

**NGỌC HUYỀN LB**  
(facebook.com/huyenvu2405)



**Một số vấn đề chọn lọc**  
**NGUYÊN HÀM**  
**TÍCH PHÂN**  
**VÀ ỨNG DỤNG**

*Đây là 1 tài liệu nhỏ chị viết gấp gáp để dành tặng cho các em nhân ngày Valentine 2017. Tuy CHƯA ĐẦY ĐỦ, nhưng chị tin nó cũng giúp ích cho em phần nào khó khăn trong quá trình ôn luyện!*

**NGỌC HUYỀN LB**

Tác giả “Bộ đề tinh túy Toán” & “Chắt lọc tinh túy toán”

*Đời phải trải qua giông tố nhưng không được cúi đầu trước giông tố!*

---

Đừng bao giờ bỏ cuộc Em nhé!  
Chị tin EM sẽ làm được!

\_\_Ngọc Huyền LB\_\_

---

Đã nói là làm – Đã làm là không hối hận – Đã làm là hết mình – Đã làm là không hối hận!

# Chủ đề: Nguyên hàm – tích phân và ứng dụng

## I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản.

Kí hiệu  $K$  là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng.

### Định nghĩa

Cho hàm số  $f$  xác định trên  $K$ . Hàm số  $F$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f$  trên  $K$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x$  thuộc  $K$ .

### Định lý 1

- Nếu  $F$  là một nguyên hàm của  $f$  trên  $K$  thì với mỗi hằng số  $C$ , hàm  $G(x) = F(x) + C$  cũng là một nguyên hàm của hàm  $f$  trên  $K$ .
- Đảo lại nếu  $F$  và  $G$  là hai nguyên hàm của hàm số  $f$  trên  $K$  thì tồn tại hằng số  $C$  sao cho  $F(x) = G(x) + C$ .

Kí hiệu:  $\int f(x)dx = F(x) + C$ .

Người ta chứng minh được rằng: “Mọi hàm số liên tục trên  $K$  đều có nguyên hàm trên  $K$ .”

### Tính chất của nguyên hàm

Định lý 2 sau đây cho ta một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

### Định lý 2

- Nếu  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $K$  thì
 
$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx \text{ với mọi số thực } a \text{ khác } 0.$$
- $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

**Bài toán tìm nguyên hàm là bài toán ngược với bài toán tìm đạo hàm. Việc tìm nguyên hàm của một hàm số thường được đưa về tìm nguyên hàm của một số hàm số đơn giản hơn. Dưới đây ta có bảng một số nguyên hàm :**

|                                                                                                         |                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int dx = x + C$                                                                                       | $\int (ax + b)dx = \frac{1}{a}(ax + b) + C, a \neq 0$                                                             |
| $\int (x + a)^\alpha dx = \frac{(x + a)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C (a \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$ | $\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \left( \frac{ax + b}{\alpha + 1} \right)^{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ |
| $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln x+a  + C$                                                                  | $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b  + C$                                                          |
| $\int e^x dx = e^x + C$                                                                                 | $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$                                                                     |
| $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, (a > 0, a \neq 1)$                                              | $\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \cdot \ln a} a^{px+q} + C, (a > 0, a \neq 1)$                                      |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$                                                                          | $\int \sin ax dx = \frac{-\cos ax}{a} + C, (a \neq 0)$                                                            |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$                                                                           | $\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C, (a \neq 0)$                                                             |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$                                                               | $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$                                                                        |

## II. Hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm.

### a, Phương pháp đổi biến số.

#### Định lý 3

Cho hàm số  $u = u(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $K$  và hàm số  $y = f(u)$  liên tục sao cho hàm hợp  $f[u(x)]$  xác định trên  $K$ . Khi đó nếu  $F$  là một nguyên hàm của  $f$  thì

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

**Ví dụ 1:** Tìm nguyên hàm  $\int (x-1)^{10} dx$ .

#### Lời giải

Theo định lý trên thì ta cần viết về dạng  $\int f(u)du$ .

Mà  $u' = (x-1)' = 1$ , do vậy

$$\int (x-1)^{10} dx = \int (x-1)^{10} \cdot (x-1)' dx = \int (x-1)^{10} d(x-1) = \frac{(x-1)^{11}}{11} + C.$$

Từ ví dụ trên ta có các bước gợi ý để xử lý bài toán tìm nguyên hàm theo phương pháp đổi biến

1. Đặt  $u = g(x)$ .
2. Biến đổi  $x$  và  $dx$  về  $u$  và  $du$ .
3. Giải bài toán dưới dạng nguyên hàm hàm hợp  $\int f(u)du$ , sau đó thay biến  $x$  vào nguyên hàm tìm được và kiểm tra lại kết quả.

Ta đến với ví dụ 2

**Ví dụ 2:** Tìm  $\int x^2 (1-x)^7 dx$ .

Ở bài toán này, ta thấy số mũ 7 khá cao mà lại có biểu thức trong ngoặc phức tạp hơn là  $x^2$ . Do vậy ta sẽ đặt  $(1-x)^7$  để đổi biến, dưới đây là lời giải áp dụng gợi ý các bước trên.

#### Lời giải

$$\text{Đặt } u = 1-x \Leftrightarrow du = (1-x)' dx \Leftrightarrow du = -dx$$

$$\begin{aligned} \text{ta có } \int x^2 (1-x)^7 dx &= \int (1-u)^2 \cdot u^7 (-1) du = -\int (u^7 - 2u^8 + u^9) du \\ &= -\frac{u^8}{8} + \frac{2u^9}{9} - \frac{u^{10}}{10} + C = -\frac{(1-x)^8}{8} + \frac{2(1-x)^9}{9} - \frac{(1-x)^{10}}{10} + C. \end{aligned}$$

### b, Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

#### Định lý 4

Nếu  $u$  và  $v$  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên  $K$  thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Công thức trên thường được viết gọn dưới dạng  $\int u dv = uv - \int v du$ .

#### STUDY TIP:

Với phương pháp đổi biến ta cần chú trọng công thức mà suy ra từ định lý như sau:

Nếu  $u = f(x)$ , khi đó  
 $du = f'(x)dx$

**Ví dụ 3:** Thầy Điệp Châu cho bài toán “Tìm  $\int \sin x \cos x dx$ ” thì ba bạn Huyền, Lê và Hằng có ba cách giải khác nhau như sau:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Bạn Huyền giải bằng phương pháp đổi biến số như sau:<br/>             “Đặt <math>u = \sin x</math>, ta có:<br/> <math>du = \cos x dx</math><br/>             Vậy <math>\int \sin x \cos x dx = \int u du</math><br/> <math>= \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C</math>”</p> | <p>Bạn Lê giải bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần như sau:<br/>             “Đặt <math>u = \cos x, v' = \sin x</math>.<br/>             Ta có <math>u' = -\sin x, v = -\cos x</math>.<br/>             Công thức nguyên hàm từng phần cho ta<br/> <math>\int \sin x \cos x dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x dx</math><br/>             Giả sử <math>F</math> là một nguyên hàm của <math>\sin x \cos x</math>. Theo đẳng thức trên ta có<br/> <math>F(x) = -\cos^2 x - F(x) + C</math>.<br/>             Suy ra <math>F(x) = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{C}{2}</math>.<br/>             Điều này chứng tỏ <math>-\frac{\cos^2 x}{2}</math> là một nguyên hàm của <math>\sin x \cos x</math>.<br/>             Vậy <math>\int \sin x \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C</math>.”</p> | <p>Bạn Hằng chưa học đến hai phương pháp trên nên làm như sau:<br/>             “<math>\int \sin x \cos x dx</math><br/> <math>= \int \frac{\sin 2x}{2} dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C</math>.”</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. Bạn Hằng giải đúng, bạn Lê và Huyền giải sai.
- B. Bạn Lê sai, Huyền và Hằng đúng.
- C. Ba bạn đều giải sai.
- D. Ba bạn đều giải đúng.

**Nhận xét:** Sau khi soát kỹ cả ba lời giải, ta thấy ba lời giải trên đều không sai ở bước nào cả, tuy nhiên, tại sao đến cuối cùng đáp án lại khác nhau? Ta xem giải thích ở lời giải sau:

#### Lời giải

Cả ba đáp số đều đúng, tức là cả ba hàm số  $\frac{\sin^2 x}{2}$ ;  $-\frac{\cos^2 x}{2}$  và  $-\frac{\cos 2x}{4}$  đều là nguyên hàm của  $\sin x \cos x$  do chúng chỉ khác nhau về một hằng số. Thật vậy

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \left( -\frac{\cos^2 x}{2} \right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \left( -\frac{\cos 2x}{4} \right) = \frac{2\sin^2 x + (1 - 2\sin^2 x)}{4} = \frac{1}{4}. \square$$

### III. Khái niệm và các tính chất cơ bản của tích phân.

#### a. Định nghĩa

Cho hàm số  $f$  liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là hai số bất kỳ thuộc  $K$ . Tích phân của  $f$  từ  $a$  đến  $b$ , kí hiệu là  $\int_a^b f(x) dx$ , là một số xác định bởi công thức sau

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ trong đó } F \text{ là nguyên hàm của } f \text{ trên } K.$$

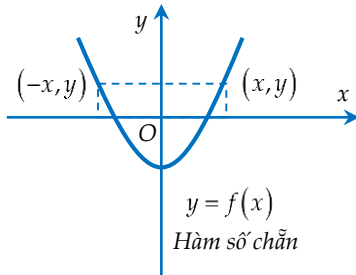
#### b. Các tính chất của tích phân.

##### Định lý 1

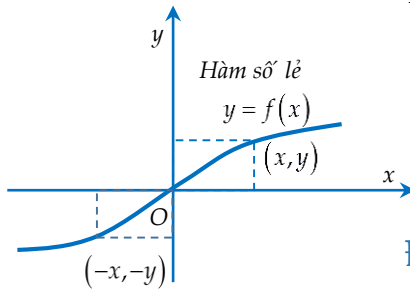
Giả sử các hàm số  $f, g$  liên tục trên  $K$  và  $a, b, c$  là ba số bất kỳ thuộc  $K$ . Khi đó ta có

#### STUDY TIP:

Bài toán củng cố về định lý 1 đã nêu ở trên, và củng cố các cách giải nguyên hàm cơ bản.



Hình 3.1



Hình 3.2

1.  $\int_a^a f(x)dx = 0$ .
2.  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .
3.  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ .
4.  $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ .
5.  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, (k \in \mathbb{R})$ .

### Định lý 2

Cho  $f$  là hàm số xác định trên  $K$  và  $a$  là một điểm cố định thuộc  $K$ . Xét hàm số  $G(x)$  xác định trên  $K$  bởi công thức

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Khi đó  $G$  là một nguyên hàm của  $f$ .

### Định lý 3

Tích phân của hàm lẻ và hàm chẵn trên  $\mathbb{R}$ .

1. Nếu  $f$  là một hàm số chẵn, khi đó  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ .
2. Nếu  $f$  là một hàm số lẻ, khi đó  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ .

### Độc thêm

Ta vừa đưa ra 3 tính chất của tích phân theo chương trình chuẩn. Dưới đây là các tính chất bổ sung:

1.  $\int_a^b 0dx = 0$
2.  $\int_a^b cdx = c(b-a)$
3. Nếu  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  thì  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

Hệ quả 3: Nếu hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục và thỏa mãn

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Chú ý: Nếu  $f(x)$  liên tục và dương trên  $[a, b]$  thì  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .

$$4. \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)dx|, (a \leq b).$$

5. Nếu  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]; m, M$  là các hằng số thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \text{ hay } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

## IV. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân.

### a. Phương pháp đổi biến số.

#### Quy tắc đổi biến số

1. Đặt  $u = u(x)$ ,
2. Biến đổi  $f(x)dx = g(u)du$ .
3. Tìm một nguyên hàm  $G(u)$  của  $g(u)$ .
4. Tính  $\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du = G(u(b)) - G(u(a))$ .
5. Kết luận  $\int_a^b f(x)dx = G(u(b)) - G(u(a))$ .

### b. Phương pháp tích phân từng phần.

Cho hai hàm số  $u, v$  có đạo hàm liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là hai số thuộc  $K$ . Khi đó

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x).v(x)dx.$$

## IV. Ứng dụng hình học của tích phân.

### a. Tính diện tích hình phẳng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành.

Diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $f(x)$  liên tục, trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  được tính theo công thức  $S = \int_a^b |f(x)|dx$ .

**Chú ý:** Trong trường hợp dấu của  $f(x)$  thay đổi trên đoạn  $[a; b]$  thì ta phải chia đoạn  $[a; b]$  thành một số đoạn con để trên đó dấu của  $f(x)$  không đổi, do đó ta có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối trên đoạn đó.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong.

Cho hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  và hai đường

thẳng  $x = a, x = b$  là  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ .

Tương tự như chú ý ở trên thì ở bài toán này ta cũng phải xét đoạn mà dấu của  $f(x) - g(x)$  không đổi.

**Ví dụ 4:** Tính diện tích hình phẳng (hình được tô màu) ở biểu diễn ở hình 3.4.

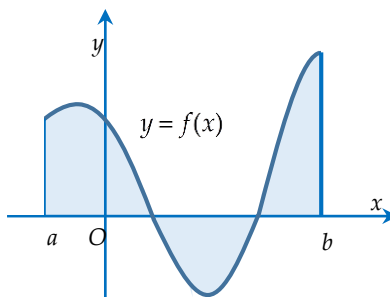
#### Lời giải

Nhận thấy trên  $[a; c]$  và  $[d; b]$  thì  $f_1(x) \geq f_2(x)$ ; trên  $[c; d]$  thì  $f_1(x) \leq f_2(x)$

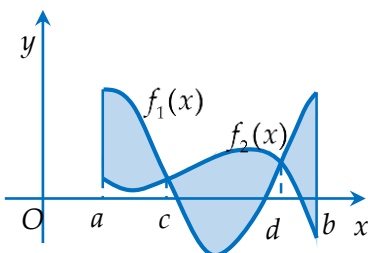
Do vậy

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| = \int_a^c (f_1(x) - f_2(x))dx + \int_c^d (f_2(x) - f_1(x))dx + \int_d^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

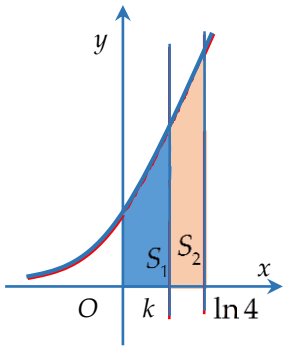
(Trên đây là cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối)



Hình 3.3



Hình 3.4



**Ví dụ 5:** Cho hình thang cong  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  và  $x = \ln 4$ . Đường thẳng  $x = k$  ( $0 < k < \ln 4$ ) chia  $(H)$  thành hai phần có diện tích là  $S_1$  và  $S_2$  như hình vẽ bên.  
Tìm  $k$  để  $S_1 = 2S_2$ .

A.  $k = \frac{2}{3} \ln 4$

B.  $k = \ln 2$

C.  $k = \ln \frac{8}{3}$

D.  $k = \ln 3$

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – Bộ GD&ĐT)

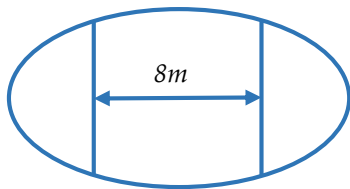
Lời giải

**Đáp án D.**

Nhìn vào hình vẽ ta có được các công thức sau:

$$\int_0^k e^x dx = 2 \cdot \int_k^{\ln 4} e^x dx \Leftrightarrow e^x \Big|_0^k = 2 \cdot e^x \Big|_k^{\ln 4} \Leftrightarrow e^k - e^0 = 2 \cdot e^{\ln 4} - 2 \cdot e^k \Leftrightarrow 3e^k = 9$$

$$\Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3.$$



**Ví dụ 6:** Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1 m<sup>2</sup>. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

A. 7.862.000 đồng.

B. 7.653.000 đồng.

C. 7.128.000 đồng.

D. 7.826.000 đồng.

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – Bộ GD&ĐT)

Lời giải

**Đáp án B.**

Nhận thấy đây là bài toán áp dụng ứng dụng của tích phân vào tính diện tích hình phẳng. Ta có hình vẽ bên:

Ta thấy, diện tích hình phẳng cần tìm gấp 4 lần diện tích phần gạch chéo, do đó ta chỉ cần đi tìm diện tích phần gạch chéo.

Ta có phương trình đường elip đã cho là  $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ . Xét trên  $[0; 4]$  nên  $y > 0$

thì  $y = \frac{5}{8} \sqrt{8^2 - x^2}$ . Khi đó  $S_{\text{chéo}} = \int_0^4 \frac{5}{8} \sqrt{8^2 - x^2} dx$ , vậy diện tích trồng hoa của ông

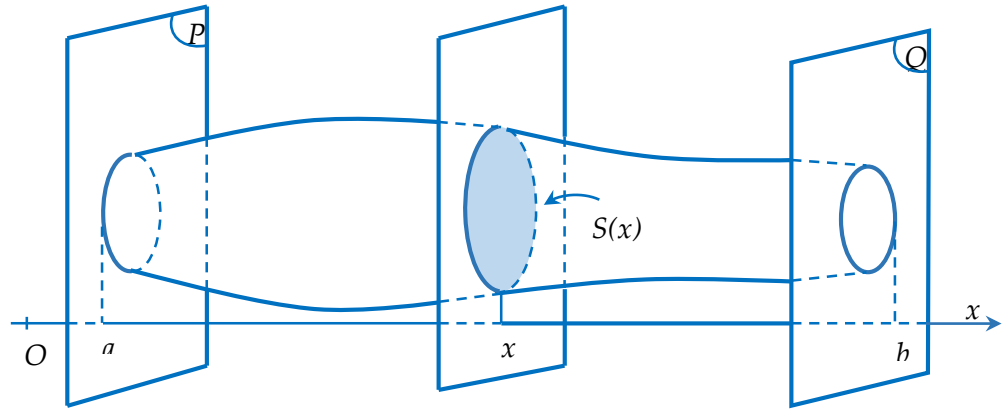
An trên mảnh đất là  $S = 4 \cdot \int_0^4 \frac{5}{8} \sqrt{8^2 - x^2} dx \approx 76,5289182$

Khi đó số kinh phí phải trả của ông An là 76,5289182.100000  $\approx$  7.653.000 đồng.

**b. Tính thể tích vật thể.**

Cho  $H$  là một vật thể nằm giới hạn giữa hai mặt phẳng  $x = a$  và  $x = b$ . Gọi  $S(x)$  là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ). Giả sử  $S(x)$  là một hàm liên tục. Khi đó thể

tích  $V$  của  $H$  là  $V = \int_a^b S(x) dx$ . (hình 3.5)



Hình 3.5



Hình 3.6

**Ví dụ 7:** Tính thể tích vật thể tạo được khi lấy giao vuông góc hai ống nước hình trụ có cùng bán kính đáy bằng  $a$ . ( hình 3.6)

A.  $V = \frac{16a^3}{3}$

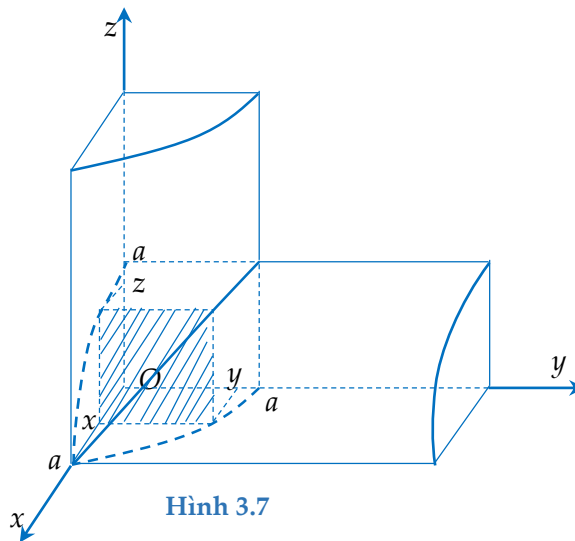
B.  $V = \frac{2a^3}{3}$

C.  $V = \frac{4a^3}{3}$

D.  $V = a^3$

(Trích sách bộ đề tỉnh túy ôn thi THPT QG môn Toán)

Ta sẽ gắn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  vào vật thể này, tức là ta sẽ đi tính thể tích vật thể  $V$  giới hạn bởi hai mặt trụ:  $x^2 + y^2 = a^2$  và  $x^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ).



Hình 3.7

Hình vẽ trên mô tả một phần tám thứ nhất của vật thể này, với mỗi  $x \in [0; a]$ , thiết diện của vật thể (vuông góc với trục  $Ox$ ) tại  $x$  là một hình vuông có cạnh  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  ( chính là phần gạch chéo trong hình 3.7). Do đó diện tích thiết diện sẽ là:

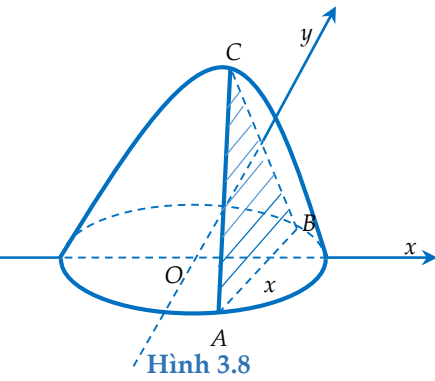
$$S(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 - x^2 \quad x \in [0; a].$$

Khi đó áp dụng công thức (\*) thì thể tích vật thể cần tìm sẽ bằng:

$$V = 8 \int_0^a S(x) dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 8 \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16a^3}{3}.$$

**Ví dụ 8:** Tính thể tích của vật thể  $H$  biết rằng đáy của  $H$  là hình tròn  $x^2 + y^2 \leq 1$  và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành luôn là tam giác đều.

Lời giải



Hình 3.8

Giả sử mặt phẳng vuông góc với trục hoành chứa thiết diện là tam giác đều  $ABC$  tại điểm có hoành độ là  $x$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) với  $AB$  chứa trong mặt phẳng  $xOy$  (hình 3.8).

Ta có  $AB = 2\sqrt{1-x^2}$ . Do đó  $S(x) = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1-x^2)$ . Vậy

$$V = \int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-x^2) dx = \sqrt{3} \left( x - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (đvtt)}.$$

### c. Tính thể tích khối tròn xoay.

Một hình phẳng quay quanh một trục nào đó tạo nên một khối tròn xoay.

#### Định lý 4

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên đoạn  $[a, b]$ . Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích  $V$  của khối tròn xoay đó

$$\text{là } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Ví dụ 9:** Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong  $y = \sin x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0, x = \pi$  (hình 3.10) quanh trục  $Ox$  là

- A.  $\frac{\pi}{2}$  (đvtt)      B.  $\frac{\pi^2}{2}$  (đvtt)      C.  $\pi$  (đvtt)      D.  $\pi^2$  (đvtt)

#### Lời giải

#### Đáp án B.

Áp dụng công thức ở định lý 4 ta có

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Tiếp theo dưới đây là một bài toán thường xuất hiện trong các đề thi thử, bài toán có thể đưa về dạng quen thuộc và tính toán rất nhanh

**Ví dụ 10:** Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong  $y = \sqrt{A^2 - x^2}$  và trục hoành quanh trục hoành.

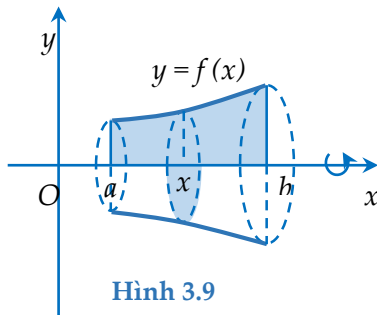
#### Lời giải tổng quát

$$\text{Ta thấy } y = \sqrt{A^2 - x^2} \Leftrightarrow y^2 = A^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

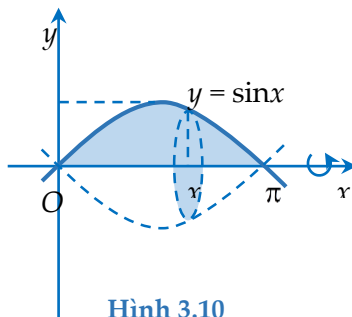
Do  $\sqrt{A^2 - x^2} \geq 0$  với mọi  $x$ , do vậy đây là phương trình nửa đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R = A$  nằm phía trên trục  $Ox$ . Khi quay quanh trục  $Ox$  thì hình phẳng sẽ tạo nên một khối cầu tâm  $O$ , bán kính  $R = A$  (hình 3.11). Do vậy ta có luôn

$$V = \frac{4}{3} \pi A^3$$

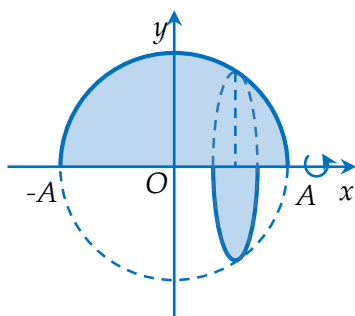
Vậy với bài toán dạng này, ta không cần viết công thức tích phân mà kết luận luôn theo công thức tính thể tích khối cầu.



Hình 3.9



Hình 3.10



Hình 3.11

## Đọc thêm

### Định lý 5

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên đoạn  $[a, b]$  ( $a \geq 0$ ). Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích  $V$  của

khối tròn xoay đó là  $V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$ .

## Bài tập rèn luyện kỹ năng

### 1. Nguyên hàm – chọn lọc các bài tập về nguyên hàm trong các đề thi thử

**Câu 1:** Tìm nguyên hàm  $I = \int (2x-1)e^{-x} dx$ .

- A.  $I = -(2x+1)e^{-x} + C$     B.  $I = -(2x-1)e^{-x} + C$   
 C.  $I = -(2x+3)e^{-x} + C$     D.  $I = -(2x-3)e^{-x} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – Hà Nội)

**Câu 2:** Tìm nguyên hàm  $I = \int x \ln(2x-1) dx$ .

- A.  $I = \frac{4x^2-1}{8} \ln|2x-1| + \frac{x(x+1)}{4} + C$   
 B.  $I = \frac{4x^2+1}{8} \ln|2x-1| + \frac{x(x+1)}{4} + C$   
 C.  $I = \frac{4x^2-1}{8} \ln|2x-1| - \frac{x(x+1)}{4} + C$   
 D.  $I = \frac{4x^2+1}{8} \ln|2x-1| - \frac{x(x+1)}{4} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – Hà Nội)

**Câu 3:** Tìm nguyên hàm  $I = \int (x-1) \sin 2x dx$ .

- A.  $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$   
 B.  $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$   
 C.  $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$   
 D.  $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – Hà Nội)

**Câu 4:** Cho  $f(x), g(x)$  là các hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau?

- A.  $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$  với  $k$  là hằng số  
 B.  $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$   
 C.  $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$   
 D.  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Kim Thành – Hải Dương)

**Câu 5:** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{-2017x}$  là:

- A.  $\frac{1}{2017} e^{-2017x} + C$     B.  $e^{-2017x} + C$   
 C.  $-2017 \cdot e^{-2017x} + C$     D.  $\frac{-1}{2017} e^{-2017x} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

**Câu 6:** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số

$$f(x) = \frac{4}{\cos^2 3x} \text{ biết } F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \sqrt{3}.$$

- A.  $F(x) = \frac{4}{3} \tan 3x - \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 B.  $F(x) = 4 \tan 3x - 3\sqrt{3}$   
 C.  $F(x) = \frac{4}{3} \tan 3x + \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 D.  $F(x) = -\frac{4}{3} \tan 3x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

**Câu 7:** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x\sqrt{x}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$   
 B.  $\int f(x) dx = \frac{2}{5} x \sqrt{x} + C$   
 C.  $\int f(x) dx = \frac{1}{5} x^2 \sqrt{x} + C$   
 D.  $\int f(x) dx = \frac{3}{2} \sqrt{x} + C$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh lần 2)

**Câu 8:**  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$  bằng:

- A.  $2(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$     B.  $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} + C$   
 C.  $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} + C$     D.  $\frac{3}{2} \sqrt{(\ln x)^3} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

**Câu 9:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ . Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  và đồ thị hàm số

$y = F(x)$  đi qua  $M\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$  thì  $F(x)$  là:

- A.  $\frac{1}{\sqrt{3}} - \cot x$     B.  $\sqrt{3} - \cot x$   
 C.  $\frac{\sqrt{3}}{3} - \cot x$     D.  $-\cot x + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

**Câu 10:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ . Hãy chọn mệnh đề sai:

- A.  $\int \frac{1}{x+2} dx = \ln(x+2) + C$   
 B.  $\ln(3|x+2|)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$   
 C.  $\ln|x+2| + C$  là họ nguyên hàm của  $f(x)$   
 D.  $\ln|x+2|$  là một nguyên hàm của  $f(x)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

**Câu 11:**  $\int xe^{x^2+1} dx$  bằng:

- A.  $2e^{x^2+1} + C$  B.  $e^{x^2+1} + C$   
 C.  $x^2e^{x^2+1} + C$  D.  $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

**Câu 12:**  $\int \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$  bằng:

- A.  $-(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$  B.  $(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C$   
 C.  $-(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C$  D.  $(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

**Câu 13:** Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = (2x-3)^2.$$

- A.  $\int f(x) dx = \frac{(2x-3)^3}{3} + C$   
 B.  $\int f(x) dx = (2x-3)^3 + C$   
 C.  $\int f(x) dx = \frac{(2x-3)^3}{6} + C$   
 D.  $\int f(x) dx = \frac{(2x-3)^3}{2} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

**Câu 14:** Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = 3\sin 3x - \cos 3x.$$

- A.  $\int f(x) dx = \cos 3x - \sin 3x + C$   
 B.  $\int f(x) dx = \cos 3x + \sin 3x + C$   
 C.  $\int f(x) dx = -\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x + C$   
 D.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

**Câu 15:** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x - e^{-x}$ .

- A.  $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C$   
 B.  $\int f(x) dx = -e^x + e^{-x} + C$   
 C.  $\int f(x) dx = e^x - e^{-x} + C$   
 D.  $\int f(x) dx = -e^x - e^{-x} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

**Câu 16:** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số

$$f(x) = \sqrt{3x+4}, \text{ biết } F(0) = 8.$$

- A.  $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3x+4} + \frac{38}{3}$   
 B.  $F(x) = \frac{2}{3}(3x+4)\sqrt{3x+4} + \frac{16}{3}$   
 C.  $F(x) = \frac{2}{9}(3x+4)\sqrt{3x+4} + \frac{56}{9}$   
 D.  $F(x) = \frac{2}{3}(3x+4)\sqrt{3x+4} + \frac{8}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

**Câu 17:** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{3x^4}{2x^4+6} + C$   
 B.  $\int f(x) dx = \ln(x^4+1) + C$   
 C.  $\int f(x) dx = x^3 \ln(x^4+1) + C$   
 D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

**Câu 18:** Tính nguyên hàm  $\int (2x-1)e^{3x} dx$ .

- A.  $\int (2x-1)e^{3x} dx = \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C$   
 B.  $\int (2x-1)e^{3x} dx = \frac{(2x-1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{3} + C$   
 C.  $\int (2x-1)e^{3x} dx = \frac{1}{3}(x^2-x)e^{3x} + C$   
 D.  $\int (2x-1)e^{3x} dx = (x^2-x)e^{3x} + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

**Câu 19:** Tìm nguyên hàm  $I = \int \frac{1}{4-x^2} dx$ .

- A.  $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$  B.  $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$   
 C.  $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$  D.  $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – Hà Nội)

**Câu 20:** Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm

của hàm số  $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$ .

- A.  $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$  B.  $F(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$   
 C.  $F(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1}$  D.  $F(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

**Câu 21:**  $\int \frac{1}{x^2-x-2} dx$  bằng:

- A.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| + C$       B.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$   
 C.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$       D.  $\ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

**Câu 22:** Hàm số  $F(x) = e^{\ln(2x)} (x > 0)$  là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

- A.  $f(x) = \frac{e^{\ln(2x)}}{x}$       B.  $f(x) = e^{\ln(2x)}$   
 C.  $f(x) = \frac{e^{\ln(2x)}}{2x}$       D.  $f(x) = 2e^{\ln(2x)}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

**Câu 23:** Nguyên hàm của hàm số:  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4}$  là:

- A.  $F(x) = \sqrt{2x+1} - 4 \ln(\sqrt{2x+1}+4) + C$   
 B.  $F(x) = \sqrt{2x-1} - 4 \ln(\sqrt{2x-1}+4) + C$   
 C.  $F(x) = \sqrt{2x-1} - \frac{7}{2} \ln(\sqrt{2x-1}+4) + C$   
 D.  $F(x) = \sqrt{2x-1} + 4 \ln(\sqrt{2x+1}+4) + C$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

## 2. Tích phân – chọn lọc các bài tập về tích phân trong các đề thi thử.

**Câu 1:** Biết tích phân  $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$

( $a \in \mathbb{Q}; b \in \mathbb{Q}$ ). Khi đó tích  $a.b$  có giá trị bằng:

- A. 1      B. -1      C. 2      D. 3

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

**Câu 2:** Biết  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $f(x)$  là hàm số lẻ. Khi đó

$I = \int_{-1}^0 f(x) dx$  có giá trị bằng:

- A.  $I = 1$       B.  $I = 0$       C.  $I = -2$       D.  $I = 2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

**Câu 3:** Tích phân  $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$  có giá trị bằng:

- A.  $I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$       B.  $I = \frac{\sqrt{2}}{3}$   
 C.  $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$       D.  $I = \frac{2}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

**Câu 4:** Cho tích phân  $I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$  nếu đặt

$t = \sqrt{x+1}$  thì  $I = \int_1^2 f(t) dt$  trong đó:

- A.  $f(t) = t^2 + t$       B.  $f(t) = 2t^2 + 2t$   
 C.  $f(t) = t^2 - t$       D.  $f(t) = 2t^2 - 2t$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

**Câu 5:** Tính tích phân  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

- A.  $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$   
 C.  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Cái Bè)

**Câu 6:** Cho  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$ . Tìm giá trị của

$a$  là:

- A. 3      B. 2      C. 4      D. 6

(Trích đề thi thử THPT Cái Bè)

**Câu 7:** Tích phân  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$  bằng:

- A.  $\frac{1}{4} - \ln \sqrt{2}$       B.  $-\frac{1}{4} - \ln \sqrt{2}$   
 C.  $\frac{1}{4} + \ln \sqrt{2}$       D.  $-\frac{1}{4} + \ln \sqrt{2}$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

**Câu 8:** Tích phân  $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$  bằng:

- A.  $\frac{e-1}{2}$       B.  $\frac{e+1}{2e}$       C.  $\frac{e+1}{2}$       D.  $\frac{e-1}{2e}$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

**Câu 9:** Tính tích phân:  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

- A.  $\frac{1}{6} - \ln 2$       B.  $2 \ln 2 - \frac{5}{3}$   
 C.  $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$       D.  $\ln 2 - \frac{1}{6}$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

**Câu 10:** Giá trị dương  $a$  sao cho:

$$\int_0^a \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} dx = \frac{a^2}{2} + a + \ln 3 \text{ là:}$$

- A. 5      B. 4      C. 3      D. 2

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

**Câu 11:** Giả sử  $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$ . Giá trị của  $c$  là:

- A. 9      B. 3      C. 81      D. 8

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

**Câu 12:** Tích phân  $I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$  có giá trị là:

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{8}$       C.  $-\frac{1}{8}$       D.  $\frac{1}{4}$

(Trích đề thi thử THPT Diệu Hiền)

**Câu 13.** Giả sử  $\int_{-1}^1 f(t)dt = 5$  và  $\int_{-1}^3 f(r)dr = 6$ . Tính

$$I = \int_1^3 f(u)du.$$

- A.  $I = 4$       B.  $I = 3$       C.  $I = 2$       D.  $I = 1$

(Trích đề thi thử Sở GD – ĐT Phú Thọ)

**Câu 14.** Tính tích phân  $I = \int_0^\pi |\cos x| dx$ .

- A.  $I = 0$       B.  $I = 1$       C.  $I = 2$       D.  $I = 3$

(Trích đề thi thử Sở GD – ĐT Phú Thọ)

**Câu 15.** Cho biết  $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos(\pi x)$ . Tính  $f(4)$ .

- A.  $f(4) = 2\sqrt{3}$       B.  $f(4) = -1$   
C.  $f(4) = \frac{1}{2}$       D.  $f(4) = \sqrt[3]{12}$

(Trích đề thi thử Sở GD – ĐT Phú Thọ)

**Câu 16.** Đẳng thức  $\int_0^a \cos(x+a^2)dx = \sin a$  xảy ra nếu:

- A.  $a = \pi$       B.  $a = \sqrt{\pi}$   
C.  $a = \sqrt{3\pi}$       D.  $a = \sqrt{2\pi}$

(Trích đề thi thử Sở GD – ĐT Phú Thọ)

**Câu 17:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$ .

- A.  $I = 3$       B.  $I = 2$       C.  $I = 1$       D.  $I = -1$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

**Câu 18.** Tính tích phân  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

- A.  $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ ;      B.  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$   
C.  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

**Câu 19.** Nếu  $\int_0^a x e^x dx = 1$  thì giá trị của  $a$  bằng:

- A. 0      B. 1      C. 2      D.  $e$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN)

**Câu 20.** Nếu  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$  thì  $n$  bằng:

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN)

**Câu 21.** Giá trị của  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x} dx$  bằng:

- A. -1      B. 1      C.  $e$       D. 0

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN)

**Câu 22.** Tích phân  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  có giá trị bằng

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{5}{3}$       C.  $\frac{8}{3}$       D.  $\frac{10}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng)

**Câu 23.** Tích phân  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x dx$  có giá trị bằng

- A.  $-\ln \sqrt{2}$       B.  $\ln 2$       C.  $\ln 4$       D.  $\ln \sqrt{2}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng)

**Câu 24.** Tích phân  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  có giá trị bằng:

- A.  $\frac{e-1}{2}$       B.  $\frac{2e+1}{2e}$       C.  $-\frac{e-1}{2}$       D.  $\frac{e-1}{2e}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng)

**Câu 25.** Tích phân  $I = \int_1^e 2x(1 - \ln x) dx$  bằng:

- A.  $\frac{e^2-1}{2}$       B.  $\frac{e^2}{2}$       C.  $\frac{e^2-3}{4}$       D.  $\frac{e^2-3}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

**Câu 26:** Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm

của hàm số  $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$  ?

- A.  $\frac{x^2+x-1}{x+1}$       B.  $\frac{x^2-x-1}{x+1}$   
C.  $\frac{x^2+x+1}{x+1}$       D.  $\frac{x^2}{x+1}$

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

**Câu 27:** Nếu  $\int_a^d f(x)dx = 5$ ;  $\int_a^d f(x)dx = 2$  với  $a < d < b$  thì

$\int_a^b f(x)dx$  bằng:

- A. -2      B. 7      C. 0      D. 3

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

### 3. Ứng dụng của tích phân trong hình học.

**Câu 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^2 + 2$  và  $y = 3x$ :

- A. 1      B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{6}$       D.  $\frac{1}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

**Câu 2:** Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = (2-x)e^{\frac{x}{2}}$  và hai trục tọa độ là:

- A.  $2e^2 - 10$       B.  $2e^2 + 10$   
C.  $\pi(2e^2 - 10)$       D.  $\pi(2e^2 + 10)$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

**Câu 3:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  và các trục tọa độ. Chọn kết quả đúng nhất?

- A.  $3\ln 6$       B.  $3\ln \frac{3}{2}$   
C.  $3\ln \frac{3}{2} - 2$       D.  $3\ln \frac{3}{2} - 1$

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

**Câu 4:** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ . Tính diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  trục tung, trục hoành và đường thẳng  $x = 3$

- A.  $S = \frac{10}{4}$       B.  $S = \frac{12}{4}$   
C.  $S = \frac{11}{4}$       D.  $S = \frac{9}{4}$

(Trích đề thi thử GD&ĐT Phú Thọ)

**Câu 5:** Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x = 3$ , biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $0 \leq x \leq 3$ ) là một hình chữ nhật có hai kích thước là  $x$  và  $2\sqrt{9-x^2}$ .

- A. 18      B. 19      C. 20      D. 21

(Trích đề thi thử GD&ĐT Phú Thọ)

**Câu 6:** Tính diện tích hình phẳng  $S$  giới hạn bởi đồ thị các hàm số  $y = 2^x$  và  $y = 3 - x$ , trục hoành và trục tung.

- A.  $S = 2 + \frac{1}{\ln 2}$       B.  $S = 2$   
C.  $S = 2 - \frac{1}{\ln 2}$       D.  $S = 4$

(Trích đề thi thử GD&ĐT Phú Thọ)

**Câu 7:** Tính thể tích của tứ diện đều có cạnh bằng  $a$ .

- A.  $V = \frac{a^3}{12}$       B.  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$   
C.  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$       D.  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

(Trích đề thi thử GD&ĐT Phú Thọ)

**Câu 8:** Công thức tính diện tích  $S$  của hình thang cong giới hạn bởi hai đồ thị  $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ , ( $a < b$ )

- A.  $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$   
B.  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$   
C.  $S = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$   
D.  $S = \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

**Câu 9:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số  $y = -2x^3 + x^2 + x + 5$  và đồ thị (C') của hàm số  $y = x^2 - x + 5$  bằng:

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

**Câu 10:** Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = (x-1)e^x, y = x^2 - 1$ .

- A.  $S = e + \frac{8}{3}$       B.  $S = e + \frac{2}{3}$   
C.  $S = e - \frac{2}{3}$       D.  $S = e - \frac{8}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN - HN)

**Câu 11:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = (x-1)e^{2x}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0, x = 2$ .

- A.  $\frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{2} - \frac{3}{4}$       B.  $\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{3}{4}$   
C.  $\frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{4}$       D.  $\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} + \frac{3}{4}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN - HN)

**Câu 12:** Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số  $y = x^2 - 2x$  và  $y = -x^2$  quay quanh trục  $Ox$ .

- A.  $\frac{4}{3}$       B.  $\frac{4\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{1}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN - HN)

**Lưu ý:** Lời giải chi tiết sẽ được gửi vào 23h ngày 25/02/2017. Đề nghị các bạn đăng ký tại <http://ngochuyenlb.gr8.com/> để được gửi vào đúng thời gian trên.

Độc thêm

## Bổ sung một số dạng về nguyên hàm – tích phân

### 1. Tích phân và nguyên hàm một số hàm lượng giác

**a. Dạng  $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$  trong đó  $m, n$  là các số tự nhiên.**

**Trường hợp 1:** Trong hai số  $m, n$  có ít nhất một số lẻ.

|                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Lũy thừa của $\cos x$ là số lẻ, $n = 2k + 1$ thì đổi biến<br>$u = \sin x$                                                                           | Lũy thừa của $\sin x$ là số lẻ, $m = 2k + 1$ thì<br>đổi biến $u = \cos x$                                                                                    |
| $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx$ $= \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cdot (\sin x)' dx = \int u^m (1 - u^2)^k du$ | $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int \cos^n x (\sin^2 x)^k \sin x dx$ $= -\int \cos^n x (1 - \cos^2 x)^k (\cos x)' dx$ $= -\int (1 - u^2)^k \cdot u^n du$ |

**Ví dụ 1:** Tìm  $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx$ .

**Lời giải**

Vì lũy thừa của  $\sin x$  là số lẻ nên ta đổi biến  $u = \cos x$ .

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx &= -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \cos^2 x \cdot (\cos x)' dx \\ &= -\int (1 - u^2)^2 \cdot u^2 du = \int (2u^4 - u^2 - u^6) du = \frac{2u^5}{5} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{2 \cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

**Trường hợp 2:** Cả hai số  $m, n$  đều là số chẵn: Ta sử dụng công thức hạ bậc để giảm một nửa số mũ của  $\sin x; \cos x$ , để làm bài toán trở nên đơn giản hơn.

**b. Dạng  $\int \sin mx \cdot \cos n x dx$ ,  $\int \sin mx \cdot \sin n x dx$ ,  $\int \cos mx \cdot \cos n x dx$ .**

Ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng trong lượng giác.

**c. Dạng  $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx$  trong đó  $m, n$  là các số nguyên.**

|                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Lũy thừa của $\cos x$ là số nguyên dương chẵn,<br>$n = 2k$ thì ta đổi biến $u = \tan x$                                                                                                                                                                                | Lũy thừa của $\tan x$ là số nguyên dương lẻ,<br>$m = 2k + 1$ thì ta đổi biến $u = \frac{1}{\cos x}$                                                                                                                                                                                         |
| $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx = \int \frac{\tan^m x}{\cos^{2k-2} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ $= \int \frac{\tan^m x}{(\cos^2 x)^{k-1}} \cdot (\tan x)' dx$ $= \int \tan^m x \cdot (1 + \tan^2 x)^{k-1} \cdot d(\tan x)$ $= \int u^m \cdot (1 + u^2)^{k-1} du$ | <p>Khi đó <math>u' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}</math>, do đó</p> $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx = \int \frac{\tan^{2k} x}{\cos^{n-1} x} \cdot \frac{\tan x}{\cos x} dx$ $= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)^k \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ $= \int (u^2 - 1)^k u^{n-1} du$ |

**Ví dụ 2:** Tìm nguyên hàm

a.  $\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x} dx$

b.  $\int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x} dx.$

**Lời giải**

a. Do lũy thừa của  $\cos x$  là số nguyên dương chẵn nên đặt  $u = \tan x$ . Từ công thức tổng quát đã chứng minh ở trên ta có

$$\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x} dx = \int u^6 \cdot (1 + u^2)^1 du = \frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

b. Do lũy thừa của  $\tan x$  là một số lẻ nên ta đặt  $u = \frac{1}{\cos x}$ , do vậy, từ công thức tổng quát chứng minh ở trên ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x} dx &= \int (u^2 - 1)^2 \cdot u^6 du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{1}{11 \cos^{11} x} - \frac{2}{9 \cos^9 x} + \frac{1}{\cos^7 x} + C. \end{aligned}$$

## 2. Đổi biến lượng giác

Khi nguyên hàm, tích phân của các hàm số mà biểu thức của nó có chứa các dạng  $\sqrt{x^2 + a^2}$ ,  $\sqrt{x^2 - a^2}$ ,  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , thì ta có cách biến đổi lượng giác như sau:

| Biểu thức có chứa                                    | Đổi biến                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sqrt{x^2 + a^2}$                                   | $x =  a  \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$<br>Hoặc $x =  a  \cot t, t \in (0; \pi)$                                                                        |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$                                   | $x = \frac{ a }{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$<br>Hoặc $x = \frac{ a }{\cos t}, t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ |
| $\sqrt{a^2 - x^2}$                                   | $x =  a  \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$<br>Hoặc $x =  a  \cos t, t \in [0; \pi]$                                                                        |
| $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ | $x = a \cos 2t$                                                                                                                                                                    |
| $\sqrt{(x-a)(b-x)}$                                  | $x = a + (b-a) \sin^2 t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$                                                                                                                      |

## 3. Nguyên hàm và tích phân của hàm phân thức hữu tỉ

Cho hàm số  $y = f(x)$  có dạng  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  trong đó  $P$  và  $Q$  là các đa thức, và  $P$  không chia hết cho  $Q$ .

Hàm  $f$  được gọi là hàm **phân thức hữu tỉ thực sự** nếu  $\deg(P) < \deg(Q)$ .

**STUDY TIP:** Kí hiệu  $\deg(P(x))$  là bậc của đa thức  $P(x)$ .

Trong các bài toán tìm nguyên hàm và tích phân của hàm phân thức hữu tỉ, nếu  $f(x)$  chưa phải là hàm phân thức hữu tỉ thực sự thì ta thực hiện chia đa thức tử số cho đa thức mẫu số để được:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = S(x) + h(x),$$

Khi đó,  $h(x)$  sẽ là hàm phân thức hữu tỉ thực sự.

**Định lý:** Một phân thức thực sự luôn phân tích được thành tổng các phân thức đơn giản hơn.

Đó là các biểu thức có dạng  $\frac{1}{x-a}$ ;  $\frac{1}{(x-a)^k}$ ;  $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ ;  $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$  là các

hàm số có thể tìm nguyên hàm một cách dễ dàng. Để tách được phân thức ta dùng phương pháp hệ số bất định.

**a. Trường hợp phương trình  $Q(x)=0$  không có nghiệm phức và các nghiệm đều là nghiệm đơn.**

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k)$$

(Số nhân tử chính bằng bậc của đa thức  $Q(x)$ ).

Trong trường hợp này,  $g$  có thể biểu diễn dưới dạng

$$g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Sau khi biểu diễn được  $g(x)$  về dạng này, bài toán trở thành bài toán cơ bản.

**Ví dụ 3:** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-3x+2}$  là

**A.**  $F(x) = 4\ln|x-2| + \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$

**B.**  $F(x) = 4\ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$

**C.**  $F(x) = -4\ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$

**D.**  $F(x) = 4\ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$

Phân tích

**Đáp án B.**

$$\text{Ta có } \frac{4x-3}{x^2-3x+2} = \frac{4x-3}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}.$$

Khi đó  $(A+B)x - 2A - B = 4x - 3$ , đồng nhất hệ số thì ta được

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=5 \end{cases}$$

Lời giải

**Kiểm tra khả năng vận dụng từ ví dụ 3:**

Tìm

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int \frac{4x-3}{x^2-3x+2} dx &= \int \left( \frac{-1}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C \\ &= 4\ln|x-2| + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C = 4\ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C. \end{aligned}$$

Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x| + \frac{1}{10} \cdot \ln|2x-1| - \frac{1}{10} \cdot \ln|x+2| + D$$

**Ví dụ 4:** Biết  $I = \int_4^5 \frac{x^3 + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5 + d \ln 6 + e \ln 7$ . Khi đó

$6a + 3b + 6c + 3d + 2e$  có giá trị là

- A. -16                      B.  $-\frac{19}{6}$                       C. 16                      D.  $\frac{19}{6}$

**Phân tích**

**Đáp án A.**

$$\text{Ta có } \frac{x^3 + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{x^3 + 2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3 + 2 &= A(x^2 - 4)(x+1) + B(x^2 - 1)(x+2) \\ &+ C(x^2 - 4)(x-1) + D(x^2 - 1)(x-2), \forall x \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào } (*) \text{ ta có } A = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Thay } x=2 \text{ vào } (*) \text{ ta có } B = \frac{5}{6}$$

$$\text{Thay } x=-1 \text{ vào } (*) \text{ ta có } C = \frac{1}{6}$$

$$\text{Thay } x=-2 \text{ vào } (*) \text{ ta có } D = \frac{1}{2}$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_{16} &= \int_4^5 \frac{x^3 + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_4^5 \frac{dx}{(x-1)} + \frac{5}{6} \int_4^5 \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{6} \int_4^5 \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int_4^5 \frac{dx}{x+2} \\ &= \left( -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{5}{6} \ln|x-2| + \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| \right) \Big|_4^5 \\ &= -\ln 2 + \frac{5}{6} \ln 3 + \frac{1}{6} \ln 6 + \frac{1}{2} \ln 7 - \left( -\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{5}{6} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 6 \right) \\ &= -\frac{11}{6} \ln 2 - \frac{4}{3} \ln 3 - \frac{1}{6} \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 6 + \frac{1}{2} \ln 7 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } 6a + 3b + 6c + 3d + 2e = -11 - 4 - 1 - 1 + 1 = -16.$$

**b. Trường hợp  $Q(x)=0$  không có nghiệm phức, nhưng có nghiệm thực là nghiệm bội.**

Nếu phương trình  $Q(x)=0$  có các nghiệm thực  $a_1; a_2; \dots; a_n$  trong đó  $a_1$  là

nghiệm bội  $k$  thì ta phân tích  $g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$  về dạng

**STUDY TIP:** đây là dạng toán tích phân chống casio đã gặp trong đề minh họa lần 2.

$$g(x) = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{x-a_3} + \dots + \frac{B_{n+1}}{x-a_n}$$

Trên đây là phần lý thuyết khá phức tạp, ta đến với bài tập ví dụ đơn giản sau:

**Ví dụ 5:** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$  là

**A.**  $F(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + C$

**B.**  $F(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$

**C.**  $F(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4(1-x)^4} + C$

**D.**  $F(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{4(1-x)^4} + C$

### Phân tích

Nhận thấy  $x=1$  là nghiệm bội ba của phương trình  $(x-1)^3=0$ , do đó ta biến đổi

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^3} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} = \frac{A(x^2-2x+1)+B(1-x)+C}{(1-x)^3} \\ &= \frac{Ax^2+(-2A-B)x+A+B+C}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Từ đây ta có  $\begin{cases} A=0 \\ -2A-B=2 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-2 \\ C=2 \end{cases}$

### Lời giải

Ta có  $\int \frac{2x}{(1-x)^3} dx = \int \left( \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$

Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng ví dụ 4:

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} dx = \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C.$$

**TỔNG QUÁT:** Việc tính nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ thực sự được đưa về các dạng nguyên hàm sau:

**1.**  $\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$

**2.**  $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Kiểm tra khả năng vận dụng từ ví dụ 4:

Tìm

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} dx$$

## 5. Bảng một số nguyên hàm thường gặp

$$1) \int k \cdot dx = k \cdot x + C$$

$$3) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$5) \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$$

$$7) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9) \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$11) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$13) \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$$

$$15) \int e^x dx = e^x + C$$

$$17) \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$19) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$21) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$23) \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$25) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$27) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$29) \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$6) \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

$$8) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10) \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$12) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$14) \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$$

$$16) \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$18) \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$20) \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$$

$$22) \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$24) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$26) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

$$28) \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

### III. Ứng dụng của nguyên hàm, tích phân trong thực tế.

#### 1. Dạng bài toán về chuyển động.

**Ví dụ 1:** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10 \text{ m/s}$  thì tài xế đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -5t + 10 \text{ (m/s)}$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A.  $0,2 \text{ m}$       B.  $2 \text{ m}$       C.  $10 \text{ m}$       D.  $20 \text{ m}$

(Trích đề minh họa lần I- BGD&ĐT)

#### Lời giải

#### **Đáp án C.**

Nguyên hàm của hàm vận tốc chính là quãng đường  $s(t)$  mà ô tô đi được sau quãng đường  $t$  giây kể từ lúc tài xế đạp phanh xe.

Vào thời điểm người lái xe bắt đầu đạp phanh ứng với  $t = 0$ .

Thời điểm ô tô dừng lại ứng với  $t_1$ , khi đó  $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2$ .

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại quãng đường ô tô đi được là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left( -\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10 \text{ m}.$$

**Ví dụ 2:** Một chiếc ô tô đang đi trên đường với vận tốc  $v(t) = 2\sqrt{t} \text{ (m/s)}$  ( $0 \leq t \leq 30$ ). Giả sử tại thời điểm  $t = 0$  thì  $s = 0$ . Phương trình thể hiện quãng đường theo thời gian ô tô đi được là

- A.  $s = \frac{4}{3}\sqrt{t^3} \text{ (m)}$       B.  $s = 2\sqrt{t} \text{ (m)}$       C.  $s = \frac{4}{3}t^3 \text{ (m)}$       D.  $s = 2t \text{ (m)}$

#### Lời giải

#### **Đáp án A**

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có  $s(t) = \int 2\sqrt{t} dt = 2 \int t^{\frac{1}{2}} dt = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{t^3} \text{ (m)}$

**Ví dụ 3:** Một vật chuyển động với vận tốc đầu bằng 0, vận tốc biến đổi theo quy luật, và có gia tốc  $a = 0,3 \text{ (m/s}^2\text{)}$ . Xác định quãng đường vật đó đi được trong 40 phút đầu tiên.

- A.  $12000 \text{ m}$       B.  $240 \text{ m}$       C.  $864000 \text{ m}$       D.  $3200 \text{ m}$

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

**Phân tích:** Nhận thấy bài toán này khác với hai ví dụ trên ở chỗ bài toán cho biểu thức gia tốc mà không cho biểu thức vận tốc, ở đây ta có thêm một kiến thức như sau:

Biểu thức gia tốc là đạo hàm của biểu thức vận tốc, đến đây, kết hợp với 2 ví dụ đầu ta kết luận: “Biểu thức gia tốc là đạo hàm cấp một của biểu thức vận tốc, và là đạo hàm cấp hai của biểu thức quãng đường”. Từ đây ta có lời giải như sau:

#### Lời giải

Ta có  $v(t) = \int 0,3 dt = 0,3t$  (do ban đầu vận tốc của vật bằng 0).

Vậy quãng đường vật đi được trong 40 phút đầu tiên là

$$\int_0^{40.60} 0,3t dt = \frac{0,3}{2} \cdot t^2 \Big|_0^{2400} = 864000 \text{ m}$$

#### STUDY TIP:

Hàm số thể hiện quãng đường vật đi được tính theo thời gian là biểu thức nguyên hàm của hàm số vận tốc.

#### STUDY TIP:

Biểu thức gia tốc là đạo hàm cấp một của biểu thức vận tốc, và là đạo hàm cấp hai của biểu thức quãng đường

## Bài tập rèn luyện kỹ năng

**Câu 1:** Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức  $v(t) = 3t + 2$ , thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị  $m$ . Biết tại thời điểm  $t = 2s$  thì vật đi được quãng đường là  $10m$ . Hỏi tại thời điểm  $t = 30s$  thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

- A.  $1410m$  B.  $1140m$  C.  $300m$  D.  $240m$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

**Câu 2:** Một tàu lửa đang chạy với vận tốc  $200 \text{ m/s}$  thì người lái tàu đạp phanh; từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 200 - 20t \text{ (m/s)}$ .

Trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi thời gian khi tàu đi được quãng đường  $750 \text{ m}$  (kể từ lúc bắt đầu đạp phanh) ít hơn bao nhiêu giây so với lúc tàu dừng hẳn?

- A.  $5 \text{ s}$  B.  $8 \text{ s}$  C.  $15 \text{ s}$  D.  $10 \text{ s}$

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Văn Thụ)

**Câu 3:** Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi  $t = 0(s)$  chuyển động thẳng với vận tốc  $v(t) = t(5 - t) \text{ (m/s)}$ .

Tìm quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng lại.

- A.  $\frac{125}{12}(m)$  B.  $\frac{125}{9}(m)$  C.  $\frac{125}{3}(m)$  D.  $\frac{125}{6}(m)$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh lần 2)

**Câu 4:** Một người đi xe đạp dự định trong buổi sáng đi hết quãng đường  $60\text{km}$ . Khi đi được  $12$  quãng đường, anh ta thấy vận tốc của mình chỉ bằng  $23$  vận tốc dự định, anh ta bèn đạp nhanh hơn vận tốc dự định  $3\text{km/h}$ , đến nơi anh ta vẫn chậm mất  $45$  phút. Hỏi vận tốc dự định của người đi xe đạp là bao nhiêu?

- A.  $5\text{km/h}$  B.  $12\text{km/h}$  C.  $7\text{km/h}$  D.  $18\text{km/h}$

(Trích đề thi thử THPT TVB)

**Câu 5:** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10 \text{ m/s}$  thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v = -5t + 15$

$(\text{m/s})$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A.  $20m$  B.  $10 \text{ m}$  C.  $22,5 \text{ m}$  D.  $5 \text{ m}$

**Câu 6:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $S = 2t^3 - t + 1$ , trong đó  $t$  được tính bằng giây và  $S$  được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi  $t = 2s$  là:

- A.  $63\text{m/s}^2$  B.  $64\text{m/s}^2$  C.  $23\text{m/s}^2$  D.  $24\text{m/s}^2$

(Trích đề thi thử THPT Ngọc Tộ)

**Câu 7:** Cho một vật chuyển động có phương trình là:

$$s = 2t^3 - \frac{2}{t} + 3 \text{ (t được tính bằng giây, S tính bằng mét)}.$$

Vận tốc của chuyển động thẳng  $t = 2s$  là:

- A.  $3$  B.  $\frac{49}{2}$  C.  $12$  D.  $\frac{47}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Ngọc Tộ)

**Câu 8:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $S = 2t^4 - t + 1$ , trong đó  $t$  được tính bằng giây và  $S$  được tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi  $t = 1s$  là:

- A.  $24\text{m/s}$  B.  $23\text{m/s}$  C.  $7\text{m/s}$  D.  $8\text{m/s}$

(Trích đề thi thử THPT Ngọc Tộ)

**Câu 9:** Một chiếc xe ô tô sẽ chạy trên đường với vận tốc tăng dần đều với vận tốc  $v = 10t \text{ (m/s)}$   $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu chạy. Hỏi quãng đường xe phải đi là bao nhiêu từ lúc xe bắt đầu chạy đến khi đạt vận tốc  $20 \text{ (m/s)}$ ?

- A.  $10m$  B.  $20m$  C.  $30m$  D.  $40m$

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

**Lưu ý:** Lời giải chi tiết sẽ được gửi vào 23h ngày 25/02/2017. Đề nghị các bạn đăng ký tại <http://ngochuyenlb.gr8.com/> để được gửi vào đúng thời gian trên.