

Tài liệu được biên soạn trong thời gian ngắn nên không tránh khỏi những sai sót. Mong quý thầy cô và các em học sinh thông cảm và góp ý những chỗ sai để chỉnh sửa lại cho tài liệu được hoàn chỉnh. Chân thành cảm ơn!

CHƯƠNG III. NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

PHẦN 1. NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

- Nhắc lại : Vi phân của hàm số $y = f(x)$ là: $dy = df(x) = f'(x)dx$
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn của $\mathbb{R}$). Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in K$
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ gọi là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Kí hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Chú ý: $\left(\int f(x)dx \right)' = [F(x) + C]' = f(x)$

2. Tính chất

$$\bullet \int f'(x)dx = f(x) + C \quad \bullet \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0) \quad \bullet \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Chú ý: $\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$; $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$.

3. Nguyên hàm của một số hàm thường gặp

• $\int 0dx = C$ • $\int dx = x + C$ • $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$ • $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ • $\int e^x dx = e^x + C$	• $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ • $\int \cos x dx = \sin x + C$ • $\int \sin x dx = -\cos x + C$ • $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ • $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
• $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$ • $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$	• $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, \quad (a \neq 0)$ • $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$

4. Phương pháp tính nguyên hàm

a) Phương pháp đổi biến số: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

a) Phương pháp nguyên hàm từng phần: Nếu u và v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Loại 1 : Khái niệm nguyên hàm

- Nhắc lại : Vi phân của hàm số $y = f(x)$ là: $dy = df(x) = f'(x)dx$
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn của $\mathbb{R}$). Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in K$
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ gọi là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Kí hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Chú ý: $\left(\int f(x)dx \right)' = [F(x) + C]' = f(x)$

Câu 1. Hàm số $F(x) = x^5 + 5x^3 - x + 2$ là nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 1$.

B. $f(x) = 5x^4 + 15x^2 - 1$.

C. $f(x) = \frac{x^5}{6} + 5\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x$.

D. $f(x) = 5x^4 + 15x^2 + 1$.

Câu 2. Hàm số $F(x) = \ln x + 5$ là nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = \frac{1}{x+5}$.

B. $f(x) = x \ln x + 4x$.

C. $f(x) = \frac{1}{x}$.

D. $f(x) = \frac{1}{x} + 5x + C$.

Câu 3. Hàm số $F(x) = x^5 + 5x^3 - x + 2$ là nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 1$.

B. $f(x) = 5x^4 + 15x^2 - 1$.

C. $f(x) = \frac{x^5}{6} + 5\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x$.

D. $f(x) = 5x^4 + 15x^2 + 1$.

Câu 4. Hàm số $F(x) = e^{3x+2} + \sin 5x$ là nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = (3x+2)e^{3x+1} - 5\cos 5x$.

B. $f(x) = 3e^{3x+2} \ln 3 + 5\cos 5x$.

C. $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2} - \frac{1}{5}\cos 5x + C$.

D. $f(x) = 3e^{3x+2} + 5\cos 5x$.

Câu 5. Hàm số $F(x) = 2 \ln x + \ln(1 + \cos 3x)$ là nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3 \sin 3x}{1 + \cos 3x}$.

B. $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\sin 3x}{1 + \cos 3x}$.

C. $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3 \sin 3x}{1 + \cos 3x}$.

D. $f(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 3x}$.

Câu 6. Hàm số $F(x) = 3^{5x+1} - e^{-x} + 4$ là nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = 5 \cdot 3^{5x+1} \cdot \ln 3 + e^{-x}$.

B. $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 3^{5x+1} \cdot \ln 3 + e^{-x}$.

C. $f(x) = 5 \cdot 3^{5x+1} - e^{-x}$.

D. $f(x) = 5 \cdot 3^{5x+1} \cdot \ln 3 + e^{-x} + C$.

Câu 7. Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$?

A. $\frac{x^2 + x - 1}{x-1}$.

B. $\frac{x^2 - x + 1}{x-1}$.

C. $\frac{x^2}{x-1}$.

D. $\frac{x^2 + x + 1}{x-1}$.

Câu 8. Tìm m để $F(x) = mx^2 + (2m+1)x + 5$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x + 5$?

A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 4$.

Câu 9. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + x - 3)e^x$?

A. $a = 1, b = -1, c = 2$.

B. $a = 1, b = -1, c = -2$.

C. $a = 1, b = 1, c = -2$.

D. $a = 1, b = 3, c = -2$.

Loại 2 : Vận dụng bảng nguyên hàm và tính chất**1) Tính chất**

$$\bullet \int f'(x)dx = f(x) + C \quad \bullet \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0) \quad \bullet \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\text{Chú ý: } \int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx; \quad \int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$$

2) Bảng nguyên hàm: $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$\int f(x)dx = \frac{1}{a}F(x) + C$	$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$
$\int 0dx = C$ $\int dx = x + C, \int kdx = kx + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, (x \neq 0)$ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, (x \neq 0)$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$ $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C, (x \neq -b/a)$ $\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C, (x \neq -b/a)$ $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ $\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$ $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$ $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + C$ $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + C$

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + x - 3$ là?

A. $F(x) = 6x + 1 + C$.

B. $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + C$.

C. $F(x) = 3x^3 + x^2 - 3x + C$.

D. $F(x) = x^3 + x^2 - 3x + C$.

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ là ?

A. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 - 3x - C$.

B. $F(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x - C$.

C. $F(x) = 9x^2 - 10x + 2 - C$.

D. $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + C$.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x-1)$ là ?

A. $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - x \right) + C$.

B. $F(x) = 2x + C$.

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + C$.

D. $F(x) = x^2 - x + C$.

Câu 13. $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)^2$. Chọn đáp án sai?

A. $F(x) = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{6}(2x+1)^3 + C$.

C. $F(x) = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x - 5C$.

D. $F(x) = (x^2 + x)^2 + C$.

Chú ý: $\int \frac{dx}{(ax+b)^\alpha}$

• Nếu $\alpha = 1$ thì $\int \frac{dx}{(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$ (đã có trong bảng nguyên hàm).

• Nếu $\alpha \neq 1$ thì $\int \frac{dx}{(ax+b)^\alpha} = \int (ax+b)^{-\alpha} dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + C$.

$\alpha = 2$ thì có thể áp dụng nhanh công thức trong bảng nguyên hàm $\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x^2}$ là ?

A. $F(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} + C$.

B. $F(x) = 2 \ln x + 3 \ln(x+1) - \frac{1}{x} + C$.

C. $F(x) = 2 \ln x + 3 \ln|x+1| - \frac{1}{x} + C$.

D. $F(x) = 2x \ln x + 3x \ln|x+1| - \frac{1}{x} + C$.

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3} + \frac{3}{(3x-2)^2}$ là ?

A. $F(x) = \frac{x}{x^2+3x} - \frac{3x}{(3x-2)^3} + C$.

B. $F(x) = \ln|2x+3| - \frac{3}{3x-2} + C$.

C. $F(x) = \frac{x}{x^2+3x} - \frac{27}{(3x-2)^3} + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+3| - \frac{1}{3x-2} + C$.

Câu 16. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x}$ là ?

A. $F(x) = \frac{\frac{x^2}{2} - x^2 + 3x}{\frac{x^2}{2}} + C$.

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{x^2} + C$.

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x| + C$.

D. $F(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + C$.

Câu 17. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$ là ?

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x-1| + C$.

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{2}{(x-1)^2} + C$.

C. $F(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} + C$.

D. $F(x) = (x-1)^2 + 2\ln|x-1| + C$.

Chú ý: Tìm nguyên hàm của hàm số hữu tỉ có bậc tử lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu ta thực hiện phép chia đa thức tử cho mẫu.

Câu 18. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+2}{2x-1}$ là ?

A. $F(x) = \frac{-6}{(2x-1)^2} + C$.

B. $F(x) = \frac{x+2}{x-1} + C$.

C. $F(x) = -\frac{4}{(2x-1)^2} + C$.

D. $F(x) = x + \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C$.

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2e^{2x-1} + e^{-x} + 3e^x$ là ?

A. $F(x) = 4e^{2x-1} - e^{-x} + 3e^x + C$.

B. $F(x) = 2e^{2x-1} + e^{-x} + 3e^x + C$.

C. $F(x) = e^{2x-1} + e^{-x} + 3e^x + C$.

D. $F(x) = e^{2x-1} - e^{-x} + 3e^x + C$.

Câu 20. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2.5^{2x-1} + \frac{2}{3^x} + 2^x$ là ?

A. $F(x) = 4.5^{2x-1} \cdot \ln 5 - 2.3^{-x} \cdot \ln 3 + 2^x \cdot \ln 2 + C$.

B. $F(x) = \frac{5^{2x-1}}{\ln 5} - 2 \cdot \frac{3^{-x}}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

C. $F(x) = 4 \cdot \frac{5^{2x-1}}{\ln 5} - 2 \cdot \frac{3^{-x}}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

D. $F(x) = 2 \cdot \frac{5^{2x-1}}{\ln 5} - 2 \cdot \frac{3^{-x}}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Câu 21. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 2\cos 3x + \cos(2x+1)$ là ?

A. $F(x) = \sin x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C$.

B. $F(x) = -\sin x - \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C$.

C. $F(x) = -\sin x - 6\sin 3x - 2\sin(2x+1) + C$.

D. $F(x) = \sin x + 6\sin 3x + 2\sin(2x+1) + C$.

Câu 22. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - 3\sin 3x + \sin(2x+1)$ là ?

A. $F(x) = \cos x - 9\cos 3x + 2\cos(2x+1) + C$.

B. $F(x) = -\cos x + 9\cos 3x - 2\cos(2x+1) + C$.

C. $F(x) = -\cos x + \cos 3x - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$.

D. $F(x) = \cos x - \cos 3x + \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$.

Câu 23. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x - \tan 5x$ là ?

A. $F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 5x} + C$.

B. $F(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{5}{\sin^2 5x} + C$.

C. $F(x) = \ln|\sin x| - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + C$.

D. $F(x) = -\ln|\cos x| + \frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$.

Câu 24. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x - \cot 3x$ là ?

A. $F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos^2 3x} + C$.

B. $F(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{\sin^2 3x} + C$.

C. $F(x) = \ln|\sin x| - \frac{1}{3} \ln|\sin 3x| + C.$

D. $F(x) = -\ln|\cos x| + \frac{1}{3} \ln|\cos 3x| + C.$

Câu 25. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$

B. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$

C. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C.$

D. $\int \cot^2 x dx = \cot x - x + C.$

Chú ý: $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} + C = \frac{n}{m+n} x^{\frac{n}{n}} \sqrt[n]{x^m} + C$

Câu 26. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}) dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \sqrt{x^2} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C.$

B. $\int \sqrt[5]{(2x+3)^2} dx = \frac{5}{14} (2x+3) \sqrt[5]{(2x+3)^2} + C.$

C. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{7} x \sqrt[3]{x} + C.$

D. $\int x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{3}{7} x^3 \sqrt[3]{x} + C.$

Câu 27. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\int (\cot x - 2 \tan x)^2 dx = 4 \tan x - \cot x - 9x + C.$

B. $\int (1 - \tan x)^2 dx = \tan x + 2 \ln|\cos x| + C.$

C. $\int (2 - \cot x)^2 dx = 3x - \cot x + 4 \ln|\sin x| + C.$

D. $\int (\sin x + \cos)^2 dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

Câu 28. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\int \sin 3x \cdot \cos x dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos 4x - \cos 2x \right) + C.$

B. $\int \cos 2x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + \sin x \right) + C.$

C. $\int \sin 4x \cdot \sin x dx = \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{10} \sin 5x + C.$

D. $\int \cos 3x \cdot \sin x dx = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

Câu 29. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (\sin x + 3 \cos x)^2$ là

A. $\frac{1}{3} (\sin x + 3 \cos x)^3 + C.$

B. $\frac{1}{9} (\sin x + 3 \cos x)^3 + C.$

C. $5x - \frac{3}{2} \cos 2x + 2 \sin 2x + C.$

D. $5x + \frac{3}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x + C.$

Loại 3: Phương pháp đồng nhất thức

Dạng 1: Tính $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, trong đó $P(x)$, và $Q(x)$ là các đa thức

☛ Nếu $P(x)$ có bậc nhỏ hơn $Q(x)$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)}$ được phân tích như sau:

→ TH: $Q(x) = (ax + b)(cx + d)$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d}$

→ TH: $Q(x) = (ax + b)^2$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2}$

→ TH: $Q(x) = (x - \alpha)(x^2 + px + q)$ với $\Delta = p^2 - 4q < 0$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}$

→ TH: $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)^2$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{(x - \beta)^2}$

☛ Nếu $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng $Q(x)$ thì ta chia đa thức $P(x)$ cho $Q(x)$, rồi làm tiếp như trên.

Chú ý: $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right) \Rightarrow \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C$

Dạng 2: $\int \frac{a \sin x + b \cos x}{e \sin x + f \cos x} dx$. Ta phân tích

$$\frac{a \sin x + b \cos x}{e \sin x + f \cos x} = \frac{A(e \sin x + f \cos x) + B(e \cos x - f \sin x)}{e \sin x + f \cos x}$$

Câu 30. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$. Chọn đáp án sai?

A. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C$.

B. $-\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+3}{x-2} \right| + C$.

C. $\frac{1}{5} \ln |x-2| - \frac{1}{5} \ln |x+3| + C$.

D. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+3}{x-2} \right| + C$.

Câu 31. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\int \frac{2x+3}{3x^2-4x+1} dx = \frac{5}{2} \ln |x-1| - \frac{11}{6} \ln |3x-1| + C$.

B. $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4} dx = 2 \ln |x-2| - \frac{7}{x-2} + C$.

C. $\int \frac{3}{(x+3)(x+1)} dx = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C$.

D. $\int \frac{2x}{(x-3)^3} dx = -\frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2} + C$.

Câu 32. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int \frac{\sin x + 3 \cos x}{\sin x} dx = x + 3 \ln |\sin x| + C$.

B. $\int \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{\cos x} dx = 4x + 3 \ln |\cos x| + C$.

C. $\int \frac{9 \cos x - 7 \sin x}{\sin x + \cos x} dx = 2 + 3 \ln |\sin x + 3 \cos x| + C.$

D. $\int \frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x} dx = x - \ln |\sin x + \cos x| + C.$

Loại 4: Nguyên hàm có điều kiện

Tính $G(x) = \int f(x) dx$ thỏa $G(x_0) = K$ (K là hằng số)

☛ Tính $G(x) = F(x) + C$

☛ $G(x_0) = K \Leftrightarrow F(x_0) + C = K \Leftrightarrow C = K - F(x_0) \Rightarrow G(x) = F(x) + K - F(x_0).$

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = 3 + 2x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thỏa $F(1) = 7$ thì

A. $F(x) = 3x + x^2 + 7.$

B. $F(x) = 3x + x^2 + 3.$

C. $F(x) = 3x + x^2 + 4.$

D. $F(x) = 3x + x^2 + 5.$

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = 2 - 4x + x^2 + 4x^3$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thỏa $F(0) = 5$ thì

A. $F(x) = 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4.$

B. $F(x) = 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4 + 3.$

C. $F(x) = 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4 + 2.$

D. $F(x) = 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4 + 5.$

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thỏa $F(1) = 2$ thì

A. $F(x) = 3x - 4 \ln |x| - \frac{1}{x}.$

B. $F(x) = 3x - 4 \ln |x| - \frac{1}{x} + 2.$

C. $F(x) = 3x - 4 \ln |x| - \frac{1}{x} + 1.$

D. $F(x) = 3x - 4 \ln |x| - \frac{1}{x} + 3.$

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{x - 1}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thỏa $F(2) = 5$ thì

A. $F(x) = 3x^2 - x + \ln |x - 1| - \frac{1}{x} + 2.$

B. $F(x) = 3x^2 - x + \ln |x - 1| - \frac{1}{x}.$

C. $F(x) = 3x^2 - x + \ln |x - 1| - \frac{1}{x} + 3.$

D. $F(x) = 3x^2 - x + \ln |x - 1| - \frac{1}{x} + 1.$

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = \frac{2 - x}{x^5}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thỏa $F(1) = \frac{5}{6}$. Giá trị $F(2) = ?$

A. $\frac{97}{96}.$

B. $\frac{95}{96}.$

C. 1.

D. $\frac{31}{32}.$

Câu 38. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2ax + 5bx^4$. Biết $F(1) = 2$, $F(2) = 1$, $F(-1) = 5$

A. $F(x) = \frac{91}{6}x^2 - \frac{3}{2}x^5 - \frac{35}{3}$.

B. $F(x) = \frac{91}{6}x^2 - \frac{3}{2}x^5 - 10$.

C. $F(x) = \frac{91}{6}x^2 - \frac{3}{2}x^5 - 11$.

D. $F(x) = \frac{91}{6}x^2 - \frac{3}{2}x^5 - 2$.

Câu 39. Cho $F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ thỏa $F(1) = 2$. Tính $F(0) + F(-1)$

A. -3.

B. -4.

C. 3.

D. 4.

Câu 40. Gọi $F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ thỏa $F(0) = \frac{3}{2}$. Tính $F(\frac{\pi}{2})$

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 3.

Câu 41. Tìm hàm số $f(x)$, biết là $f'(x) = 2 + 3\cos 5x$ thỏa $f(\pi) = 1$.

A. $f(x) = -15\sin 5x + \pi$.

B. $f(x) = 2x - \frac{3}{5}\sin 5x + 1 - 2\pi$.

C. $f(x) = 2x - \frac{3}{5}\sin 5x - 2\pi$.

D. $f(x) = 2x + \frac{3}{5}\sin 5x + 1 - 2\pi$.

Loại 5: Phương pháp đổi biến

◆ Dạng 1: $\int f[u(x)] u'(x) dx$.

Phương pháp:

Đặt $t = u(x)$ (vay nợ) $\Rightarrow dt = u'(x)dx \Rightarrow \int f[u(x)] u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C$

Vậy $\int f[u(x)] u'(x)dx = F[u(x)] + C$ (trả nợ)

Một số dạng hay gặp

$\int f(a + b\sin x) \cos x dx$.	Đặt $t = a + b\sin x$
$\int f(a + b\cos x) \sin x dx$.	Đặt $t = a + b\cos x$
$\int f(m + n\log_a x) \frac{1}{x} dx$.	Đặt $t = m + n\log_a x$
$f(x)$ chỉ chứa 1 lượng căn $\sqrt[n]{ax+b}$	Đặt $t = \sqrt[n]{ax+b}$
$\int f(a + b\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$.	Đặt $t = a + b\tan x$
$\int f(a + b\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx$.	Đặt $t = a + b\cot x$
$\int f(a.e^x + b)e^x dx$.	Đặt $t = a.e^x + b$

Câu 42. Chọn mệnh đề sai?

A. $\int \sqrt{1+2\sin x} \cdot \cos x dx = \frac{(1+2\sin x)\sqrt{1+2\sin x}}{3} + C.$

B. $\int (1-\sin x)^3 \cos x dx = -\frac{(1-\sin x)^4}{4} + C.$

C. $\int e^{3+5\sin x} \cdot \cos x dx = \frac{1}{5} e^{3+5\sin x} + C.$

D. $\int \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \ln|1+2\sin 2x| + C.$

Câu 43. Chọn mệnh đề sai?

A. $\int (1+\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx = -\left(\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}\right) + C.$

B. $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx = -\frac{1}{1+\cos x} + C.$

C. $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos x)^3} dx = \frac{2}{1+\cos x} - \frac{1}{(1+\cos x)^2} + C.$

D. $\int \sqrt{1+2\cos x} \sin 2x dx = \frac{(\sqrt{1+2\cos x})^3}{3} - \frac{(\sqrt{1+2\cos x})^5}{5} + C.$

Câu 44. Chọn mệnh đề sai?

A. $\int (1+5e^{-x})^5 \cdot e^{-x} dx = -\frac{(1+5e^{-x})^6}{30} + C.$

B. $\int \sqrt{1+e^x} \cdot e^{2x} dx = \frac{2}{5} (\sqrt{1+e^x})^5 - \frac{2}{3} (\sqrt{1+e^x})^3 + C.$

C. $\int \frac{5}{1+3e^x} dx = -5 \ln|3+e^{-x}| + C.$

D. $\int \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^5} dx = \frac{1}{4(1+e^x)^4} + \frac{1}{3(1+e^x)^3} + C.$

Câu 45. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int (1+\sin x)^3 \cos x dx = \frac{(1+\sin x)^4}{4} + C.$

B. $\int (1+2e^x)^5 e^x dx = \frac{(1+2e^x)^6}{12} + C.$

C. $\int \frac{1+\ln^2 x}{x} dx = x + \frac{\ln^3 x}{3} + C.$

D. $\int \sqrt{1+x^2} x dx = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} + C.$

Câu 46. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \frac{1+\tan x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \frac{\tan^2 x}{2} + C.$

B. $\int \frac{\cos x \sqrt{1+\cot^2 x}}{\sin^3 x} dx = -\frac{(\sqrt{1+\cot^2 x})^3}{3} + C.$

C. $\int e^{1+x^2} x dx = e^{1+x^2} + C.$

D. $\int \frac{1}{e^{\tan x} \cdot \cos^2 x} dx = \frac{1}{e^{\tan x}} + C.$

Câu 47. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \frac{1+x}{2} - \sqrt{1+x} + \ln|1+\sqrt{1+x}| + C$.

B. $\int (1+x)^{2016} . x dx = \frac{(1+x)^{2018}}{2018} - \frac{(1+x)^{2017}}{2017} + C$.

C. $\int \sqrt{1+x^2} . x^3 dx = \frac{(\sqrt{1+x^2})^5}{5} + \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{5} + C$.

D. $\int \sqrt[3]{3+x^3} . x^2 dx = \frac{(\sqrt[3]{3+x^3})^4}{4} + C$.

Chú ý: $\int \sin^m x . \cos^n x dx$

• Nếu m lẻ thì đặt $t = \cos x$ • Nếu n lẻ thì đặt $t = \sin x$ • Nếu m, n đều chẵn thì ta hạ bậc.

Câu 48. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int \sin^5 x . \cos x dx = \frac{\sin^6 x}{6} + C$.

B. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} + C$.

C. $\int \sin^5 x . \cos^3 x dx = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C$.

D. $\int \sin^2 x . \cos^2 x dx = \frac{1}{8} (x + \frac{1}{4} \sin 4x) + C$.

Loại 6: Phương pháp tính nguyên hàm từng phần $\int u dv = u.v - \int v du$

◆ Dạng 1: $\int P(x).Q(x)dx$. Nhưng chưa tìm được nguyên hàm

Để làm dạng này ta tạm định nghĩa các nhóm hàm như sau:

★ Nhóm hàm lôgarit $\{ \ln^n f(x), \log_a^n f(x) \}$. (Chưa có nguyên hàm)

★ Nhóm hàm đa thức: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. (Có nguyên hàm yếu)

★ Nhóm hàm lượng giác: $\{ \sin(ax+b), \cos(ax+b) \}$. (Có nguyên hàm)

★ Nhóm hàm mũ: $\{ e^{mx+n}, a^{mx+n} \}$. (Có nguyên hàm)

Phương pháp:

Nhận dạng: Hàm số dưới dấu nguyên hàm có 2 trong 4 nhóm hàm trên nhân với nhau.

Cách giải: Ưu tiên nhóm hàm chưa có nguyên hàm đặt là u , còn lại là dv . Từ đó ta có cách đặt u của các dạng nguyên hàm từng phần thường gặp tuân theo câu thần chú sau:

Nhất lô – Nhì đa – Tam lượng – Tứ mũ.

Ngoài ra các dạng: • $\int (ax+b) . \left\{ \frac{1}{\cos^2 x}, \frac{1}{\sin^2 x} \right\} dx \rightarrow$ Đặt $u = ax + b$

• $\int \frac{\log_a^n f(x)}{f(x)} dx \rightarrow$ Đặt $u = \log_a^n f(x)$

Câu 49. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

B. $\int (2x+1) \cos x dx = (2x+1) \sin x + 2 \cos x + C$.

C. $\int (3x+2) e^x dx = (3x-1) e^x + C$.

D. $\int \ln x dx = x \ln x + x + C$.

Câu 50. Mệnh đề nào sau sai?

A. $\int x^2 \sin 2x dx = \frac{-2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x + \cos 2x}{4} + C$.

B. $\int (x^2 + 2)e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 4)e^{-x} + C$.

C. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C$.

D. $\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$.

Câu 51. Cho $F(x) = \int 2x \ln(1+x^2) dx$. Khi đó:

A. $F(x) = \ln(1+x^2) + C$.

B. $F(x) = (1+x^2)[\ln(1+x^2)-1] + C$.

C. $F(x) = (1+x^2) \ln(1+x^2) + 1 + x^2 + C$.

D. Đáp án khác.

Câu 52. Cho $F(x) = \int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$. Khi đó:

A. $F(x) = \ln \frac{\sin^3 x}{\cos x} + C$.

B. $F(x) = \tan x \cdot \ln(\sin x) + x + C$.

C. $F(x) = \tan x \cdot \ln(\sin x) - x + C$.

D. Đáp án khác.

Câu 53. Cho $F(x) = \int \sin \sqrt{x} dx$. Khi đó:

A. $F(x) = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$.

B. $F(x) = 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 2 \sin \sqrt{x} + C$.

C. $F(x) = -2 \cos x + 2 \sin \sqrt{x} + C$.

D. Đáp án khác.

Câu 54. Cho $F(x) = \int \frac{x+1}{\cos^2 x} dx$. Khi đó:

A. $F(x) = -(x+1) \cot x + \ln |\sin x| + C$.

B. $F(x) = (x+1) \tan x - \ln |\cos x| + C$.

C. $F(x) = (x+1) \tan x + \ln |\cos x| + C$.

D. Đáp án khác.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ĐA																	
Câu	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
ĐA																	
Câu	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
ĐA																	
Câu	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
ĐA																	

ĐẶNG NGỌC HIỀN