x-2} + 3 - x = 0$

3) $4^{x^2} + (x^2 - 7) \cdot 2^{x^2} + 12 - 4x^2 = 0$

4) $4x^2 + x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} = 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot x^2 + 2x + 6$

Hướng dẫn giải:

1) $25^x - 2(3-x) \cdot 5^x + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 2(3-x) \cdot 5^x + 2x - 7 = 0, \quad (1).$

Ta coi (1) là phương trình bậc hai ẩn 5^x .

Ta có $\Delta' = (3-x)^2 - (2x-7) = x^2 - 6x + 9 - 2x + 7 = x^2 - 8x + 10 = (x-4)^2$

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 3-x+(x-4) \\ 5^x = 3-x-(x-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = -1 < 0 \\ 5^x = 7-2x \end{cases} \rightarrow 5^x = 7-2x, \quad (*)$

(*) là phương trình quen thuộc ở ví dụ 1 đã xét đến, ta dễ dàng tìm được nghiệm $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (*).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2) $3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10) \cdot 5^{x-2} + 3 - x = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (5^{x-2})^2 + (3x-10) \cdot 5^{x-2} + 3 - x = 0, \quad (2).$

Ta có $\Delta = (3x-10)^2 - 12(3-x) = 9x^2 - 60x + 100 - 36 + 12x = 9x^2 - 48x + 64 = (3x-8)^2$

Khi đó, (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x-1} = \frac{10-3x+(3x-8)}{6} \\ 5^{x-2} = \frac{10-3x-(3x-8)}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x-2} = \frac{1}{3}, \quad (*) \\ 5^{x-2} = 3-x, \quad (**) \end{cases}$

▪ Xét phương trình (*) $\Leftrightarrow 5^{x-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x-2 = \log_5 \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5 \frac{25}{3}$

▪ Xét phương trình (**) $\Leftrightarrow 5^{x-2} = 3-x$. Đặt $\begin{cases} f(x) = 5^{x-2} \\ g(x) = 3-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 5^{x-2} \ln 5 > 0 \\ g'(x) = -1 < 0 \end{cases}$

Từ đó ta được $f(x)$ đồng biến còn $g(x)$ nghịch biến.

Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của (**).

Khi $x > 2 \rightarrow \begin{cases} f(x) > f(2) = 1 \\ g(x) < g(2) = 1 \end{cases} \rightarrow (**) \text{ vô nghiệm.}$

Khi $x < 2 \rightarrow \begin{cases} f(x) < f(2) = 1 \\ g(x) > g(2) = 1 \end{cases} \rightarrow (**) \text{ vô nghiệm.}$

—→ $x = 2$ là nghiệm duy nhất của (**), vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \log_5 \frac{25}{3}$; $x = 2$.

$$3) 4^{x^2} + (x^2 - 7) \cdot 2^{x^2} + 12 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4^t + (t - 7) \cdot 2^t + 12 - 4t = 0, (t = x^2 \geq 0) \quad (3)$$

$$\text{Ta có } \Delta = (t - 7)^2 - 4 \cdot (12 - 4t) = t^2 - 14t + 49 - 48 + 16t = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$$

$$\text{Khi đó, } (3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^t = \frac{7-t+(t+1)}{2} \\ 2^t = \frac{7-t-(t+1)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^t = 4 \longrightarrow t = 2. \\ 2^t = 3 - t, \quad (*) \end{cases}$$

▪ Với $t = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

▪ Với $2^t = 3 - t \longrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x = \pm 1$; $x = \pm\sqrt{2}$.

$$4) 4x^2 + x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} = 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot x^2 + 2x + 6, \quad (4).$$

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$(4). \Leftrightarrow x^2(4 - 2 \cdot 3^{\sqrt{x}}) + x(3^{\sqrt{x}} - 2) + 6 - 3^{1+\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2 - 3^{\sqrt{x}}) - x(2 - 3^{\sqrt{x}}) + 3(2 - 3^{\sqrt{x}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - 3^{\sqrt{x}})(2x^2 - x + 3) = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2 - 3^{\sqrt{x}} = 0 \\ 2x^2 - x + 3 = 0 \quad (vn_o) \end{cases} \longrightarrow \sqrt{x} = \log_3 2 \Leftrightarrow x = (\log_3 2)^2.$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau :

$$a) 3^{1-2x} - 3^{1+2x} = 4x \cdot 3^{-x^2} \quad b) 5^{x^2+4x+2} - 5^{2x^2+8x+4} = x^2 + 4x + 2 \quad c) 2^{\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} - (2^{\cos^2 x} + 3^{\cos^2 x}) = 2 \cos 2x$$

$$a) PT \Leftrightarrow 3^{1-2x} - 3^{1+2x} = 4x \cdot 3^{-x^2} \Leftrightarrow 3^{x^2-2x+1} - 3^{x^2+2x+1} = 4x$$

$$\text{Ta có } (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1) = 4x \Leftrightarrow u - v = 4x.$$

Phương trình đã cho có dạng $3^u - 3^v = u - v \Leftrightarrow 3^u + u = 3^v + v$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến, do đó ta có $u = v \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$b) PT \Leftrightarrow 5^{x^2+4x+2} - 5^{2x^2+8x+4} = x^2 + 4x + 2 = (2x^2 + 8x + 4) - (x^2 + 4x + 2)$$

$$\Rightarrow 5^{x^2+4x+2} + (x^2 + 4x + 2) = 5^{2x^2+8x+4} + (2x^2 + 8x + 4) \Leftrightarrow f(u) = f(v)$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t \Rightarrow f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0$.

$$\text{Suy ra } f(t) \text{ đồng biến, do đó ta có } u = v \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{2} \\ x = -2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$c) PT \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} - (2^{\cos^2 x} + 3^{\cos^2 x}) = 2 \cos 2x \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} + 2 \sin^2 x = (2^{\cos^2 x} + 3^{\cos^2 x}) + 2 \cos^2 x.$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3^t + 2t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 3^t \ln 3 + 2 > 0$

$$\text{Suy ra } \cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau :

$$a) e^{|2x-5|} - e^{|x-1|} = \frac{1}{|2x-5|} - \frac{1}{|x-1|} \quad b) 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \quad c) 2^{\sqrt{x^2-3x+1}} - 2^{x-2} + \sqrt{x^2-3x} - x + 3 = 0$$

$$a) e^{|2x-5|} - \frac{1}{|2x-5|} = e^{|x-1|} - \frac{1}{|x-1|} \Rightarrow f(t) = e^t - \frac{1}{t}; t > 0 \Leftrightarrow f'(t) = e^t + \frac{1}{t^2} > 0.$$

Chứng tỏ hàm số $f(t)$ đồng biến. Do đó $|2x-5| = |x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$

$$b) 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}; \quad \frac{1-2x}{x^2} - \left(\frac{1-x^2}{x^2} \right) = \frac{x^2-2x}{x^2} = \left(1 - \frac{2}{x} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right).$$

Cho nên phương trình đã cho có dạng $2^a - 2^b = \frac{1}{2}(b-a) \Leftrightarrow 2^a + \frac{1}{2}a = 2^b + \frac{1}{2}b$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2^t + \frac{1}{2}t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + \frac{1}{2} > 0$.

Chứng tỏ hàm $f(t)$ luôn đồng biến. Suy ra $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = 0 \rightarrow x = 2$

c) $PT \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2-3x+1}} - 2^{x-2} + \sqrt{x^2-3x} - x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2-3x+1}} + \sqrt{x^2-3x} + 1 = 2^{x-2} + x - 2$

Bằng cách xét như các bài trên ta có kết quả

$$\sqrt{x^2-3x} + 1 = x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -3x = -6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow x = 3$$

Ví dụ 6. Giải phương trình $(\cos 36^\circ)^x + (\cos 72^\circ)^x = 3 \cdot 2^{-x}$

Do $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$; $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \sin 3 \cdot 18^\circ$.

Cho nên đặt $t = \sin 18^\circ > 0$, và dùng công thức nhân ba ta có :

$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 18^\circ = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ \Leftrightarrow 4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(4t^2+2t-1)=0 \Rightarrow 4t^2+2t-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0 \\ t = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^\circ \end{cases} \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Khi đó phương trình có dạng $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^x = 3 \cdot 2^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = 3$.

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x - 3 = 0 \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) < 0$

Chứng tỏ hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến. Mặt khác $f(2) = 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

a) $x \cdot 2^x = 2(2^x - 1) + x(3 - x)$

b) $4^{x^2-x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x-1)^2} + 1$

c) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$

d) $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{-x+x^2} - 2^{2x} + 4 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI:

a) $x \cdot 2^x = 2(2^x - 1) + x(3 - x) \Leftrightarrow (x \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x) + (2 + x^2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow 2^x(x-2) + (x-1)(x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2^x + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ f(x) = 2^x + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Dễ dàng tìm được hai nghiệm của phương trình là $x = 0$ và $x = 2$.

b) $4^{x^2-x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x-1)^2} + 1 \Leftrightarrow 2^{2x^2-2x} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-2x+1} + 1$.

Đặt : $a = 2x^2 - 2x$; $b = 1 - x^2 \Rightarrow a + b = x^2 - 2x + 1$.

Khi đó phương trình có dạng :

$$\Leftrightarrow 2^a + 2^b = 2^{a+b} + 1 \Leftrightarrow (2^a - 1) + 2^b(1 - 2^a) = 0 \Leftrightarrow (2^a - 1)(1 - 2^b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a = 1 \\ 2^b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 - x) = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 1 \\ x = -1; x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0; x = \pm 1$$

c) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1} \Leftrightarrow (x^2 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-1}) = (x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} - 2^{|x-3|+2}) \Leftrightarrow 2^{x-1}(4x^2 - 1) = 2^{|x-3|+2}(4x^2 - 1)$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 1)(2^{|x-3|+2} - 2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0 \\ 2^{|x-3|+2} - 2^{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ |x-3|+2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ |x-3| = x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau :

a) $6^x + 8^x = 10^x$

b) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = \sqrt{10^x}$

c) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 2^x$

d) $3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{6}\right)^x = -2x + 6$

a) $6^x + 8^x = 10^x \Leftrightarrow \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{8}{10}\right)^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{8}{10}\right)^x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{6}{10}\right)^x \ln\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{8}{10}\right)^x \ln\left(\frac{8}{10}\right) < 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

b) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = \sqrt{10^x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{10}}\right)^x + \left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{10}}\right)^x = 1$

$\Leftrightarrow f(x) = \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{10}}\right)^x + \left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{10}}\right)^x - 1 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{10}}\right)^x \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{10}}\right) + \left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{10}}\right)^x \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{10}}\right) > 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$

c) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^x - 1 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^x \ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^x \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) > 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

d) $3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{6}\right)^x = -2x + 6 \Leftrightarrow 3^x + 2^x + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x + 6$

VT = $f(x) = 3^x + 2^x + 2 \rightarrow f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 > 0$; $f(1) = 7$

VP = $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x + 6$. Là một hàm số nghịch biến, mặt khác $g(1) = 7$

Chứng tỏ $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau :

a) $4^x - 3^x = 1$

b) $2^x + 3^x + 5^x = 10^x$

c) $3^x + 4^x + 12^x = 13^x$

d) $3^x + 5^x = 6x + 2$

a) $4^x - 3^x = 1 \Leftrightarrow 1 + 3^x = 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1 = 0$

Ta có $f'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến.

Mặt khác $f(1) = 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$

b) $2^x + 3^x + 5^x = 10^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{10}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x + \left(\frac{5}{10}\right)^x = 1$

Đặt $f(x) = \left(\frac{2}{10}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x + \left(\frac{5}{10}\right)^x - 1 \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{2}{10}\right)^x \ln\left(\frac{2}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)^x \ln\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{5}{10}\right)^x \ln\left(\frac{5}{10}\right) < 0$

Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến, nên phương trình sẽ có nghiệm duy nhất.

Mặt khác $f(1) = 0$, vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

c) $3^x + 4^x + 12^x = 13^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{13}\right)^x + \left(\frac{4}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$

Đặt $f(x) = \left(\frac{3}{13}\right)^x + \left(\frac{4}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1 \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{3}{13}\right)^x \ln\left(\frac{3}{13}\right) + \left(\frac{4}{13}\right)^x \ln\left(\frac{4}{13}\right) + \left(\frac{12}{13}\right)^x \ln\left(\frac{12}{13}\right) < 0$

Vậy $f(x)$ là hàm số nghịch biến.

Mặt khác $f(2) = 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

d) $3^x + 5^x = 6x + 2 \Leftrightarrow f(x) = 3^x + 5^x - 6x - 2.$

Rõ ràng phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 - 6$; $f''(x) = 3^x (\ln 3)^2 + 5^x (\ln 5)^2 > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -6$

Suy ra $f'(x)$ là một hàm số liên tục, đồng biến và nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm trên $\mathbb{R}$, nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 .

Ta lập bảng biến thiên sẽ suy ra hai nghiệm của phương trình, sẽ không còn nghiệm nào khác.

• **BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**

1) $2^{-x} = \frac{1}{3}x + 9$

2) $5^x + 2x - 7 = 0$

3) $3 \cdot 9^x + 4x \cdot 3^x + 4x - 3 = 0$

4) $8^{\frac{x}{2}} + 1 = 3^x$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2x + 5$

6) $4^x + (x-9) \cdot 2^x - 3x + 18 = 0$

7) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = (2\sqrt{3})^x$

8) $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$

DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARITH

▪ Với phương trình dạng $\log_a f(x) = g(x)$:

- Dự đoán $x = x_0$ là một nghiệm.

- Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm logarith để chứng minh nghiệm $x = x_0$ là duy nhất. Hoặc ta có thể sử dụng công cụ đạo hàm của hàm số logarith $y = \log_a f(x) \longrightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$ để kết luận tính đồng biến.

▪ Với phương trình dạng $\log_a [f(x)] = \log_b [g(x)]$ trong đó a, b nguyên tố cùng nhau:

Đặt $\begin{cases} t = \log_a [f(x)] \\ t = \log_b [g(x)] \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases} \xrightarrow{\text{khử } x} A \cdot a^t + B \cdot b^t = C, \quad (1).$

(1) được giải bằng phương pháp hàm số cho phương trình mũ đã xét đến.

Từ đó ta giải được $t \longrightarrow x$.

⚡ Chú ý:

▪ Hàm số $\log_a (Ax + B)$ đồng biến khi $\begin{cases} a > 1 \\ A > 0 \end{cases}$ và nghịch biến khi $\begin{cases} a > 1 \\ A < 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ A < 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ A > 0 \end{cases}$

▪ Với những phương trình có chứa hàm logarith ở lũy thừa dạng $a^{\log_b f(x)}$ thì thông thường ta đặt $t = \log_b f(x)$.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1) $\log_2 (3 - x) = x$

2) $x^2 + 3^{\log_2 x} = 5^{\log_2 x}$

3) $\log_7 x = \log_3 (\sqrt{x} + 2)$

4) $\log_2 (x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

Hướng dẫn giải:

1) $\log_2 (3 - x) = x, \quad (1).$

Điều kiện: $x < 3$.

Đặt $\begin{cases} f(x) = \log_2 (3 - x) \\ g(x) = x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{-1}{(3-x)\ln 2} < 0 \\ g'(x) = 1 > 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ nghịch biến và } g(x) \text{ đồng biến.}$

Nhận thấy $x = 1$ là một nghiệm của (1), do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

2) $x^2 + 3^{\log_2 x} = 5^{\log_2 x}, \quad (2).$

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt } \log_2 x = t \longrightarrow x = 2^t, \quad (2) \Leftrightarrow 4^t + 3^t = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t = 1, \quad (*).$$

Ta dễ dàng nhận thấy (*) có nghiệm duy nhất $t = 2$. Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

$$3) \log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2), \quad (3).$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} t = \log_7 x \\ t = \log_3(\sqrt{x} + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7^t \\ \sqrt{x} + 2 = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = (\sqrt{7})^t \\ \sqrt{x} + 2 = 3^t \end{cases} \longrightarrow (\sqrt{7})^t + 2 = 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1, \quad (*).$$

Đặt $f(t) = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t \longrightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến (tổng của các hàm nghịch biến, hoặc dùng đạo hàm cũng ok).

Do $t = 2$ là một nghiệm nên đây chính là nghiệm duy nhất của (*).

Vậy $x = 49$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

$$4) \log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x, \quad (4).$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Đặt } \log_6 x = t \longrightarrow x = 6^t, \quad (4) \Leftrightarrow \log_2(6^t + 3^t) = t \Leftrightarrow 6^t + 3^t = 2^t \Leftrightarrow 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \longrightarrow t = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}.$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $x^2 + 3^{\log_2 x} = 5^{\log_2 x}$

b) $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

Hướng dẫn giải:

a) $x^2 + 3^{\log_2 x} = 5^{\log_2 x}, \quad (1).$

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt } \log_2 x = t \longrightarrow x = 2^t, \quad (1) \Leftrightarrow 4^t + 3^t = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t = 1, \quad (*).$$

Ta dễ dàng nhận thấy (*) có nghiệm duy nhất $t = 2$.

Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x, \quad (2).$

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt

$$\log_6 x = t \longrightarrow x = 6^t, \quad (2) \Leftrightarrow \log_2(6^t + 3^t) = t \Leftrightarrow 6^t + 3^t = 2^t \Leftrightarrow 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \longrightarrow t = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}.$$

Bài 2. Giải các phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu)

a) $\log_5(x + 3) = 3 - x$

ĐKXD: $x > -3$

$$\log_5(x + 3) = 3 - x \Leftrightarrow \log_5(x + 3) + x = 3 \quad (1)$$

Xét hàm $f(x) = \log_5(x + 3) + x$ với $(x > -3)$

Đạo hàm: $f'(x) = \frac{1}{(x+3)\ln 5} + 1 > 0 \forall x > -3 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-3, +\infty)$

Suy ra (1) có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm. Nhận thấy $x = 2$ là nghiệm của (1).

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của pt

b) $\log_2(3-x) = x$

ĐKXĐ: $x < 3$

$\log_2(3-x) = x \Leftrightarrow x - \log_2(3-x) = 0 \quad (2)$

Xét hàm: $f(x) = x - \log_2(3-x)$ với $x < 3$

Đạo hàm: $f'(x) = 1 - \frac{1}{(3-x)\ln 2} > 0 \forall x < 3 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-\infty, 3)$

Suy ra (2) có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm. Nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của (2).

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của pt

c) $x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3 \quad (3)$

ĐKXĐ: $x > 0$

Đặt: $\log_2 x = t \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow (2): 2^t + 2 \cdot 3^t = 3 \quad (*)$

Xét hàm: $f(t) = 2^t + 2 \cdot 3^t$ với $t \in \mathbb{R}$

Đạo hàm: $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 2 \cdot 3^t \ln 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra (3) có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm. Nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của (3).

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của pt

d) $\log_3(x+1) + \log_5(2x+1) = 2 \quad (4)$

ĐKXĐ: $x > -\frac{1}{2}$

Xét hàm: $f(x) = \log_3(x+1) + \log_5(2x+1)$

Đạo hàm: $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} + \frac{1}{(2x+1)\ln 5} > 0 \forall x > -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Suy ra (4) có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm. Nhận thấy $x = 2$ là nghiệm của (4).

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của pt

e) $4(x-2)[\log_2(x-3) + \log_3(x-2)] = 15(x+1)$

Bài 3. Giải các phương trình sau (mũ hóa kết hợp với sử dụng tính đơn điệu)

a) $\log_2 (x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

ĐKXĐ: $x > 0$

$$\log_2 (x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x \Leftrightarrow x + 3^{\log_6 x} = 2^{\log_6 x}$$

Đặt $\log_6 x = t \Rightarrow 6^t + 3^t = 2^t \Leftrightarrow 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 (*)$

Để thấy VT đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $(*)$ có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm. Nhận thấy $x = -1$ là một nghiệm

Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của pt

b) $4^{\log_7 (x+3)} = x$

ĐKXĐ: $x > 0$

Đặt $\log_7 (x+3) = t \Rightarrow 4^t = 7^t - 3 \Leftrightarrow 7^t - 4^t = 3 (*)$

Để thấy VT đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $(*)$ có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm. Nhận thấy $x = 1$ là một nghiệm

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của pt

c) $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

ĐKXĐ: $x > 0$

$$x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3} \Leftrightarrow (x^{\log_2 3})^2 + x^{\log_2 3} - x^2 \cdot x^{\log_2 3} = 0 \Leftrightarrow x^{\log_2 3} (x^{\log_2 3} - x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} - x^2 + 1 = 0$$

Đặt $\log_2 x = t \Leftrightarrow x = 2^t \Rightarrow 3^t - 4^t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1$

Để thấy $t = 1$ là nghiệm duy nhất của pt $\Leftrightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$

Bài 4. Giải các phương trình sau (mũ hóa kết hợp với sử dụng tính đơn điệu)

a) $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5} \quad (x > 0)$

$$x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5} \quad (x > 0) \Leftrightarrow x + 3^{\log_2 x} = 5^{\log_2 x}$$

Đặt: $\log_2 x = t \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow 2^t = 3^t + 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t + \left(\frac{5}{2}\right)^t = 1$

Để thấy $t = -1$ là nghiệm duy nhất của pt $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy $x = \frac{1}{2}$

b) $x^2 + 3^{\log_2 x} = 5^{\log_2 x}$

ĐKXĐ: $x > 0$

Đặt $\log_2 x = t (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow 4^t + 3^t = 5^t$ (đã làm)

Ta được $t = 2 \Rightarrow x = 4$

Vậy: $x = 4$

c) $6.9^{\log_2 x} + 6.x^2 = 13.x^{\log_2 6}$

ĐKXĐ: $x > 0$

Đặt: $\log_2 x = t \Rightarrow 6.9^t + 6.4^t = 13.6^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{13}{6}$

Xét $f(t) = \left(\frac{9}{6}\right)^t + \left(\frac{4}{6}\right)^t (t \in \mathbb{R})$. Đạo hàm: $f'(t) = \left(\frac{9}{6}\right)^t \cdot \ln \frac{9}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{6}$

$+t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$. Nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của pt suy ra $x = 1$ là nghiệm duy nhất của pt trên $\mathbb{R}^+$

$+t < 0 \Rightarrow f(t) < 0 \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}^-$. Nhận thấy $x = -1$ là nghiệm của pt suy ra $x = -1$ là nghiệm duy nhất của pt trên $\mathbb{R}^-$

Vậy $x = \pm 1$

Bài 5. Giải các phương trình sau (đặt ẩn không hoàn toàn)

a) $\log_3^2 x + (x-12)\log_3 x + 11 - x = 0$

Đặt: $\log_3 x = t \Rightarrow t^2 - (x-12)t + 11 - x = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t+11-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 11-x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ t = 11-3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 9 \end{cases}$

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{3}, 9\right\}$

b) $x.\log_2^2 x - 2(x+1).\log_2 x + 4 = 0$

Đặt: $\log_2 x = t \Rightarrow xt^2 - 2(x+1)t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(xt-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ xt = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t.2^t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy $x \in \{2, 4\}$

Bài 6. Giải các phương trình sau (đặt ẩn không hoàn toàn)

a) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$

ĐKXĐ: $x > 0$

Đặt: $\log_2 x = t \Leftrightarrow t^2 + (x-1)t = 6 - 2x \Leftrightarrow (t+2)(t-2+(x-1)^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t - 2 + (2^t - 1)^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \text{ (do VP đồng biến)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{4}, 2\right\}$

b) $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0$

ĐKXĐ: $x > -1$

Đặt $\log_3(x+1) = t \Rightarrow (x+2)t^2 + 4(x+1)t - 16 = 0 \Leftrightarrow (t+4)[(x+1)t + t - 4] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ (x+1)t + t - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ 3^t t + t - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 1 \text{ (VP đồng biến)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{80}{81} \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy $x \in \left\{-\frac{80}{81}, 2\right\}$

Bài 7. Giải các phương trình sau (phương pháp mũ hóa)

a) $\log_7(x+2) = \log_5 x$

ĐKXĐ: $x > 0$

Đặt $\log_7(x+2) = \log_5 x = t$. Nhận xét $x > 0 \Rightarrow \log_7(x+2) > 0 \Rightarrow t > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = 7^t \\ x = 5^t \end{cases} \Rightarrow 5^t + 2 = 7^t \Leftrightarrow 7^t - 5^t = 2$

Xét $f(t) = 7^t - 5^t$. Đạo hàm $f'(t) = 7^t \ln 7 - 5^t \ln 5 > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Dễ thấy pt có nghiệm duy nhất $t = 1 \Rightarrow x = 5$

Vậy $x = 5$

b) $2\log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x$

ĐKXĐ: $x > 0$

Đặt $2\log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x = 2t$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 6^t \\ x = 4^{2t} \end{cases} \Rightarrow 2^{2t} + 2^t = 6^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (do VT nghịch biến)} \Leftrightarrow x = 16$

Vậy $x=16$

c) $\log_2(\sqrt[3]{9x}+1)=\log_6 12x$

ĐKXD: $x > 0$

$$\log_2(\sqrt[3]{9x}+1)=\log_6(12x)=3t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{9x}+1=2^{3t} \\ 12x=6^{3t} \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot 6^{3t}}+1=2^{3t} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot 6^t+1=8^t \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{8}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \text{ (do VT nghịch}$$

biến)

$$\Leftrightarrow x=3$$

Vậy $x=3$

Bài 7. Giải các phương trình sau (phương pháp mũ hóa)

a) $\log_2(1+\sqrt[3]{x})=\log_7 x$

ĐKXD: $x > 0$

$$\text{Đặt } \log_2(1+\sqrt[3]{x})=\log_7 x=3t \Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt[3]{x}=8^t \\ x=7^{3t} \end{cases} \Rightarrow 1+7^t=8^t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^t + \left(\frac{7}{8}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t=1 \text{ (do VT nghịch}$$

biến)

$$\Leftrightarrow x=343$$

Vậy $x=343$

b) $\log_3(\sqrt{x}+2)=\log_2(\sqrt{x}+1)$

ĐKXD: $x > 0$

$$\text{Đặt } \log_3(\sqrt{x}+2)=\log_2(\sqrt{x}+1)=t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+2=3^t \\ \sqrt{x}+1=2^t \end{cases} \Rightarrow 3^t=1+2^t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t=1 \text{ (do VT nghịch biến)} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy $x=1$

c) $\log_{\sqrt[3]{5}}(x^2-2x-3)=2\log_2(x^2-2x-4)$

$$\text{Đặt: } \log_{\sqrt[3]{5}}(x^2-2x-3)=2\log_2(x^2-2x-4)=2t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=(\sqrt[3]{5})^{2t} \\ x^2-2x-4=2^t \end{cases} \Rightarrow (\sqrt[3]{5})^{2t}=2^t+1 \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)^t + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t=2 \text{ (do VT nghịch biến)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{0, 2\}$

Bài 8. Giải các phương trình sau

a) $(\sqrt{10}+1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} = \frac{2x}{3}$

ĐKXĐ: $x > 0$

$$\begin{aligned} (\sqrt{10}+1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} &= \frac{2x}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{10}+1)^{\log_3 x} (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} - \left[(\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} \right]^2 = \frac{2}{3} x \cdot (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3} x \cdot (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} - \left[(\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} \right]^2 &= 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{10}}{3} (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} \\ x = \frac{1-\sqrt{10}}{3} (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} \text{ (loại)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x^{\log_3(\sqrt{10}-1)} - \frac{\sqrt{10}-1}{3} x &= 0 \Leftrightarrow x^{\log_3(\sqrt{10}-1)-1} = \frac{\sqrt{10}-1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[\log_3(\sqrt{10}-1)-1]{\frac{\sqrt{10}-1}{3}} \end{aligned}$$

Vậy $x = \sqrt[\log_3(\sqrt{10}-1)-1]{\frac{\sqrt{10}-1}{3}}$

b) $3^{2\log_2 x} - 2x^{1+\log_2 x} - 8x^2 = 0$

c) $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$

ĐKXĐ: $x > 0$

$$\begin{aligned} 4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} &= 2.3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 4^{1+\log_2 x} - 6^{\log_2 x} = 2.9^{(1+\log_2 x)} \Leftrightarrow 2\left(\frac{9}{4}\right)^{1+\log_2 x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\log_2 x} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\log_2 x} + 1\right) \left(2\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\log_2 x} - 1\right) &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\log_2 x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 x = -\log_2 \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 2^{-\log_2 \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Vậy $x = 2^{-\log_2 \frac{3}{2}}$

d) $2.x^{\log_2 x} + 2.x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$

ĐKXĐ: $x > 0$

$$2.x^{\log_2 x} + 2.x^{-3\log_8 x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2.x^{\log_2 x} + 2.x^{-\log_2 x} - 5 = 0$$

Đặt $x^{\log_2 x} = t (t \neq 0)$

$$\Rightarrow 2t + \frac{2}{t} - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_2 x} = 2 \\ x^{\log_2 x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 x = 1 \\ \log_2 x \cdot \log_2 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$

Bài 9. Giải các phương trình sau

a) $\log_2 x + 2.\log_7 x = 2 + \log_2 x.\log_7 x$

$$\log_2 x + 2.\log_7 x = 2 + \log_2 x.\log_7 x \Leftrightarrow (\log_7 x - 1)(2 - \log_2 x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{4, 7\}$

b) $\log_2 x.\log_3 x + 3 = 3\log_3 x + \log_2 x$

$$\log_2 x \cdot \log_3 x + 3 = 3 \log_3 x + \log_2 x \Leftrightarrow (\log_3 x - 1)(3 - \log_2 x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 8 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{3, 8\}$

c) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$

ĐKXĐ: $x > -\frac{3}{2}$

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4 \Leftrightarrow 2 \log_{3x+7}(2x+3) + 1 + \log_{2x+3}(3x+7) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_{3x+7}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) = 3$$

Đặt $\log_{3x+7}(2x+3) = t (t \neq 0) \Rightarrow 2t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7 = 2x+3 \\ 2x+3 = \sqrt{3x+7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ (loại)} \\ x = -\frac{1}{4} \text{ (tm)} \end{cases}$

Vậy: $x \in \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

Bài 10. Giải các phương trình sau

a) $\log_{x^2}(2+x) + \log_{\sqrt{2-x}} x = 2$

Sửa:

$$\log_{x^2}(2+x) + \log_{\sqrt{2+x}} x = 2$$

ĐKXĐ: $0 < x < 2$

$$\log_{x^2}(2+x) + \log_{\sqrt{2+x}} x = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_x(x+2)}{2} + \frac{2}{\log_x(x+2)} = 2$$

Đặt $\log_x(x+2) = t (t \neq 0) \Leftrightarrow \frac{t}{2} + \frac{2}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_x(x+2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (tm)} \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy $x = 2$

b) $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$

ĐKXĐ: $x^2 \geq 1$

Đặt $\begin{cases} \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = a \\ \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = 2^a = 6^{ab} \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^b = 2 \\ 3^b \cdot 2^a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \log_6 2 \\ a = -\log_6 2 \log_2 3 = -\log_6 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \frac{2^{-\log_6 3} + 3^{\log_6 2}}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = \frac{2^{-\log_6 3} + 3^{\log_6 2}}{2}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

1) $\log_5(x+3) = 3-x$

2) $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5}, (x > 0)$

3) $4^{\log_7(x+3)} = x$

4) $\log_2(x^2 - x - 6) + x = \log_2(x+2) + 4$

5) $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$

6) $\log_3(x^2 - 3x - 13) = \log_2 x$

7) $\log_4(x^2 - x - 8) = \log_3 x + 1$

8) $\log_2(\cos x) = 2\log_3(\cot x)$

9) $2\log_2 \sqrt{x} = 3\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$

10) $\log_2(x-3) + \log_3(x-2) = 2$

11) $\log_3(x+1) + \log_5(2x+1) = 2$

12) $4(x-2)[\log_2(x-3) + \log_3(x-2)] = 15(x+1)$

DẠNG 3. PHƯƠNG PHÁP LOGARITH HÓA GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ

■ Khái niệm:

Là phương trình có dạng $a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} = c$, (1)

trong đó a, b nguyên tố cùng nhau, $f(x)$ và $g(x)$ thường là hàm bậc nhất hoặc bậc hai.

■ Cách giải:

Lấy logarith cơ số a hoặc cơ số b cả hai vế của (1) ta được

(1) $\Leftrightarrow \log_a(a^{f(x)} \cdot b^{g(x)}) = \log_a c \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} + \log_a b^{g(x)} = \log_a c \Leftrightarrow f(x) + g(x)\log_a b = \log_a c$, (2).

(2) thu được là phương trình bậc nhất của x , hoặc phương trình bậc 2 có thể giải đơn giản.

⊗ Chú ý:

Những dạng phương trình kiểu này chúng ta cố gắng sử dụng tính chất của hàm mũ để biến đổi sao cho $c = 1$. Khi đó việc logarith hóa hai vế với $c = 1$ sẽ cho phương trình thu được đơn giản hơn rất nhiều.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1) $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$

2) $5^x \cdot 3^{x^2} = 1$

3) $7^{3x} + 9 \cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 7^{3x}$

Hướng dẫn giải:

1) $3^x \cdot 2^{x+1} = 72 \Leftrightarrow \frac{3^x \cdot 2^{x+1}}{9 \cdot 8} = 1 \Leftrightarrow 3^{x-2} \cdot 2^{x-2} = 1 \Leftrightarrow 6^{x-2} = 1 \longrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

2) $5^x \cdot 3^{x^2} = 1 \Leftrightarrow \log_3(5^x \cdot 3^{x^2}) = \log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 5^x + \log_3 3^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \log_3 5 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(\log_3 5 + x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\log_3 5 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -\log_3 5$.

3) $7^{3x} + 9 \cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 7^{3x} \Leftrightarrow 8 \cdot 7^{3x} = 8 \cdot 5^{2x} \Leftrightarrow 7^{3x} = 5^{2x} \Leftrightarrow \lg(7^{3x}) = \lg(5^{2x}) \Leftrightarrow 3x \cdot \lg 7 = 2x \cdot \lg 5 = 0$

$\longrightarrow x(3 \lg 7 - 2 \lg 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

1) $5^x \cdot 8^{\frac{x+1}{x}} = 500$

2) $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$

3) $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}$

4) $x^{2 \lg x} = 10x$

Hướng dẫn giải:

1) $5^x \cdot 8^{\frac{x+1}{x}} = 500$, (1). Điều kiện: $x \neq 0$.

(1) $\Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3x+1}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 2^{\frac{x-3}{x}} = 5^{3-x} \Leftrightarrow \log_2 \left(2^{\frac{x-3}{x}} \right) = \log_2 (5^{3-x}) \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = (3-x) \log_2 5$

$\Leftrightarrow (\log_2 5)x^2 - 3(\log_2 5 - 1)x - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \log_5 \frac{1}{2} \end{cases}$

2) $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$, (2). Điều kiện: $x \neq -1$.

(2) $\Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 5^2 \cdot 2 \Leftrightarrow 5^{x-2} \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}-1} = 1 \Leftrightarrow \log_2 \left(5^{x-2} \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}-1} \right) = \log_2 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 1 + (x-2) \log_2 5 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 + (x-2)(x+1) \log_2 5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 1 + (x+1) \log_2 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{(1 + \log_2 5)}{\log_2 5} = -\frac{1}{\lg 5} \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2; x = -\frac{1}{\lg 5}$.

$$3) 2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6} \Leftrightarrow \log_2(2^{x-3}) = \log_2(5^{x^2-5x+6}) \Leftrightarrow x-3 = (x^2-5x+6)\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow (x-3)[1-(x-2)\log_2 5] = 0 \longrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x\log_2 5 = 1+2\log_2 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x = \frac{\log_2 50}{\log_2 5} = \log_5 50 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 3; x = \log_5 50$.

$$4) x^{2\lg x} = 10x, \quad (4). \text{ Điều kiện: } x > 0.$$

$$(4) \Leftrightarrow \lg(x^{2\lg x}) = \lg(10x) \Leftrightarrow 2\lg^2 x - \lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 1 \\ \lg x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = \sqrt{10} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 10; x = \sqrt{10}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$a) 5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$$

$$b) 3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$$

$$c) 3^{4^x} = 4^{3^x}$$

$$a) 5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 2^{\frac{3(x-1)}{x}-2} = 5^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = (3-x)\log_2 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x = -\log_2 5 \end{cases}$$

$$b) 3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36 \Leftrightarrow 3^{\frac{3x}{x+1}} = 2^2 \cdot 3^2 \Leftrightarrow 3^{\frac{3x}{x+1}-2} = 4 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} = \log_3 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (1-\log_3 4)x = 2 + \log_3 4 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2 + \log_3 4}{1 - \log_3 4}$$

$$c) 3^{4^x} = 4^{3^x} \Leftrightarrow 4^x = 3^x \cdot \log_3 4 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \log_3 4 \Rightarrow x = \log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4)$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau :

$$a) 5^{3-\log_5 x} = 25x$$

$$b) 9 \cdot x^{\log_9 x} = x^2$$

$$c) x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$$

$$d) x^{3(\log x)^3 - \frac{2}{3}\log x} = 100 \cdot \sqrt[3]{10}$$

GIẢI

$$a) 5^{3-\log_5 x} = 25x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{5^3}{5^{\log_5 x}} = 25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 5^3 = 5^2 x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$b) 9 \cdot x^{\log_9 x} = x^2 \Leftrightarrow \text{Lấy loga cơ số 9 hai vế, ta có phương trình :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 + (\log_9 x)^2 - 2\log_9 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (\log_9 x - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_9 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9 > 0$$

$$c) x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}. \text{ Sử dụng công thức : } a^{\log_c b} = b^{\log_c a}. \text{ Phương trình biến đổi thành :}$$

$$\Leftrightarrow 9^{\log_2 x} - x^2 \cdot 3^{\log_2 x} + 3^{\log_2 x} = 0 \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} (3^{\log_2 x} - x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\log_2 x} > 0 \\ 3^{\log_2 x} - x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = x^2 - 1$$

$$\text{Đặt : } t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t \Leftrightarrow x^2 = 4^t. \text{ Phương trình :}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = x^2 - 1 = 3^t = 4^t - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t - 1 = 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t - 1 \rightarrow f'(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^t \ln\left(\frac{1}{4}\right) < 0.$$

Chứng tỏ hàm số $f(t)$ là một hàm số nghịch biến.

Do $f(1) = 0$ cho nên với $t = 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $\log_2 x = 1 \rightarrow x = 2$.

$$d) x^{3(\log x)^3 - \frac{2}{3}\log x} = 100 \cdot \sqrt[3]{10}. \text{ Lấy log hai vế, phương trình trở thành :}$$

$$x^{3(\log x)^3 - \frac{2}{3}\log x} = 100\sqrt[3]{10} \Leftrightarrow \left(3(\log x)^3 - \frac{2}{3}\log x\right)\log x = 2 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log x \\ 0 < x \neq 1 \\ 3t^4 - \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log x \\ 0 < x \neq 1 \\ \begin{cases} t^2 = -1 \\ t^2 = \frac{7}{9} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \log x = -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ \log x = \frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{-\frac{\sqrt{7}}{3}} \\ x = 10^{\frac{\sqrt{7}}{3}} \end{cases}$$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau :

a) $x^{\log 9} + 9^{\log x} = 6$

b) $3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 6^{3\log_2 x}$

c) $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$

d) $4^{\lg(10x)} - 6^{\lg x} = 2.3^{\lg(100x^2)}$

a) $x^{\log 9} + 9^{\log x} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 9^{\log x} + 9^{\log x} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 9^{\log x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 3^{2\log x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \log x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

b) $3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 6^{3\log_2 x} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} + 3^{\log_2 x} = 6^{3\log_2 x} \Leftrightarrow 2.3^{\log_2 x} = 6^{3\log_2 x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6^3}\right)^{\log_2 x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_{\frac{1}{72}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\log_2 \frac{1}{72} \frac{1}{2}}$

c) $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 2^{2(1+\log_2 x)} - 6^{\log_2 x} = 2.3^{(2+2\log_2 x)} \Leftrightarrow 4.2^{2\log_2 x} - 6^{\log_2 x} = 18.3^{2\log_2 x}$

$\Leftrightarrow 4.2^{2\log_2 x} - 6^{\log_2 x} = 18.3^{2\log_2 x} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4 - \left(\frac{6}{4}\right)^{\log_2 x} = 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2\log_2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} > 0 \\ 18t^2 + t - 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ \begin{cases} t = -\frac{1}{2} < 0 \\ t = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \log_2 x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$

d) $4^{\lg(10x)} - 6^{\lg x} = 2.3^{\lg(100x^2)} \Leftrightarrow 4^{1+\lg x} - 6^{\lg x} = 2.3^{2+2\lg x} \Leftrightarrow 4.2^{2\lg x} - 6^{\lg x} = 18.3^{2\lg x}$

Chia hai vế cho $2^{2\lg x} > 0$ ta được

$4 - \left(\frac{6}{4}\right)^{\lg x} = 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2\lg x} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} > 0 \\ 18t^2 + t - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ \begin{cases} t = -\frac{1}{2} < 0 \\ t = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \log_2 x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau :

a) $2^{2\log_3(x^2-16)} + 2^{\log_3(x^2-16)+1} = 24$

b) $2^{1+(\log_2 x)^2} + 224 = x^{2\log_2 x}$

c) $x^{\lg^2 - 3\lg x - 4,5} = 10^{-2\lg x}$

a) $2^{2\log_3(x^2-16)} + 2^{\log_3(x^2-16)+1} = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^{\log_3(x^2-16)} > 0 \\ t^2 + 2t - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ \begin{cases} t = -6 \\ t = 4 \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow \log_3(x^2-16) = 2 \Leftrightarrow x^2-16 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5$

$$b) 2^{1+(\log_2 x)^2} + 224 = x^{2\log_2 x} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{(\log_2 x)^2} + 224 = (2^{\log_2 x})^{2\log_2 x} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^{(\log_2 x)^2} > 0 \\ t^2 - 2t - 224 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t = -14 \\ t = 16 = 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{(\log_2 x)^2} = 2^4 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ x = 2^2 = 4 \end{cases}$$

$$c) x^{\lg^2 - 3\lg x - 4,5} = 10^{-2\lg x}$$

$$\text{Lấy lg hai vế} \Rightarrow (\lg^2 - 3\lg x - 4,5) \lg x = -2\lg x \Leftrightarrow \lg x (\lg^2 - 3\lg x - 4,5 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 0 \\ \lg x = \frac{3 - \sqrt{10}}{2} \\ \lg x = \frac{3 + \sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 10^{\frac{3 - \sqrt{10}}{2}} \\ x = 10^{\frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \end{cases}$$

• BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

$$1) 4^{x^2 + 2x - 8} = 5^{x - 2}$$

$$2) 7^x \cdot 2^{\frac{9}{x+1}} = 392$$

$$3) 2^x \cdot 3^{9-x^2} = 8$$

$$4) 5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$$

$$5) 2^{x^2 - 2x} \cdot 3^x = \frac{3}{2}$$

$$6) 3^{x-1} = 5^{x^2-1}$$

06. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

DẠNG 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH SƠ CẤP

■ Khái niệm:

Là bất phương trình có dạng
$$\begin{cases} f(x) \geq (\leq; <; >) 0 \\ \frac{f(x)}{g(x)} \geq (\leq; <; >) 0 \end{cases}$$
, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm đa thức.

■ Cách giải:

- Giải các phương trình $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$ để tìm ra các nghiệm của các phương trình đó.
- Xét dấu các biểu thức theo quy tắc: **bỏ hết các hạng tử có lũy thừa bậc chẵn**, sắp xếp các nghiệm (không chứa lũy thừa bậc chẵn) theo thứ tự trên trục số rồi đan dấu.
- Từ trục xét dấu, ta được tập nghiệm của bất phương trình tương ứng với trường hợp lấy dấu nào.

⚡ Chú ý:

- Với bất phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có biệt thức
$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta' = (b')^2 - ac \end{cases}$$
, nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$) thì dấu

của $f(x)$ cùng dấu với dấu của hệ số a .

- Xét dấu các biểu thức tích với thương tương tự như nhau.
- Khi giải bất phương trình **tuyệt đối** không được nhân chéo bỏ mẫu số, mà chỉ quy đồng rồi xét dấu.

Ví dụ 1. Xét dấu các biểu thức sau:

1) $f(x) = \frac{x+2}{3-4x} + 3$

2) $f(x) = 2 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1}$

3) $f(x) = \frac{x+2}{3x+1} - \frac{x-2}{2x-1}$

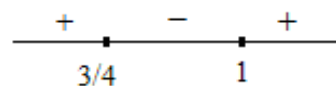
4) $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x}$

Hướng dẫn giải:

1) $f(x) = \frac{x+2}{3-4x} + 3 = \frac{x+2+9-12x}{3-4x} = \frac{11-11x}{3-4x} = \frac{11(x-1)}{4x-3}$

Từ trục xét dấu ta có kết quả

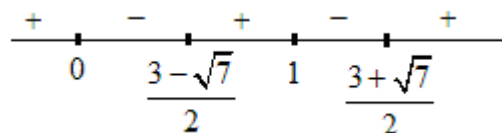
$$\begin{aligned} \square f(x) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{3}{4} \end{cases} \\ \square f(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{4} < x < 1 \\ \square f(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$



2) $f(x) = 2 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} = \frac{2x(x-1) - (x-1) - 3x}{x(x-1)} = \frac{2x^2 - 6x + 1}{x(x-1)}$

Từ trục xét dấu ta có kết quả

$$\begin{aligned} \square f(x) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{7}}{2} < x < 1 \\ x < 0 \end{cases} \\ \square f(x) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ 0 < x < \frac{3-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



Nhận xét:

Để xét dấu, ta lấy một giá trị bất kỳ trong một khoảng nào đó (thông thường là khoảng cận với vô cực, như trong ví dụ trên ta lấy giá trị $x = 100$ thay vào thì thấy được ngay cả tử số và mẫu số đều dương).

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

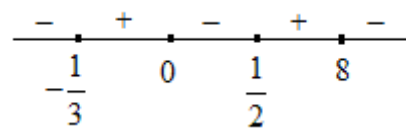
$$3) f(x) = \frac{x+2}{3x+1} - \frac{x-2}{2x-1} = \frac{(x+2)(2x-1) - (x-2)(3x+1)}{(3x+1)(2x-1)} = \frac{-x^2 + 8x}{(3x+1)(2x-1)} = \frac{x(8-x)}{(3x+1)(2x-1)}$$

Từ trục xét dấu ta có kết quả

$$\bullet f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < x < 0 \\ \frac{1}{2} < x < 8 \end{cases}$$

$$\bullet f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 8 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$



Nhận xét:

Để xét dấu trong bài này, ta lấy $x = 100$ thay vào thì được khoảng $(8; +\infty)$ mang dấu âm.

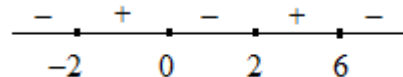
$$4) f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x} = \frac{x(x+2) + 2x(x-2) - 3(x+2)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2(6-x)}{x(x-2)(x+2)}$$

Từ trục xét dấu ta có kết quả

$$\bullet f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ 2 < x < 6 \end{cases}$$

$$\bullet f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$



Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

$$1) \frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}$$

$$2) \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(2-x)} > 0$$

$$3) \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 - 8x + 15} \geq 0$$

$$4) \frac{x-2}{1-x} + \frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+2) + 2x(x+2) - 3x(x+3)}{x(x+3)(x+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x(x+3)(x+2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+3)(x+2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x < -3 \end{cases}$$

// Các em tự lập bảng xét dấu để thu được kết quả như trên nhé.

$$2) \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(2-x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x(2-x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 0 < x < 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$3) \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 - 8x + 15} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{(x-3)(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-3)(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ \sqrt{3} \leq x < 3 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ x \leq -\sqrt{3} \end{cases}$$

// Các em tự lập trục xét dấu, chú ý chỉ lấy dấu bằng ở trên từ số, mẫu số thì tuyệt đối!

$$4) \frac{x-2}{1-x} + \frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1} \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1) + (x-3)(1-x) + x^2 + 4x + 15}{(1-x)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 7x + 10}{(1-x)(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+5)}{(1-x)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq -2 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

1) $\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(2-x)} > 0.$

2) $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2} \leq \frac{-4}{x^2 + 2x}.$

3) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2 - x + 1} \leq \frac{2x+3}{x^3 + 1}.$

4) $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} > 0.$

5) $\frac{2x-5}{x^2 - 6x - 7} < \frac{1}{x-3}.$

6) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \geq \frac{x+1}{x}.$

7) $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x-1}{x^3 + 1}.$

8) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leq 0.$

9) $\frac{(x-1)^3 (x+2)^4 (x+6)}{(x-7)^3 (x-2)^2} \leq 0.$

10) $\frac{3x+5}{3x-1} > \frac{2x-7}{2x-1}.$

DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ SƠ CẤP

▪ Khái niệm:

Là bất phương trình có một trong hai dạng $\begin{cases} \sqrt{f(x)} > g(x) \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \end{cases}.$

▪ Cách giải:

- Với bất phương trình $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad (I)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \quad (II)$

Chúng ta thiết lập xong các hệ, nên giải riêng từng hệ.

- Với bất phương trình $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

1) $\sqrt{2(x^2 - 1)} \leq x + 1$

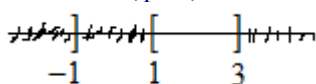
2) $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

3) $x + \sqrt{x^2 + 4x} < 1$

Hướng dẫn giải:

1) $\sqrt{2(x^2 - 1)} \leq x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 - 1) \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ 2(x^2 - 1) \leq (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$

// Thao tác lập trục xét dấu kết hợp nghiệm ta làm ra ngoài nháp.



2) $\sqrt{x^2 - x - 12} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -3 \\ x \geq 0 \\ x > -12 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$

$$3) x + \sqrt{x^2 + 4x} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} < 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x^2 + 4x < (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -4 \\ x \leq 1 \\ 6x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{6} \\ x \leq -4 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

1) $\sqrt{2x^2 + 5x - 6} > 2 - x$

2) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3$

3) $\sqrt{5x+1} - \sqrt{4x-1} \leq 3\sqrt{x}$

Hướng dẫn giải:

$$1) \sqrt{2x^2 + 5x - 6} > 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < 0 \\ 2x^2 + 5x - 6 \geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 6 > (2 - x)^2 \end{cases} \quad (II)$$

$$\bullet (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < 0 \\ 2x^2 + 5x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \geq \frac{-5 + \sqrt{73}}{4} \\ x \leq \frac{-5 - \sqrt{73}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

$$\bullet (II) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 6 > (2 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{-5 + \sqrt{73}}{4} \\ x \leq \frac{-5 - \sqrt{73}}{4} \\ x^2 + 9x - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{-5 + \sqrt{73}}{4} \\ x \leq \frac{-5 - \sqrt{73}}{4} \\ x > 1 \\ x < -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x < -10 \end{cases}$$

Hợp hai trường hợp ta được nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x > 1 \\ x < -10 \end{cases}$

$$2) \sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 5 \geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 5 \geq (3 - 2x)^2 \end{cases} \quad (II)$$

$$\bullet (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

$$\bullet (II) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ x^2 - 4x + 5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 4x + 5 \geq (3 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 8x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}.$$

Hợp hai trường hợp ta được nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{2}{3}$.

3) $\sqrt{5x+1} - \sqrt{4x-1} \leq 3\sqrt{x}, \quad (*)$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5x+1 \geq 0 \\ 4x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ x \geq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi đó, } (*) \Leftrightarrow \sqrt{5x+1} \leq 3\sqrt{x} + \sqrt{4x-1} \Leftrightarrow 5x+1 \leq 9x+4x-1+6\sqrt{x(4x-1)} \Leftrightarrow 6\sqrt{x(4x-1)} \geq 2-8x, \quad (**)$$

$$\text{TH1: } (**) \Leftrightarrow 2-8x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}, \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{TH2: } (**) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-8x > 0 \\ 36x(4x-1) \geq (2-8x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{4} \\ 20x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{4} \\ x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{5}.$$

Tập nghiệm này không thỏa mãn điều kiện, vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq \frac{1}{4}$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

- | | | |
|--|---|--------------------------------------|
| 1) $\sqrt{x+7} < x$. | 2) $\sqrt{x+2} < x+1$. | 3) $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1$. |
| 4) $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 2x+3$. | 5) $\sqrt{5x-x^2} < 3-x$. | 6) $\sqrt{2x+14} > x+3$. |
| 7) $\sqrt{(x+3)(x+4)} > 6-x$. | 8) $\sqrt{-x^2-8x-12} \geq x+4$. | 9) $\sqrt{11-x}-\sqrt{x-1} \leq 2$. |
| 10) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2} \leq 1$. | 11) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$. | 12) |
| $\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}$. | | |

DẠNG 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

■ Cách giải:

- Đưa về cùng cơ số $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \longrightarrow f(x) > g(x). \\ 0 < a < 1 \longrightarrow f(x) < g(x). \end{cases}$
- Đặt ẩn phụ $t = a^{f(x)}, (t > 0)$.

- Chia rồi đặt ẩn phụ với bất phương trình có chứa $a^{f(x)}, b^{f(x)}, c^{f(x)}, d^{f(x)}$, trong đó $\frac{a}{b} = \left(\frac{c}{b}\right)^m = \left(\frac{d}{b}\right)^n$. Lưu ý ở đây ta chia cho cơ số nhỏ nhất, để đưa về biểu thức có chứa cơ số đều lớn hơn 1.

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

- | | |
|--|--|
| 1) $9^{x^2-3x+2} - 6^{x^2-3x+2} < 0$ | 2) $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11$ |
| 3) $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x- x-1 }$ | 4) $(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}$ |

Hướng dẫn giải:

$$1) 9^{x^2-3x+2} - 6^{x^2-3x+2} < 0 \Leftrightarrow 9^{x^2-3x+2} < 6^{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{6}\right)^{x^2-3x+2} < 1 = \left(\frac{9}{6}\right)^0, \quad (1).$$

$$\text{Do } \frac{9}{6} > 1, \quad (1) \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

$$2) 3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11, \quad (2).$$

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\sqrt{x}} - \frac{1}{9} \cdot 3^{\sqrt{x}} < 11 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) < 11 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}} \cdot \frac{11}{9} < 11 \longrightarrow 3^{\sqrt{x}} < 9 = 3^2$$

Từ đó ta được $\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$.

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $0 \leq x < 4$.

$$3) 3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}, \quad (3).$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq (3^{-1})^{x-|x-1|} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq (3)^{|x-1|-x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq |x-1|-x, \quad (*).$$

$$\text{TH1: } x \geq 2 \longrightarrow |x-1| = x-1$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq x-1-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq -1, \quad \forall x \geq 2.$$

$$\text{TH2: } x \leq 0 \longrightarrow |x-1| = 1-x$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq 1-x-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq 1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ x^2-2x \geq (1-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 3x^2-2x+1 \leq 0 \end{cases}$$

Do $3x^2-2x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hệ trên vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$.

$$4) (\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}, \quad (4).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\text{Do } (\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)=1 \longrightarrow \sqrt{10}-3=(\sqrt{10}+3)^{-1}.$$

$$\text{Khi đó, } (4) \Leftrightarrow (\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} < -\frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9+x^2-1}{(x-1)(x+3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-5)}{(x-1)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{(x-1)(x+3)} < 0 \longrightarrow \begin{cases} 1 < x < \sqrt{5} \\ -3 < x < -\sqrt{5} \end{cases}$$

Các khoảng nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện, vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} 1 < x < \sqrt{5} \\ -3 < x < -\sqrt{5} \end{cases}$

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

$$1) 4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} > x^2.2^{x^2} + 8x + 12$$

$$2) (\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2}-1)^{-x}$$

$$3) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$$

$$4) 3^{4-3x} - 35.\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$$

Hướng dẫn giải:

$$1) 4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} > x^2.2^{x^2} + 8x + 12 \Leftrightarrow (4-2^{x^2})x^2 + (2^{x^2+1}-8)x + 3.2^{x^2} - 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow (4-2^{x^2})x^2 + 2(2^{x^2}-4)x + 3(2^{x^2}-4) > 0 \Leftrightarrow (2^{x^2}-4)(2x-x^2+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2}-4 > 0 \\ 2x-x^2+3 > 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2}-4 < 0 \\ 2x-x^2+3 < 0 \end{cases} \quad (II)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2}-4 > 0 \\ 2x-x^2+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 2 \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < x < 3 \end{cases} \\ \blacksquare (II) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2}-4 < 0 \\ 2x-x^2+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 2 \\ x^2-2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x > 3 \end{cases} \longrightarrow -\sqrt{2} < x < -1 \end{aligned}$$

Hợp hai trường hợp ta được nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x < -1 \\ x \neq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < x < 3 \end{cases}$

2) $(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2}-1)^{-x}, \quad (2).$

Điều kiện: $x \neq -1$.

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2}+1)^x \Leftrightarrow \frac{6x-6}{x+1} \leq x \Leftrightarrow \frac{6x-6}{x+1} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6x-6-x^2-x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x+1} \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x \geq 3 \\ -1 < x \leq 2 \end{cases}$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12, \quad (3).$

Điều kiện: $x \neq 0$.

$$(3) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{3} > 12 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 3 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} < -4 \end{cases} \longrightarrow -\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} < 0$$

Từ đó ta được nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < 0$.

4) $3^{4-3x} - 35 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3^4}{3^{3x}} - 35 \cdot 3^{3x-2} + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3^4}{3^{3x}} - \frac{35}{9} \cdot 3^{3x} + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 729 - 35 \cdot 3^{6x} + 54 \cdot 3^{3x} \geq 0$

$$35 \cdot 3^{6x} - 54 \cdot 3^{3x} - 729 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{25}{7} \leq 3^{3x} \leq \frac{27}{5} \longrightarrow 3^{3x} \leq \frac{27}{5} \Leftrightarrow 3x \leq \log_3 \frac{27}{5} \longrightarrow x \leq \frac{1}{3} \log_3 \frac{27}{5}$$

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau:

1) $49^{\frac{1}{x}} - 35^{\frac{1}{x}} \leq 25^{\frac{1}{x}}$

2) $3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0$

3) $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$

Hướng dẫn giải:

1) $49^{\frac{1}{x}} - 35^{\frac{1}{x}} \leq 25^{\frac{1}{x}}, \quad (1).$

Điều kiện: $x \neq 0$.

Đặt $\frac{1}{x} = t$, $(1) \Leftrightarrow 49^t - 35^t \leq 25^t \Leftrightarrow \left(\frac{49}{25}\right)^t - \left(\frac{35}{25}\right)^t \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^{2t} - \left(\frac{7}{5}\right)^t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq \left(\frac{7}{5}\right)^t \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Do $\left(\frac{7}{5}\right)^t > 0 \longrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^t \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow t \leq \log_7 \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \log_7 \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \left(\log_7 \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x}{x} \leq 0$

Giải bất phương trình trên ta thu được $\begin{cases} x < 0 \\ x \geq \frac{1}{\log_7 \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{7}{5} \end{cases}$

2) $3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0, \quad (2).$

Điều kiện: $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$.

$(2) \Leftrightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0 \Leftrightarrow \frac{9^x}{9^{\sqrt{x+4}}} - 8 \cdot \frac{3^x \cdot 3^{\sqrt{x+4}}}{9^{\sqrt{x+4}}} - 9 > 0 \Leftrightarrow 9^{x-\sqrt{x+4}} - 8 \cdot 3^{x-\sqrt{x+4}} - 9 > 0.$

Đặt

$$t = 3^{x-\sqrt{x+4}}, (t > 0) \longrightarrow 9^t - 8.3^t - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 9 \\ t < -1 \end{cases} (L) \longrightarrow 3^{x-\sqrt{x+4}} > 9 \Leftrightarrow x - \sqrt{x+4} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} < x-2, \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+4 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 5 \longrightarrow x > 5. \\ x < 0 \end{cases}$$

Đổi chiều với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 5$.

$$3) \sqrt{15.2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}, \quad (3).$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, (t > 0) \quad (3) \Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq |t-1| + 2t, \quad (*).$$

$$\text{TH1: } t \geq 1, (*) \Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq 3t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ 30t+1 \geq 9t^2 - 6t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t^2 - 4t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ 0 \leq t \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 4$$

Từ đó ta được $1 \leq 2^x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

$$\text{TH2: } t < 1, (*) \Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t \geq \frac{-1}{30} \\ -1 \leq t < 1 \\ 30t+1 \geq t^2 + 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{30} \leq t < -1 \\ -1 \leq t < 1 \\ t^2 - 28t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{30} \leq t < -1 \\ -1 \leq t < 1 \\ 0 \leq t \leq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{30} \leq t < -1 \\ -1 \leq t < 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $t > 0$ ta được $0 < t < 1$.

Từ đó ta có $0 < 2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Hợp hai trường hợp ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \leq 2$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $5^{x^2-7x+12} > 1$ | 2) $(\sqrt{5})^{x^2+7x+12} > 1$ | 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4$ |
| 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+3x} \leq \frac{1}{25}$ | 5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+13} < \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x}$ | 6) $3^{4x^2+3x+\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}$ |
| 7) $7.3^{x+1} + 5^{x+3} \leq 3^{x+4} + 5^{x+2}$ | 8) $2^{x+2} + 5^{x+1} < 2^x + 5^{x+2}$ | |
| 9) $9^x + 9^{x+1} + 9^{x+2} < 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$ | 10) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$ | 11) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ |
| 12) $(\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{x-1}}$ | 13) $6.x^2 + 3^{\sqrt{x}}.x + 3^{1+\sqrt{x}} < 2.3^{\sqrt{x}}.x^2 + 3x + 9$ | |
| 14) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$ | 15) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} < \frac{25}{4}$ | 16) $\frac{1}{3^{\sqrt{x^2+5x-6}}} > \frac{1}{3^{x+2}}$ |
| 17) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^x > 3$ | 18) $4^x - 3.2^x + 2 > 0$ | 19) $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$ |
| 20) $2^{2x+1} - 21.\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$ | 21) $27^x + 12^x > 2.8^x$ | 22) |
| $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} \geq 34.25^{2x-x^2}$ | | |
| 23) $2.14^x + 3.49^x - 4^x \geq 0$ | 24) $8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{1+\sqrt[4]{x}} > 9^{\sqrt{x}}$ | 25) $5.36^x - 2.81^x - 3.16^x \leq 0$ |

07. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARITH

■ Cách giải:

- Đưa về cùng cơ số: $\log_a [f(x)] > \log_a [g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \longrightarrow f(x) > g(x). \\ 0 < a < 1 \longrightarrow f(x) < g(x). \end{cases}$
- Đặt ẩn phụ $t = \log_a f(x)$.

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

1) $\log_5 (1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}} (x+1)$

2) $\log_2 (1-2\log_9 x) < 1$

3) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_2 \frac{1+2x}{1+x} \right) > 0$

4) $\log_x \left(\frac{3x+2}{x+2} \right) > 1$

Hướng dẫn giải:

1) $\log_5 (1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}} (x+1), \quad (1).$

Điều kiện: $\begin{cases} 1-2x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \longrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}.$

$(1) \Leftrightarrow \log_5 (1-2x) < \log_5 5 + 2\log_5 (x+1) \Leftrightarrow \log_5 (1-2x) < \log_5 [5(x+1)^2] \Leftrightarrow 1-2x < 5(x^2+2x+1)$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 12x - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{-6+2\sqrt{14}}{5} \\ x < \frac{-6-2\sqrt{14}}{5} \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $\frac{-6+2\sqrt{14}}{5} < x < \frac{1}{2}.$

2) $\log_2 (1-2\log_9 x) < 1, \quad (2).$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 1-2\log_9 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-\log_3 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \longrightarrow 0 < x < 3.$

$(2) \Leftrightarrow 1-2\log_9 x < 2 \Leftrightarrow 1-\log_3 x < 2 \Leftrightarrow \log_3 x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{3} < x < 3.$

3) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_2 \frac{1+2x}{1+x} \right) > 0, \quad (3).$

Điều kiện: $\begin{cases} 1+x \neq 0 \\ \frac{1+2x}{1+x} > 0 \\ \log_2 \frac{1+2x}{1+x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{1+2x}{1+x} > 0 \\ \frac{1+2x}{1+x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{1+2x}{1+x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{x}{1+x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases}$

Do $0 < \frac{1}{3} < 1$, $(3) \Leftrightarrow \log_2 \frac{1+2x}{1+x} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{1+2x}{1+x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1+2x}{1+x} > 2 \Leftrightarrow \frac{-1}{1+x} > 0 \longrightarrow 1+x < 0 \Leftrightarrow x < -1.$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $x < -1.$

4) $\log_x \left(\frac{3x+2}{x+2} \right) > 1, \quad (4).$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x+2 \neq 0 \\ \frac{3x+2}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x < -2 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Do (4) chứa ẩn ở cơ số, ta chưa xác định được cơ số lớn hơn hay nhỏ hơn 1 nên có hai trường hợp xảy ra:

$$\text{TH1: (4)} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_x \left(\frac{3x+2}{x+2} \right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{3x+2}{x+2} > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x^2-x-2}{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x < -2 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow 1 < x < 2.$$

$$\text{TH2: (4)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_x \left(\frac{3x+2}{x+2} \right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{3x+2}{x+2} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{x^2-x-2}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < -1 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 < x < 1$.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau

$$1) \log_3 \left(\sqrt{x^2-9} - x + \frac{1}{3} \right) \leq -1$$

$$2) \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2-3x+1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \log_3 \left(\sqrt{x^2-9} - x + \frac{1}{3} \right) \leq -1, \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-9} - x + \frac{1}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \\ \sqrt{x^2-9} > x - \frac{1}{3}, (*) \end{cases} \quad (I)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} < 0 \\ x - \frac{1}{3} \geq 0 \\ x^2-9 > \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x \geq \frac{1}{3} \\ x > \frac{41}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x > \frac{41}{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \\ x < \frac{1}{3} \\ x > \frac{41}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x > \frac{41}{3} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} - x + \frac{1}{3} \leq 3^{-1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-9 \leq x^2, \forall x \end{cases} \longrightarrow x \geq 0$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > \frac{41}{3}$.

$$2) \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2-3x+1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)}, \quad (2).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ \sqrt{2x^2-3x+1} > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2-3x+1} \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \\ x < \frac{1}{2} \\ 2x^2-3x+1 \neq 1 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -1 < x < \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{-\log_3 \sqrt{2x^2-3x+1}} > \frac{1}{-\log_3(x+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3(x+1)} > \frac{1}{\log_3 \sqrt{2x^2-3x+1}}, (*)$$

$$\text{TH1: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) > 0 \\ \log_3 \sqrt{2x^2-3x+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 1 \\ \sqrt{2x^2-3x+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2-3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm trong trường hợp này là } \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

TH2:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) > 0 \\ \log_3 \sqrt{2x^2-3x+1} > 0 \\ \log_3(x+1) < \log_3 \sqrt{2x^2-3x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 1 \\ \sqrt{2x^2-3x+1} > 1 \\ x+1 < \sqrt{2x^2-3x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2-3x > 0 \\ 2x^2-3x+1 > x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{3}{2}; x < 0 \\ x^2-5x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{3}{2}; x < 0 \\ x > 5; x < 0 \end{cases} \longrightarrow x > 5.$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm trong trường hợp này là $x > 5$.

TH3:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) < 0 \\ \log_3 \sqrt{2x^2-3x+1} < 0 \\ \log_3(x+1) < \log_3 \sqrt{2x^2-3x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 1 \\ \sqrt{2x^2-3x+1} < 1 \\ x+1 < \sqrt{2x^2-3x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2-3x < 0 \\ 2x^2-3x+1 > x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 0 < x < \frac{3}{2} \\ x^2-5x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 0 < x < \frac{3}{2} \\ 0 < x < 5 \end{cases} \longrightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

Hợp hai trường hợp 1 và 2 ta được nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau

1) $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$, (Đề thi ĐH khối B năm 2006).

2) $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \right) < 0$, (Đề thi ĐH khối B năm 2008).

3) $\log_x [\log_3(9^x - 72)] \leq 1$, (Đề thi ĐH khối B năm 2002).

Hướng dẫn giải:

1) $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$, (1).

$$(1) \Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) - \log_5 2^4 < \log_5 5 + \log_5(2^{x-2} + 1) \Leftrightarrow \log_5 \left(\frac{4^x + 144}{16} \right) < \log_5(5 \cdot 2^{x-2} + 5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x + 144}{16} < 5 \cdot 2^{x-2} + 5 \Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 < 0 \Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \longrightarrow 2 < x < 4.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $2 < x < 4$.

$$2) \log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0, \quad (2).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x + 4 \neq 0 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ \frac{x^2 - 4}{x + 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -4 < x < -2 \end{cases}$$

Do $0,7 < 1$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > (0,7)^0 \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6x - 24}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 8 \\ -4 < x < -3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x > 8 \\ -4 < x < -3 \end{cases}$

$$3) \log_x \left[\log_3 (9^x - 72) \right] \leq 1, \quad (3).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3 (9^x - 72) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_9 73 > 1, (*)$$

$$\text{Với điều kiện (*) thì } (3) \Leftrightarrow \log_3 (9^x - 72) \leq x \Leftrightarrow 9^x - 72 \leq 3^x \Leftrightarrow 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \Leftrightarrow -8 \leq 3^x \leq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq -8, \forall x \\ 3^x \leq 9 \end{cases}$$

Từ đó ta được $x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm của bất phương trình là $\log_9 73 < x \leq 2$.

Nhận xét: Trong ví dụ trên, mặc dù cơ sở chứa ẩn x nhưng do điều kiện ta xác định được ngay biểu thức về trái đồng biến nên bài toán không phải chia 2 trường hợp.

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình sau

$$1) \log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 2) > -2$$

$$2) \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}} x^2 < 0$$

$$3) \log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$$

$$4) \log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 > \frac{1}{\log_2 x - 6}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 2) > -2, \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ 2^{x+1} - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ 2(2^x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot [-\log_2 (2^{x+1} - 2)] > -2 \Leftrightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot [-\log_2 2 - \log_2 (2^x - 1)] + 2 > 0, \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 (2^x - 1), \quad (*) \Leftrightarrow t(-1 - t) + 2 > 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 2.$$

$$\text{Khi đó ta được } -1 < \log_2 (2^x - 1) < 2 \longrightarrow \begin{cases} \log_2 (2^x - 1) < 2 \\ \log_2 (2^x - 1) > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 < 4 \\ 2^x - 1 > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_2 5 \\ x > \log_2 \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 \frac{3}{2} < x < \log_2 5$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\log_2 \frac{3}{2} < x < \log_2 5$.

$$2) \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}} x^2 < 0, \quad (2).$$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \longrightarrow x > 0.$

Ta có $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x = \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right)^2 = (-\log_2 x)^2 = \log_2^2 x \\ \log_{\frac{1}{4}} x^2 = 2 \log_{2^{-2}} x = -\log_2 x \end{cases}$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < \log_2 x < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 < x < 2.$

3) $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3, \quad (3).$

Điều kiện: $\begin{cases} 2x > 0; 2x \neq 1 \\ x^2 > 0; x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2}; x \neq 1 \end{cases}$

$(3) \Leftrightarrow 6 \log_{2x} 2 + \frac{4}{2} \log_x 2 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{6}{\log_2(2x)} + \frac{2}{\log_2 x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} + \frac{2}{\log_2 x} - 3 \geq 0, \quad (*).$

Đặt $t = \log_2 x, \quad (*) \Leftrightarrow \frac{6}{1+t} + \frac{2}{t} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6t + 2t + 2 - 3t(1+t)}{t(1+t)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3t^2 + 5t + 2}{t(1+t)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1+3t)(2-t)}{t(1+t)} \geq 0.$

Lập bảng xét dấu ta thu được kết quả $\begin{cases} -1 < t \leq -\frac{1}{3} \\ 0 < t \leq 2 \end{cases}$

▪ Với $-1 < t \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > -1 \\ \log_2 x \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \leq 2^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

▪ Với $0 < t \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > 0 \\ \log_2 x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 4.$

Các tập nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện, vậy nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ 1 < x \leq 4 \end{cases}$

4) $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 > \frac{1}{\log_2 x - 6}, \quad (4).$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ x \neq 16 \\ \log_2 x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ x \neq 16 \\ x \neq 64 \end{cases}$

$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 \frac{x}{16}} > \frac{1}{\log_2 x - 6} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x - \log_2 16} > \frac{1}{\log_2 x - 6} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x - 4} - \frac{1}{\log_2 x - 6} > 0, \quad (*).$

Đặt $t = \log_2 x, \quad (*) \Leftrightarrow \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t-4} - \frac{1}{t-6} > 0 \Leftrightarrow \frac{t-6-t(t-4)}{t(t-4)(t-6)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2+5t-6}{t(t-4)(t-6)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)(3-t)}{t(t-4)(t-6)} > 0.$

Lập bảng xét dấu ta thu được kết quả $\begin{cases} 4 < t < 6 \\ 2 < t < 3 \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < \log_2 x < 6 \\ 2 < \log_2 x < 3 \\ \log_2 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 < x < 64 \\ 4 < x < 8 \\ x < 1 \end{cases}$

Các tập nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện, vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty; 1) \cup (4; 8) \cup (16; 64).$

Ví dụ 5. Giải các bất phương trình sau:

1) $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} > \sqrt{5} (\log_4 x^2 - 3)$

2) $\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x 2x^3}$

$$3) \frac{\lg(x^2 - 3x + 2)}{\lg x + \lg 2} > 2$$

$$4) \frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2 - 3x - 4} > 0$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3), \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \geq 3 \\ \log_2 x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 8 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3), \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x, \quad (*) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} t - 3 < 0 \\ t - 3 \geq 0 \\ t^2 - 2t - 3 > 5(t - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 3 \\ t \geq 3 \\ 4t^2 - 28t + 48 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < 3 \\ t \geq 3 \\ 3 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 3 \\ 3 \leq t < 4 \end{cases} \longrightarrow t < 4 \Leftrightarrow \log_2 x < 4 \Leftrightarrow x < 16.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là } \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 \leq x < 16 \end{cases}$$

$$2) \log_x 2x \leq \sqrt{\log_x 2x^3}, \quad (2).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x x \leq \sqrt{\log_x 2 + \log_x x^3} \Leftrightarrow \log_x 2 + 1 \leq \sqrt{\log_x 2 + 3} \Leftrightarrow (\log_x 2 + 3) - \sqrt{\log_x 2 + 3} - 2 \leq 0$$

$$-1 \leq \sqrt{\log_x 2 + 3} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_x 2 + 3} \leq 2 \\ \sqrt{\log_x 2 + 3} \geq -1, \forall x \in (*) \end{cases} \longrightarrow \log_x 2 + 3 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \log_2 x}{\log_2 x} \leq 0$$

$$\text{Giải bất phương trình trên (coi } \log_2 x \text{ là ẩn) ta được } \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm của bất phương trình là } \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$3) \frac{\lg(x^2 - 3x + 2)}{\lg x + \lg 2} > 2, (3).$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \\ \lg x + \lg 2 \neq 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 0 < x < 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, } (3) \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2 - 3x + 2)}{\lg(2x)} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2 - 3x + 2) - 2\lg(2x)}{\lg(2x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lg\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{4x^2}\right)}{\lg(2x)} > 0, \quad (*).$$

$$\text{TH1: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{4x^2}\right) > 0 \\ \lg(2x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{4x^2} > 1 \\ 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 4x^2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3 - \sqrt{33}}{6} < x < \frac{-3 + \sqrt{33}}{6} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sử dụng trục số kết hợp ta thấy hệ vô nghiệm.

$$\text{TH2: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg\left(\frac{x^2-3x+2}{4x^2}\right) < 0 \\ \lg(2x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{4x^2} < 1 \\ 2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 > 4x^2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-3-\sqrt{33}}{6} \\ x > \frac{-3+\sqrt{33}}{6} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sử dụng trục số kết hợp ta được

$$\begin{cases} x < \frac{-3-\sqrt{33}}{6} \\ \frac{-3+\sqrt{33}}{6} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{-3+\sqrt{33}}{6} < x < \frac{1}{2}$.

$$4) \frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2-3x-4} > 0, \quad (4).$$

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2-3x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases} \longrightarrow x > -1.$

Biến đổi tử số ta được

$$\begin{aligned} \log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3 &= 2\log_2(x+1) - 3\log_3(x+1) = 2\log_2(x+1) - 3\log_3 2 \cdot \log_2(x+1) = \\ &= (2 - 3\log_3 2)\log_2(x+1) = (\log_3 9 - \log_3 8)\log_2(x+1) = \left(\log_3 \frac{9}{8}\right)\log_2(x+1) \end{aligned}$$

Khi đó, $(4) \Leftrightarrow \frac{\left(\log_3 \frac{9}{8}\right)\log_2(x+1)}{x^2-3x-4} > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+1)}{x^2-3x-4} > 0$, do $\log_3 \frac{9}{8} > 0$.

$$\text{TH1: } \begin{cases} \log_2(x+1) > 0 \\ x^2-3x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 1 \\ x > 4 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \log_2(x+1) < 0 \\ x^2-3x-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 1 \\ -1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\begin{cases} x > 4 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

1) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5-x} < \log_{\frac{1}{3}} (3-x)$

2) $\log_2(x+3) \geq 1 + \log_2(x-1)$

3) $2\log_8(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-3) > \frac{2}{3}$

4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$

5) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}x + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}x - 3\right) \leq 1$

6) $\log_2(x^2-3x+2) \geq \log_2(x+14)$

7) $\log_3 \sqrt{x^2-x-6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-3} > \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

8) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+8) + 2\log_5(x-4) < 0$

9) $\log_2(4^x - 2^{x+1}) \leq x$

10) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right) \geq 0$

11) $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_4(x^2-5)\right] > 0$

12) $\log_2\left[\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)\right] > 0$

13) $\log_x(5x^2-8x-3) > 2$

14) $\log_{x^2}(x+2) < 1$

$$15) \log_2 x + 2\log_x 4 - 3 \leq 0$$

$$17) \log_{\frac{1}{2}} x - 6\log_2 x + 8 \leq 0$$

$$19) \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$$

$$21) \frac{1}{5 - \log_5 x} + \frac{2}{1 + \log_5 x} < 1$$

$$23) \frac{\log_2^2 x - \log_2 x - 2}{\log_2 \frac{x}{2}} \geq 0$$

$$25) \sqrt{\log_2 x + 3} \geq \log_2 x + 1$$

$$27) \frac{\lg(x^2 - 1)}{\lg(1 - x)} < 1$$

$$16) 2\log_5 x - \log_x 125 < 1$$

$$18) \log_x 100 - \frac{1}{2}\log_{100} x > 0$$

$$20) \frac{1}{4 + \log_2 x} + \frac{2}{2 - \log_2 x} \leq 1$$

$$22) \frac{2}{1 - \log_2 x} + \frac{\log_4 x}{1 + \log_2 x} > \frac{\log_2 x}{1 - \log_2^2 x}$$

$$24) \sqrt{\log_2 x - 1} \leq 3 - \log_2 x$$

$$26) \sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x + 9} \geq 2\log_3 x - 3$$

$$28) \frac{\log_2(x^2 - 6x + 5)}{\log_2(2 - x)} \geq 2$$

08. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARITH

■ Khái niệm:

Là hệ phương trình có dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ trong đó $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là các hàm số mũ, logarith hoặc chỉ có một phương trình là mũ, logarith.

■ Cách giải:

- Đặt điều kiện cho hệ có nghĩa (nếu có).
- Sử dụng các phép biến đổi dùng cho hàm mũ hoặc hàm logarith để đưa hệ phương trình về dạng cơ bản.
- Thông thường, ta dùng phép biến đổi từng phương trình trong hệ rồi sử dụng phép thế.

Chú ý: Nếu x, y thỏa mãn $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ thì x, y là nghiệm của phương trình $t^2 + S.t + P = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = t_1; y = t_2 \\ x = t_2; y = t_1 \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases} & 2) & \begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} & 3) & \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2 \\ \log_{27}(x+y) = \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+y > 0 \\ x-y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -y \\ x > y \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ biến đổi được về dạng } \begin{cases} (3)^{\frac{x-y}{2}} = (3)^{-x+2y} \\ \log_2(x^2 - y^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = -x+2y \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x}{5} \\ x^2 - \left(\frac{3x}{5}\right)^2 = 16, (*) \end{cases}$$

$$\text{Giải (*) ta được } x^2 - \left(\frac{3x}{5}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{25} = 16 \Leftrightarrow x = \pm 5 \longrightarrow y = \pm 3$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của hệ là $x = 5; y = 3$.

$$2) \begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện: $x, y > 0$.

$$\text{Ta có } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x - 2\log_2 y = 1 \\ \log_4 \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x - 2\log_2 y = 1, (*) \\ x = 4y \end{cases}$$

$$\text{Thay } x = 4y \text{ vào (*) ta được } \log_y(4y) - 2\log_2 y = 1 \Leftrightarrow 2\log_y 2 + 1 - 2\log_2 y - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 y} = \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 y = \pm 1$$

$$\longrightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 8 \\ y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \end{cases}. \text{ Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là } \{8; 2\}, \left\{2; \frac{1}{2}\right\}.$$

$$3) \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2 \\ \log_{27}(x+y) = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện: $x, y > 0$.

$$\text{Ta có (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(xy) = \log_3(9.2) \\ x+y = 27^{\frac{2}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 18 \\ x+y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(6;3), (3;6)$.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 5\log_2 x = \log_2 y^3 - \log_{\sqrt{2}} 2 \\ \log_2 y = 8 - \log_{\sqrt{2}} x \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \begin{cases} 5\log_2 x = \log_2 y^3 - \log_{\sqrt{2}} 2 \\ \log_2 y = 8 - \log_{\sqrt{2}} x \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện: $x, y > 0$.

$$\text{Ta có (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x^5 = \log_2 y^3 - \log_2 4 \\ \log_2 y = \log_2 2^8 - \log_2 x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 = \frac{y^3}{4}, & (1) \\ y = \frac{2^8}{x^2}, & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được } x^5 = \frac{\left(\frac{2^8}{x^2}\right)^3}{4} \Leftrightarrow x^5 = \frac{2^{24}}{4x^6} \Leftrightarrow x^{11} = 2^{22} \longrightarrow \begin{cases} x = 2^2 = 4 \\ y = \frac{2^8}{2^4} = 16 \end{cases}$$

Các nghiệm này đều thỏa mãn, vậy hệ đã cho có nghiệm $(4; 16)$.

$$2) \begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5, & (1) \\ xy = 8, & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ y > 0, y \neq 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\log_x y} + \log_x y\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_x y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

▪ Với $y = x^2$, $(2) \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \longrightarrow y = 4$

▪ Với $y = \sqrt{x}$, $(2) \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(2;4), (4;2)$.

$$3) \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, & (1) \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0, & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x, y > 0$.

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 y = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{x}}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{y} = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$$

$$\text{Khi đó, (2)} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(1;1), (4;2)$.

$$4) \begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy), & (1) \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0, & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x > y \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \lg^2 x - \lg^2 y = \lg^2(xy) \Leftrightarrow (\lg x - \lg y)(\lg x + \lg y) = (\lg x + \lg y)^2 \Leftrightarrow (\lg x + \lg y)[(\lg x - \lg y) - (\lg x + \lg y)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + \lg y = 0 \\ -2\lg y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 1 \end{cases}$$

▪ Với $y = \frac{1}{x}$, $(2) \Leftrightarrow \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lg^2(x-y) - \lg^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = x \\ x-y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, (L) \\ y = 2x \end{cases}$

$$\longrightarrow \frac{1}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

▪ Với $y = 1$, $(2) \Leftrightarrow \lg^2(x-1) + \lg x \cdot \lg 1 = 0 \Leftrightarrow \lg^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right), (2; 1)$.

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \lg \sqrt{(x+y)^2} = 1 \\ \lg y - \lg |x| = \lg 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{y} + \lg x^2 = 2 \\ y + 4\lg x = 28 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 9^{\log_2(xy)} - 3 = 2(xy)^{\log_2 3} \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

$$1) \begin{cases} \lg \sqrt{(x+y)^2} = 1 \\ \lg y - \lg |x| = \lg 2 \end{cases} \quad (I) \text{ . Điều kiện: } \begin{cases} x+y \neq 0 \\ y > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 10 \\ \lg \frac{y}{|x|} = \lg 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| = 10 \\ y = 2|x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x+y = 10 \\ y = 2x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{20}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x+y = 10 \\ y = -2x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 20 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right), (-10; 20)$.

$$2) \begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, & (1) \\ \log_3 y - \log_3 x = 1, & (2) \end{cases} \text{ . Điều kiện: } \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ y > 0, y \neq 1 \end{cases}$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \log_3 \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow y = 3x$.

Khi đó, $x^{\log_3(3x)} + 2(3x)^{\log_3 x} = 27 \Leftrightarrow x^{1+\log_3 x} + 2 \cdot 3^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 x} = 27 \Leftrightarrow x^{1+\log_3 x} + 2x^{1+\log_3 x} = 27 \Leftrightarrow x^{1+\log_3 x} = 9$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^{1+\log_3 x}) = \log_3 9 \Leftrightarrow (1+\log_3 x)\log_3 x = 2 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + \log_3 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Từ đó ta được
$$\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(3; 9), \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$.

3)
$$\begin{cases} \sqrt{y} + \lg x^2 = 2 \\ y + 4\lg x = 28 \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện: $x, y > 0$.

Ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} + 2\lg x = 2 \\ y + 4\lg x = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y} + 4\lg x = 4 \\ y + 4\lg x = 28 \end{cases} \longrightarrow y - 2\sqrt{y} = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 6 \\ \sqrt{y} = -4 \end{cases} \longrightarrow y = 36.$

Với $y = 36$ thay vào ta được $4\lg x = 28 - 36 \Leftrightarrow \lg x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{100}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(\frac{1}{100}; 36\right)$.

4)
$$\begin{cases} 9^{\log_2(xy)} - 3 = 2(xy)^{\log_2 3}, & (1) \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1, & (2) \end{cases}$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} xy > 0 \\ xy \neq 1 \end{cases}$$

Đặt $t = \log_2(xy) \longrightarrow xy = 2^t$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow 9^t - 3 = 2(2^t)^{\log_2 3} \Leftrightarrow 9^t - 3 = 2 \cdot (2^{\log_2 3})^t \Leftrightarrow 9^t - 2 \cdot 3^t - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ xy = 8 \end{cases}$

Ta có $(2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(x+y) + 2 = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 - 2xy = 0, (*)$

▪ **TH1:** Với $xy = \frac{1}{2}$, $(*) \Leftrightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=-2 \end{cases}$

Từ đó ta được
$$\begin{cases} \begin{cases} x+y=0 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow vn_o \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow vn_o \end{cases}$$

▪ **TH2:** Với $xy = 8$, $(*) \Leftrightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 - 2 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=-5 \end{cases}$

Từ đó ta được
$$\begin{cases} \begin{cases} x+y=3 \\ xy=8 \end{cases} \longrightarrow vn_o \\ \begin{cases} x+y=-5 \\ xy=8 \end{cases} \longrightarrow vn_o \end{cases}$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

$$1) \begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^2 - y = 20 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 81 \\ \log_2 x + \log_4 y = 1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + y = 25 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$6)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \log_2 (x + y) - \log_2 (x - y) = 1 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2 (2x + y) - \log_2 (2x - y) = 1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \log_2 xy = 5 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = 1 + \lg 8 \\ \lg (x + y) - \lg (x - y) = \lg 3 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \log_2 (xy) \cdot \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = -3 \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \log_{xy} (x - y) = 1 \\ \log_{xy} (x + y) = 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2 \\ \log_y (2x + 3y) = 2 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 + 12 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 2 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 4^{\log_3 (xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \log_5 x + \log_5 7 \cdot \log_7 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = \log_2 5(1 + 3\log_5 x) \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x^2 = 1 + 6\log_4 y \\ y^2 = 2^x \cdot y + 2^{2x+1} \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9 (9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 2^{2x-y} + 2^x = 2^{1+y} \\ \log_2 x \cdot (\log_4 y - 1) = 4 \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} = (x+y)^{\frac{1}{x-y}} \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 48 \end{cases}$$

CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO VỀ PT, BPT, HPT MŨ VÀ LOGARITH - PHẦN 1

Giải các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình sau:

$$1) \frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{2^x}{2+2^x} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$$

$$2) \log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_{(x+3)} 2} = 2 + \log_2(x+1)$$

$$3) \log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$$

4)

$$\log_{27} (x^2 - 5x + 6)^3 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{x-1}{2} \right) + \log_9 (x-3)^2$$

$$5) \log_2 (4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 3)$$

$$6) \log_3 \left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} \right) = x^2 + 3x + 2$$

$$7) (2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2$$

$$8) 2x^{\log_2 x} + 2x^{-3 \log_8 x} - 5 = 0$$

$$9) 5.3^{2x-1} - 7.3^{x-1} + \sqrt{1 - 6.3^x + 9^{x+1}} = 0$$

$$10) \log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}$$

$$11) \log_{\frac{1}{2}} (4^x + 4) \geq \log_{\frac{1}{2}} (2^{2x+1} - 3.2^2)$$

$$12) \begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases}$$

$$13) 16 \log_{27x^2} x - 3 \log_{3x} x^2 = 0$$

$$14) \log_x 2 + 2 \log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$$

$$15) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$16) \log_4 (x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2}$$

$$17) \log_2 \left[\log_{0.5} \left(2^x - \frac{15}{16} \right) \right] \leq 2$$

$$18) 6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$$

$$19) 3^{\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-6}}} > 3^{\frac{1}{x+2}}$$

$$20) \sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$$

$$21) (\sqrt{5} + 1)^{-x^2+x} + 2^{-x^2+x+1} < 3(\sqrt{5} - 1)^{-x^2+x}$$

$$22) \log_5 x^4 - \log_2 x^3 - 2 = -6(\log_2 x)(\log_5 x)$$

$$23) \frac{1}{\log_6 (3+x)} + \frac{2 \log_{\frac{1}{4}} (4-x)}{\log_2 (3+x)} = 1$$

$$24) \frac{\log_{\sqrt{5}} x \cdot \log_{25} x}{\log_5 x} = \log_{125} 2x$$

$$25) \log(x^3 + 1) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 1) = \log x$$

$$26) x^{\log_3 4} = x^2 \cdot 2^{\log_3 x} - 7 \cdot x^{\log_3 2}$$

$$27) \log_3 (\log_{27} x) + \log_{27} (\log_3 x) = \frac{1}{3}$$

28)

$$\log_3 (2^x - 2) + \log_3 (2^x + 1) = \log_3 (2^{x+2} - 6)$$

$$29) \sqrt{3 + \log_2 (x^2 - 4x + 5)} + 2\sqrt{5 - \log_2 (x^2 - 4x + 5)} = 6$$

$$30) \sqrt{(\log_2 \sqrt{2x} + \log_x \sqrt{2x}) \log_2 x^2} + \sqrt{\left(\log_2 \sqrt{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt{\frac{2}{x}} \right) \log_2 x^2} = 2$$

CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO VỀ PT, BPT, HPT MŨ VÀ LOGARITH - PHẦN 2

Giải các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình sau:

1) $\log_2^4 x - \log_2^2 \left(\frac{x^3}{8} \right) + 9 \log_2 \left(\frac{32}{x^2} \right) < 4 \log_2^2 x$

2) $\frac{\log_3(3^x - 1)}{x - 1} \geq 1$

3) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} (1 + \sqrt[3]{x-1})$

4) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} (x-1) > \log_{\frac{1}{2}} (1 + \sqrt[3]{x-2})$

5) $\log_{x^2} \left(\frac{4x-2}{|x-2|} \right) \geq \frac{1}{2}$

6) $0,12^{\log_{x-1} x} \geq \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \right)^{\log_{x-1}(2x-1)}$

7) $2^{\frac{\log_2^2 x}{2}} + x^{\frac{\log_2^2 x}{2}} > \frac{5}{2}$

8) $\sqrt{2 - |\log_2 x|} > \log_2 x$

9) $3^{\log_3^2 x} - 18x^{\log_3 \frac{1}{2}} + 3 > 0$

10) $(x-1)^{\log_2[4(x-1)]} = 8(x-1)^3$

11) $\log_{\sqrt[4]{5}}(x^2 - 2x - 2) = \log_2(x^2 - 2x - 3)$

12) $\log_2(x^2 - 4) + x = \log_2[8(x+2)]$

13) $\log_2(1 + \sqrt[3]{x}) = \log_7 x$

14) $\log_{\sqrt[4]{5}}(x^2 - 2x - 3) = 2 \log_2(x^2 - 2x - 4)$

15) $\log_2[x(x-1)^2] + \log_2 x \cdot \log_2(x^2 - x) - 2 = 0$

16) $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 3 \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2$

17) $5^x + \frac{2 \cdot 5^x}{\sqrt{5^{2x} - 4}} > 3\sqrt{5}$

18) $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$

19) $\frac{4 - 7 \cdot 5^x}{5^{2x+1} - 12 \cdot 5^x + 4} \leq \frac{2}{3}$

20) $\sqrt{13^x - 5} \leq \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}$

21) $\log_2 \sqrt{x+4} = \log_2(2 + \sqrt{x-4})$

22) $x \cdot \log_5 3 + \log_5(3^x - 2) = \log_5(3^{x+1} - 4)$

23) $2 \cdot \log_4^2 x = \log_2 x \cdot \log_2(\sqrt{x-7} + 1)$

24) $\log_8^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) + \log_2(8x^2) = 8$

25) $\log_2^2 x + \log_2 x \cdot \log_2(x-1) + 2 = 3 \cdot \log_2 x + 2 \log_2(x-1)$

26) $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$

27) $\log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2(3^x + 1) \right] > -1$

28) $\log_2(x^2 + x + 1) + \log_2(x^2 - x + 1) = \log_2(x^4 + x^2 + 1) + \log_2(x^4 - x^2 + 1)$