

Nguyễn Tiến Đạt

8 KỸ THUẬT ĐẠT ĐIỂM TỐI ĐA

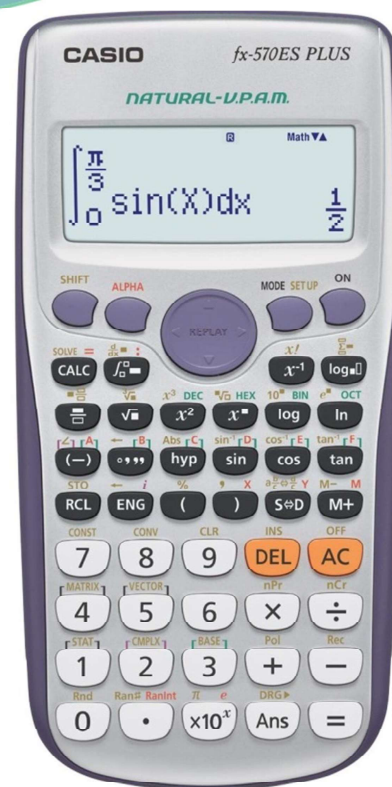
NGUYÊN HÀM

TÍCH PHÂN

ÁP DỤNG TRONG KỲ THI
THPT QUỐC GIA

TỪ NĂM
2017

Hoc24h.vn



LỜI NÓI ĐẦU

Khi các em cầm trên tay cuốn sách này tức là các em đang rất quan tâm đến việc học của mình, chúc mừng tinh thần học tập đó của em!

Có thể em chưa biết, tích phân là một mảng rất rộng và bao hàm nhiều dạng bài và phương pháp xử lý khác nhau. Đặc biệt khi lên đại học, những ngành liên quan đến kỹ thuật, chúng ta sẽ tiếp cận **Nguyên Hàm – Tích Phân** ở mức độ cao hơn.

Tuy nhiên trong khuôn khổ kỳ thi THPT Quốc gia 2017, thầy đã chắt lọc cho các em trong cuốn sách này:

- Đầy đủ những phương pháp chắc chắn có trong đề thi, bám sát cấu trúc đề của Bộ Giáo Dục
- Nhiều ví dụ đa dạng và giải chi tiết theo hướng **Step by Step** (từng bước), dù là học sinh mất gốc vẫn có thể sử dụng cuốn sách này.
- Đề trắc nghiệm theo mọi hướng để các em tiếp cận được rộng nhất.
- Kết hợp các phương pháp sử dụng máy tính Casio, Vinacal.

Thầy tự tin khẳng định rằng, khi các em sử dụng thành thạo **8 kỹ thuật** trong cuốn sách này, việc đạt điểm tối đa chuyên đề **Nguyên Hàm – Tích Phân** là cực kỳ đơn giản!

Cách sử dụng sách

Bước 1: Đọc kỹ và hiểu phương pháp.

Bước 2: Đọc ví dụ rồi đóng sách làm lại

Bước 3: Làm đề trắc nghiệm bên cạnh đồng hồ (Cố làm nhanh nhất có thể).

Chú ý: Không được đọc phần bấm máy trước! Hãy nhuần nhuyễn giải tay trước, vì nhiều bài có khả năng bấm máy lâu hơn tính tay rất nhiều.

Mặc dù thầy đã cố gắng hết sức, nhưng không tránh khỏi sai sót, mong các em đóng góp ý kiến chân thành.

Giáo viên

Nguyễn Tiến Đạt

Mọi góp ý gửi về: “**Trung tâm luyện thi Đại Học Tiến Đạt**”

- Số 8 ngõ 17 Tạ Quang Bửu, HBT, Hà Nội | Liên hệ: **090.32888.66**

Email: tiendatnguyen2510@gmail.com | Facebook: **Đạt Nguyễn Tiến**



“Tri thức không vô tình mà đạt được. Chúng ta phải tìm kiếm nó với sự nhiệt tình và đạt được nó bằng sự chăm chỉ.”

MỤC LỤC

Nguyên Hàm	5
A. Định Nghĩa Và Tính Chất	5
B. Bảng Các Nguyên Hàm, Đạo Hàm Cơ Bản	6
Trắc Nghiệm Lý Thuyết.....	8
Đáp Án Trắc Nghiệm Lý Thuyết	11
Kỹ Thuật 1: Sử Dụng Bảng Nguyên Hàm Cơ Bản	12
Trắc Nghiệm Kỹ Thuật 1 – Dạng 1	13
Đáp Án Trắc Nghiệm Kỹ Thuật 1 – Dạng 1	14
Trắc Nghiệm Kỹ Thuật 1 – Dạng 2.....	15
Đáp Án Trắc Nghiệm Kỹ Thuật 1 – Dạng 2	15
Kỹ Thuật 2: Tính Nguyên Hàm Của Hàm Số Hữu Tỷ	16
Trắc Nghiệm Kỹ Thuật 2	22
Đáp Án Trắc Nghiệm Kỹ Thuật 2.....	23
Kỹ Thuật 3: Đổi Biến Dạng 1	24
1. Các Dạng Đổi Biến Số Thường Gặp.....	24
Trắc Nghiệm Đổi Biến Số Dạng 1	26
Đáp Án Trắc Nghiệm Đổi Biến Dạng 1	28
Tích Phân	30
Trắc Nghiệm Lý Thuyết Tích Phân.....	31
Đáp Án Trắc Nghiệm Lý Thuyết Tích Phân	33
Tích Phân Đổi Biến Dạng 1	37
Dạng $\begin{cases} I_1 = \int f(ax+b)^n \cdot x dx \rightarrow t = ax+b \Rightarrow dt = a \cdot dx \\ I_2 = \int \left(\frac{x^n}{ax^{n+1}+1} \right)^m \cdot dx \rightarrow t = x^{n+1}+1 \Rightarrow dt = (n+1)x^n \cdot dx \\ I_3 = \int f(ax^2+b)^n \cdot x dx \rightarrow t = ax^2+b \Rightarrow dt = 2ax \cdot dx \end{cases}$	37
Trắc Nghiệm Tích Phân Đổi Biến Dạng 1 (P1)	43
Đáp Án Trắc Nghiệm Tích Phân Đổi Biến Dạng 1 (P1).....	45
Dạng:	46
Trắc Nghiệm Tích Phân Đổi Biến Dạng 1 (P2)	47
Đáp Án Trắc Nghiệm Tích Phân Đổi Biến Dạng 1 (P2).....	48

Dạng	49
Trắc Nghiệm Dạng $I = \int_a^b f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$	50
Đáp Án Trắc Nghiệm Dạng $I = \int_a^b f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$	51
Kỹ Thuật 4: Tích Phân Lượng Giác	51
1. Công Thức Lượng Giác Thường Sử Dụng:	51
Dạng 4.1. Sử Dụng Công Thức Nguyên Hàm Cơ Bản	53
Dạng 4.2: Dùng Công Thức Hạ Bậc	55
Dạng 4.3: Dùng Công Thức Biến Đổi Tích Thành Tổng.....	57
Dạng 4.4: Đổi Biến Số	59
Dạng 4.4.1. Kết Hợp 1 Trong 4 Dạng A,B,C,D Với $D(\sin x) = \cos x$, $D(\cos x) = -\sin x$	59
Dạng 4.4.2. Kết Hợp 1 Trong 4 Dạng A,B,C,D Và $d(\sin^2 x) = \sin 2x dx$; $d(\cos^2 x) = -\sin 2x dx$	66
Dạng 4.4.3 Kết Hợp 1 Trong 4 Dạng A,B,C,D Và.....	67
$d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx$; $d(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx = -(1 + \cot^2 x) dx$	67
Dạng 4.4.4 Kết Hợp 1 Trong 4 Dạng A,B,C,D Và $d(\sin x \pm \cos x) = (\cos x \mp \sin x) dx$	70
Trắc Nghiệm Tích Phân Đổi Biến Dạng 1 (P3)	72
Đáp Án Trắc Nghiệm Tích Phân Đổi Biến Dạng 1 (P3).....	75
Kỹ Thuật 5: Đổi Biến Số Dạng 2	76
Trắc Nghiệm Tích Phân Đổi Biến Dạng 2	85
Đáp Án Trắc Nghiệm Tích Phân Đổi Biến Dạng 2.....	86
Kỹ Thuật 6: Tích Phân Từng Phần	87
Trắc Nghiệm Tích Phân Từng Phần.....	93
Đáp Án Trắc Nghiệm Tích Phân Từng Phần	97
Kỹ Thuật 7: Tích Phân Chứa Giá Trị Tuyệt Đối	98
Ứng Dụng Tích Phân	102
1. Tính Diện Tích Hình Phẳng	102
1.1 Diện Tích Hình Thang Cong	102
1.2. Diện Tích Hình Phẳng	103

2. Tính Thể Tích Khối Tròn Xoay	107
3. Bài Toán Chuyển Động.....	111
Trắc Nghiệm Ứng Dụng Tích Phân	113
Đáp Án Trắc Nghiệm Ứng Dụng Tích Phân.....	117
Kỹ Thuật 8: Sử Dụng Máy Tính Casio	118
Dạng: Tìm Nguyên Hàm $F(X)$ Của Hàm Số $f(X)$	118
Dạng: Tìm Nguyên Hàm $F(X)$ Của $f(X)$ Khi Biết $F(x_0) = M$	120
Dạng: Tính Tích Phân	122
Dạng: Tìm A, B Sao Cho $\int_b^a f(x).dx = A$	122
Dạng: Tính Diện Tích, Thể Tích.....	123
Dạng: Mối Liên Hệ Giữa A, B,C....	125
Phụ Lục:	127
A. Đề Tổng Hợp Nguyên Hàm – Tích Phân	127
Đáp Án Đề Tổng Hợp	139
B .Tích Phân Trong Đề Thi Đại Học 10 Năm Gần Đây	140

NGUYÊN HÀM

A. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa

Ta gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Vì với C là một hằng số bất kỳ, ta có $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ nên nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$. Ta gọi $F(x) + C$, (C là hằng số (constant)) là **Họ nguyên hàm** của $f(x)$.

Ký hiệu: $\int f(x) dx = F(x) + C$

Hay đơn giản cho dễ hiểu nhé mấy đura: **NGUYÊN HÀM LÀ NGƯỢC LẠI CỦA ĐẠO HÀM.**

VÍ DỤ : x^2 đạo hàm là gì? $(x^2)' = 2x$ chuẩn chưa?

Thì $\int 2x dx = x^2 + C$. Tại sao phải cộng thêm C ? Vì đạo hàm của hằng số luôn là 0. Nên $(x^2 + C)' = 2x$. Người ta ghi thêm C vào cho đầy đủ?

Oke? Vậy tạm hiểu nguyên hàm là gì rồi nhé!!

2. Tính chất

- $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, k là hằng số
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

3. Sự tồn tại nguyên hàm

Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn $[a; b]$.

B. BẢNG CÁC NGUYÊN HÀM, ĐẠO HÀM CƠ BẢN

Bảng đạo hàm (u là hàm số hợp)	Bảng nguyên hàm	
$(x)' = 1$	$\int k dx = kx + c$, k là hằng số	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u' \cdot u^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ($\alpha \neq -1$)	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $u > 0$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$
$(e^u)' = u' \cdot e^u$	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$, $0 < a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot (1 + \tan^2 u)$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u' \cdot (1 + \cot^2 u)$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

Một số lưu ý

1. Cần nắm vững bảng nguyên hàm.
2. Nguyên hàm của một tích (thương) của nhiều hàm số **không bao giờ** bằng tích (thương) của các nguyên hàm của những hàm thành phần.
3. Muốn tìm nguyên hàm của một hàm số, ta phải **biến đổi** hàm số này **thành một tổng hoặc hiệu** của những hàm số tìm được nguyên hàm (dựa vào bảng nguyên hàm).

* Lưu ý: do $\int f(x)dx = F(x) + c$ thì $F'(x) = f(x)$ nên khi quên công thức nguyên hàm, ta cần liên tưởng đến đạo hàm. Cụ thể như sau:

VÍ DỤ ta cần tìm $\int f(x)dx$ (mà quên công thức) ta có thể tự đặt câu hỏi: “**hàm số nào mà lấy đạo hàm ra là $f(x)$?**”. Với cách hỏi như thế, kết hợp với việc nắm vững công thức đạo hàm, ta có thể nhớ lại công thức nguyên hàm một cách dễ dàng.

I. BẢNG CÔNG THỨC MỞ RỘNG (LÀM NHANH TRẮC NGHIỆM)

Chú ý: Những công thức không có trong SGK, nếu khi các em dùng cho làm tự luận, phải chứng minh lại! (Cách chứng minh đơn giản nhất: Đạo hàm lại kết quả. Hehe.

$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$	$\int \operatorname{tg}(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int m^{ax+b} dx = \frac{1}{a \ln m} m^{ax+b} + c$	$\int \operatorname{cotg}(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg}(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{ a } + c$

TRẮC NGHIỆM LÝ THUYẾT

Câu 1. Hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên K nếu:

- A. $f(x)$ xác định trên K . B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất trên K .
C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên K . D. $f(x)$ liên tục trên K .

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ và C là hằng số thì $\int f(x)dx = F(x) + C$.
B. Mọi hàm số liên tục trên $(a;b)$ đều có nguyên hàm trên $(a;b)$.
C. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b)$.
D. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Câu 3. Xét hai khẳng định sau:

- (I) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ đều có đạo hàm trên đoạn đó.
(II) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

Trong hai khẳng định trên:

- A. Chỉ có (I) đúng. B. Chỉ có (II) đúng.
C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Câu 4. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ nếu:

- A. Với mọi $x \in (a;b)$, ta có $F'(x) = f(x)$.
B. Với mọi $x \in (a;b)$, ta có $f'(x) = F(x)$.
C. Với mọi $x \in [a;b]$, ta có $F'(x) = f(x)$.
D. Với mọi $x \in (a;b)$, ta có $F'(x) = f(x)$, ngoài ra $F'(a^+) = f(a)$ và $F'(b^-) = f(b)$.

Câu 5. Trong các câu sau đây, nói về nguyên hàm của một hàm số f xác định trên khoảng D , câu nào là **sai**?

- (I) F là nguyên hàm của f trên D nếu và chỉ nếu $\forall x \in D : F'(x) = f(x)$.
- (II) Nếu f liên tục trên D thì f có nguyên hàm trên D .
- (III) Hai nguyên hàm trên D của cùng một hàm số thì sai khác nhau một hằng số.
- A. Không có câu nào sai. B. Câu (I) sai.
- C. Câu (II) sai. D. Câu (III) sai.

Câu 6. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$. Giả sử $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$. Khi đó:

- A. $F(x) = G(x)$ trên khoảng $(a; b)$.
- B. $G(x) = F(x) - C$ trên khoảng $(a; b)$, với C là hằng số.
- C. $F(x) = G(x) + C$ với mọi x thuộc giao của hai miền xác định, C là hằng số.
- D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 7. Xét hai câu sau:

(I) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C$,

trong đó $F(x)$ và $G(x)$ tương ứng là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$.

(II) Mỗi nguyên hàm của $a.f(x)$ là tích của a với một nguyên hàm của $f(x)$.

Trong hai câu trên:

- A. Chỉ có (I) đúng. B. Chỉ có (II) đúng.
- C. Cả hai câu đều đúng. D. Cả hai câu đều sai.

Câu 8. Các khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(t) dt = F(t) + C$.

B. $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$.

C. $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u) dx = F(u) + C$.

D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là hằng số).

Câu 9. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x$.
- B. $F(x) = x$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2\sqrt{x}$.
- C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) - G(x) = C$ (hằng số).
- D. Cả 3 đáp án trên

Câu 10. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$ (C là hằng số).
- B. $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \log|u(x)| + C$.
- C. $F(x) = 1 + \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \tan^2 x$.
- D. $F(x) = 5 - \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

Câu 11. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số).
- B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số).
- C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số).
- D. $\int dx = x + C$ (C là hằng số).

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM LÝ THUYẾT

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
1.	D	5.	A	9.	B
2.	C	6.	B	10.	B
3.	B	7.	C	11.	C
4.	D	8.	C		

Câu 1. Để hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên K khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục trên K . **Chọn D.**

Câu 2. Sửa lại cho đúng là "Tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ đều có đạo hàm bằng $f(x)$ ". **Chọn C.**

Câu 3. Vì hàm số có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại x_0 , nhưng nếu hàm số liên tục tại x_0 thì chưa chắc đã có đạo hàm tại x_0 . Chẳng hạn xét hàm số $f(x) = |x|$ tại điểm $x = 0$. **Chọn B.**

Câu 4. Với mọi $x \in (a;b)$, ta có $F'(x) = f(x)$, ngoài ra

$$F'(a^+) = f(a) \text{ và } F'(b^-) = f(b). \text{ Chọn D.}$$

Câu 5. Chọn A.

Câu 6. Vì hai nguyên hàm trên D của cùng một hàm số thì sai khác nhau một hằng số. **Chọn B.**

Câu 7. Chọn C.

Câu 8. Vì $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + C$. **Chọn C.**

Câu 9. Vì $(x)' = 1 \neq 2\sqrt{x} \Rightarrow F'(x) \neq f(x) \Rightarrow F(x) = x$ không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x}$. **Chọn B.**

Câu 10. Vì $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{d(u(x))}{u(x)} = \ln|u(x)| + C$. **Chọn B.**

Câu 11. Vì kết quả này không đúng với trường hợp $\alpha = -1$. **Chọn C.**

KỸ THUẬT 1: SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

☆☆☆

1. Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
2. Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
3. Chứa căn $\xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.
4. Tích lượng giác bậc một của sin và cosin $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức tích thành tổng.
 - $\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$
 - $\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$
 - $\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$
5. Bậc chẵn của sin và cosin $\xrightarrow{PP}$ Hạ bậc.

Bài 1. Tìm các nguyên hàm:

1. $\int 3 \cdot dx = 3x + C$

2. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

3. $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

4. $\int \sqrt{x} \cdot dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

5. $\int \frac{1}{x^5} \cdot dx = \int x^{-5} \cdot dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{-x^{-4}}{4} + C$

6. $\int 2 \cdot (2+5x)^8 dx = 2 \int (2+5x)^8 dx = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(2+5x)^{8+1}}{8+1} + C = \frac{2 \cdot (2+5x)^9}{45} + C$

7. $\int \frac{1}{(4x-3)^5} \cdot dx = \int (4x-3)^{-5} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-3)^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{-(4x-3)^{-4}}{16} + C$

8. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(4x-3)^5}} \cdot dx = \int (4x-3)^{-\frac{5}{3}} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-3)^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + C = \frac{-3 \cdot (4x-3)^{-\frac{2}{3}}}{8} + C$

9. $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^2} \cdot dx = \int \frac{x^4-2x^2+1}{x^2} \cdot dx = \int \frac{x^4}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot dx = \int x^2 - 2 + x^{-2} \cdot dx = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C$

TRẮC NGHIỆM KỸ THUẬT 1 – DẠNG 1

Câu 12. Tìm nguyên hàm $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2}$.

A. $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$

C. $F(x) = x^3 + \frac{7x^2}{4} + C.$

B. $F(x) = x^3 - \frac{x^2}{4} + C.$

D. $F(x) = 5x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$

Câu 13. Tìm nguyên hàm $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$.

A. $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{3} - 7x + C.$

C. $F(x) = \frac{3x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 8x + C.$

Câu 14. Tìm nguyên hàm $f(x) = 6x^5 - 12x^3 + x^2 - 8$.

A. $F(x) = x^6 + 3x^4 + \frac{x^3}{3} - 8x + C.$

C. $F(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{x^3}{3} - 8x + C.$

B. $F(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{x^3}{3} + 8x + C.$

D. $F(x) = x^6 - x^4 + \frac{x^3}{3} - 8x + C.$

Câu 15. Tìm nguyên hàm $f(x) = (x^2 - 3x) \cdot (x + 1)$.

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{5} - \frac{3x^2}{2} + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C.$

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{7} + C.$

Câu 16. $f(x) = (3 - x)^3$. Biết nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = -\frac{(3 - x)^a}{a} + C$. Tìm a^2

- A. 4
B. 16

- C. 32
D. 9

Câu 17. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$. Biết nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{a} - \frac{x}{b} + C$. Tính $a - b$?

- A. 0
B. 1

- C. 2
D. 3

Câu 18. $f(x) = 10^{2x}$. Biết nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = \frac{a^x}{2 \ln 10} + C$. Tìm a ?

A. 10
B. 100

C. 5
D. 20

Câu 19. $f(x) = x^3 - 4x + \frac{3}{x}$. Biết nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = \frac{x^4}{a} + bx^2 + c \cdot \ln|x| + C$. Tính $a-b+c$

A. 5
B. 1

C. 4
D. 7

Câu 20. $I = \int \left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \cdot dx = \frac{2}{a}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C$. Tính $a-b$?

A. 0
B. 1

C. 2
D. 3

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM KỸ THUẬT 1 – DẠNG 1

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
12	A	16	B	20.	A
13	B	17	A		
14	C	18	B		
15	A	19	A		

Bài 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước trong các trường hợp sau:

Phương pháp: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tức đi tính $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$.
 Rồi sau đó thế $F(x_0) + C = \dots$ để tìm hằng số C .

VÍ DỤ : $f(x) = x^3 - 4x + 5$, $F(1) = 3$.

Ta có $\int (x^3 - 4x + 5)dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + 5x + c$. Mà $F(1) = 3$.

$$\Leftrightarrow \frac{1^4}{4} - 1^2 + 5 \cdot 1 + c = 3$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{5}{4}. \text{ Kết luận: } F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 5x - \frac{5}{4}.$$

TRẮC NGHIỆM KỸ THUẬT 1 – DẠNG 2

Tìm $F(x)$ biết:

Câu 21. $f(x) = 3 - 5 \cos x$, $F(\pi) = 2$.

A. $F(x) = 3x - 5 \sin x$

C. $F(x) = 3x - 5 \sin x + 2$

B. $F(x) = 3x - 5 \sin x + 2 - 2\pi$.

D. $F(x) = 3x - 5 \sin x + 2 - 3\pi$.

Câu 22. $f(x) = \frac{3-5x^2}{x}$, $F(e) = 1$. Biết $F(x) = 3 \ln|x| - \frac{5x^2}{2} + \frac{5e^2}{2} + c$. c chia hết cho mấy?

A. 2

C. 6

B. 3

D. 7

Câu 23. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $F(1) = \frac{3}{2}$. Biết $F(x) = \frac{x^2}{a} + b \ln|x| + c$. Kết quả của $a-b-c$ là?

A. 4

C. 8

B. 3

D. 0

Câu 24. $I = \int \frac{3x^4 - 2x^3 + 5}{x^2} \cdot dx$, biết $F(1) = 2$. ĐS: $F(x) = x^3 + c \cdot x^2 + \frac{a}{x} + b$. Tính $a+b+c$?

A. 1

C. 3

B. 2

D. 4

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM KỸ THUẬT 1 – DẠNG 2

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
Câu 21	D	Câu 23	D
Câu 22	A	Câu 24	A

KỸ THUẬT 2. TÍNH NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ HỮU TỶ

☆☆☆

Bài toán tổng quát: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không căn.

Phương pháp giải:

Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{\text{PP}}$ Chia đa thức.

Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{\text{PP}}$ Xem xét mẫu số và khi đó:

+ Nếu mẫu số phân tích được thành tích số, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức để đưa về dạng tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

- $\frac{1}{(ax+m) \cdot (bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \cdot \left(\frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right).$
- $\frac{mx+n}{(x-a) \cdot (x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B) \cdot x - (Ab+Ba)}{(x-a) \cdot (x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}.$
- $\frac{1}{(x-m) \cdot (ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c},$ với $\Delta = b^2 - 4ac < 0.$
- $\frac{1}{(x-a)^2 \cdot (x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$

+ Nếu mẫu số không phân tích được thành tích số (biến đổi và đưa về dạng lượng giác).

Mẹo sử dụng Casio

- $\frac{mx+n}{(x-a) \cdot (x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

(Ta muốn tìm hệ số nào, ta xóa nghiệm dưới mẫu của thành đó đi trong $\frac{mx+n}{(x-a) \cdot (x-b)}$. Và

Calc đúng nghiệm dưới mẫu của nó)

Để tìm A. Ta nhập vào máy tính $\frac{mx+n}{(x-b)}$. Calc x = a

Để tìm B. Ta nhập vào máy tính $\frac{mx+n}{(x-a)}$. Calc x = b

BÀI TẬP VẬN DỤNG**VÍ DỤ 1.** Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{2x+1}{x-1} \cdot dx$.

Ta thấy bậc tử bằng bậc mẫu: Chia đa thức

$$I = \int \frac{2x+1}{x-1} \cdot dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1}\right) dx = 2x + 3 \ln |x-1| + c$$

VÍ DỤ 2. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{x^2+x+1}{x+2} \cdot dx$.

Ta thấy bậc tử lớn hơn bậc mẫu: Chia đa thức

$$I = \int \frac{x^2+x+1}{x+2} \cdot dx = \int \left(x-1 + \frac{3}{x+2}\right) \cdot dx = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x+2| + C.$$

VÍ DỤ 3. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{2x^2-7x+5}$.

$$I = \int \frac{dx}{2x^2-7x+5} = \int \frac{dx}{(x-1)(2x-5)} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-5}\right) dx$$

Ta có:

$$B(x-1) + A(2x-5) = 1$$

$$\Leftrightarrow x(2A+B) - 5A - B = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A+B=0 \\ -5A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{-1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{2x-5}\right) dx = \frac{-1}{3} \ln |x-1| + \frac{2}{3} \frac{\ln |2x-5|}{2} + C = \frac{-1}{3} \ln |x-1| + \frac{1}{3} \ln |2x-5| + C$$

Mẹo sử dụng máy tính:Tìm A: Nhập vào máy $\frac{1}{(2x-5)}$ Calc X = 1. Thu được $A = \frac{-1}{3}$ Tìm B: Nhập vào máy $\frac{1}{x-1}$ Calc X = $\frac{5}{2}$. Thu được B = $\frac{2}{3}$ **VÍ DỤ 4.** Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{6x^2+10x+2}{x^3+3x^2+2x} dx$

$$I = \int \frac{6x^2+10x+2}{x^3+3x^2+2x} dx = \int \frac{6x^2+10x+2}{(x+1)(x+2)x} dx$$

$$\text{Xét: } \frac{6x^2+10x+2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow 6x^2+10x+2 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$$

$$\Rightarrow 6x^2+10x+2 = (A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 = A+B+C \\ 10 = 3A+2B+C \\ 2 = 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{6x^2+10x+2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

Từ đó:

$$I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} \right) dx = \ln|x| + 2\ln|x+1| + 3\ln|x+2| + C$$

Mẹo sử dụng máy tính

Tìm A: Ta nhập vào máy $\frac{6x^2+10x+2}{(x+1)(x+2)}$ Calc X=0. Thu được A = 1

Tìm B: Ta nhập vào máy $\frac{6x^2+10x+2}{x(x+2)}$ Calc X=-1. Thu được B = 2

Tìm C: Ta nhập vào máy $\frac{6x^2+10x+2}{x(x+1)}$ Calc X=-2. Thu được C = 3

$$\Rightarrow \frac{6x^2+10x+2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

VÍ DỤ 5. Tìm nguyên hàm $J = \int \frac{6x^2-26x+26}{x^3-6x^2+11x-6} dx$

$$J = \int \frac{6x^2-26x+26}{x^3-6x^2+11x-6} dx = \int \frac{6x^2-26x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

Ta tìm A, B, C sao cho:

$$\frac{6x^2 - 26x + 26}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 26x + 26 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

Cho x giá trị lần lượt bằng 1, 2, 3 ta tìm được $A = 3; B = 2; C = 1$

Từ đó:

$$J = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right) dx = 3 \ln|x-1| + 2 \ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

$$\bullet K = \int \frac{x-8}{x^2-x-6} dx = \int \frac{x-8}{(x+2)(x-3)} dx = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = 2 \ln|x+2| - \ln|x-3| + C$$

VÍ DỤ 6. Tìm nguyên hàm $L = \int \frac{3x^2 + 13x + 11}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx$

$$L = \int \frac{3x^2 + 13x + 11}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx = \int \frac{3x^2 + 13x + 11}{(x+1)(x+2)^2} dx$$

Ta tìm A, B, C sao cho:

$$\frac{3x^2 + 13x + 11}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 13x + 11 = A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 13x + 11 = (A+B)x^2 + (4A+3B+C)x + (4A+2B+C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = A+B \\ 13 = 4A+3B+C \\ 11 = 4A+2B+C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$

Từ đó:

$$L = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2} \right) dx = \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{x+2} + C$$

VÍ DỤ 7. Tìm nguyên hàm $M = \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx$

$$\begin{aligned} M &= \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(2x - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right) dx = \int \left(2x - \frac{1}{(x-1)(x-2)} \right) dx \\ &= \int \left(2x - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = x^2 - \ln|x-2| + \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

VÍ DỤ 8. Tìm nguyên hàm $N = \int \frac{3x^2 - 4x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x + 5} dx$

$$N = \int \frac{3x^2 - 4x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{d(x^3 - 2x^2 + 2x + 5)}{x^3 - 2x^2 + 2x + 5} = \ln|x^3 - 2x^2 + 2x + 5| + C$$

VÍ DỤ 9. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{(x+3)^2(x+1)^2}$

Ta phân tích:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+3)^2(x+1)^2} &= \frac{1}{4} \left[\frac{(x+3) - (x+1)}{(x+3)(x+1)} \right]^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{2}{(x+1)(x+3)} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right] \end{aligned}$$

Từ đó:

$$I = \int \left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right] dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{1}{4} \ln|x+3| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + C$$

VÍ DỤ 10. Tìm nguyên hàm $J = \int \frac{dx}{(x-3)^2(x+4)^2}$.

Ta phân tích:

$$\frac{1}{(x-3)^2(x+4)^2} = \frac{1}{49} \cdot \left[\frac{(x+4)-(x-3)}{(x-3)(x+4)} \right]^2 = \frac{1}{49} \left[\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)^2} \right]$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{49} \int \frac{1}{(x-3)^2} dx - \frac{1}{49} \int \frac{2}{(x-3)(x+4)} dx + \frac{1}{49} \int \frac{1}{(x+4)^2} dx \\ &= -\frac{1}{49} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{x+4} - \frac{1}{343} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+4} \right) dx \\ &= -\frac{1}{49} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{x+4} - \frac{1}{343} \ln \left| \frac{x-3}{x+4} \right| + C \end{aligned}$$

TRẮC NGHIỆM KỸ THUẬT 2

Câu 25. $\int \frac{4x^2 + 6x + 1}{2x + 1} \cdot dx$ là $I = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot \ln|2x + 1| + C$. Tính $a - b - c$?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

Câu 26. $\int \frac{4x^3 + 4x^2 - 1}{2x + 1} \cdot dx$ có dạng $F(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \cdot \ln|2x + 1| + C$. Tính $a \cdot (b + c - d)$?

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 2

Câu 27. $\int \frac{2x + 1}{x - 1} \cdot dx$ có dạng $I = a \cdot x + b \cdot \ln|x - 1| + C$. Tính $a \cdot b$?

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 28. $\int \frac{3x + 1}{x - 2} \cdot dx$ có dạng $I = a \cdot x + b \cdot \ln|x - 2| + C$. Tính $b - a$?

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 29. Nguyên hàm của $f(x) = \frac{x + 1}{2x + 3}$ có dạng $F(x) = a \cdot x + b \cdot \ln|2x + 3| + C$. Tính $a \cdot b$?

- A. $-\frac{1}{8}$ B. 4 C. 2 D. -6

Câu 30. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} \cdot dx$ có dạng $I = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot \ln|x + 2| + C$. Tính $b + c$?

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

Câu 31. $I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$.

A. $I = \frac{1}{x - 3} + C$.

C. $I = -\frac{1}{x + 3} + C$.

B. $I = -\frac{1}{x - 3} + C$.

D. $I = -\frac{2}{x - 3} + C$.

Câu 32. $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot dx$. ĐS: $I = x + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C$.

A. $I = x + \ln\left|\frac{2x - 1}{x + 1}\right| + C$.

C. $I = x - \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C$.

B. $I = x + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C$.

D. $I = \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C$.

Câu 33. $I = \int \frac{3x + 2}{4x^2 - 4x + 1} \cdot dx = \frac{a}{b} \ln|2x - 1| - \frac{7}{4(2x - 1)} + C$. Tính $b - a$?

- A. 0 B. 1

C. 2

D. 3

Câu 34. $I = \int \frac{x^2 + x}{(x+2)^2} \cdot dx = ax + b \ln|x+2| + \frac{c}{x+2} + C$. Tính $a + b - c$?

A. 0

C. 2

B. 1

D. 3

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM KỸ THUẬT 2

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
25	C	29	A	33	B
26	A	30	D	34	B
27	C	31	C		
28	C	32	B		

KỸ THUẬT 3. ĐỔI BIẾN DẠNG 1

1. CÁC DẠNG ĐỔI BIẾN SỐ THƯỜNG GẶP

DẠNG	CÁCH ĐỔI BIẾN
$\int (ax + b) dx$	Đặt $t = ax + b$
$\int x^{n+1} \cdot x^n dx$	Đặt $t = x^{n+1}$
$\int f(\sqrt{x}) \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	Đặt $t = \sqrt{x}$
$\int f(\sin x) \cos x dx$	Đặt $t = \sin x$
$\int f(\cos x) \sin x dx$	Đặt $t = \cos x$
$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	Đặt $t = \tan x$
$\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$	Đặt $t = \cot x$
$\int f(e^x) \cdot e^x dx$	Đặt $t = e^x$
$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	Đặt $t = \ln x$
$\int f\left(x \pm \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x \pm \frac{1}{x}\right) dx$	Đặt $t = x \pm \frac{1}{x}$

Các bước để đổi biến:

Bước 1: Đặt $v(x) = t$

Bước 2: vi phân: $d(v(x)) = d(t)$ (Vi phân như đạo hàm thôi, nhưng đạo hàm theo biến x , nhân thêm dx , đạo hàm theo biến t thì nhân thêm dt)

Bước 3: Chuyển hết $f(x)$ về $f(t)$.

Ví dụ về vi phân: $d(x^2 - 2x + 1) = (x^2 - 2x + 1)' \cdot dx = (2x - 2)dx$

VÍ DỤ : Tìm nguyên hàm các hàm số sau

$$1. I = \int \sqrt{x^{2004} + 1} \cdot x^{2003} dx$$

Đặt $t = x^{2004} + 1 \Rightarrow d(t) = d(x^{2004} + 1) \Leftrightarrow dt = 2004x^{2003} dx \Rightarrow x^{2003} dx = \frac{1}{2004} dt$. Từ đó ta được:

$$I = \frac{1}{2004} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2004} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2004} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3006} \sqrt{t^3} + C = \frac{1}{3006} \sqrt{(x^{2004} + 1)^3} + C$$

$$2. I = \int e^{e^x+x+1} dx = \int e^{e^x+1} \cdot e^x dx$$

Đặt $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$. Thay vào ta được:

$$L = \int e^{t+1} dt = \int e^{t+1} d(t+1) = e^{t+1} + C = e^{e^x+1} + C$$

$$3. I = \int \frac{x}{\sqrt[10]{x+1}} dx$$

Đặt $\sqrt[10]{x+1} = t \Rightarrow x+1 = t^{10} \Rightarrow dx = 10t^9 dt$. Từ đó ta được:

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{t^{10}-1}{t} \cdot 10t^9 dt = 10 \int (t^{10}-1) t^8 dt = 10 \int (t^{18}-t^8) dt = \frac{10}{19} t^{19} - \frac{10}{9} t^9 + C \\ &= \frac{10}{19} \sqrt[10]{(x+1)^{19}} - \frac{10}{9} \sqrt[10]{(x+1)^9} + C \end{aligned}$$

$$4. I = \int x^2 (1-x)^{10} dx$$

Đặt $1-x = t \Rightarrow dx = -dt$. Từ đó ta được:

$$\begin{aligned} O &= \int (1-t)^2 t^{10} (-dt) = -\int (1-2t+t^2) t^{10} dt = -\int t^{10} dt + 2 \int t^{11} dt - \int t^{12} dt \\ &= -\frac{1}{11} t^{11} + \frac{1}{6} t^{12} - \frac{1}{13} t^{13} + C = -\frac{1}{11} (1-x)^{11} + \frac{1}{6} (1-x)^{12} - \frac{1}{13} (1-x)^{13} + C \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Đặt $\ln x = t$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

$$\Rightarrow I = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

TRẮC NGHIỆM ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Câu 34. Câu nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $F'(t) = f(t)$ thì $F'(u(x)) = f(u(x))$.
- B. $\int f(t) dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C$.
- C. Nếu $G(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(t)$ thì $G(u(x))$ là một nguyên hàm của hàm số $g(u(x)) \cdot u'(x)$.
- D. $\int f(t) dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + C$ với $u = u(x)$.

Câu 35. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Nếu $\int f(t) dt = F(t) + C$ thì $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$.
- B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $\int [F(x) - G(x)] dx$ có dạng $h(x) = Cx + D$ (C, D là các hằng số và $C \neq 0$).
- C. $F(x) = 7 + \sin^2 x$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x$.
- D. $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \sqrt{u(x)} + C$.

Câu 36. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
- B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
- C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$.
- D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 37. Để tính $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$ theo phương pháp đổi biến số, ta đặt:

- A. $t = e^{\ln x}$.
- B. $t = \ln x$.
- C. $t = x$.
- D. $t = \frac{1}{x}$.

Câu 38. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$.

Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$:

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

Câu 39. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}.$

Nếu $F(e^2) = 4$ thì $\int \frac{\ln x}{x} dx$ bằng:

A. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

B. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2.$

C. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - 2.$

D. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + x + C.$

Câu 40. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = e^{\sin x} \cos x.$

Nếu $F(\pi) = 5$ thì $\int e^{\sin x} \cos x dx$ bằng:

A. $F(x) = e^{\sin x} + 4.$

B. $F(x) = e^{\sin x} + C.$

C. $F(x) = e^{\cos x} + 4.$

D. $F(x) = e^{\cos x} + C.$

Câu 41. $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y = \sin^4 x \cos x.$

$F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

B. $F(x) = \frac{\cos^4 x}{4} + C.$

C. $F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

D. $F(x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

Câu 42. Xét các mệnh đề sau, với C là hằng số:

(I) $\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + C.$

(II) $\int e^{3\cos x} \sin x dx = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C.$

$$(III) \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C.$$

Số mệnh đề đúng là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM ĐỔI BIẾN DẠNG 1

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
34	A	37	B	40	A
35	D	38	C	41	D
36	B	39	B	42	D

Câu 34. Chọn A. Vì nếu $F'(t) = f(t) \Rightarrow F(t) = \int f(t) dt$. Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$.

Suy ra $F(u(x)) = \int f(u(x)) \cdot u'(x) dx$ hay $F'(u(x)) = f(u(x)) \cdot u'(x)$.

Câu 35. Chọn D. Vì $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{d(u(x))}{u(x)} = \ln|u(x)| + C$.

Câu 36. Ta có $I = \int f(x) dx = \int \sqrt{2x-1} dx$.

$$\text{Đặt } \sqrt{2x-1} = t \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int t d\left(\frac{t^2+1}{2}\right) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C. \text{ Chọn B.}$$

Câu 37. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Khi đó $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx = \int e^t dt$. **Chọn B.**

Câu 38. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$.

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} \int d(e^t) = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C. \text{ Chọn C.}$$

Câu 39. Đặt $\ln x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Suy ra $F(x) = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

Vì $F(e^2) = 4 \Leftrightarrow \frac{\ln^2(e^2)}{2} + C = 4 \Leftrightarrow C = 2$. **Chọn B.**

Câu 40. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Suy ra $I = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$.

Vì $F(\pi) = 5 \Leftrightarrow e^{\sin \pi} + C = 5 \Leftrightarrow 1 + C = 5 \Leftrightarrow C = 4$. Suy ra $F(x) = e^{\sin x} + 4$. **Chọn A.**

Câu 41. Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x dx$.

Khi đó $I = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$. **Chọn D.**

Câu 42. Xét (I): Ta có $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Khi đó $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$. Do đó (I) đúng.

Xét (II): Đặt $t = 3 \cos x \Rightarrow dt = -3 \sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -\frac{1}{3} dt$.

Khi đó $\int e^{3 \cos x} \sin x dx = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C = -\frac{1}{3} e^{3 \cos x} + C$. Do đó (II) đúng.

Xét (III): Đặt $t = \sqrt{\sin x - \cos x} \Rightarrow t^2 = \sin x - \cos x \Rightarrow 2t dt = (\cos x + \sin x) dx$.

Khi đó $\int \frac{2t dt}{t} = 2 \int dt = 2t + C = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$. Do đó (III) đúng.

Chọn D.

TÍCH PHÂN

Khái niệm tích phân

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên K và $a, b \in K$. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của $f(x)$ trên K thì $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân của $f(x)$ từ a đến b** và được kí hiệu

là $\int_a^b f(x) dx$. Khi đó:
$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$
 với a gọi là cận dưới, b là

cận trên.

- Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác nhau thay cho x , nghĩa là:

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^b f(t) \cdot dt = \int_a^b f(u) \cdot du = \dots = F(b) - F(a).$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

Tính chất của tích phân

- ① $\int_a^b f(x) \cdot dx = -\int_b^a f(x) \cdot dx$ và $\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$. ② $\int_a^b k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$, với $(k \neq 0)$.
- ③ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx \pm \int_a^b g(x) \cdot dx$. ④ $\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$.

TRẮC NGHIỆM LÝ THUYẾT TÍCH PHÂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Hãy chọn mệnh đề **sai** dưới đây:

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

B. $\int_a^b k \cdot dx = k(b-a), \forall k \in \mathbb{R}.$

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in [a; b].$

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$

Câu 2. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K và a, b là hai điểm của K , ngoài ra k là một số thực tùy ý. Khi đó:

(I) $\int_a^a f(x) dx = 0.$ (II) $\int_b^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$ (III) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$

Trong ba công thức trên:

A. Chỉ có (I) sai.

B. Chỉ có (II) sai.

C. Chỉ có (I) và (II) sai.

D. Cả ba đều đúng.

Câu 3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\int_{-1}^1 dx = 1.$

B. $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_a^b f_2(x) dx.$

C. Nếu $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0.$

D. Nếu $\int_0^a f(x) dx = 0$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với mọi a, b, c thuộc tập xác định của $f(x)$.

B. Nếu $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$.

C. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2} + C$.

D. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $\sqrt{F(x)}$ là nguyên hàm của hàm số $\sqrt{f(x)}$.

Câu 5. Đặt $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$. Đạo hàm $F'(x)$ là hàm số nào dưới đây?

A. $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

B. $F'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

C. $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

D. $F'(x) = (x^2 + 1)\sqrt{1+x^2}$.

Câu 6. Cho $F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ là:

A. $\frac{1}{6}$.

B. 2.

C. $-\frac{5}{6}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Câu 7. Cho $F(x) = \int_0^x \frac{t - \sqrt{3}}{t^2 + 1} dt$. Xét các mệnh đề:

I. $F'(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 + 1}$.

II. Hàm số $F(x)$ đạt cực tiểu tại $x = \sqrt{3}$.

III. Hàm số $F(x)$ đạt cực đại tại $x = \sqrt{3}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I.

B. Chỉ II.

C. I và II.

D. I và III.

Câu 8. Hãy chọn mệnh đề **sai** dưới đây:

A. $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$.

B. Đạo hàm của $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t}$ là $F'(x) = \frac{1}{1+x} (x > 0)$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

D. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

Câu 9. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_{-3}^0 f(x) dx = a$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $\int_0^3 f(x) dx = -a$.

B. $\int_{-3}^3 f(x) dx = 2a$.

C. $\int_{-3}^3 f(x) dx = a$.

D. $\int_3^0 f(x) dx = a$.

Câu 10. Nếu $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng:

A. 29.

B. 5.

C. 19.

D. 9.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM LÝ THUYẾT TÍCH PHÂN

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
1	D	5	B	9	B
2	B	6	C	10	A
3	C	7	C		
4	A	8	C		

Câu 1. Sửa lại cho đúng là: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. **Chọn D.**

Câu 2. Công thức (2) sai, sửa lại cho đúng là $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

Hai công thức (1) và (3) đều đúng. **Chọn B.**

Câu 3. Ta có $\int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2$. Do đó A sai.

Theo tính chất tích phân thì B sai (vì không có tính chất này).

Xét câu C. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Suy ra $F'(x) = f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$.

- $F'(x) = 0, \forall x \in [a; b]$, suy ra $F(x)$ là hàm hằng nên $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = 0$.

- $F'(x) > 0, \forall x \in [a; b]$, suy ra $F(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ nên $F(b) > F(a)$.

Do đó $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) > 0$. Do đó C đúng.

Chọn $f(x) = 0$ thì $\int_0^a 0 dx = C \Big|_0^a = 0$ nhưng $f(x) = 0$ không phải là hàm số lẻ.

Do đó D sai. **Chọn C.**

Câu 4. Theo tính chất tích phân, suy ra A đúng. Chọn $f(x) = x$ và $[a; b] = [-1; 2]$.

Khi đó $\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{2} (4 - 1) > 0$ nhưng hàm $f(x) = x$ không thỏa mãn không âm trên $[-1; 2]$. Do đó B sai.

Vì $\left(2\sqrt{1+x^2} + C \right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \neq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ nên C sai.

Ta có $\frac{x^2}{2}$ là một nguyên hàm của x nhưng $\frac{x}{\sqrt{2}}$ không là nguyên hàm của $\sqrt{x}$.

Do đó D sai. **Chọn A.**

Câu 5. Áp dụng tính chất $F'(x) = \int_a^x f(t) dt$ là một nguyên hàm của $f(x)$. **Chọn B.**

Câu 6. Ta có $F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$

Xét hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$ trên đoạn $[-1; 1]$

Đạo hàm $F'(x) = x^2 + x$; $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

Suy ra $F(-1) = -\frac{2}{3}$; $F(0) = -\frac{5}{6}$; $F(1) = 0$.

Do hàm số liên tục trên $[-1; 1]$ nên $\min_{[-1; 1]} F(x) = F(0) = -\frac{5}{6}$. **Chọn C.**

Câu 7. Áp dụng tính chất $F'(x) = \int_a^x f(t) dt$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Suy ra $F'(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 + 1}$. Do đó I đúng. Lại có $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$.

Qua điểm $x = \sqrt{3}$ ta thấy $F'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = \sqrt{3}$. Khi đó, mệnh đề II đúng, mệnh đề III sai. **Chọn C.**

Câu 8. Do $x \in [0; 1] \Rightarrow x^2 \geq x^3 \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$. Do đó A đúng.

Áp dụng tính chất $F'(x) = \int_a^x f(t) dt$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Suy ra $F'(x) = \frac{1}{1+x}$. Do đó B đúng.

Mệnh đề C sai vì tính chất này chỉ đúng nếu $f(x)$ là hàm chẵn hoặc ta có thể lấy VÍ DỤ cụ thể cho hàm $f(x) = x$ và $a = 2$ chẳng hạn.

Khi đó $\int_{-2}^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (4 - 4) = 0$ nhưng $2 \int_0^2 x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$.

Mệnh đề D đúng theo tính chất tích phân. **Chọn C.**

Câu 9. Áp dụng tính chất

"Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ". **Chọn B.**

Câu 10. Ta có $\int_1^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^4 = f(4) - f(1)$.

Theo bài ra ta có

$\int_1^4 f'(x) dx = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 17 + f(1) = 17 + 12 = 29$. **Chọn A.**

TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN DẠNG 1

☆☆☆

$$\int_a^b [f(x)] \cdot u'(x) \cdot dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)].$$

–**Bước 1.** Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) \cdot dx$ (xem lại các phương pháp đổi biến số trong phần nguyên hàm)

–**Bước 2.** Đổi cận: $\begin{cases} x = b \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = u(b) \\ t = u(a) \end{cases}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)

–**Bước 3.** Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

DẠNG

$$\begin{cases} I_1 = \int f(ax+b)^n \cdot x dx \rightarrow t = ax+b \Rightarrow dt = a \cdot dx \\ I_2 = \int \left(\frac{x^n}{ax^{n+1}+1} \right)^m \cdot dx \rightarrow t = x^{n+1}+1 \Rightarrow dt = (n+1)x^n \cdot dx \\ I_3 = \int f(ax^2+b)^n \cdot x dx \rightarrow t = ax^2+b \Rightarrow dt = 2ax \cdot dx \end{cases}$$

VÍ DỤ 1: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

Lời Giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow t^3 = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{3}$$

$$dx = t^2 dt$$

$$\text{Do đó: } I = \int_1^2 \frac{\left(\frac{t^3-1}{3}+1\right)t^2 dt}{t} = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}t^4\right) dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_1^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} t^5 \Big|_1^2 = 1 + \frac{31}{15} = \frac{46}{15}$$

VÍ DỤ 2: Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{1+x^2}, \Rightarrow t^3 = 1+x^2 \Rightarrow 3t^2 dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{3}{2} t^2 dt$$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$

Khi $x = \sqrt{7}$ thì $t = 2$

Do đó:

$$I = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{(t^3-1)t^2 dt}{t} = \frac{3}{2} \int_1^2 (t^4 - t) dt = \frac{3}{2} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{141}{20}$$

VÍ DỤ 3: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2tdt = -2x dx \Rightarrow -x dx = t dt$$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$

$$\text{Khi } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ thì } t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do đó:

$$I = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)(-tdt)}{t} = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (t^2 - 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

VÍ DỤ 4: Tính tích phân $I = \int_2^7 \frac{1}{x + \sqrt{x+2}} dx$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = x+2 \Rightarrow 2tdt = dx$$

Khi $x = 2$ thì $t = 2$

Khi $x = 7$ thì $t = 3$

Do đó:

$$I = \int_2^3 \frac{2t dt}{t^2 + t - 2} = \int_2^3 \frac{2t dt}{(t-1)(t+2)} = \frac{2}{3} \int_2^3 \left(\frac{2}{t+2} + \frac{1}{t-1} \right) dt$$

$$= \frac{2}{3} (2 \ln|t+2| + \ln|t-1|) \Big|_2^3 = \frac{2}{3} (2 \ln \frac{5}{4} + \ln 2)$$

VÍ DỤ 5: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

(Đề thi ĐH Ngoại Thương 1996)

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow x dx = -t dt$

Khi $x = 0$ thì $t=1$

Khi $x=1$ thì $t = 0$

Do đó:

$$I = \int_1^0 t(1-t^2)(-t dt) = \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

VÍ DỤ 6: Tính tích phân $I = \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx$

(Đề thi ĐH Y TPHCM 1997 – 1998)

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 1-x \Rightarrow dx = -2t dt$

Khi $x = 0$ thì $t=1$

Khi $x=1$ thì $t = 0$

Do đó:

$$I = \int_1^0 t(1-t^2)(-2tdt) = 2 \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}$$

VÍ DỤ 7: Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x+1}} dx$

ĐH Cần Thơ khối D 1998

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2tdt$$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$

Khi $x = 3$ thì $t = 2$

Do đó:

$$I = \int_1^2 \frac{(t^2-1)^2 + 1}{t} \cdot 2tdt = 2 \int_1^2 (t^4 - 2t^2 + 2)dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + 2t \right) \Big|_1^2 = \frac{53}{15}$$

VÍ DỤ 8: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx$

(ĐH Quốc Gia HN– khối B - 1998)

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow xdx = tdt$$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$

Khi $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$

Do đó:

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)t \cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2)dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}$$

VÍ DỤ 9: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}}$

(ĐH Quốc Gia TPHCM khối A – 1998)

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2} \Rightarrow dx = t dt$$

Khi $x=0$ thì $t = 1$

Khi $x = 1$ thì $t = \sqrt{3}$

Do đó:

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(t^2-1)}{2t} \cdot t dt = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (t^2-1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Đề bài	Gợi ý	Đề bài	Gợi ý
1. $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$	• Đặt $\sqrt{x^2+1} = t$	9. $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$	• Tách $x^3 = x^2 \cdot x$ • Đặt $\sqrt[3]{1+x^2} = t$
2. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$	• Đặt $\sqrt{1-x^2} = t$	10. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$	• Tách $x^5 = x^4 \cdot x$ • Đặt $\sqrt{1+x^2} = t$
3. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$	• Đặt $\sqrt{x^2+1} = t$	11. $\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$	• Đặt $\sqrt{x+1} = t$ • Rút x theo t
4. $\int_0^1 \frac{x}{(1+3x^2)^2} dx$	• Đặt $1+3x^2 = t$	12. $\int_0^1 x(x-1)^{2012} dx$	• Đặt $x-1 = t$ • Rút x theo t
5. $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} dx$	• Tách $x^3 = x^2 \cdot x$ • Đặt $\sqrt{x^2+1} = t$	13. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$	• Đặt $\sqrt{x+1} = t$ • Rút x theo t
6. $\int_0^1 \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+4}} dx$	• Đặt $\sqrt{x^6+4} = t$	14. $\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3} dx$	• Đặt $2x+1 = t$ • Rút x theo t
7. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$	• Tách $x^3 = x^2 \cdot x$ • Đặt $\sqrt{1-x^2} = t$	15. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$	• Nhân cả tử và mẫu với: • $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
8. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$	• Đặt $\sqrt{x^3+1} = t$	16. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} dx$	• Nhân cả tử và mẫu với: • $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN DẠNG 1 (P1)

1. Tìm a thỏa mãn $\int_0^a x(1-x)^{19} .dx = \frac{1}{120}$
 A. -1 B. 1 C. $\frac{3}{20}$ D. 3
2. Tìm a thỏa mãn $\int_0^1 x^a (1-x^3)^6 .dx = \frac{1}{168}$
 A. 5 B. 3 C. -1 D. $\frac{1}{20}$
3. Tìm a,b,c: $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} .dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} .\ln c$
 A. 8 B. 1 C. $\frac{1}{4}$ D. $\ln 4$
4. Tính $\int_0^1 (1+3x) . (1+2x+3x^2)^{10} dx$?
 A. $\frac{6^{11}-2}{22}$ B. $\frac{6^{11}-2}{2}$ C. $\frac{6^{11}}{22}$ D. $\frac{6^{11}-1}{22}$
5. Tính $\int_0^1 x\sqrt{1-x} .dx$?
 A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{4}{15}$ D. 5
6. Tính $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} .dx$? (đề thi dự bị THPT Quốc Gia 2015)
 A. 8 B. 3 C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{3}{8}$
7. Tính $\int_0^1 x\sqrt{2-x^2} .dx$? (đề thi Đại học khối B 2013)
 A. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{3}}$ D. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$
8. Tính $\int_0^1 x\sqrt{5-x^2} .dx$?
 A. $\frac{5\sqrt{5}-8}{6}$ B. $\frac{5\sqrt{5}-8}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}-8}{6}$ D. $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

9. Tính $\int_1^9 x \cdot \sqrt[3]{1-x} \cdot dx$?

A. $\frac{-468}{7}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{259}{6}$

D. 4

10. Tính $\int_1^3 x \cdot \sqrt[3]{x^2-1} \cdot dx$?

A. $\frac{14\sqrt{3}}{5}$

B. 1

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

D. 9

11. Tính $\int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{1+x^2} \cdot dx$ (đề thi học kì II năm 2014-THPT Nguyễn Khuyến-TP.HCM)

A. $\frac{45}{8}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{46}{15}$

12. Tính $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$?

A. $\frac{45}{8}$

B. $\frac{93}{10}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{46}{15}$

13. Tính $\int_0^3 \left(e^x - \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \right) \cdot dx$? (đề thi thử THPT QG 2015-THPT Hàn Thuyên-Bắc Ninh-Lần 3)

A. $e^3 - \frac{91}{15}$

B. $e^3 - \frac{9}{5}$

C. $e^3 - \frac{912}{15}$

D. $e^2 - \frac{91}{15}$

14. Tính $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \cdot dx$?

A. $2(\sqrt{3}-1)$

B. $2(\sqrt{3}-2)$

C. $4(\sqrt{3}-1)$

D. $2(2\sqrt{3}-1)$

15. Tính $\int_0^1 (x-1)^3 \cdot \sqrt{2x-x^2} \cdot dx$?

A. $\frac{2}{15}$

B. $-\frac{1}{15}$

C. $-\frac{2}{15}$

D. 15

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN DẠNG 1 (P1)

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
1	B	5	C	9	A	13	A
2	B	6	C	10	A	14	A
3	A	7	A	11	D	15	C
4	D	8	B	12	B		

DẠNG: $I = \int_a^b f(e^x) \cdot e^x \cdot dx \rightarrow \text{Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x \cdot dx.$

VÍ DỤ 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2t dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$$

Khi $x = 0$ thì $t = \sqrt{2}$

Khi $x = \ln 3$ thì $t = 2$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2t dt}{t(t^2 - 1)} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2 dt}{t^2 - 1} = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Bigg|_{\sqrt{2}}^2 = \ln \frac{1}{3} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

VÍ DỤ 2: Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1 \Rightarrow e^x dx = 2t dt$$

Khi $x = 0$ thì $t = \sqrt{2}$

Khi $x = \ln 2$ thì $t = \sqrt{3}$

$$\text{Do đó: } I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(t^2 - 1)2t dt}{t} = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN DẠNG 1 (P2)

Câu 1: Tìm a biết: $\int_0^{\ln 2} e^x \cdot \sqrt{a - e^x} \cdot dx = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$.

A. 3

B. 2

C. 5

D. 1

Câu 2: Tính $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{e^x \cdot dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$?

A. $3 - 2\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{2}$

Câu 3: Tính $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x} \cdot dx}{\sqrt{e^x - 1}}$?

A. $\frac{45}{8}$ B. $\frac{20}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{46}{15}$

Câu 4: Tính $\int_0^{\ln 6} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 3}}$?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3} \ln(2 + \sqrt{3})$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3} \ln(2 + \sqrt{3})$ C. $\ln(2 + \sqrt{3})$ D. $\frac{1}{3} \ln(2 + \sqrt{3})$

Câu 5: Tính $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} \cdot dx}{\sqrt{e^x + 1}}$?

A. $3 - 2\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Câu 6: Tính $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} \cdot dx}{\sqrt{e^x + 2}}$?

A. $\frac{8}{3}$ B. $2\sqrt{3} - \frac{8}{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$

Câu 7: Tính $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x \cdot dx}{3\sqrt{3 + e^x} + 2e^x + 7}$?

A. $\ln 4$ B. $\ln \frac{80}{3}$ C. $\ln \frac{8}{3}$ D. $\ln \frac{800}{3}$

Câu 8: Tính $\int_0^{\ln 16} \frac{dx}{\sqrt[4]{e^x + 4}}$?

A. $\ln 4$ B. $\ln \frac{80}{3}$ C. $\ln \frac{8}{3}$ D. $\ln \frac{3}{5}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN DẠNG 1 (P2)

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
1	C	4	A	7	B
2	C	5	D	8	D
3	B	6	B	9	

DẠNG $I = \int_a^b f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \rightarrow \text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} \cdot dx.$

Nếu $f(\ln x)$ có chứa $m + n \cdot \ln x$ với m, n là hằng số thì ta đặt luôn $t = m + n \cdot \ln x$. Bởi lẽ khi vi phân $dt = n \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$ sẽ không bị mất tính tổng quát so với khi đặt $t = \ln x$ và làm cho việc xử lý bài toán sau khi đặt ẩn phụ sẽ đơn hơn. Ngoài ra, khi gặp căn thức, ta cũng đặt $t = \sqrt[n]{f(\ln x)}$.

Nếu có chứa $\log_a x$ thì ta chuyển về $\ln x$ bằng công thức: $\log_a x = \log_a e \cdot \log_e x = \frac{\ln x}{\ln a}.$

Ví dụ:

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

Đặt $\ln x = t$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

Đổi cận

$$x = 1 \Rightarrow t = 0$$

$$x = e \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

Đề bài	Gợi ý	Đề bài	Gợi ý
$\int_1^e \frac{3 \ln x}{x} dx$	Đặt $\ln x = t$	$\int_1^e \frac{e^{2 \ln x + 1}}{x} dx$	Đặt $\ln x = t$
$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx$	Đặt $\ln x = t$	$\int_e^{e^2} \frac{1 + \ln^2 x}{x \ln x} dx$	Đặt $\ln x = t$
$\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln(x) \cdot x} dx$	Đặt $\ln x = t$	$\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$	Đặt $\sqrt{1 + \ln x} = t$
$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$	Đặt $\ln x = t$	$\int_1^e \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx$	Đặt $\ln x = t$
$\int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \ln x}{x} dx$	Đặt $\sqrt{1 + 3 \ln x} = t$	$\int_1^e \frac{6 \sqrt{3 + 5 \ln x} \ln x}{x} dx$	Đặt $\sqrt{3 + 5 \ln x} = t$

TRẮC NGHIỆM DẠNG $I = \int_a^b f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$

Câu 1: Tính $\int_1^e \frac{\ln x \cdot dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$?

A. $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{4-\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{5+2\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{5-2\sqrt{2}}{3}$

Câu 2: Tính $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \cdot \ln x}{x} \cdot dx$?

A. $\frac{29}{270}$

B. $\frac{478}{15}$

C. $\frac{13}{178}$

D. $\frac{116}{135}$

Câu 3: Tính $\int_1^e \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x} \cdot dx$?

A. $\frac{9\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{2}}{8}$

B. $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{8}$

C. $\frac{9\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{2}}{7}$

D. $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{7}$

Câu 4: Tính $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1+\ln x}}$?

A. $\frac{3\sqrt[3]{4}-3}{2}$

B. $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

C. $\frac{\sqrt[3]{4}-3}{2}$

D. $\frac{3\sqrt[3]{3}-3}{5}$

Câu 5: Tính $\int_1^{e^{\sqrt{e}}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}} \cdot dx$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{5}{3}$

Câu 6: Tính $\int_1^{e^3} \frac{\ln x \cdot dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$

A. $\frac{64}{105}$

B. $\frac{76}{15}$

C. $\frac{46}{15}$

D. $\frac{29}{270}$

Câu 7: Tính $\int_1^e \frac{\ln^3 x \cdot dx}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}$?

A. $\frac{45}{8}$

B. $\frac{4}{27}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{46}{15}$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM DẠNG $I = \int_a^b f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
1	A	4	A	7	B
2	D	5	D		
3	A	6	B		

KỸ THUẬT 4: TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC

1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC THƯỜNG SỬ DỤNG:

a. Hệ thức cơ bản:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1; \tan a \cdot \cot a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}; \quad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

b. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}; \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$$

c. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

d. Công thức biến tích thành tổng

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

Nhắc lại công thức nguyên hàm lượng giác:

Nguyên hàm số sơ cấp	Nguyên hàm hàm mở rộng
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

Công thức Walliss (dùng cho trắc nghiệm)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & (1) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

(Nếu n lẻ : Dùng ct (1) ; Nếu n chẵn: Dùng ct (2))

Trong đó

$n!!$ đọc là **n walliss** và được định nghĩa dựa vào n lẻ hay chẵn. Chẳng hạn:

$$0!! = 1; 1!! = 1; 2!! = 2; 3!! = 1.3; 4!! = 2.4; 5!! = 1.3.5;$$

$$6!! = 2.4.6; 7!! = 1.3.5.7; 8!! = 2.4.6.8; 9!! = 1.3.5.7.9; 10!! = 2.4.6.8.10.$$

VÍ DỤ 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{11} x dx = \frac{10!!}{11!!} = \frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11} = \frac{256}{693}.$

VÍ DỤ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx = \frac{9!!}{10!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512}.$

DẠNG 4.1. SỬ DỤNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

VÍ DỤ 1: Tính $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

Bài giải:

Ta thấy đề bài biểu thức dưới dấu tích phân ở dạng thương nên phải biến đổi để không còn dạng thương, mặt khác $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\sin x$ có công thức nguyên hàm nên

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \sin x \right) dx \\ &= (-\cot x + \cos x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Vậy $I_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

VÍ DỤ 2: Tính $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^3 x}{1 + \sin x} dx$

Bài giải:

Ta thấy biểu thức dưới dấu tích phân ở dạng thương nên phải biến đổi để không còn dạng thương, từ thức là $\cos x$, mẫu là biểu thức theo $\sin x$ nên ta biến đổi từ theo $\sin x$ để rút gọn

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^3 x}{1 + \sin x} dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{1 + \sin x} dx \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \cos x dx = \left(3 \sin x + \frac{3}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $I_2 = \frac{3}{2}$

VÍ DỤ 3: Tính $I_3 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

Bài giải:

Ta có công thức nguyên hàm $\frac{1}{\sin^2 x}, \frac{1}{\cos^2 x}$ nhưng nếu tách $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ được biểu thức dưới dấu tích phân là tích hai hàm nên

Cách 1:

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = (\tan x - \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $I_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Cách 2:

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4}{\sin^2 2x} dx = -2 \cot 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $I_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

VÍ DỤ 4: Tính $I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot^2 x dx$

Bài giải:

Ta không có công thức nguyên hàm của $\cot^2 x$ nên cần phải biến đổi. Có hai cách.

Cách 1:

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cot^2 x + 1 - 1) dx$$

$$= (-\cot x - x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -1 - \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = -1 - \frac{\pi}{12} + \sqrt{3}$$

Cách 2:

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= (-\cot x - x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -1 - \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = -1 - \frac{\pi}{12} + \sqrt{3}$$

Bài tập tự luyện

Tính : a. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3 - 2 \cot^2 x}{\cos^2 x} dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$

Đáp án: a. $\frac{11\sqrt{3}}{3} - 5$

b. 2

c. $1 - \frac{\pi}{4}$

d. $\frac{\pi}{2} - 1$

e. $\frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8}$

DẠNG 4.2: DÙNG CÔNG THỨC HẠ BẬC

VÍ DỤ 1: Tính $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

Bài giải:

Ta không có công thức nguyên hàm của $\cos^2 x$ nên phải dùng công thức hạ bậc

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $J_1 = \frac{\pi}{4}$

VÍ DỤ 2: Tính $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos 2x dx$

Bài giải:

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x - \cos^2 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

Vậy $J_2 = -\frac{\pi}{4}$

VÍ DỤ 3: $J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$

Bài giải:

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \cos 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} [\cos 6x + \cos 2x] dx \\
&= \frac{3}{8} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{64} \sin 6x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{12} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0
\end{aligned}$$

Vậy $J_3 = 0$

Bài tập tự luyện

Tính các tích phân

a. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 x + \sin^2 \frac{x}{4} \right) dx$

b. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{20}} \sin^2 5x dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x) dx$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$

Đáp án: a. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

c. $\frac{\pi}{40} - \frac{1}{20}$

d. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

e. $\frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right)$

f. $\frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{8} + 1 \right)$

DẠNG 4.3: DÙNG CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

VÍ DỤ 1: Tính tích phân: $K_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 6x dx$

Bài giải:

Biểu thức dưới dấu tích phân là tích của hai hàm nên ta dùng công thức biến đổi tích thành tổng

$$K_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 6x dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 8x - \sin 4x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 4x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 0$$

Vậy $K_1 = 0$

VÍ DỤ 2: Tính tích phân: $K_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

Bài giải:

Ta có: $\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 2x \cos 3x \cos x$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 4x \cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4} (\cos 6x + \cos 2x + 1 + \cos 4x)$$

Do đó $K_2 = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 6x + \cos 2x + 1 + \cos 4x) dx$

$$= \left(\frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

Vậy $K_2 = \frac{\pi}{8}$

Bài tập tự luyện:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \sin 3x dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x \cos 5x dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 6x \sin 2x - 6) dx$

Đáp án: a. $\frac{1}{4}$

b. $-\frac{1}{6}$

c. $\frac{3\sqrt{3}}{32} - \pi$

DẠNG 4.4: ĐỔI BIẾN SỐ

Các dạng thường gặp khi đổi biến

- a. Chứa biểu thức mang mũ
- b. Chứa mẫu
- c. Chứa căn
- d. Chứa mũ

Dạng $f(\sin x) \cdot \cos x \rightarrow$ **đặt** $t = \sin x$ **hoặc** $t = a + b \cdot \sin x$ **Dạng** $f(\cos x) \sin x \rightarrow$ **đặt** $t = \cos x$ **hoặc** $t = a + b \cos x$ **Dạng** $f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow$ **đặt** $t = \tan x$ **Dạng** $f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow$ **đặt** $t = \cot x$ **Dạng** $f(\sin x \pm \cos x) \cdot (\sin x \pm \cos x) \rightarrow$ **đặt** $t = \sin x \pm \cos x$ **Dạng 4.4.1. Kết hợp 1 trong 4 dạng a,b,c,d với $d(\sin x) = \cos x$, $d(\cos x) = -\sin x$**

VÍ DỤ 1: Tính: $L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x)^3 \cos x dx$

Bài giải:Biểu thức dưới dấu tích phân chứa biểu thức mang mũ và $d(\sin x) = \cos x dx$. Nên

Đặt: $t = 1 + 2 \sin x, dt = 2 \cos x dx \Rightarrow \cos x dx = \frac{dt}{2}$

Đổi cận: khi $x = 0$ thì $t = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 3$

Do đó $L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x)^3 \cos x dx = \int_1^3 t^3 \frac{dt}{2} = \left(\frac{t^4}{8} \right) \Big|_1^3 = 10$

VÍ DỤ 2: Tính $L_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$

Bài giải:

-Mặc dù chứa biểu thức mang mũ nhưng ta không đặt $t = \cos x$ được vì tích phân mới không chuyển hoàn toàn về theo biến t .

$$L_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx$$

Đặt $t = \sin x, dt = \cos x dx \Rightarrow \cos x dx = dt$

Đổi cận: khi $x = 0$ thì $t = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$

Do đó: $L_2 = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Rút kinh nghiệm:

- Dạng tổng quát $\int \sin^{2n+1} x dx = \int \sin^{2n} x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx$.

Đặt $t = \cos x$ (chứa $\sin x$ mũ lẻ ta đặt $t = \cos x$)

- Dạng tổng quát $\int \cos^{2n+1} x dx = \int \cos^{2n} x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx$.

Đặt $t = \sin x$ (chứa $\cos x$ mũ lẻ ta đặt $t = \sin x$).

- Áp dụng được đối với biểu thức dưới dấu tích phân là tích của $\sin x$ và $\cos x$

VÍ DỤ 3: Tính $L_3 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$

Bài giải:

$$L_3 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx$$

Đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt$

Đổi cận: $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

Do đó $L_3 = \int_{\frac{1}{2}}^0 (1 - t^2) t^2 (-dt) = \int_0^{\frac{1}{2}} (t^2 - t^4) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{17}{480}$

Vậy $L_3 = \frac{17}{480}$

VÍ DỤ 4: Tính $L_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos^3 x dx$

Bài giải: Cả $\sin$ và $\cos x$ đều mũ lẻ nên ta có thể giải bằng các cách sau:

Cách 1:

$$L_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x \cos x)^3 dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 2x dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos^2 2x) \sin 2x dx$$

Đặt $t = \cos 2x$, $dt = -2 \sin 2x dx \Rightarrow \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt$

Đổi cận: $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$

Do đó

$$L_4 = \frac{1}{16} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t^2) dt = \frac{1}{16} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{24} - \frac{11}{384} = \frac{5}{384}$$

Cách 2:

$$L_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^3 x dx$$

Đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt$

Đổi cận: $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$

Do đó

$$L_4 = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1 - t^2) t^3 dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (t^3 - t^5) dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} \right) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = \frac{5}{384}$$

Vậy $L_4 = \frac{5}{384}$

Ta có thể tách $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$

VÍ DỤ 5: Tính $L_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$ (ĐHKB - 2003)

Bài giải:

Đề bài dạng phân thức hơn nửa $(1 - 2 \sin^2 x) dx = \cos 2x dx$

Đặt $t = 1 + \sin 2x$, $dt = 2 \cos 2x dx \Rightarrow \cos 2x dx = \frac{dt}{2}$

Đổi cận: khi $x = 0$ thì $t = 1$; $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 2$

Do đó: $L_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx = \int_1^2 \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln t \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$

Vậy $L_5 = \frac{1}{2} \ln 2$

VÍ DỤ 6: Tính $L_6 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx$

Bài giải:

Đề bài chứa biểu thức mang mũ nên đặt $t = 2 + \sin x$ nhưng $dt = \cos x dx$ nên ta phải dùng công thức nhân đôi tách $\sin 2x$

$$L_6 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2 \sin x \cos x}{(2 + \sin x)^2} dx$$

$$\text{Đặt } t = 2 + \sin x \Rightarrow \sin x = t - 2$$

$$\text{Ta có } dt = \cos x dx$$

$$\text{Đổi cận khi } x = -\frac{\pi}{2} \text{ thì } t = 1; x = 0 \text{ thì } t = 2$$

$$\text{Do đó } L_6 = \int_1^2 \frac{2(t-2)}{t^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{2}{t} - \frac{4}{t^2} \right) dt = \left(2 \ln t + \frac{4}{t} \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 2$$

$$\text{Vậy } L_6 = 2 \ln 2 - 2$$

VÍ DỤ 7: Tính $L_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$

Bài giải:

Đề bài chứa căn thức và $d(\cos x) = -\sin x dx$ nên

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + 3 \cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3 \cos x$$

$$\Rightarrow 2t dt = -3 \sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -\frac{2t dt}{3}$$

$$\text{Đổi cận khi } x = 0 \text{ thì } t = 2; x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } t = 1$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 L_7 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx \\
 &= \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{\left(2\frac{t^2-1}{3} + 1\right)}{t} t dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{2t^3}{3} + t \right) \Big|_1^2 = \frac{44}{27} - \frac{10}{27} = \frac{34}{27}
 \end{aligned}$$

Vậy $L_7 = \frac{34}{27}$

VÍ DỤ 8: Tính $L_8 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos 2x} \sin 2x dx$

Bài giải:

Đề bài chứa mũ nên

Đặt $t = \cos 2x$, $dt = -2\sin 2x dx \Rightarrow \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt$

Đổi cận: $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$

Do đó: $L_8 = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}$

Vậy $L_8 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}$

VÍ DỤ 9: Tính $L_9 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx$ (Dự bị A – 2005)

Bài giải:

$$L_9 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 x) \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt$

Đổi cận: khi $x = 0$ thì $t = 1$; khi $x = \frac{\pi}{3}$ thì $t = \frac{1}{2}$

$$\text{Do đó: } L_9 = -\int_1^{\frac{1}{2}} (1-t^2) \frac{dt}{t} = -\left(\ln t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^{\frac{1}{2}} = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

$$\text{Vậy } L_9 = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

Bài tập tự luyện: Tính các tích phân

$$a. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{2 \sin x + 1}$$

$$b. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$$

$$c. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x) \sin^2 x} dx$$

$$d. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{3 + \cos 2x} dx$$

$$f. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$$

$$g. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx \text{ (ĐHKB- 2005)}$$

Đáp án:

$$a. \frac{1}{2} \ln 2$$

$$b. \frac{9\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{6}$$

$$c. \frac{1}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} + 2 - \sqrt{2}$$

$$d. 1 + 3 \ln \frac{3}{4}$$

$$f. \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g. 2 \ln 2 - 1$$

Dạng 4.4.2. Kết hợp 1 trong 4 dạng a,b,c,d và $d(\sin^2 x) = \sin 2x dx; d(\cos^2 x) = -\sin 2x dx$

VÍ DỤ 1: Tính $M_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1 + \sin^2 x)^3 dx$

Bài giải:

Đề bài chứa biểu thức mang mũ và $d(\sin^2 x) = \sin 2x dx$ nên

Đặt $t = 1 + \sin^2 x \Rightarrow dt = \sin 2x dx$

Đổi cận khi $x = 0$ thì $t = 1$; khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 2$

$$\text{Do đó: } M_1 = \int_1^2 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{15}{4}$$

$$\text{Vậy } M_1 = \frac{15}{4}$$

VÍ DỤ 2: Tính $M_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} dx$

Bài giải:

Đề bài chứa mẫu và $d(1 + \cos^2 x) = -\sin 2x dx$; $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$. Nên

Đặt $t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow dt = -\sin 2x dx$

Đổi cận khi $x = 0$ thì $t = 2$; khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = \frac{3}{2}$

$$\text{Do đó: } M_2 = \int_2^{\frac{3}{2}} \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{2(2t-3)}{t} dt = (4t - 6 \ln t) \Big|_{\frac{3}{2}}^2 = 2 - 6 \ln \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } M_2 = 2 - 6 \ln \frac{4}{3}$$

$$\text{VÍ DỤ 3: } M_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$$

Bài giải:

Đề bài chứa căn thức nên

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} \Rightarrow 2tdt = 3 \sin 2x dx$$

Đổi cận khi $x = 0$ thì $t = 1$; khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 2$

$$\text{Do đó } M_3 = \int_1^2 \frac{2}{3} \frac{tdt}{t} = \frac{2}{3} t \Big|_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } M_3 = \frac{2}{3}$$

Bài tập tự luyện: Tính các tích phân:

$$a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx \quad b. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4 + 3 \sin^2 x}} dx$$

$$\text{Đáp án: } a. \ln 2 \quad b. \frac{\sqrt{7} - 2}{3}$$

Dạng 4.4.3 Kết hợp 1 trong 4 dạng a,b,c,d và

$$d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx; \quad d(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx = -(1 + \cot^2 x) dx$$

$$\text{VÍ DỤ 1: Tính } N_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + \tan^3 x) dx$$

Bài giải:

$$N_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + \tan^3 x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x (1 + \tan^2 x) dx$$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx$$

Đổi cận: Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t=1$; $x = \frac{\pi}{3}$ thì $t = \sqrt{3}$

$$\text{Do đó: } N_1 = \int_1^{\sqrt{3}} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{3}} = 1$$

Vậy $N_1 = 1$

VÍ DỤ 2: Tính $N_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$

Bài giải:

$$N_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \tan^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Đổi cận: Khi $x = 0$ thì $t = 0$; $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } N_2 &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4-1+1}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[-(t^2+1) + \frac{1}{1-t^2} \right] dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[-(t^2+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \right] dt \\ &= \left[-\left(\frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{10}{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } N_2 = \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{10}{9\sqrt{3}}$$

VÍ DỤ 3: Tính $N_3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \sqrt{\cot x}} dx$

Bài giải:

Đề bài chứa căn thức và $d(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$ nên

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\cot x} \Rightarrow t^2 = \cot x \Rightarrow 2t dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

Đổi cận: Khi $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \sqrt[4]{3}$; khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$

$$\text{Do đó } N_3 = - \int_{\sqrt[4]{3}}^1 2t dt = -2t \Big|_{\sqrt[4]{3}}^1 = 2\sqrt[4]{3} - 2$$

$$\text{Vậy } N_3 = 2\sqrt[4]{3} - 2$$

VÍ DỤ 4: Tính $N_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x} dx$

Bài giải:

Đề bài chứa biểu thức mang mũ là $\sin x$ nhưng ta không đặt $t = \sin x$ vì $d(\sin x) = \cos x dx$ không có ở đề bài mà phải xem $\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$

$$\text{Ta có } N_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

Đổi cận: Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$; khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$

$$\text{Do đó } N_4 = \int_1^0 (1 + t^2) dt = \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^0 = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } N_4 = -\frac{4}{3}$$

Bài tập tự luyện: Tính các tích phân:

$$a. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

$$b. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cot x + \cot^3 x) dx$$

$$\text{Đáp án } a. 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$$

$$b. \frac{1}{3}$$

Dạng 4.4.4 Kết hợp 1 trong 4 dạng a,b,c,d và $d(\sin x \pm \cos x) = (\cos x \mp \sin x) dx$

VÍ DỤ 1: Tính $P_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Bài giải:

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x) dx$

Đổi cận khi $x = 0$ thì $t = 1$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}$

Do đó: $P_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2}$

Vậy: $P_1 = \ln \sqrt{2}$

VÍ DỤ 2: Tính $P_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^2} dx$

Bài giải:

Đặt $t = \sin x - \cos x + 3 \Rightarrow dt = (\cos x + \sin x) dx$

Đổi cận khi $x = 0$ thì $t = 2$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 4$

Do đó:

$$P_2 = \int_2^4 \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x - \cos x + 3)^2} dx$$

$$= \int_2^4 \frac{-t + 3}{t^2} dt = \left(-\ln t - \frac{3}{t} \right) \Big|_2^4 = \frac{3}{4} - \ln 2$$

Vậy $P_2 = \frac{3}{4} - \ln 2$

VÍ DỤ 3: Tính $P_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$

Bài giải:

Ta không tính P_3 độc lập được mà phải dựa vào $Q_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ bằng cách tính $P_3 + Q_3; P_3 - Q_3$ sau đó giải hệ để tính P_3

$$\text{Tính } P_3 + Q_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx = \left(x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Tính } P_3 - Q_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x)}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x) dx$$

$$\text{Đổi cận khi } x = 0 \text{ thì } t = 1; \text{ khi } x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } t = 1$$

$$\text{Do đó } P_3 - Q_3 = \int_1^1 \frac{\left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right)}{t} dt = 0$$

$$\text{Giải hệ ta được } P_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } P_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$$

Bài tập tự luyện: Tính các tích phân:

$$a. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x + 2} dx$$

$$b. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$c. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$$

$$d. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)} dx \text{ (ĐHKB-2008)}$$

Hướng dẫn giải câu d. đặt $t = 1 + \sin x + \cos x$

Đáp án:

a. $\sqrt{2} - 1 - 2 \ln \frac{\sqrt{2} + 2}{3}$

b. $\frac{1}{2} \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{8}$

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}$

TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN DẠNG 1 (P3)**Tính các tích phân sau (không dùng máy tính)**(dạng $f(\sin x) \cdot \cos x \rightarrow$ đặt $t = \sin x$ hoặc $t = a + b \cdot \sin x$)**Câu 1:** Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$? (đề HK II 2014- THPT Lương Văn Can- TP.HCM)

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

Câu 2: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3 \sin x) \cdot \cos x \cdot dx$? (đề HK II 2014- THPT Quốc Trí- TP.HCM)

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

Câu 3: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot dx$? (đề HK II 2014- THPT Marie Curie- TP.HCM)

A. $\ln 4$

B. $\ln 5$

C. $\ln 3$

D. $\ln 2$

Câu 4: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5 - 2 \sin x} \cdot dx$?

A. $-\frac{1}{3} + \ln \frac{5}{2}$

B. $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$

C. $\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2}$

D. $-\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$

Câu 5: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot dx}{1 + \sin x}$? (đề HK II 2014-THCS & THPT Bắc Mỹ- TP.HCM)

A. $1 - \ln 4$

B. $4 \ln 5$

C. $3 - \ln 3$

D. $2 - 2 \ln 2$

Câu 6: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)^2 \cdot \cos x \cdot dx$?

A. 8

B. 3

C. $\frac{7}{3}$

D. $\frac{3}{8}$

Câu 7: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x)^3 \cdot \cos x \cdot dx$?

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

Tính các tích phân sau (dạng $f(\cos x) \sin x \rightarrow$ đặt $t = \cos x$ hoặc $t = a + b \cos x$)

Câu 8: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \cos^4 x \cdot dx$? (đề thi HK II-THPT Lê Thánh Tôn- TP.HCM)

- A. $\frac{64}{105}$ B. $\frac{31}{160}$ C. $\frac{46}{15}$ D. $\frac{29}{270}$

Câu 9: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot dx$? (đề thi HK II-THPT Việt Mỹ Anh- TP.HCM)

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 2 D. 1

Câu 10: Tính $\int_0^{\pi} \sin 2x \cdot \cos^2 x \cdot dx$? (đề thi thử THPT QG 2015-THPT Nguyễn Văn Trỗi- Hà Tĩnh-Lần1)

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

Câu 11: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x (1 + \cos x)^2 \cdot dx$?

- A. $\frac{64}{105}$ B. $\frac{31}{160}$ C. $\frac{17}{12}$ D. $\frac{29}{270}$

Câu 12: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} \cdot dx$?

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

Tính các tích phân sau (dạng $f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow$ đặt $t = \tan x$)

Câu 13: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)^2}{\cos^2 x} \cdot dx$?

- A. $\frac{11}{6}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

Câu 14: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x} .dx$? (đề thi thử THPT QG 2015-THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa)

- A. $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{9}$ B. $\frac{5\sqrt{5}-\sqrt{2}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{5-2\sqrt{2}}{9}$

Câu 15: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + e^{\tan x}) . \sin x . dx}{\cos^3 x}$?

- A. 2 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 3

Câu 16: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} .dx$? (đề thi Đại Học khối A năm 2008)

- A. $-\frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3})$ B. $\frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3})$
C. $-\frac{10\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3})$ D. $-\frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2} \ln(2-\sqrt{3})$

Tính các tích phân sau (dạng $f(\sin x \pm \cos x) . (\sin x \pm \cos x) \rightarrow$ đặt $t = \sin x \pm \cos x$)

Câu 17: Tính $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} .dx$?

- A. $\ln 2$ B. $\ln 4$ C. $\frac{1}{2} \ln 4$ D. $\frac{1}{2} \ln 2$

Câu 18: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x + 3} .dx$?

- A. $-\ln \frac{3+\sqrt{2}}{4}$ B. $\ln \frac{3+\sqrt{2}}{4}$ C. $-\ln \frac{3-\sqrt{2}}{4}$ D. $-\ln \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

Câu 19: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x + 2} .dx$?

- A. $\sqrt{2}-1+2\ln \frac{3}{2+\sqrt{2}}$ B. $\sqrt{2}-1+2\ln \frac{1}{2+\sqrt{2}}$
C. $\sqrt{2}+1+2\ln \frac{3}{2+\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{2}-1-2\ln \frac{3}{2+\sqrt{2}}$

Câu 20: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^3} .dx$?

A. $\frac{11}{6}$

B. $\frac{1}{32}$

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

Câu 21: Tính $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$

A. 3

B. 2

C. 1

D. -1

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỐI BIẾN DẠNG 1 (P3)

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
Câu 1.	A	Câu 7.	B	Câu 13.	B	Câu 19.	A
Câu 2.	C	Câu 8.	B	Câu 14.	A	Câu 20.	B
Câu 3.	D	Câu 9.	D	Câu 15.	C	Câu 21.	C
Câu 4.	B	Câu 10.	A	Câu 16.	A		
Câu 5.	D	Câu 11.	C	Câu 17.	D		
Câu 6.	C	Câu 12.	B	Câu 18.	A		

KỸ THUẬT 5: ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

DẤU HIỆU	CÁCH CHỌN
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin t \\ x = a \cos t \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} \\ x = \frac{ a }{\cos t} \end{cases}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\begin{cases} x = a \operatorname{tg} t \\ x = a \cot gt \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a \cos t$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cos t$
$\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$	$x = \frac{a}{b} \sin t$
$\frac{1}{(a^2 + b^2 x^2)^n}, n=1, 2, \dots$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$

VÍ DỤ 1: Tính tích phân (với $a > 0$)

$$I = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Lời giải:

Đặt $x = a \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\Rightarrow dx = a \cos t dt$

Với $x = 0$ thì $t = 0$

Với $x = \frac{a}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$

Do đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a \cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$

VÍ DỤ 2: Tính tích phân (với $a > 0$)

$$I = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$$

Lời giải:

Đặt $x = a \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\Rightarrow dx = a(\tan^2 t + 1)dt$.

Với $x = 0$ thì $t = 0$

Với $x = a$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a(\tan^2 t + 1)dt}{a^2 + a^2 \tan^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{4a}$$

VÍ DỤ 3: Tính tích phân:

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$

Lời giải:

Đặt $x = \sin t$, $\Rightarrow dx = \cos t dt$

Khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

Khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt \\ &= -(\cot t + t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

VÍ DỤ 4: Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Lời giải:

Đặt $x = 2\cos t$, $\Rightarrow dx = -2\sin t dt$

Khi $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$

Khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{3}$

Do đó:

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^2 t \cdot 2 \sin t dt}{2 \sin t} = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2 \cos t) dt = -2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

VÍ DỤ 5: Tính tích phân

$$I = \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

Lời giải:

Đặt $x = 2 \sin t$, $\Rightarrow dx = 2 \cos t dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$

Khi $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{2}$

$$x^2 = 4 \sin^2 t$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt \\ &= 2 \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi \end{aligned}$$

VÍ DỤ 6: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Lời giải:

Đặt $x = \sin t$, $\Rightarrow dx = \cos t dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$

Khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cdot \sin t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 t) d(\cos t)$$

$$= (-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

VÍ DỤ 7: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Lời giải:

Đặt $x = \sin t$, $\Rightarrow dx = \cos t dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$

Khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Do đó: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

VÍ DỤ 8: Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Lời giải:

Đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $\Rightarrow dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t}$

Khi $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$

Khi $x = \sqrt{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Do đó: } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t} |\sin t|} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}$$

VÍ DỤ 9: Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x^2 \sqrt{4-3x^2} dx$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t \Rightarrow dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t dt$$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$

$$\text{Khi } x = 1 \text{ thì } t = \frac{\pi}{3}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4}{3} \sin^2 t \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t dt = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2t dt = \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \end{aligned}$$

VÍ DỤ 10: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } x = \cos t, \Rightarrow dx = -\sin t dt$$

Khi $x=0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$

Khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} \cdot \sin t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\cos^2 \frac{t}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}}} \cdot \sin t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| \cdot \sin t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \frac{t}{2} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t) dt = (t + \sin t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

VÍ DỤ 11: Tính tích phân

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Lời giải:

Đặt $x = \operatorname{tg} t$, $\Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$

Khi $x=1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

Khi $x = \sqrt{3}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{|\cos t|}$$

Do đó:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{|\cos t|}{\operatorname{tg} t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t} = \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right)$$

VÍ DỤ 12: Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+3x^2)^2}$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} t, \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$$

Khi $x=0$ thì $t = 0$

$$\text{Khi } x = 1 \text{ thì } t = \frac{\pi}{3}$$

$$1+3x^2=1+\operatorname{tg}^2 t$$

Do đó:

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

VÍ DỤ 13: Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{9+2x^2}}{x^2} dx$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } x = \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} t, \Rightarrow dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$\text{Khi } x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ thì } t = \frac{\pi}{6};$$

Khi $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{9+2x^2} = 3\sqrt{1+\tan^2 t} = 3 \cdot \frac{1}{\cos t}$$

Do đó:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cos t}}{\frac{9}{2} \tan^2 t} dt = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t \cdot \tan^2 t} = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t \cdot \sin^2 t} = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin t}{(1 - \sin^2 t) \cdot \sin^2 t}$$

Đặt: $v = \sin t$ thì

$$I = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{v^2(1-v^2)} = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{1-v^2} \right) dv = -\sqrt{2} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| + \frac{1}{v} \right] \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} \ln(\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

VÍ DỤ 14: Tính tích phân

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{Đại học Y HN 1998})$$

Lời giải:

Đặt $x = \sin t$, $\Rightarrow dx = \cos t dt$.

Khi $x = -\frac{1}{2}$ thì $t = -\frac{\pi}{6}$

Khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t|$$

Do đó: $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN DẠNG 2

Câu 1: Tính $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, (a > 0)$?

- A. $\ln(1 + 2\sqrt{2})$ B. $\ln(1 + \sqrt{2})$ C. $\ln(1 - 2\sqrt{2})$ D. $\ln(2\sqrt{2})$

Câu 2: Tính $\int_0^a \sqrt{a^2 + x^2} . dx$?

- A. $\frac{a^2}{2} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$ B. $\frac{a^2}{2} [\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$
C. $\frac{a^2}{2} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1)]$ D. $\frac{a^2}{2} [1 + \ln(\sqrt{2} + 1)]$

Câu 3: Tính $\int_0^a x^2 \sqrt{x^2 + a^2} . dx, (a > 0)$

- A. $\frac{a^4}{8} [3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$ B. $\frac{a^4}{8} [\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$
C. $\frac{a^4}{8} [3 - \ln(\sqrt{2} - 1)]$ D. $\frac{a^4}{2} [3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$

Câu 4: Tính $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$?

- A. $\frac{\pi}{16}$ B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

Câu 5: Tính $\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^8} . dx$

- A. $\frac{\pi}{16}$ B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

Câu 6: Tính $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$?

- A. $\ln(1 + 2\sqrt{2})$ B. $\ln(1 + \sqrt{2})$ C. $\ln(1 - 2\sqrt{2})$ D. $\ln(2\sqrt{2})$

Câu 7: Tính $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} . dx$?

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln(1 - \sqrt{2})$ D. $\frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$

Câu 8: Tính $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, (a > 0)$?

A. $\ln 2$

B. $\ln(1+\sqrt{3})$

C. $\ln(2+\sqrt{3})$

D. $\ln(1-2\sqrt{3})$

Câu 9: Tính $\int_a^{2a} \sqrt{x^2 - a^2} dx, (a > 0)$?

A. $a^2 \left[\sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}) \right]$

B. $a^2 \left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}) \right]$

C. $a^2 \left[\sqrt{3} - \ln(1+\sqrt{3}) \right]$

D. $a^2 \left[\sqrt{3} - 2 \ln(2+\sqrt{2}) \right]$

Câu 10: Tính $\int_{\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$?

A. $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2})$

B. $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2})$

C. $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \ln(1+\sqrt{2})$

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(4+\sqrt{2})$

Câu 11: Tính $\int_3^5 \sqrt{x^2 - 9} dx$?

A. $10 - \frac{9}{3} \ln 3$

B. $10 - \frac{9}{2} \ln 3$

C. $10 - \ln 3$

D. $10 + \frac{9}{3} \ln 3$

Câu 12: Tính $\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$?

A. $\ln(1+2\sqrt{2})$

B. $\ln(1+\sqrt{2})$

C. $\ln(1-2\sqrt{2})$

D. $\ln(2\sqrt{2})$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN DẠNG 2

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
1	B	5	A	9	B
2	A	6	B	10	A
3	A	7	A	11	B
4	D	8	C	12	B

KỸ THUẬT 6: TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN



Định lý: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì:

$$I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) \cdot dx \text{ hay } I = \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Thực hành:

- **Nhận dạng:** Tích 2 hàm khác loại nhân nhau, chẳng hạn: mũ nhân lượng giác,...
- **Đặt:** $\begin{cases} u = \dots\dots\dots \xrightarrow{\text{Vi phân}} du = \dots\dots\dots dx \\ dv = \dots\dots\dots dx \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v = \dots\dots\dots \end{cases}$. Suy ra: $I = \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$
- **Thứ tự ưu tiên chọn u :** **log – đa – lượng – mũ** và $dv = \text{phần còn lại}$. Nghĩa là nếu có $\ln$ hay $\log_a x$ thì chọn $u = \ln$ hay $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$ và $dv =$ còn lại. Nếu không có $\ln$; $\log$ thì chọn $u =$ đa thức và $dv =$ còn lại. Nếu không có $\log$, đa thức, ta chọn $u =$ lượng giác,....
- **Lưu ý** rằng bậc của đa thức và bậc của $\ln$ tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.
- Dạng **mũ nhân lượng giác** là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

Tìm các nguyên hàm:

VÍ DỤ 1. $I = \int x \sin 2x dx$

Theo thứ tự ưu tiên ở trên, với nguyên hàm này là tích của Hàm đa thức với Hàm lượng giác, nên ta ưu tiên đặt $u = x$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

VÍ DỤ 2. $I = \int x^2 e^{2x} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - I_1$$

Tính $I_1 = \int x e^{2x} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Từ đó:

$$I = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{(2x^2 - 2x + 1)e^{2x}}{4} + C$$

$$\text{VÍ DỤ 3. } I = \int x \cos^2 2x dx$$

$$I = \int x \cos^2 2x dx = \int x \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \int x dx + \int \frac{1}{2} x \cos 4x dx = \frac{1}{4} x^2 + I_1$$

$$\text{Tính } I_1 = \int \frac{1}{2} x \cos 4x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{2} x \\ dv = \cos 4x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{2} dx \\ v = \frac{1}{4} \sin 4x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{8} x \sin 4x - \frac{1}{8} \int \sin 4x dx = \frac{1}{8} x \sin 4x + \frac{1}{32} \cos 4x + C$$

$$\text{Từ đó: } I = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} x \sin 4x + \frac{1}{32} \cos 4x + C$$

$$\text{VÍ DỤ 4. } I = \int (2x^2 + x + 1) e^x dx$$

-Với **VÍ DỤ** này, khi mà bậc của $P(x) = 2$, sử dụng phương pháp Nguyên hàm từng phần ta phải tiến hành hai lần. Tuy nhiên, trong trường hợp này, ta cũng có thể sử dụng một cách khác được chỉ ra ở đây!

Đặt:

$$\begin{cases} u = 2x^2 + x + 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (4x + 1) dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = (2x^2 + x + 1) e^x - \int (4x + 1) e^x dx$$

$$\text{Tính } I_1 = \int (4x + 1) e^x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = 4x + 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4 dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = (4x + 1) e^x - 4 \int e^x dx = (4x + 1) e^x - 4e^x + C = (4x - 3) e^x + C$$

$$\Rightarrow I = (2x^2 + x + 1)e^x - (4x - 3)e^x + C = (2x^2 - 3x + 4)e^x + C$$

$$\text{VÍ DỤ 5. } I = \int e^{2x} \cos 3x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \cos 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} I_1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \sin 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} I$$

Từ đó:

$$I = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} I_1 = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} I_1 = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} I \right)$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} I \Rightarrow \frac{13}{9} I = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x + C_1$$

$$\Rightarrow I = \frac{(3 \sin 3x + 2 \cos 3x) e^{2x}}{13} + C$$

$$\text{VÍ DỤ 6. } I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ v = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$\text{Ta được } I = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C$$

VÍ DỤ 7. $I = \int \ln^2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) dx$

Đặt:
$$\begin{cases} u = \ln^2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= x \cdot \ln^2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) - 2 \int \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= x \ln^2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) - 2\sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + 2x + C \end{aligned}$$

VÍ DỤ 8. $I = \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx.$

Ta có $I = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$. Đặt
$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$

Ta được $I = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C$

VÍ DỤ 9. $I = \int \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \right) dx$

$$I = \int \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\ln x} - \int \frac{dx}{\ln^2 x} = I_1 - I_2.$$

Tính I_1 . Đặt
$$\begin{cases} u = \frac{1}{\ln x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{dx}{x \ln^2 x} \\ v = x \end{cases}.$$

Từ đó $I_1 = \frac{x}{\ln x} + I_2$. Từ đó $I = \frac{x}{\ln x} + C$

VÍ DỤ 10. $I = \int x \ln \frac{x-1}{x+1} dx.$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln \frac{x-1}{x+1} \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2dx}{x^2-1} \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}. \text{ Từ đó } I = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$\text{VÍ DỤ 11. } I = \int (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x} dx$$

$$\text{Giả sử: } Q = \int (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x} dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C$$

$$\Rightarrow (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x} = (3ax^2 + 2bx + c)e^{2x} + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4 = 2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + c + 2d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2a \\ 5 = 3a + 2b \\ -2 = 2b + 2c \\ 4 = c + 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow Q = (x^3 + x^2 - 2x + 3)e^{2x} + C$$

$$R = \int (2x^2 + x + 1)e^x dx = \dots = (2x^2 - 3x + 4)e^x + C$$

IV. PHƯƠNG PHÁP 4. PHỐI HỢP ĐỔI BIẾN SỐ VÀ PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

$$\text{VÍ DỤ 1. } I = \int \sin \sqrt{x} dx$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt \Rightarrow I = \int \sin t \cdot (2t dt) = \int 2t \sin t dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dt \\ v = -\cos t \end{cases} \Rightarrow I = -2t \cos t + 2 \int \cos t dt = -2t \cos t + 2 \sin t + C$$

$$\text{Vậy } I = 2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + C$$

$$\text{VÍ DỤ 2: Tính tích phân } I = \int_1^2 \ln t dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}. \text{ Khi đó } I = t \ln t \Big|_1^2 - \int_1^2 dt = t \ln t \Big|_1^2 - t \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

VÍ DỤ 3: Biết $I = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$. Giá trị của a bằng:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \Big|_1^a + \int_1^a \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln a}{a} - \frac{1}{x} \Big|_1^a = -\frac{\ln a}{a} - \frac{1}{a} + 1. \text{ Suy ra } a = 2.$$

VÍ DỤ 4: Kết quả của tích phân $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$ được viết ở dạng $I = a \ln 3 - b$ với a, b là các số nguyên. Khi đó $a - b$ nhận giá trị?

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x-1}{x^2-x} dx = \frac{2x-1}{x(x-1)} dx \\ v = x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1} dx = x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - (2x + \ln|x-1|) \Big|_2^3 = 3 \ln 3 - 2. \text{ Suy ra } a = 3, b = 2.$$

TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$. C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Câu 2. Khẳng định nào sau đây **đúng** về kết quả $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$?

- A. $ab = 64$. B. $ab = 46$. C. $a - b = 12$ D. $a - b = 4$.

Câu 3. Kết quả của tích phân $I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) dx$ được viết ở dạng $I = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Hỏi tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 4. Cho $I = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$. Xác định k để $I < e - 2$.

- A. $k < e + 2$. B. $k < e$. C. $k > e + 1$. D. $k < e - 1$.

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 x 2^x dx$.

- A. $I = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln^2 2}$. B. $I = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2}$. C. $I = \frac{2 \ln 2 + 1}{\ln^2 2}$. D. $I = \frac{2 \ln 2 + 1}{\ln 2}$.

Câu 6. Kết quả tích phân $I = \int_0^1 (2x + 3)e^x dx$ được viết dưới dạng $I = ae + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a - b = 2$. B. $a^3 + b^3 = 28$. C. $ab = 3$. D. $a + 2b = 1$.

Câu 7. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot e^{\sin x} dx$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1: Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow I = 2 \int_0^1 te^t dt.$

Bước 2: Chọn $\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$. Suy ra $\int_0^1 te^t dt = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t \Big|_0^1 = 1.$

Bước 3: $I = 2 \int_0^1 te^t dt = 2.$

Hỏi bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

- A. Bài giải trên sai từ Bước 1. B. Bài giải trên sai từ Bước 2.
C. Bài giải trên hoàn toàn đúng. D. Bài giải trên sai từ Bước 3.

Câu 8. Cho $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$, $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$ và $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$. Khẳng định nào **đúng** trong các khẳng định sau?

(I). $I + J = e^{\pi}$. (II). $I - J = K$. (III). $K = \frac{e^{\pi} - 1}{5}$.

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Chỉ (III). D. Cả (II) và (III).

Câu 9. Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Giá trị của $I_0 + I_1$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \cdot \cos x \cdot dx$? (đề thi HK II 2014-THPT Nguyễn Hữu Thọ-TP.HCM)

- A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} - 2$ B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2} - 2$

Câu 11: Tính $\int_1^2 x \cdot \ln x \cdot dx$? (đề thi HK II 2014-THPT Văn Lang-TP.HCM)

- A. $2 \ln 2 - 4$ B. $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ C. $2 \ln 2 - \frac{4}{3}$ D. $2 \ln 2$

Câu 12: Tính $\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos x \cdot dx$? (đề thi HK II 2014-THPT Trần Quang Khải-TP.HCM)

A. $\frac{1+e^\pi}{2}$

B. $\frac{e^\pi}{2}$

C. $\frac{3e^\pi}{2}$

D. $\frac{5+e^\pi}{2}$

Câu 13: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \cdot dx$?

A. $\frac{\pi}{3} - 1$

B. $\frac{\pi}{6} - 1$

C. $\frac{\pi}{2} - 1$

D. $\frac{\pi}{4} - 1$

Câu 14: Tính $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ln x \cdot dx$? (đề thi Đại Học khối A, A1 năm 2013)

A. $\frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2} \ln 2$

C. $\frac{5}{2} \ln 2 + \frac{3}{2}$

D. $\ln 2 - \frac{3}{2}$

Câu 15: Tính $\int_0^1 \frac{3x+1}{e^{2x}} \cdot dx$?

A. $\frac{5}{4} - \frac{11}{4e^2}$

B. $\frac{5}{2} - \frac{11}{2e^2}$

C. $\frac{5}{4} - \frac{1}{4e^2}$

D. $\frac{11}{4e^2}$

Tính các tích phân sau (tách thành 2 tích phân A, B với A: dạng cơ bản và B: tích phân từng phần)

Câu 16: Tính a-b biết: $\int_1^e x(1+\ln x) \cdot dx = \frac{3e^2}{a} - \frac{1}{b}$

A. 0

B. $\frac{3e^2}{4}$

C. 1

D. $\frac{1}{4}e$

Câu 17: Biết $\int_0^1 (1-x) \cdot (2+e^{2x}) \cdot dx = \frac{e^b+c}{a}$. Tính $\frac{a}{b} - c$?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

Câu 18: Tính $\int_0^\pi x(x - \sin x) \cdot dx$? (đề thi thử THPT QG 2015- THPT Chu Văn An- HN)

A. $\frac{\pi}{3} - \pi^2$

B. $\frac{\pi^3}{3} - \pi^2$

C. $\frac{\pi^3}{3} - \pi$

D. $\frac{\pi^3}{3}$

Câu 19: Tính $\int_1^2 (2x^3 + \ln x) \cdot dx$? (đề minh họa 2015- Bộ GD & ĐT)

A. $\frac{13}{2} + \ln 2$

B. $\frac{13}{2} + 2 \ln 2$

C. $\frac{13}{2} + 3 \ln 2$

D. $\frac{13}{2} + 4 \ln 2$

Tính các tích phân sau (sử dụng đổi biến trước rồi tính tích phân từng phần sau)

Câu 20: Tính $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos \sqrt{x} . dx = \pi - a$ Tìm a?

A. 0

B. π

C. 2

D. 4

Câu 21: Tính $\int_0^{a^2} \sin \sqrt{x} . dx = 2\pi$. Tìm a

A. 2

B. 2π

C. $\pi - 2$

D. π

Câu 22: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x . \ln(1 + \cos x) . dx$? (đề thi thử THPT QG 2015-THPT Phan Đình Phùng-HN)

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

Câu 23: Tính $\int_0^1 x^3 . e^{x^2} . dx$?

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

Câu 24: Tính $\int_0^1 (8x^3 - 2x) . e^{x^2} . dx$?

A. e

B. $5-e$

C. $e+4$

D. 1

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
1	C	7	C	13	C	19	C
2	A	8	D	14	A	20	B
3	C	9	B	15	A	21	A
4	D	10	A	16	C	22	A
5	A	11	B	17	D	23	C
6	D	12	A	18	C	24	B

KỸ THUẬT 7: TÍCH PHÂN CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Dạng 1

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)| dx$, ta thực hiện các bước sau

Bước 1. Lập bảng xét dấu (BXD) của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, giả sử $f(x)$ có BXD:

x	a	x_1	x_2	b	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Bước 2. Tính $I = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx$.

VÍ DỤ 1. Tính tích phân $I = \int_{-3}^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Giải

Bảng xét dấu

x	-3	1	2
x^2-3x+2	$+$	0	$-$ 0

$$I = \int_{-3}^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{59}{2}.$$

Vậy $I = \frac{59}{2}$.

VÍ DỤ 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5 - 4 \cos^2 x - 4 \sin x} dx$.

ĐS: $I = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}.$

2. Dạng 2

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b [|f(x)| \pm |g(x)|] dx$, ta thực hiện

Cách 1.

Tách $I = \int_a^b [|f(x)| \pm |g(x)|] dx = \int_a^b |f(x)| dx \pm \int_a^b |g(x)| dx$ rồi sử dụng dạng 1 ở trên.

Cách 2.

Bước 1. Lập bảng xét dấu chung của hàm số $f(x)$ và $g(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu ta bỏ giá trị tuyệt đối của $f(x)$ và $g(x)$.

VÍ DỤ 3. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$.

Giải

Cách 1.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx = \int_{-1}^2 |x| dx - \int_{-1}^2 |x-1| dx \\ &= -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 x dx + \int_{-1}^1 (x-1) dx - \int_1^2 (x-1) dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Cách 2.

Bảng xét dấu

x	-1	0	1	2
x	-	0	+	+
x - 1	-	-	0	+

$$I = \int_{-1}^0 (-x + x - 1) dx + \int_0^1 (x + x - 1) dx + \int_1^2 (x - x + 1) dx$$

$$= -x \Big|_{-1}^0 + (x^2 - x) \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = 0.$$

Vậy $I = 0$.**3. Dạng 3**

Để tính các tích phân $I = \int_a^b \max \{f(x), g(x)\} dx$ và $J = \int_a^b \min \{f(x), g(x)\} dx$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng xét dấu hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2.

+ Nếu $h(x) > 0$ thì $\max \{f(x), g(x)\} = f(x)$ và $\min \{f(x), g(x)\} = g(x)$.

+ Nếu $h(x) < 0$ thì $\max \{f(x), g(x)\} = g(x)$ và $\min \{f(x), g(x)\} = f(x)$.

VÍ DỤ 4. Tính tích phân $I = \int_0^4 \max \{x^2 + 1, 4x - 2\} dx$.

Giải

Đặt $h(x) = (x^2 + 1) - (4x - 2) = x^2 - 4x + 3$.

Bảng xét dấu

X	0	1	3	4
h(x)	+	0	-	0

$$I = \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^3 (4x - 2) dx + \int_3^4 (x^2 + 1) dx = \frac{80}{3}.$$

Vậy $I = \frac{80}{3}$.

VÍ DỤ 5. Tính tích phân $I = \int_0^2 \min \{3^x, 4 - x\} dx$.

Giải

Đặt $h(x) = 3^x - (4 - x) = 3^x + x - 4$.

Bảng xét dấu

x	0	1	2
h(x)	-	0	+

$$I = \int_0^1 3^x dx + \int_1^2 (4 - x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{\ln 3} + \frac{5}{2}.$$

Vậy $I = \frac{2}{\ln 3} + \frac{5}{2}$.

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1.1 Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ và trục hoành là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Phương pháp giải toán

Bước 1. Lập bảng xét dấu hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân $\int_a^b |f(x)| dx$.

VÍ DỤ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x$, $x = 1$, $x = e$ và Ox.

Giải

Do $\ln x \geq 0 \forall x \in [1; e]$ nên

$$S = \int_1^e |\ln x| dx = \int_1^e \ln x dx = x(\ln x - 1) \Big|_1^e = 1.$$

Vậy $S = 1$ (đvdt).

VÍ DỤ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = -x^2 + 4x - 3$, $x = 0$, $x = 3$ và Ox.

Giải

Bảng xét dấu

x	0	1	3
y		-	0
			+
			0

$$S = -\int_0^1 (-x^2 + 4x - 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = -\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) \Big|_1^3 = \frac{8}{3}. (\text{ĐVDT})$$

1.2. Diện tích hình phẳng**1.2.1. Trường hợp 1.**

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các

đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Phương pháp giải toán

Bước 1. Lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

1.2.2. Trường hợp 2.

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ là $S = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$. Trong đó α , β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ ($a \leq \alpha < \beta \leq b$).

Phương pháp giải toán

Bước 1. Giải phương trình $f(x) = g(x)$.

Bước 2. Lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[\alpha; \beta]$.

Bước 3. Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$.

VÍ DỤ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 11x - 6$, $y = 6x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

Giải

Đặt $h(x) = (x^3 + 11x - 6) - 6x^2 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$ (loại).

Bảng xét dấu

x	0	1	2
h(x)	–	0	+

$$S = -\int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx + \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx$$

$$= -\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\bigg|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\bigg|_1^2 = \frac{5}{2}.$$

Vậy $S = \frac{5}{2}$ (đvdt).

VÍ DỤ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 11x - 6$, $y = 6x^2$.

Giải

Đặt $h(x) = (x^3 + 11x - 6) - 6x^2 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3.$$

Bảng xét dấu

x	1	2	3
h(x)	0	+	–

$$S = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx - \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\bigg|_1^2 - \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\bigg|_2^3 = \frac{1}{2}.$$

Vậy $S = \frac{1}{2}$ (đvdt).

Chú ý: Nếu trong đoạn $[\alpha; \beta]$ phương trình $f(x) = g(x)$ không còn nghiệm nào nữa thì ta có thể dùng

$$\text{công thức } \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx \right|.$$

VÍ DỤ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3$, $y = 4x$.

Giải

Ta có $x^3 = 4x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$

$$\Rightarrow S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_0^2 \right| = 8.$$

Vậy $S = 8$ (đvdt).

VÍ DỤ 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 4|x| + 3$ và trục hoành.

Giải

Ta có $x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$, $t = |x| \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \int_{-3}^3 |x^2 - 4|x| + 3| dx = 2 \int_0^3 |x^2 - 4x + 3| dx = 2 \left[\left| \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx \right| + \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| \right] \\ &= 2 \left[\left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 \right| \right] = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $S = \frac{16}{3}$ (đvdt).

VÍ DỤ 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$|x^2 - 4x + 3| = x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-4x+3 = x+3 \\ x^2-4x+3 = -x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	0	1	3	5
x^2-4x+3	+	0	-	0

$$\Rightarrow S = \left| \int_0^1 (x^2-5x) dx + \int_1^3 (-x^2+3x-6) dx + \int_3^5 (x^2-5x) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 6x \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_3^5 \right| = \frac{109}{6}.$$

Vậy $S = \frac{109}{6}$ (đvdt).

VÍ DỤ 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = |x^2 - 1|$, $y = |x| + 5$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$|x^2 - 1| = |x| + 5 \Leftrightarrow |t^2 - 1| = t + 5, \quad t = |x| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = |x| \geq 0 \\ t^2 - 1 = t + 5 \\ t^2 - 1 = -t - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = |x| \geq 0 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\Rightarrow S = \int_{-3}^3 \left| |x^2 - 1| - (|x| + 5) \right| dx = 2 \int_0^3 \left| |x^2 - 1| - (x + 5) \right| dx$$

Bảng xét dấu

x	0	1	3
x^2-1	-	0	+

$$\Rightarrow S = 2 \left| \int_0^1 (-x^2 - x - 4) dx + \int_1^3 (x^2 - x - 6) dx \right|$$

$$= 2 \left| \left(\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x \right) \right|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right) \right|_1^3 = \frac{73}{3}.$$

Vậy $S = \frac{73}{3}$ (đvdt).

Chú ý:

Nếu hình phẳng được giới hạn từ 3 đường trở lên thì vẽ hình (tuy nhiên thi ĐH thì không có).

2. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

2.1. Trường hợp 1.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$, $y = 0$, $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) quay quanh trục Ox là $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

VÍ DỤ 9. Tính thể tích hình cầu do hình tròn $(C): x^2 + y^2 = R^2$ quay quanh Ox .

Giải

Hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^2 = R^2 \Leftrightarrow x = \pm R$.

Phương trình $(C): x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow y^2 = R^2 - x^2$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{4\pi R^3}{3} \text{ (đvtt)}$$

2. Trường hợp 2.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y) \geq 0 \forall y \in [c; d]$, $x = 0$, $y = c$ và $y = d$ ($c < d$) **quay quanh trục Oy** là $V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$.

VÍ DỤ 10. Tính thể tích hình khối do ellipse (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Oy.

Giải

Tung độ giao điểm của (E) và Oy là $\frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm b$.

Phương trình (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2}$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-b}^b \left(a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2} \right) dy = 2\pi \int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2} \right) dy$$

$$= 2\pi \left(a^2 y - \frac{a^2 y^3}{3b^2} \right) \Big|_0^b = \frac{4\pi a^2 b}{3}.$$

Vậy $V = \frac{4\pi a^2 b}{3}$ (đvtt).

3. Trường hợp 3.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ và $x = b$ ($a < b$, $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$) **quay quanh trục Ox** là $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

VÍ DỤ 11. Tính thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y^2 = x$ quay quanh Ox.

Giải

$$\text{Hoành độ giao điểm } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^1 |x^4 - x| dx = \pi \left| \int_0^1 (x^4 - x) dx \right|$$

$$= \pi \left| \left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^2 \right) \right|_0^1 = \frac{3\pi}{10}.$$

Vậy $V = \frac{3\pi}{10}$ (đvtt).

(ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)

Viết Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = 4 - 2e$.

B. $V = (4 - 2e)\pi$.

C. $V = e^2 - 5$.

D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Ta có $V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx = 4\pi I_1$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 2x + 1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x - 2 \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases} \Rightarrow I = (x^2 - 2x + 1) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx = -\frac{1}{2} - I_2$

Đặt $\begin{cases} u_1 = x - 1 \\ dv_1 = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases} \Rightarrow I_1 = (x-1) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{e^2}{4}$

Do vậy $I_1 = \frac{e^2 - 5}{4}$ suy ra $V = (e^2 - 5)\pi$. **Chọn D.**

4. Trường hợp 4.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ và

$y = d$ ($c < d$, $f(y) \geq 0, g(y) \geq 0 \forall y \in [c; d]$) quay quanh trục Oy là $V = \pi \int_c^d |f^2(y) - g^2(y)| dy$.

VÍ DỤ 12. Tính thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = -y^2 + 5$, $x = 3 - y$ quay quanh Oy.

Giải

Tung độ giao điểm $-y^2 + 5 = 3 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-1}^2 \left| (-y^2 + 5)^2 - (3 - y)^2 \right| dy$$

$$= \pi \left| \int_{-1}^2 (y^4 - 11y^2 + 6y + 16) dy \right| = \pi \left| \left(\frac{y^5}{5} - \frac{11y^3}{3} + 3y^2 + 16y \right) \right|_{-1}^2 = \frac{153\pi}{5}.$$

Vậy $V = \frac{153\pi}{5}$ (đvtt).

3. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Quãng đường đi được từ thời điểm a đến thời điểm b (Mối liên hệ quãng đường và vận tốc): $S = \pi \int_a^b v(t) dt$

Mối liên hệ giữa vận tốc v và gia tốc a : $v(t) = \int a(t) dt$

VÍ DỤ 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2 m. B. 5 m. C. 10 m. D. 20 m.

Giải:

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đạp phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T) = 0$

$$0 = -40T + 20$$

$$\Leftrightarrow T = 0,5.$$

Như vậy khoảng thời gian từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là 0.5s. Trong khoảng thời gian 0.5s đó, ô tô đi được quãng đường là:

$$S = \pi \int_0^{0.5} (20 - 40t) dt = 5(m)$$

Chọn đáp án B.

VÍ DỤ 2. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2(m/s^2)$.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4000}{3}$ m B. $\frac{4300}{3}$ m C. $\frac{1900}{3}$ m D. $\frac{2200}{3}$ m

Giải

$$v = \int (3t + t^2) dt = 3\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + c$$

Lấy mốc thời gian là lúc bắt đầu tăng tốc

$$v(0) = 10$$

Vận tốc tại thời điểm T

$$\Rightarrow v(T) = 3\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10$$

$\Rightarrow$ Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng:

$$S = \int_0^{10} (3\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10) dt = \frac{4300}{3} (m)$$

Chọn đáp án B

VÍ DỤ 4. Một đám vi trùng ngày thứ t có số lượng là N(t). Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250.000 con. Sau 10 ngày số lượng vi trùng là (lấy xấp xỉ hàng đơn vị):

- A. 264.334 con. B. 257.167 con. C. 258.959 con. D. 253.584 con.

Giải

Số vi trùng ở ngày thứ t

$$N(t) = \int \frac{4000}{1+0,5t} dt = 8000 \cdot \ln |1+0,5t| + C$$

Số vi trùng ở thời điểm ban đầu là 250.000

$$N(0) = 8000 \cdot \ln |1+0,5 \cdot 0| + C = 250000$$

$$\Leftrightarrow C = 250000$$

$$\Rightarrow \text{Số vi khuẩn sau 10 ngày là : } N(10) = 8000 \cdot \ln |1+0,5 \cdot 10| + 250000 = 264334 \text{ (con)}$$

Chọn đáp án A.

TRẮC NGHIỆM ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Câu 1: (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

B. $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$

D. $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

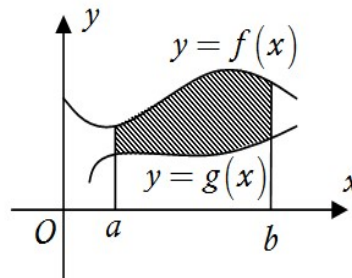
Câu 2. Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?

A. $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$

C. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$



Câu 3. Viết công thức tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x = a$, $x = b$ ($a < b$), có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$) là $S(x)$.

A. $V = \pi \int_a^b S(x) dx.$

B. $V = \pi \int_a^b |S(x)| dx.$

C. $V = \int_a^b S(x) dx.$

D. $V = \pi^2 \int_a^b S(x) dx.$

Câu 4. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Viết kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Câu 5. Thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{9 - x^2}$, bằng:

A. $V = 3$. B. $V = 18$. C. $V = 20$. D. $V = 22$.

Câu 6. Tính thể tích vật thể nằm giữa hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x \in [0; 2]$ là một phần tư đường tròn bán kính $\sqrt{2}x^2$, ta được kết quả nào sau đây?

A. $V = 32\pi$. B. $V = 64\pi$. C. $V = \frac{16}{5}\pi$. D. $V = 8\pi$.

Câu 7. Hình phẳng C giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, trục tung và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ tại điểm $(1; 2)$, khi quay quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng:

A. $V = \frac{4}{5}\pi$. B. $V = \frac{28}{15}\pi$. C. $V = \frac{8}{15}\pi$. D. $V = \pi$.

Câu 8. Khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$ và trục Ox sẽ có thể tích là:

A. $V = \frac{16\pi}{15}$. B. $V = \frac{11\pi}{15}$. C. $V = \frac{12\pi}{15}$. D. $V = \frac{4\pi}{15}$.

Câu 9. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = x$ khi quay quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng:

A. $V = \frac{\pi}{3}$. B. $V = \frac{\pi}{4}$. C. $V = \frac{\pi}{5}$. D. $V = \pi$.

Câu 10. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các parabol $y = 4 - x^2$ và $y = 2 + x^2$ quay quanh trục Ox là kết quả nào sau đây?

A. $V = 10\pi$. B. $V = 12\pi$. C. $V = 14\pi$. D. $V = 16\pi$.

Câu 11. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $4y = x^2$, $y = x$ qua quanh trục hoành bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{124\pi}{15}$. B. $V = \frac{126\pi}{15}$. C. $V = \frac{128\pi}{15}$. D. $V = \frac{131\pi}{15}$.

Câu 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ và $x = 4$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành nhận giá trị nào sau đây:

A. $V = \frac{41\pi}{3}$. B. $V = \frac{40\pi}{3}$. C. $V = \frac{38\pi}{3}$. D. $V = \frac{41\pi}{2}$.

Câu 13. Thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = \ln x$, trục Ox và đường thẳng $x = e$ là:

A. $V = \pi(e-2)$. B. $V = \pi(e-1)$. C. $V = \pi e$. D. $V = \pi(e+1)$.

Câu 14. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = -x+2$, $y = 0$ quay quanh trục Oy , có giá trị là kết quả nào sau đây?

A. $V = \frac{1}{3}\pi$. B. $V = \frac{3}{2}\pi$. C. $V = \frac{32}{15}\pi$. D. $V = \frac{11}{6}\pi$.

Câu 15. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1,2 + \frac{t^2+4}{t+3}$ (m/s). Quãng đường vật đó đi được trong 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. 18,82 m. B. 11,81 m. C. 4,06 m. D. 7,28 m.

Câu 16. Bạn Nam ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

A. 36 m. B. 252 m. C. 1134 m. D. 966 m.

Câu 17. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2 m. B. 2 m. C. 10 m. D. 20 m.

Câu 18. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s²). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4000}{3}$ m. B. $\frac{4300}{3}$ m. C. $\frac{1900}{3}$ m. D. $\frac{2200}{3}$ m.

Câu 19. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s²). Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

- A. 14 m/s. B. 13 m/s. C. 11 m/s. D. 12 m/s.

Câu 20. Một đám vi trùng ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250.000 con. Sau 10 ngày số lượng vi trùng là (lấy xấp xỉ hàng đơn vị):

- A. 264.334 con. B. 257.167 con. C. 258.959 con. D. 253.584 con.

Câu 21. Gọi $h(t)$ (cm) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

- A. 2,33 cm. B. 5,06 cm. C. 2,66 cm. D. 3,33 cm.

Câu 22. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. Nếu $w'(t)$ là tốc độ tăng trưởng cân nặng/năm của một đứa trẻ, thì $\int_5^{10} w'(t) dt$ là sự cân nặng của đứa trẻ giữa 5 và 10 tuổi.
- B. Nếu dầu rò rỉ từ một cái thùng với tốc độ $r(t)$ tính bằng galông/phút tại thời gian t , thì $\int_0^{120} r(t) dt$ biểu thị lượng galông dầu rò rỉ trong 2 giờ đầu tiên.
- C. Nếu $r(t)$ là tốc độ tiêu thụ dầu của thế giới, trong đó t được bằng năm, bắt đầu tại $t = 0$ vào ngày 1 tháng 1 năm 2000 và $r(t)$ được tính bằng thùng/năm, $\int_0^{17} r(t) dt$ biểu thị số lượng thùng dầu tiêu thụ từ ngày 1 tháng 1 năm 2000 đến ngày 1 tháng 1 năm 2017.
- D. Cả A, B, C đều đúng.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN	CÂU	ĐÁP ÁN
1	A	7	C	13	C	19	B
2	B	8	A	14	C	20	A
3	A	9	C	15	B	21	C
4	D	10	D	16	D	22	D
5	B	11	C	17	C		
6	C	12	B	18	B		

KỸ THUẬT 8: SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO**Các bạn chú ý:** Khi dùng casio cho nguyên hàm, tích phân. Nhớ phải chuyển hết sang Radian(  )**DẠNG:** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ **PHƯƠNG PHÁP:****Bước 1.** Tính $f(a)$ (Với a là 1 giá trị bất kỳ nằm trong TXĐ). **Chú ý:** Chọn a sao cho kết quả của $f(a)$ thật xấu.**Bước 2.** Tính $F'(a)$ của các đáp án.**Bước 3.** So sánh Bước 1 và Bước 2. Nếu giống nhau thì chọn.**VÍ DỤ .** (Trích đề minh họa 2017 BGD) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

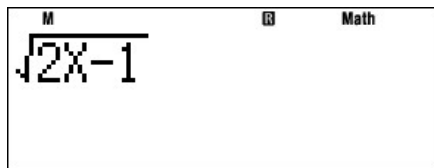
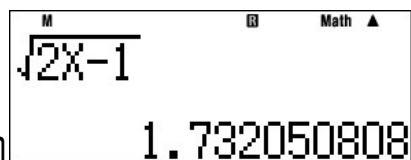
B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C.$

Giải

- **Bước 1.** Chọn $a = 2$

Tính $f(2)$. Nhập $f(x) = \sqrt{2x-1}$. 

- **Bước 2.**

Thử từng đáp án

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} \right) \Big|_{x=2}$$

3.464101615

Đáp án A.

=> Không giống Kết quả Bước 1 => LOẠI A

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} \right) \Big|_{x=2}$$

1.732050808

Đáp án B

(Giống kết quả bước 1)

⇒ Chọn B

VÍ DỤ Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - 3\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây:

A. $f(x) = \cos x + 3\sin x$

B. $f(x) = \frac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$

C. $f(x) = \frac{-\cos x - 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$

D. $f(x) = \frac{\sin x - 3\cos x}{\cos x + 3\sin x}$

$$\frac{d}{dx} (\ln(|\sin(X) - 3\cos(X)|)) \Big|_{x=1}$$

-3.931965581

- Bước 1:
- Bước 2: Thử từng đáp án

$$\cos(X) + 3\sin(X)$$

3.06471526

Đáp án A. (Ấn Calc x=1)

3.06471526

=> Không giống kết quả Bước 1. Loại A

$$\frac{\cos(X) + 3\sin(X)}{\sin(X) - 3\cos(X)}$$

-3.931965581

Đáp án B (Ấn Calc x=1)

-3.931965581

=> Giống kết quả Bước 1. **Chọn B**

Dạng: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ khi biết $F(x_0) = M$

Phương pháp: Ta nhập: $\int_A^{x_0} f(x).dx + F(A)$. Với A là 1 số bất kỳ thuộc tập xác định. Thử từng đáp án, đến khi ra Kết quả là M thì chọn đáp án đó.

VÍ DỤ : Tìm Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số: $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$. Biết $F(\frac{\pi}{4}) = -2$

A. $\tan x - \cot x - 2$

B. $-\tan x - \cot x$

C. $\tan x + \cot x - 4$

D. $\cot x - \tan x - 2$

Giải

- **Thử đáp án A:** Nhập vào máy tính $\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + (\tan A - \frac{1}{\tan A} - 2)$. Ấn, Calc X=1 (x giá trị gì cũng được); Calc A=1

$$\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2X)}{\sin(X)^2 \cos(X)^2} dx + \left(\tan(A) - \frac{1}{\tan(A)} - 2 \right)$$

CALC $\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2X)}{\sin(X)^2 \cos(X)^2} dx + \left(\tan(A) - \frac{1}{\tan(A)} - 2 \right)$

A? $\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2X)}{\sin(X)^2 \cos(X)^2} dx + \left(\tan(A) - \frac{1}{\tan(A)} - 2 \right)$

$\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2X)}{\sin(X)^2 \cos(X)^2} dx + \left(\tan(A) - \frac{1}{\tan(A)} - 2 \right)$
-0.8851845507

Không bằng -2 => Loại đáp án A

- **Thử đáp án B:**

$$\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2X)}{\sin(X)^2 \cos(X)^2} dx + \left(-\tan(A) - \frac{1}{\tan(A)} \right)$$

CALC $\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2X)}{\sin(X)^2 \cos(X)^2} dx + \left(-\tan(A) - \frac{1}{\tan(A)} \right)$

A? $\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2X)}{\sin(X)^2 \cos(X)^2} dx + \left(-\tan(A) - \frac{1}{\tan(A)} \right)$

$\int_A^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2X)}{\sin(X)^2 \cos(X)^2} dx + \left(-\tan(A) - \frac{1}{\tan(A)} \right)$
-2

Chọn đáp án B.

VÍ DỤ . Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$, $F(1) = \frac{1}{3}$

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x+1} - \frac{7}{6}$

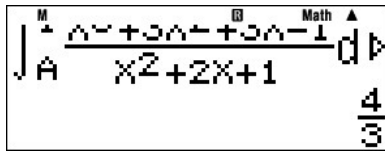
B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{2}{x+1} + \frac{13}{6}$

D. $F(x) = x + \frac{2}{x+1}$

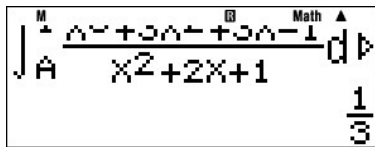
Giải

- Thử đáp án A: Nhập vào máy tính $\int_A \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx + \left(\frac{A^2}{2} + \frac{2}{A+1} - \frac{7}{6}\right)$. Ấn Calc A = 0 (A bất kỳ, các em có thể lấy số khác)



Không bằng $\frac{1}{3}$. **Loại đáp án A**

- Thử đáp án B: $\int_A \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx + \left(\frac{A^2}{2} + A + \frac{2}{A+1} - \frac{13}{6}\right)$. Ấn Calc A = 0 (A bất kỳ, các em có thể lấy số khác)



Chọn đáp án B

Dạng: Tích tích phân

Ấn nút  Nhập tích phân cần tính.

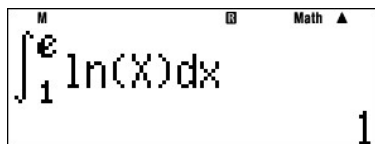
VÍ DỤ : Tính: $I = \int_1^e \ln x dx$

A. $I = 1$

B. $I = e$

C. $I = e - 1$

D. $I = 1 - e$



Nói chung thì cái này *Easy* rồi nhé ^^!

Dạng: Tìm a, b sao cho $\int_b^a f(x).dx = A$

VÍ DỤ . Tìm a sao cho $\int_2^a \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{2}$

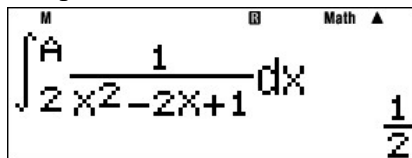
A. $a = 0$

B. $a = 3$

C. $a = 6$

D. $a = 4$

Nhập vào như màn hình. Ấn Calc thay từng giá trị các đáp án. Thấy Calc A = 3 thỏa mãn.



Chọn B

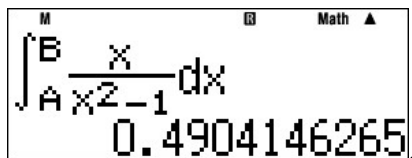
VÍ DỤ . Tìm a và b sao cho $\int_a^b \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$

A. $a = 3; b = 2$

B. $a = 2; b = 3$

C. $a = 1; b = 3$

D. $a = 0; b = 1$



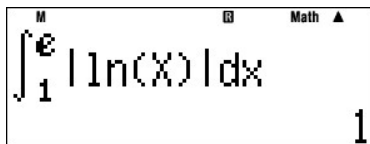
Ấn Calc A = 2; B = 3. Ta thấy kết quả = $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$. **Chọn B.**

DẠNG: TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCHNhập trị tuyệt đối trong máy tính:  

$$\text{Cú pháp: } S = \int_a^b |f(x)| dx \quad S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad V = \pi \int_a^b |f_1^2(x) - f_2^2(x)| dx$$

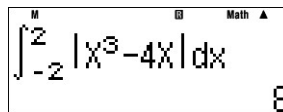
VÍ DỤ . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x$, $x = 1$, $x = e$ và Ox.**Giải**



VÍ DỤ . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3$, $y = 4x$.**Giải**

Ta có $x^3 = 4x \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$

Lấy giá trị cận là lớn nhất và bé nhất

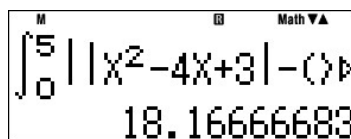


VÍ DỤ . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$.**Giải**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$|x^2 - 4x + 3| = x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 = -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

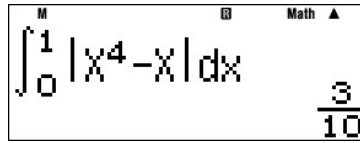


VÍ DỤ : Tính thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y^2 = x$ quay quanh Ox.

Giải

Hoành độ giao điểm $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^1 |x^4 - x| dx = \frac{3\pi}{10}$$

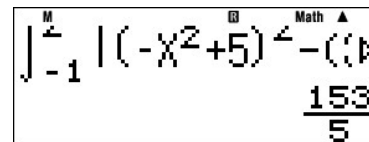


VÍ DỤ . Tính thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = -y^2 + 5$, $x = 3 - y$ quay quanh Oy.

Giải

Tung độ giao điểm $-y^2 + 5 = 3 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-1}^2 \left| (-y^2 + 5)^2 - (3 - y)^2 \right| dy = \frac{153\pi}{5}$$



Dạng: mối liên hệ giữa a, b, c...

VÍ DỤ : Nguyên hàm của hàm số: $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là: $a.e^x + b \tan x + C$. Tính a+b

A.2

B.3

C.4

D.5

Lấy 2 cận bất kỳ (Giả sử lấy 0 và 1)

Ta lưu KQ vào biến A. SHIFT RCL (←)

Ta có

$$\begin{cases} a.e^1 + b \tan 1 - (a.e^0 + b \tan 0) = A \\ a + b = \text{CacDapAn} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.(e^1 - e^0) + b(\tan 1 - \tan 0) = A \\ a + b = \text{CacDapAn} \end{cases}$$

- Thử đáp án A: $\begin{cases} a.(e^1 - e^0) + b(\tan 1 - \tan 0) = A \\ a + b = 2 \end{cases}$

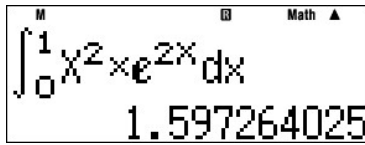
Nghiệm Lẻ $\Rightarrow$ Loại đáp án A

- Thử đáp án B: $\begin{cases} a.(e^1 - e^0) + b(\tan 1 - \tan 0) = A \\ a + b = 3 \end{cases}$

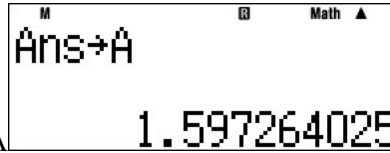
$\Rightarrow$ Số đẹp. Chọn Đáp án B

VÍ DỤ : $K = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^2 - a}{b}$. Tính $a+2b$

- A. 2 B. 3 C. 9 D. 1

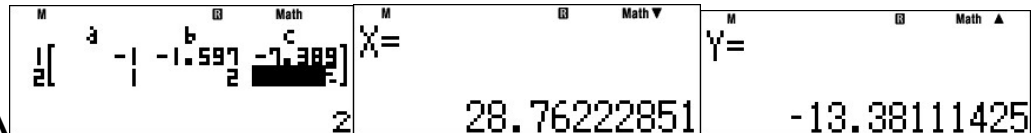


Lưu vào biến A



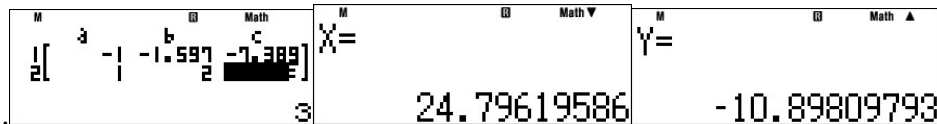
Ta có $\frac{e^2 - a}{b} = A \Leftrightarrow -a - Ab = -e^2$

Ta giải hệ sau để tìm a và b.
$$\begin{cases} -a - Ab = -e^2 \\ a + 2b = \text{CacDapAn} \end{cases}$$



- Thử đáp án A

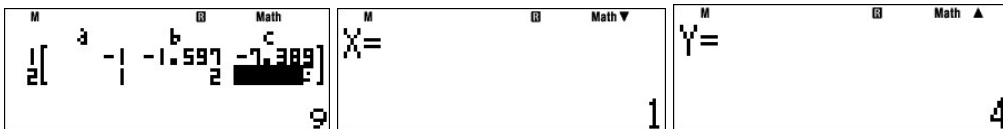
Số xấu => Loại A



- Thử đáp án B

Số xấu => Loại B

- Thử đáp án C.



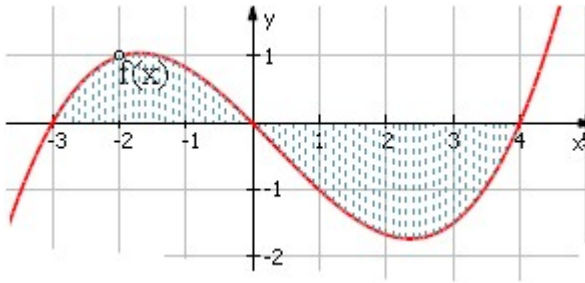
=> Số đẹp. Chọn C

PHỤ LỤC:**A. ĐỀ TỔNG HỢP NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN**

Câu 1 : Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$

- A. $\frac{x^2 - x - 1}{x+1}$ B. $\frac{x^2 + x - 1}{x+1}$ C. $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ D. $\frac{x^2}{x+1}$

Câu 2 : Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần gạch trong hình) là:



- A. $\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx$ B. $\int_{-3}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$
 C. $\int_0^{-3} f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx$ D. $\int_{-3}^4 f(x)dx$

Câu 3 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + x$ có kết quả là:

- A. 12 B. $\frac{10}{3}$ C. 9 D. 6

Câu 4 : Kết quả nào sai trong các kết quả sau?

- A. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \frac{1}{5 \cdot 2^x \cdot \ln 2} + \frac{2}{5^x \cdot \ln 5} + C$ B. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$
 C. $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - x + C$ D. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$

Câu 5 : Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các

đường $y = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ quanh trục ox là:

- A. $\pi(e^2 + e)$ B. $\pi(e^2 - e)$ C. πe^2 D. πe

Câu 6 : Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ quanh trục ox là:

- A. 6π B. 4π C. 12π D. 8π

Câu 7 : Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \tan x)^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ bằng:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 8 : Nếu $\int_a^d f(x)dx = 5$; $\int_b^d f(x)dx = 2$, với $a < d < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng:

- A. -2 B. 3 C. 8 D. 0

Câu 9 : Hàm số $f(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} t \ln t dt$ đạt cực đại tại $x = ?$

- A. $-\ln 2$ B. 0 C. $\ln 2$ D. $-\ln 4$

Câu 10 : Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cdot \sin x \cos^3 x dx$. Nếu đổi biến số $t = \sin^2 x$ thì

- A. $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt$ B. $I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right]$
C. $I = 2 \int_0^1 e^t (1-t) dt$ D. $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right]$

Câu 11 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ và đồ thị của hai hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$ là:

- A. $2 + \sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Câu 12 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$ là:

- A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. 16 D. $\frac{16}{3}$

Câu 13 : Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sin x$; $x = 0$; $y = 0$ và $x = \pi$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh Ox bằng

- A. 2π B. $\frac{\pi^2}{2}$ C. $\frac{\pi^2}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

Câu 14 : Cho tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$. Nếu đổi biến số $t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ thì

- A. $I = -\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2 - 1}$ B. $I = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2 + 1}$ C. $I = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t dt}{t^2 - 1}$ D. $I = \int_2^3 \frac{t dt}{t^2 + 1}$

Câu 15 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{x^2+1}$ và trục ox và đường thẳng $x=1$ là:

- A. $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ D. $\frac{3-\sqrt{2}}{3}$

Câu 16 : Tìm nguyên hàm: $\int (\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x}) dx$

- A. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$ B. $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$
C. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 4\ln|x| + C$ D. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$

Câu 17 : Tích phân $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx$ bằng:

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 0

Câu 18 : Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$

- A. $\frac{x^2 - x - 1}{x+1}$ B. $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ C. $\frac{x^2}{x+1}$ D. $\frac{x^2 + x - 1}{x+1}$

Câu 19 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A(1;2) và B(4;5) có kết quả dạng $\frac{a}{b}$ khi đó: a+b bằng

- A. 12 B. $\frac{13}{12}$ C. 13 D. $\frac{4}{5}$

Câu 20 : Giá trị của tích phân $I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$ là:

- A. $\frac{2 \ln 2 + 6}{9}$ B. $\frac{6 \ln 2 + 2}{9}$ C. $\frac{2 \ln 2 - 6}{9}$ D. $\frac{6 \ln 2 - 2}{9}$

Câu 21 : Kết quả của $\int \frac{x}{1-x^2} dx$ là:

- A. $\sqrt{1-x^2} + C$ B. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + C$ C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$ D. $-\sqrt{1-x^2} + C$

Câu 22 : Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - 3 \cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây:

- A. $f(x) = \frac{\cos x + 3 \sin x}{\sin x - 3 \cos x}$ B. $f(x) = \cos x + 3 \sin x$
C. $f(x) = \frac{-\cos x - 3 \sin x}{\sin x - 3 \cos x}$ D. $f(x) = \frac{\sin x - 3 \cos x}{\cos x + 3 \sin x}$

Câu 23 : Giá trị của tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx$ là:

A. $\frac{e^2 - 1}{2}$ B. $\frac{e^2 + 1}{2}$ C. $e^2 + 1$ D. e^2

Câu 24 : Giả sử $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin 2x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$, khi đó, giá trị của $a + b$ là:

A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $-\frac{3}{10}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 25 : Tìm nguyên hàm: $\int (x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}) dx$

A. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| + \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$ B. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln X - \frac{4}{3} \sqrt{x^3}$
C. $\frac{x^3}{3} - 3 \ln|x| - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$ D. $\frac{x^3}{3} + 3 \ln|x| - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$

Câu 26 : Tìm nguyên hàm: $\int \frac{1}{x(x+3)} dx$

A. $\frac{2}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$ B. $-\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$ C. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C$ D. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$

Câu 27 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y=2-x^2$, (C): $y=\sqrt{1-x^2}$ và Ox là:

A. $3\sqrt{2} - 2\pi$ B. $2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ C. $\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{2}$ D. $4\sqrt{2} - \pi$

Câu 28 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$; $y=\frac{x^2}{8}$; $y=\frac{27}{x}$ là:

A. $27 \ln 2 - 3$ B. $\frac{63}{8}$ C. $27 \ln 2$ D. $27 \ln 2 + 1$

Câu 29 : Tìm nguyên hàm: $\int (1 + \sin x)^2 dx$

A. $\frac{2}{3}x + 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$; B. $\frac{2}{3}x - 2 \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$;

C. $\frac{2}{3}x - 2\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

D. $\frac{2}{3}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

Câu 30 : Cho $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ và $u = x^2 - 1$. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $I = \int_1^2 \sqrt{u}du$

B. $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$

C. $I = \frac{2}{3}\sqrt{27}$

D. $I = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$

Câu 31 : Cho biết $\int_2^5 f(x)dx = 3$, $\int_2^5 g(t)dt = 9$. Giá trị của $A = \int_2^5 [f(x) + g(x)]dx$ là:

A. Chưa xác định được

B. 12

C. 3

D. 6

Câu 32 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là:

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{23}{15}$

Câu 33 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 4x - 6$ **trục hoành** và hai đường thẳng $x = -2$, $x = -4$ là

A. 12

B. $\frac{40}{3}$

C. $\frac{92}{3}$

D. $\frac{50}{3}$

Câu 34 : Giả sử rằng $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó, giá trị của $a + 2b$ là:

A. 30

B. 40

C. 50

D. 60

Câu 35 : Kết quả của $\int \ln x dx$ là:

A. $x \ln x + x + C$

B. Đáp án khác

C. $x \ln x + C$

D. $x \ln x - x + C$

Câu 36 : Tìm nguyên hàm: $\int (\frac{5}{x} + \sqrt{x^3}) dx$

A. $5 \ln |x| - \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$

B. $-5 \ln |x| + \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$

C. $-5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

D. $5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

Câu 37 : Tìm nguyên hàm: $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$.

A. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| + C$

B. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| + C$

C. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C$

D. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x}\right| + C$

Câu 38 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x^3$ và $y = x^5$ bằng:

A. -4

B. $\frac{1}{6}$

C. 0

D. 2

Câu 39 : Cho hai tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$, hãy chỉ ra khẳng định đúng:

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

B. Không so sánh được

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

Câu 40 : Cho hai tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$. Hãy chỉ ra khẳng định đúng:

A. $I > J$

B. $I = J$

C. $I < J$

D. Không so sánh được

Câu 41 : Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = 2xe^{x^2}$

B. $f(x) = e^{2x}$

C. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$

D. $f(x) = x^2 e^{x^2} - 1$

Câu 42 : Tính $\int 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$, kết quả sai là:

- A. $2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$ B. $2^{\sqrt{x}} + C$ C. $2^{\sqrt{x}+1} + C$ D. $2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$

Câu 43 : Cho tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}}$, với $\alpha > 1$ thì I bằng:

- A. $\frac{2}{\alpha}$ B. 2α C. 2 D. $\frac{\alpha}{2}$

Câu 44 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = |x^2 - 1|$, $y = |x| + 5$ có kết quả là

- A. $\frac{35}{12}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{73}{3}$ D. $\frac{73}{6}$

Câu 45 : Nếu $\int_a^d f(x)dx = 5$, $\int_b^d f(x)dx = 2$ với $a < d < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng

- A. -2 B. 0 C. 8 D. 3

Câu 46 : Kết quả nào sai trong các kết quả sau?

- A. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C$ B. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right| + C$
 C. $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \ln(\ln(\ln x)) + C$ D. $\int \frac{x dx}{3 - 2x^2} = -\frac{1}{4} \ln |3 - 2x^2| + C$

Câu 47 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$ là :

- A. Đáp án khác B. $\frac{37}{6}$ C. $\frac{33}{12}$ D. $\frac{37}{12}$

Câu 48 : Tìm nguyên hàm: $\int (x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x}) dx$

- A. $\frac{1}{4} x^4 + 2 \ln |x| - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$ B. $\frac{1}{4} x^4 - 2 \ln |x| - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

C. $\frac{1}{4}x^4 + 2\ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

D. $\frac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

Câu 49 : Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. π

B. $\frac{\pi}{6}$

C. 0

D. $-\pi$

Câu 50 : Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 2 - x$ quanh trục ox là:

A. $\frac{7\pi}{12}$

B. 6π

C. $\frac{35\pi}{12}$

D. $\frac{6\pi}{5}$

Câu 51 : Biến đổi $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx$ thành $\int_1^2 f(t)dt$, với $t = \sqrt{1+x}$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm số sau?

A. $f(t) = 2t^2 - 2t$

B. $f(t) = t^2 + t$

C. $f(t) = t^2 - t$

D. $f(t) = 2t^2 + 2t$

Câu 52 : Cho $I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$; $J = \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx$ và $K = \int_0^\pi e^x \cos 2x dx$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

(I) $I + J = e^\pi$

(II) $I - J = K$

(III) $K = \frac{e^\pi - 1}{5}$

A. Chỉ (II)

B. Chỉ (III)

C. Chỉ (I)

D. Chỉ (I) và (II)

Câu 53 : Hàm số $y = \tan^2 2x$ nhận hàm số nào dưới đây là nguyên hàm?

A. $2 \tan 2x + x$

B. $\frac{1}{2} \tan 2x - x$

C. $\tan 2x - x$

D. $\frac{1}{2} \tan 2x + x$

Câu 54 : Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = x^2; x = y^2$ quanh trục ox là

- A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{3\pi}{10}$ D. $\frac{\pi}{10}$

Câu 55 :

Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$. Khi đó n bằng:

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 5

Câu 56 : Tìm nguyên hàm: $\int (2 + e^{3x})^2 dx$

- A. $3x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$ B. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{5}{6}e^{6x} + C$
C. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{6x} + C$ D. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

Câu 57 :

Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln K$. Giá trị của K là:

- A. 3 B. 8 C. 81 D. 9

Câu 58 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 + 11x - 6$, $y = 6x^2$, $x = 0$, $x = 2$ có kết quả dạng $\frac{a}{b}$ khi đó $a-b$ bằng

- A. 2 B. -3 C. 3 D. 59

Câu 59 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và các tiếp tuyến với đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua $M(5/2;6)$ có kết quả dạng $\frac{a}{b}$ khi đó $a-b$ bằng

- A. $\frac{12}{11}$ B. 14 C. 5 D. -5

Câu 60 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C): $y = -x^2 + 3x - 2$, $d_1: y = x - 1$ và $d_2: y = -x + 2$ có kết quả là

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{6}$

Câu 61 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2; 5)$ và trục Oy là:

- A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

Câu 62 : Giá trị của $I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$ là:

- A. 1 B. $1 - \frac{2}{e}$ C. $\frac{2}{e}$ D. $2e - 1$

Câu 63 : Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, kết quả là:

- A. $\frac{C}{\sqrt{1-x}}$ B. $-2\sqrt{1-x} + C$ C. $\frac{2}{\sqrt{1-x}} + C$ D. $C\sqrt{1-x}$

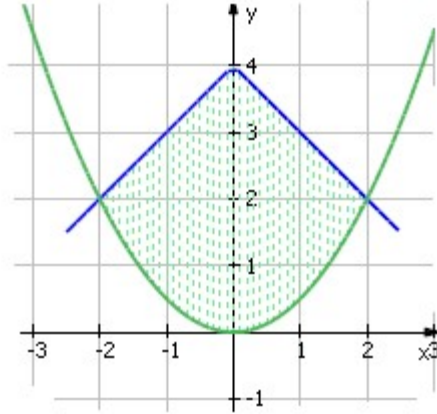
Câu 64 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = (e + 1)x$ và $y = (1 + e^x)x$ là:

- A. $2 - \frac{e}{2}$ B. 2 C. $\frac{e}{2} - 1$ D. $\frac{3}{e} - 1$

Câu 65 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -2x^2 + x + 3$ và trục hoành là:

- A. $\frac{125}{24}$ B. $\frac{125}{34}$ C. $\frac{125}{14}$ D. $\frac{125}{44}$

Câu 66 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = 4 - |x|$ và parabol $y = \frac{x^2}{2}$ bằng:



- A. $\frac{28}{3}$ B. $\frac{25}{3}$ C. $\frac{22}{3}$ D. $\frac{26}{3}$

Câu 67 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$ có kết quả là:

- A. $\frac{55}{6}$ B. $\frac{205}{6}$ C. $\frac{109}{6}$ D. $\frac{126}{5}$

Câu 68 : Tìm nguyên hàm: $\int (x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}) dx$

- A. $\frac{3}{2}x - 2 \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ B. $\frac{3}{2}x + 2 \sin x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$
 C. $\frac{3}{2}x + 2 \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ D. $\frac{3}{2}x + 2 \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Câu 69. Gọi $h(t)$ (cm) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5} \sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

- A. 2,33 cm. B. 5,06 cm. C. 2,66 cm. D. 3,33 cm.

Câu 70. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

- A. 0,2 m. B. 2 m. C. 10 m. D. 20 m.

ĐÁP ÁN ĐỀ TỔNG HỢP

01	B	28	C	55	A
02	A	29	D	56	D
03	C	30	A	57	A
04	A	31	B	58	C
05	C	32	A	59	C
06	C	33	C	60	C
07	A	34	B	61	D
08	B	35	D	62	B
09	A	36	D	63	B
10	A	37	D	64	C
11	D	38	B	65	A
12	B	39	D	66	A
13	B	40	B	67	C
14	A	41	A	68	D
15	C	42	B	69	C
16	D	43	A	70	C
17	B	44	C		
18	D	45	D		
19	C	46	A		
20	B	47	D		
21	D	48	D		
22	A	49	B		
23	B	50	C		
24	B	51	A		
25	D	52	A		
26	D	53	B		
27	C	54	C		

B .TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC 10 NĂM GẦN ĐÂY

Bài 1. (THPT QG 2016): Tính tích phân $I = \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2 + 16})dx$ **ĐS:** $I = 88$

Bài 2. (THPT QG 2015): Tính tích phân: $\int_0^1 (x-3)e^x dx$ **ĐS:** $I = 4-3e$

Bài 3. (ĐH A2014): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2 - x + 3$ và $y = 2x + 1$
ĐS: $I = 1/6$

Bài 4. (ĐH B2014) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx \quad \text{ĐS : } I = 1 + \ln 3$$

Bài 5. (ĐH D2014) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin 2x dx \quad \text{ĐS : } I = \frac{3}{4}$$

Bài 6. (ĐH A2013) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x \, dx \quad \text{ĐS : } I = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$$

Bài 7. (ĐH B2013) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 x\sqrt{2-x^2} dx \quad \text{ĐS : } I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Bài 8. (ĐH D2013) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} dx \quad \text{ĐS : } I = 1 + \ln 2$$

Bài 9. (ĐH A2012) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2$$

Bài 10. (ĐH B2012) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx.$$

$$\text{ĐS : } I = \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2$$

Bài 11. (ĐH D2012) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\pi/4} x(1 + \sin 2x) dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$$

Bài 12. (ĐH A2011) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{\pi}{4} + \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) \right)$$

Bài 13. (ĐH B2011) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$$

Bài 14. (ĐH D2011) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{34}{3} + 10 \ln \left(\frac{3}{5} \right)$$

Bài 15. (ĐH A2010) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{2e^x + 1} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}$$

Bài 16. (ĐH B2010) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$$

$$\text{ĐS : } I = -\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2}$$

Bài 17. (ĐH D2010) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{e^2}{2} - 1$$

Bài 18. (ĐH A2009) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$$

Bài 19. (ĐH B2009) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{1}{4} \left(3 + \ln \frac{27}{16}\right)$$

Bài 20. (ĐH D2009) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$$

$$\text{ĐS : } I = \ln(e^2 + e + 1) - 2$$

Bài 21. (ĐH A2008) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx.$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{10}{9\sqrt{3}}$$

Bài 22. (ĐH B2008) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4}) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}$$

Bài 23. (ĐH D2008) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{3 - 2 \ln 2}{16}$$

Bài 24. (ĐH A2007) : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = (e+1)x, \quad y = (1+e^x)x.$$

$$\text{ĐS : } S = \frac{e}{2} - 1$$

Bài 25. (ĐH B2007) : Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = x \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

$$\text{ĐS : } V = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27}$$

Bài 26. (ĐH D2007) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx.$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{5e^4 - 1}{32}$$

Bài 27. (ĐH A2006) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{2}{3}$$

Bài 28. (ĐH B2006) : Tính tích phân :

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}.$$

$$\text{ĐS : } I = \ln \frac{3}{2}$$

Bài 29. (ĐH D2006) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx.$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{5-3e^2}{4}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Giải tích 12 Nâng Cao (Nhà xuất bản giáo dục)
2. Sách Bài tập Giải tích 12 (Nhà xuất bản giáo dục)
3. Câu hỏi và bài tập trắc nghiệm Toán 12 – Nguyễn Phú Khánh – Huỳnh Đức Khánh. (Nhà xuất bản ĐHQG Hà Nội)
4. Tuyển tập các chuyên đề và kỹ thuật tính Tích Phân – Trần Phương (Nhà xuất bản ĐHQG Hà Nội)
5. Group Toán - <http://nhomtoan.net/>